Mathématiques constructives, quelques principes de travail

Introduction

Dans les chapitres précédents (cf. par exemple «De la difficulté d'être omniscient» et «Mathématiques constructives : hier et demain»), nous avons critiqué le point de vue cantorien en mathématiques, qui assimile l'infini à une notion positive, et raisonne avec les objets infinis par pure extrapolation des raisonnements concernant les objets finis, sans analyse critique de la situation ainsi créée.

Le point de vue opposé selon lequel l'infini est une notion purement négative([1]), et qui est basé sur un contenu constructif des mathématiques, peut très bien être défendu et développé, même s'il est pour le moment relativement minoritaire (plus au niveau philosophique qu'au niveau pratique, d'ailleurs).

Nous essayons dans ce chapitre d'expliquer sur quels principes de travail se fondent le mathématiques constructives. Il y a naturellement beaucoup d'opinions diverses et de nuances d'interprétation chez les mathématiciens constructifs. Néanmoins, nous nous en tenons à des explications couramment admises. En particulier, l'interprétation de la logique constructive (sa justification heuristique, qui conduit aux règles de la logique intuitionniste formalisée par Heyting) que nous donnons ici est (avec des nuances inévitables) l'interprétation BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov).

L'abondance particulière des notes de bas de page dans ce chapitre tient à ce que nous avons voulu, pour une première lecture sur un sujet certainement déroutant pour le profane([2]), ne pas entrer systèmatiquement dans trop de détails, de nuances et de polémiques ... toutes choses renvoyées systématiquement en bas de page

Le but des mathématiques est l'étude des propriétés de certains objets abstraits appelés "objets mathématiques" (les nombres entiers, les nombres réels, les fonctions continues, les espaces géométriques etc.).
Pour les mathématiques constructives, tout objet doit pouvoir être clairement défini par une construction, et seules les propriétés ayant une signification objective claire sont considérées et étudiées.

---

1 L'infini est alors simplement le non fini, ou ce qui revient au même, l'infini potentiel à la manière des mathématiques depuis Euclide jusqu'à Gauss, c.-à-d. avant la révolution cantorienne.

2 Le profane des mathématiques constructives peut très bien être un initié des mathématiques classiques, qui en général n'aura pas perçu comme tels les rites d'initiation (par exemple : veuillez faire un raisonnement par récurrence propre plutôt que de dire « et ainsi de suite » sinon ce n'est pas rigoureux et vous passez pour un attardé du 17ème siècle). La connotation religieuse, voire sectaire, des mots «profanes» et «initiés», outre sa fonction provocatrice qui peut être parfois salutaire, est en réalité surtout imposée par la pauvreté du langage usuel qui assimile toute controverse ou critique à un désordre. La vérité absolue a de plus en plus seule droit de cité, à l'image des (dés)informations télévisées de la grand-messe du 20 heures.

En général, une propriété concerne un ou plusieurs objets indéterminés, qu'on appelle des variables. En mathématiques constructives, on demande que chaque variable soit d'un type bien déterminé, clairement défini.
La discussion va donc porter sur les problèmes suivants :
- quelles sont les constructions d'objets mathématiques qui sont légitimes ?
- à quels types peuvent appartenir les "variables" ?
- quelles sont les propriétés qui ont une signification objective claire ?

1) Tous les objets doivent être construits

Ce principe, en général facile à vérifier dans la pratique, est très flou dans son énoncé général. En fait il s'agit d'un commentaire et non d'une définition.
Le principe se mord d'ailleurs la queue, dans la mesure où une construction est elle-même un objet mathématique. En outre les objets compliqués sont construits à partir d'objets simples, qui ne peuvent recevoir une définition purement mathématique.
Pour donner vie au principe «Tous les objets doivent être construits» il faut préciser ce que sont les objets de départ et ce que sont les constructions autorisées, légitimes. Comme nous ne sommes pas prophètes, nous ne pouvons que préciser les "constructions" *aujourd'hui* légitimes. Le développement des mathématiques ayant depuis longtemps réservé des surprises, il est probable que certaines constructions, non encore inventées, auront un jour une signification très claire.

1a) Les entiers naturels

Les mathématiques commencent *après* l'invention des entiers naturels. Concernant les entiers naturels, on peut faire des commentaires pertinents, mais on ne peut pas les définir.
Toute description des entiers naturels utilise le langage, qui est quelque chose d'une grande complexité. Une théorie formelle des entiers naturels utilise quant à elle un langage formel. Mais dans un langage formel, il y a au moins autant de présupposés mathématiques que dans les entiers naturels. Aussi les mathématiciens ou mathématiciennes qui pensent en toute bonne foi définir les entiers naturels grâce à une construction formelle ne font que tourner en rond. Il semble en tout cas bien étrange que ceci ait échappé aux mathématiciens du groupe Bourbaki.

Préalable à l'invention des entiers naturels, il y a le langage, et dans le langage il y a la notion d'objets identifiables, jouissant d'une certaine permanence, et distinguables les uns des autres. Le procédé consistant à construire le successeur de l'entier n est intimement lié à cette notion d'objets repérables et distinguables.

Dans la pratique, un entier naturel est repérable par une écriture[3]. Néanmoins, on peut imaginer des entiers naturels si grands qu'aucune écriture ne puisse les repérer (en supposant que l'Univers est fini).
Les mathématiques constructives ne tiennent pas compte de cette limitation concrète. Elles sont basées sur des entiers "potentiellement réalisables" et non sur les seuls entiers "concrètement réalisables".

---

3 L'école constructiviste russe héritière de Markov considère que tout objet mathématique *est* une écriture dans un alphabet donné.

On écrit " $n \in \mathbb{N}$ " comme abréviation pour " n est un entier naturel". Cela ne sous-entend pas, contrairement à l'acception "classique"(4), que les entiers naturels existent déjà une fois pour toutes, rangés entièrement dans la collection $\mathbb{N}$.

Au vu de cette première discussion sur les entiers naturels, le principe «tous les objets doivent être construits» doit donc être reformulé plus précisément comme suit «tous les objets doivent être potentiellement constructibles».
En outre, on admet, ou plutôt on constate, que les entiers naturels sont les objets d'une construction légitime fondatrice des mathématiques.

Remarque: on généralise la notation $n \in \mathbb{N}$. Si on considère comme clairement défini un certain type d'objets, on pourra écrire « x est un objet de type A » sous forme abrégée « $x \in A$ ».

1a') Autres types élémentaires

Le type "entier naturel" pourrait être considéré comme le seul type *élémentaire* des mathématiques, en ce sens qu'il n'y en a pas besoin d'autres de manière impérative pour développer l'édifice mathématique. Les autres types élémentaires peuvent être en effet codés dans les entiers naturels. Néanmoins les procédures de codage ont toujours un caractère arbitraire et déplaisant.
Il est donc naturel d'admettre d'autres types élémentaires

- les types finis explicites : un tel type est explicité par la liste des objets qui le composent.
- le type "mots sur un alphabet fini explicite". Ce type est engendré à partir des mots à une lettre (ou le mot vide, si on l'autorise, mais il faut alors le noter autrement que par lui-même) au moyen des opérations "ajout d'une lettre à la fin du mot".

Ceci est tout à fait analogue à la construction des entiers naturels à partir de 0 par l'opération "successeur".

Il y a, outre les objets fondamentaux que sont les entiers naturels, plusieurs méthodes de construction couramment utilisées. En voici trois d'entre elles.

1b) Couples d'objets

La notion de «couple d'objets» est elle aussi une notion prémathématique, du même type que la notion d'objets clairement identifiables.
Si on a donné un sens à " $x \in A$ " et à " $y \in B$ ", on définit un objet z comme étant de type $A \times B$, en disant que z est un couple ordonné formé par un objet x de type A et un objet y de type B. On écrit $z = (x,y)$, et aussi " $z \in A \times B$ ". Il faut évidemment considérer que chaque "coordonnée" du couple z peut être calculée à partir de z(5).

---

4 Classique depuis Cantor ! considérer que l'ensemble $\mathbb{N}$ "existe" est une attitude d'esprit conforme à l'idée d'un infini actuel, à caractère positif.

5 Notez qu'en théorie des ensembles classique, on définit (x,y) comme égal à $\{x,\{x,y\}\}$, ce qui est tout à fait arbitraire et contraire à l'intuition. En fait, il semble que la notion de paire non ordonnée vienne inévitablement après la notion de paire ordonnée: une paire non ordonnée est donnée par une paire ordonnée, et deux paires non ordonnées sont égales si et seulement si les paires ordonnées qui les donnent sont les mêmes ou si la seconde s'obtient par permutation des coordonnées de la première. Dans le même genre d'idée, on voit souvent défini 0 comme étant l'ensemble vide $\emptyset$ et n+1 comme étant l'ensemble des entiers qui le précèdent $\{0,1,\ldots,n\}$. Ce genre de crime contre l'intuition et le bon sens est une invention relativement récente, due à Von Neuman. Au départ, la théorie des ensembles admettait des objets initiaux non définis, des atomes, les entiers naturels, qui n'avaient pas le statut d'ensembles. C'est à partir des atomes «entiers

1c) Opérations de A vers B

Si on a donné un sens à " $x \in A$ " et à " $x \in B$ ", on dit qu'un objet F est une opération de A vers B, si F est une "méthode de calcul explicite" qui, à partir d'un objet x de type A, fournit, en un temps fini, un objet y de type B. On écrit $y = Fx$, ou $y = F(x)$.
On abrège la "définition" précédente, sous la forme

$$F \in (A \longrightarrow B)$$

ou encore sous la forme

$$F \in B^A .$$

J'ai mis "définition" entre guillemets parce qu'il ne s'agit pas d'une définition, mais d'une paraphrase. Les définitions en mathématiques ne pourront venir *qu'après* ... après qu'on ait précisé les principes de départ, qui sont susceptibles de commentaires et discussions seulement.(6)

Le fait qu'on considère comme "clair" ce que signifie " F est une méthode de calcul explicite, aboutissant en un temps fini, et qui, à partir d'un objet de type A, fournit un objet de type B " est plutôt une constatation d'un fait d'expérience : lorsqu'une mathématicienne déclare avoir trouvé une méthode explicite pour résoudre tel ou tel type de problème, les autres mathématiciens tombent assez rapidement d'accord pour affirmer, soit qu'elle a raison, soit qu'elle s'est trompée à tel endroit précis.
Et nul besoin pour cela d'être un mathématicien rallié aux thèses constructivistes. Le fait qu'un résultat est "effectif" n'est pas "formulable" en mathématiques classiques, mais tout le monde tombe néanmoins rapidement d'accord sur ce que ça *signifie* (du moins si on oublie le désaccord entre "potentiellement réalisable" et "concrètement réalisable".)
Reprenons la discussion : considérer comme "clair" ce que signifie " F est une opération de A vers B " ne sous entend pas qu'on sache définir *a priori* de quelle forme précise sont toutes les opérations de A vers B.
Par exemple toute opération de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ peut elle être ramenée à la forme d'un programme machine ?
Et si c'est le cas, est-ce que le passage de l'opération F au programme machine correspondant est toujours parfaitement clair dès la donnée de l'opération F ?
Cette discussion est reliée à ce qu'on appelle la "Thèse de Church".
La thèse de Church est que toute opération de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ qui peut être mécanisée peut l'être à travers un programme machine. Si l'expérience accumulée semble donner raison à Church, cela ne règle pas pour autant la question, différente, de savoir si toute procédure effective peut être mécanisée, et si oui, celle de savoir dans quelle mesure cette mécanisation est elle même automatique ou si elle réserve une place à l'invention.

Par ailleurs, même en ce qui concerne un programme machine censé calculer une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, reste posé le problème suivant : est-ce que l'exécution du programme aboutit bien

---

naturels» qu'étaient construits les ensembles. Un jour, quelques légiféreurs dogmatiques se sont aperçus que les atomes initiaux étaient autant d'objets "vides" (sans éléments) et pourtant deux à deux distincts, et distincts de l'ensemble vide, et ils ont décidé de réparer cette offense à l'unité des mathématiques. Une aimable plaisanterie de Von Neuman, qui introduisait d'ailleurs certaines facilités dans la théorie des ordinaux fut érigée en principe intangible. Cachez ces atomes que je ne saurais voir !

6 De manière générale, presque tout ce texte contient plutôt des "définitions-commentaires" que des définitions proprement dites.

en un temps fini à l'instruction d'arrêt pour chaque valeur de l'entrée n , ou bien le programme ne risque-t-il pas de tourner indéfiniment en rond pour certaines valeurs de l'entrée ?
Cette difficile question, considérée comme portant sur tous les programmes, ne comporte pas de réponse mécanisable. En d'autres termes, il n'existe pas de programme qui, acceptant comme entrée un texte arbitraire de programme, décide sans jamais se tromper si le programme examiné aboutit à l'instruction d'arrêt.
Dans la pratique, il y a donc les programmes pour lesquels on sait démontrer qu'ils aboutissent à l'instruction d'arrêt pour toute valeur (potentielle) de la variable n , il y a ceux pour lesquels on connaît une valeur de la variable n pour laquelle on sait démontrer que le programme tourne indéfiniment en rond, et il y a *les autres*.
Ainsi, bien que l'affirmation "ce programme aboutit à l'instruction d'arrêt pour toute valeur de la variable n " ait *un sens clair,* il n'y a pas de méthode générale pour décider si elle est "vraie" ou "fausse".

La discussion sur "les objets de type $(A \longrightarrow B)$ " n'est pas close. Les considérations précédentes pour le cas où A et B sont tous deux le type $\mathbb{N}$ n'éclairent que partiellement le problème de fond posé dans le cas général. Nous y reviendrons dans la suite.

Notez que les constructions précédemment décrites sont suffisantes pour créer des types relativement compliqués. Les nombres rationnels peuvent être vus comme des couples d'entiers naturels munis d'un signe. Les nombres réels peuvent être vus comme formant une partie de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ (la partie formée des suites de Cauchy). Pour que cette dernière construction devienne claire, il nous faudra préciser quelle est la signification constructive d'une phrase comme "telle suite de rationnels est une suite de Cauchy".

1d) Objets d'un certain type vérifiant une certaine propriété

Il s'agit ici de discuter la légitimité de la définition d'un type d'objet comme le type des nombres réels : objets d'un certain type déjà défini et qui vérifient en outre une propriété précisée.
Pour que cette méthode de définition soit vraiment une méthode de *construction,* il faut que la propriété ait un sens clair, ce qui signifie que la "vérité" de cette propriété pour tel objet déjà défini doit résulter elle-même d'une construction.
Pour revenir à notre exemple du type des nombres réels, la phrase

«Soit un nombre réel x »

doit prendre le sens d'une construction. Ca sera à peu près cela :

voici une construction qui à partir d'un entier naturel n doit aboutir à un nombre rationnel u_n
voici également une preuve qui montre que la construction précédente aboutit bien en un temps fini pour toute valeur de l'entrée n
voici enfin une preuve du fait que la suite de rationnels vérifie la propriété de Cauchy de manière tout à fait explicite

Tout ceci est une construction dans la mesure où une preuve est elle-même une construction.
Dans l'acception classique "être une suite de Cauchy" est une chose "vraie en soi" ou "fausse en soi", de toute éternité, et pour les siècles à venir(7).
En mathématiques constructives, comme on ne veut pas avoir affaire à des êtres purement idéaux sans aucune garantie sur leur existence, on est obligé de donner un sens constructif à la vérité, c.-à-d. aussi de relativiser la vérité.

---

7 Amen !

Nous arrivons là au problème crucial de "construction de la vérité", qui sera discuté plus en détail dans le paragraphe 2 : "affirmer c'est démontrer."

Mais d'abord quelques réflexions préliminaires sur la notion de "propriété ayant une signification claire".
Une telle propriété doit concerner des objets d'un type préalablement défini. Par exemple " x est un objet " ne saurait être considéré comme une propriété : son champ d'application est trop vaste. Ou alors il faudrait admettre que tous les types d'objets mathématiques possibles pourraient être définis a priori et une fois pour toutes.
Par ailleurs, toute propriété ayant un sens clair est susceptible d'être décrite dans un langage suffisamment précis. Elle peut donc être considérée elle-même comme un objet mathématique construit. Lorsqu'on "fige" un corps de mathématiques à l'intérieur d'un système formel, les objets et les propriétés envisagés sont définis "une fois pour toutes", de même que les méthodes de démonstration autorisées([8]).
Malgré l'intérêt que présentent de tels systèmes formels pour "prendre du recul" par rapport à un corps de mathématiques concrètement pratiquées (en discuter la force, l'intérêt, la cohérence), on sait (par expérience, et par le théorème d'incomplétude de Gödel) que de tels systèmes formels sont un cadre trop étroit pour développer les mathématiques : de nouvelles méthodes de démonstrations peuvent être découvertes, de nouveaux types d'objets inventés.
Ainsi, bien que toute propriété considérée dans la pratique doive être "un être mathématique construit", il semble très hasardeux de considérer que l'on pourrait définir un nouveau *type d'objet* qui serait : "les propriétés se rapportant aux objets de type A ".
Et le tour de magie (qui était aussi un tour de force, il faut le reconnaître, à, l'époque de Cantor) consistant à considérer que "l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est bien défini" a été un escamotage du problème et non sa solution([9]).

L'objet du paragraphe (2) qui suit est une discussion d'ordre général sur "construire la vérité" et a pour but d'en préciser la problématique pour les propriétés les plus couramment utilisées en mathématiques.

2) Affirmer, c'est démontrer

Dans le paragraphe précédent, on a vu que l'exigence «tous les objets doivent être construits», implique, si on veut pouvoir faire suffisamment de mathématiques, l'exigence: «il faut donner un sens constructif à la vérité». En fait, cette deuxième exigence s'impose de manière autonome, dès qu'on réfléchit sur la notion de vérité et qu'on veut donner aux mathématiques une signification concrète, objective.

---

8 La construction de la vérité prend alors un caractère quelque peu automatique et relativement déplaisant (car nous espérons tous qu'une place reste réservée à l'invention, l'humour, l'extravagance)

9 Cette phrase n'a jamais été justifiée autrement que de manière purement proclamatoire. Il est par contre intéressant de savoir que Dedekind pensait *démontrer* l'existence de l'infini actuel par la considération du caractère a priori non fini de ses pensées (par exemple, le fait de penser à la pensée précédente ne saurait être considéré que comme une pensée radicalement distincte de la précédente). Pourquoi diable ne déclarait-il pas tout de go: «considérons l'ensemble infini des entiers naturels (certainement plus clair que l'ensemble fini de ses propres pensées, passées, présentes et à venir), nous le voyons clairement en pensée, donc il existe bien en acte». Au moins, cette attitude discutable était elle celle d'un pionnier, et d'un très grand mathématicien. Que penser des rédacteurs d'un bouquin de premier cycle qui écrivent sans vergogne «on démontre en théorie des ensembles qu'il existe un ensemble infini», sinon que l'inculture est la chose la mieux partagée dans les milieux savants.

Certaines propriétés demandent pour être vérifiées un simple calcul machine. D'autres, comme la conjecture de Goldbach (tout nombre pair est somme de deux nombres premiers) demandent a priori une infinité de vérifications, ce qui excède les possibilités d'Homo Sapiens.
Les mathématiques "classiques" qui affirment que la conjecture de Goldbach est forcément vraie ou fausse, admettent donc implicitement :

- ou bien l'existence d'un dieu mathématicien capable de faire une infinité de vérifications en un temps fini
- ou bien l'"omniscience" de Homo Sapiens : il serait capable de trouver un jour ou l'autre des réponses et démonstrations convaincantes pour tout problème mathématique clairement posé.

Les mathématiques constructives ne font aucune de ces deux hypothèses hasardeuses. Elles considèrent donc que seules sont "vraies" les affirmations démontrées de manière convaincante. Les affirmations non encore démontrées seront peut-être "vraies" un jour prochain. En attendant le jour de leur démonstration, elles restent dans un no man's land inconfortable mais inévitable. Il y a donc des vérités actuelles, et des vérités potentielles, mais pas de vérité absolue indépendante d'Homo Sapiens. On peut, si on le désire, considérer que les vérités potentielles forment une sorte de "vérité absolue", mais cela ne légitimera pas pour autant toutes les méthodes des mathématiques classiques pour ce qui concerne les affirmations qui sous-entendent une infinité de vérifications.
Par ailleurs, même si on est "croyant", la notion de "vérité humaine potentielle" présente au moins autant d'intérêt que la notion de "vérité absolue constatable par un dieu mathématicien", et mérite qu'on s'y attarde un peu .
C'est ce que nous allons faire en examinant la signification constructive de la vérité pour les propriétés les plus couramment considérées en mathématiques.
De la discussion précédente, on voit que la notion de base avec lequel travaille le mathématicien constructif n'est pas exactement: "La propriété P est vraie", mais plutôt "Voici une démonstration de la propriété P ". Comprendre le deuxième énoncé lorsqu'on entend le premier, c'est appliquer le principe : «affirmer c'est démontrer».
On utilisera l'écriture " $\vdash$ P " pour : "voici une démonstration de P ". Il s'agit d'une démonstration convaincante, pour un mathématicien constructif, une telle démonstration est nécessairement constructive, mais il n'y a pas de catalogue définitf de ce que sont les démonstrations constructives. En bref et au risque de nous répéter, la notion de "construction" est une notion première, prémathématique, qui sous-tend les mathématiques constructives, un peu de la même manière que l'idée d'un univers ensembliste cantorien avec vérité absolue et tiers exclu est une idée prémathématique qui sous-tend les mathématiques classiques.

2a) Propriétés dont la vérité résulte d'un constat

Pour les types élémentaires, on considère aussi que l'égalité ou la séparation de deux objets donnés (de même type) est elle-même immédiatement constatable(10). La séparation est considérée comme une constatation positive au même titre que l'égalité(11). Évidemment, cela ne

---

10 Cela pourrait susciter une discussion prémathématique sur la possibilité de constater sans ambiguïté l'"égalité" de deux objets "non identiques" (écrits en des endroits différents d'une feuille de papier par exemple). Comme nous l'avons déjà remarqué, les mathématiques commencent *après* la solution de ce genre de questions.

11 Du point de vue "prémathématique" on pourrait même sans doute considérer que la question de la séparation est plus claire, et préexiste à la question de l'égalité, qui est toujours une égalité "sous certains aspects"

s'applique que lorsqu'il s'agit d'objets donnés (au départ d'un raisonnement, d'une construction).

De la "définition" 1c) de la notion de fonction, il résulte alors que si F et G sont deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et n et m deux entiers naturels, les propriétés : " F(n) = G(m) ", ou : "F(n) ≠ G(m)" sont elles mêmes constatables après un simple calcul. Autrement dit, une opération conserve le caractère "d'objet clairement défini" que possède implicitement un objet apparaissant au début d'une phrase du style : soit n un entier naturel, ... On voit donc que la notion d'opération donnée en mathématiques constructives est très différente de la notion de fonction donnée en mathématiques classiques. Par exemple un mathématicien classique, devant une série de conjectures difficiles P_n peut inventer la fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ égale à 1 pour chaque entier n tel que P_n est vraie, et égale à 0 sinon. Bien que cette phrase définisse un ensemble de couples (n,m), ensemble inclus dans $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ (même pour un mathématicien constructif) il est clair que la valeur m (0 ou 1) correspondant à n ne résulte pas d'une construction, et ne définit donc pas une opération (ce qui revient à dire qu'on ne peut pas prouver constructivement que le graphe considéré est celui d'une opération).

2b) Les connecteurs "Et" et "Ou"

Étant données deux propriétés P et Q, on accorde la signification suivante à la propriété : (P et Q) :

– $\vdash$ (P et Q) signifie : $\vdash$ P et $\vdash$ Q

En d'autres termes, pour donner une démonstration de (P et Q) il faut donner une démonstration de P et une démonstration de Q.

De même la signification constructive du connecteur ou est donnée par :

– $\vdash$ (P ou Q) signifie : $\vdash$ P ou $\vdash$ Q

Une démonstration de (P ou Q) doit contenir de manière explicite une démonstration de P ou une démonstration de Q.

L'intérêt du "ou" constructif, apparaît clairement lorsque les propriétés P et Q concernent un objet variable (de type précisé). Pour certaines valeurs de la variable, la démonstration de (P ou Q) fournira une démonstration de P, pour les autres valeurs la démonstration de (P ou Q) fournira une démonstration de Q.

Les commentaires précédents sur les connecteurs "ou" et "et" ne sont pas des plaisanteries. D'une part, ils confirment que le langage a une priorité historique par rapport aux mathématiques. C'est seulement à l'être humain qui a appris à parler, qu'on peut commencer à parler de mathématiques. D'autre part, derrière leur apparence d'évidence pour Mr. de Lapalisse, ils cachent bien des mystères. Par exemple les systèmes formels modélisant les mathématiques constructives possèdent bien les deux propriétés énoncées lorsqu'on lit «$\vdash$ P » comme «la propriété P est prouvable dans le système formel considéré», tandis que les systèmes formels modélisant les mathématiques idéalistes (dites classiques) ont un comportement correct par rapport au "et" mais incorrect par rapport au "ou". Dans de tels systèmes formels, on peut très bien démontrer "P ou Q" sans pouvoir démontrer ni P ni Q([12]).

---

12 Par exemple la théoroe formelle classique des ensembles, si elle est consistante, ne peut pas prouver qu'elle est consistante, très probablement, elle ne peut pas non plus prouver qu'elle est inconsistante, mais elle peut facilement prouver qu'elle est consistante ou inconsistante.

Dans un commentaire précédent, nous avons vu que si n et m sont des objets d'un même type élémentaire, leur égalité ou leur séparation est considérée comme constatable par un calcul élémentaire. Cela donne donc par exemple pour le type des entiers naturels, l'axiome suivant :
Si m et n sont des entiers donnés, on a : $(m = n)$ ou $(m \neq n)$

2c) "Il existe un objet de type A vérifiant la propriété P"

On considère une propriété P concernant (peut-être et entre autres) un objet de type A . On appelle x cet objet (qui dans l'écriture de P apparaît comme une variable de type A) . Pour chaque valeur précise a de la variable x , on obtient une propriété particulière notée P(a) .
On accorde alors la signification intuitive suivante à la propriété :

"Il existe un objet x de type A tel que P(x) " :

– Voici un objet a , voici une démonstration du fait que a est de type A , et voici une démonstration de P(a) .

En abrégé : $\vdash \exists\, x \in A\,, P(x)$ signifie : Voici un a , et $\vdash a \in A$, et $\vdash P(a)$.

Concernant la signification constructive du "il existe", on voit que la différence, de taille, avec la signification classique est la nécessaire explicitation de l'objet a . Cette exigence est d'ailleurs proche de la signification intuitive usuelle. Les systèmes formels modélisant les mathématiques constructives possèdent cette propriété, que lorsqu'on a réussi à démontrer l'existence d'un objet vérifiant une formule, alors on peut extraire de la preuve, par un procédé purement automatique, une construction de l'objet en question. Par contre, dans les systèmes formels modélisant les mathématiques classiques, on peut très bien arriver à démontrer qu'un objet existe, sans qu'aucune explicitation de cet objet soit possible.
Par exemple, considérons une fonction f de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$. Dans un système formel classique on démontre l'existence de la fonction g de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante :

– pour tout $n \in \mathbb{N}$, g(n) est la plus petite des valeurs f(n,m) lorsqu'on fait varier m

Cela est basé sur l'existence d'une valeur minimum parmi tous les f(n,m). Mais la preuve de cette existence n'est pas constructive. Plus précisément il y a des exemples où la fonction f est tout à fait explicite (calculable au moyen d'un procédure simple), tandis que la fonction g ne l'est pas (elle n'est calculable par aucune procédure mécanique).
Naturellement, dans le système formel constructif correspondant, la fonction g ne peut tout bonnement pas être définie, puisqu'un obstacle apparemment infranchissable est posé à son explicitation : il semble peu probable, (quoique a priori pas complètement impossible) qu'on puisse un jour expliciter une fonction non récursive de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

2d) "Pour tout entier n la propriété P est vraie"

La signification constructive de : $\vdash \forall\, n \in \mathbb{N}, P(n)$
est la suivante :

– voici une construction qui transforme l'entier n en une démonstration de P(n)

ou encore :

– voici une construction qui, à partir de n , fournit une démonstration de P(n) .

Une définition analogue peut être prise pour la quantification universelle d'une variable d'un autre type élémentaire que les entiers naturels (par exemple le type des mots sur un alphabet fini donné).

Notez que le quantificateur universel $\forall\, n \in \mathbb{N}$ est en fait sous entendu lorsqu'on demande la démonstration d'une propriété P(n) concernant un entier n donné sur lequel on ne fait aucune hypothèse particulière. En d'autres termes, il revient au même de démontrer P(n) , sachant seulement que n est un entier, ou de démontrer $\forall\, n \in \mathbb{N}$ P(n) .

L'exemple de propriété, démontrable classiquement mais non constructivement, donné à la fin du 2c) peut s'écrire, sans faire appel directement à la "fonction g ", sous la forme suivante :

– $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, m \in \mathbb{N} \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad f(n,m) \leq f(n,p)$ (*)

En outre, la proposition :

– $\exists\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \quad \exists\, p \in \mathbb{N} \quad f(n,m) > f(n,p)$ (**)

est facilement prouvée absurde.

En fait, ce genre de propriété (*) est typiquement un "tiers cas non exclu" en mathématiques constructives. Car si la preuve classique de (*) ne fonctionne pas constructivement(13), cet échec ne constitue pas la base d'un contre exemple fort de (*) que serait la preuve constructive de la proposition (**)(14). De même, le fait que la fonction g n'est pas calculable mécaniquement n'implique pas pour autant de manière certaine sa non existence constructive(15).

Avant de passer à la quantification universelle sur des types plus compliqués, nous devons expliciter la signification constructive de l'implication.

2e) "La propriété P implique la propriété Q "

La signification constructive de $\vdash (P \Rightarrow Q)$ est la suivante :

– Voici une construction qui transforme une démonstration de P en une démonstration de Q .

Cette définition correspond tout à fait à la pratique intuitive des mathématiques, une fois qu'on a interprété "la propriété P est vraie" par "voici une démonstration de P ".

Lorsque P et Q comportent des variables communes, il faut comprendre que ces variables "prennent la même valeur" lors de la construction qui transforme une démonstration de P en une démonstration de Q , et que la démonstration de P peut très bien dépendre directement des valeurs prises par les variables.

Supposons qu'on ait une preuve constructive de l'implication $(P \Rightarrow Q)$. Pour les valeurs précisées des variables communes où on sait démontrer P , on saura donc aussi démontrer Q . Pour des valeurs précisées des variables communes où P est absurde (cf. paragraphe qui suit) la démonstration de $P \Rightarrow Q$ ne nous apprendra rien sur Q . Et pour des valeurs précisées des variables communes pour lesquelles on ne sait pas grand chose de la propriété P , l'implication $\vdash P \Rightarrow Q$ nous apprend néanmoins quelque chose : un certain lien entre P et Q .

Ce lien entre P et Q (qui, pour tout mathématicien, constitue la signification *profonde* de l'implication) est complètement déformé dans la logique classique, où $\vdash (P \Rightarrow Q)$ équivaut à $\vdash (\neg P \text{ ou } Q)$.

---

13 Elle démontre seulement que (**) est absurde

14 Une interpétation constructive possible des preuves classiques (due à Kreisel) est de dire que la preuve classique d'un théorème donne la preuve constructive de l'absurdité de l'existence d'un contre-exemple fort au théorème. Ceci au moins lorsque les objets apparaissant dans le théorème ont une signification constructive. De ce point de vue, et lorsque la dernière restriction est valable, les mathématiques constructives sont un raffinement des mathématiques classiques.

15 Sauf si on admet que toute fonction explicite de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ est récursive, mécanisable.

En fait, constructivement ($\neg$ P ou Q) est nettement plus fort (plus difficile à démontrer) que ($P \Rightarrow Q$).

2f) La négation : "La propriété P est absurde"

La vérité d'une propriété en mathématiques constructives doit être "construite" au moyen d'une démonstration. Par conséquent la notion de "faux" absolu n'existe pas plus que la notion de "vrai" absolu. Par ailleurs la "négation intuitive" de l'affirmation : "la propriété P peut être démontrée" ne peut pas être "construite". Si la propriété P est suffisamment mystérieuse, il faudrait être un dieu mathématicien pour savoir avec certitude qu'aucune démonstration convaincante n'existe pour la propriété P .
La négation constructive n'aura donc pas la signification intuitive " P n'est pas vraie", mais la signification " P est absurde", ou encore " P implique une absurdité". C'est donc une signification intuitive plus forte que " P n'est pas vraie".
En prenant comme propriété absurde la propriété : " $0 = 1$ " , on obtient donc la définition-commentaire suivante : l'affirmation " P est absurde" signifie " P implique $0 = 1$ "
Ce qui peut s'écrire de manière abrégée en symboles :
– $\vdash \neg P$, signifie : $\vdash (P \Rightarrow (0 = 1))$.

Arrivé à ce point, la lectrice comprendra que, via l'interprétation donnée des notions de : « Vrai, Absurde, Ou », le principe du tiers exclu signifierait : "toute propriété P peut être ou bien démontrée, ou bien réduite à l'absurde", c.-à-d. : un principe d'omniscience d'Homo Sapiens ajouté à un principe d'existence d'une vérité absolue. Ce qui est quand même beaucoup.
Et le refus du tiers exclu du point de vue constructif n'est nullement une provocation visant à embêter les mathématiciens classiques, mais un simple constat : dès que l'on accorde une signification constructive à la vérité et que l'on considère l'infinité (potentielle ou actuelle, peu importe) des entiers naturels, on perd le principe du tiers exclu. Ce principe ne serait pas problématique si on ne considérait que des propriétés portant sur un ensemble fini et fixé d'objets.

Le choix de $0 = 1$ pour désigner l'absurde est une question annexe([16]).
On admet en tout cas l'existence d'une propriété Faux répondant au schéma d'axiome suivant : pour n'importe quelle propriété P , on a :

$\vdash$ Faux $\Rightarrow$ P .

---

16 Personnellement, j'aime bien penser "sans négation". Je considère donc que lorsque je fais des mathématiques, j'ai toujours au moins deux modèles en tête. Le modèle intuitif usuel (où les entiers sont les entiers intuitifs etc...), et un deuxième modèle qui résulte d'un collapsus général : il y a un unique objet :
$0 = 1 = \pi = \ldots = \mathbb{N} = \mathbb{R}$ = l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ etc.
et cet objet vérifie toutes les propriétés. Par exemple $2 \neq 2$ puisque $0 = 1 \Rightarrow (2 = 2 \Rightarrow 0 = 1)$. Ainsi lorsqu'on démontre qu'une propriété est absurde, on démontre seulement que si on tient absolument à avoir cette propriété, il faut choisir le second modèle, où tout s'est effondré.

2g) Pour tout objet x de type A , la propriété P(x) est vraie

Si nous jetons un regard rétrospectif sur les types d'objets que nous avons admis, nous voyons que tout "type d'objets" A peut être défini de la manière suivante : donner un objet x de type A revient à faire deux choses :

- primo, effectuer une certaine construction X (d'où découle en particulier l'objet x)
- secundo, démontrer une certaine propriété Q(X) concernant la construction X ([17])

Alors l'affirmation : "pour tout objet x de type A , la propriété P(x) est vraie" aura la signification constructive suivante :

- voici une construction qui, à partir de la construction X et de la démonstration que X vérifie la propriété Q(X) , fournit une démonstration de P(x) .

Pour paraphraser et se référer aux autres définitions-commentaires déjà données, nous pourrions dire ceci :
Lorsque le type A est défini par :

$\vdash x \in A$ signifie: $\vdash (x \in B \text{ et } Q(x))$

où la signification de $x \in B$ est "plus simple" que celle de $x \in A$
Alors $\vdash \forall x \in A\ P(x)$ signifie : $\vdash \forall x \in B\ (Q(x) \Rightarrow P(x))$

2h) Conclusion provisoire sur ce qu'est une propriété :

En mathématiques constructives, une "propriété" (ou "assertion" ou "affirmation", ou "relation") est donc donnée par :

- primo : une déclaration de types
- secundo : une déclaration de variables (dans des types déclarés)
- tertio : une déclaration de constantes (c.-à-d., on donne des objets effectivement construits, dans des types déclarés)
- quarto : la propriété proprement dite, qui concerne les variables et les constantes : elle doit être "construite" à partir de propriétés considérées comme élémentaires (c.-à-d. dont la vérification résulte d'un constat) au moyen de règles précises. Les connecteurs logiques et les quantifications font partie de ces règles. (on pourra en définir d'autres, à condition de leur attribuer une "signification" claire en précisant ce qu'il faut faire pour démontrer la nouvelle propriété ainsi construite).

2i) Exercices de raisonnements constructifs

Nous commençons par des règles du "calcul des propositions", c.-à-d. lorsqu'on ne parle pas de quantificateurs.

Nous proposons à titre d'exercice à la lectrice de "démontrer" les théorèmes constructifs suivants, en s'appuyant sur l'interprétation donnée des connecteurs logiques, lorsque P , Q et

---

17 Ici, on pourra remarquer la très vieille problématique de la définition par "genre" (genre = génération = construction) et "différence" (différence = propriété particulière vérifiée). On pourra aussi se demander si les constructions de type évoquées au paragraphe 1 vérifient toujours cette "définition" par genre et différence . En fait c'est seulement dans la mise en pratique des maths constructives que l'on pourra faire cette discussion en détail : le fond de la question tourne autour de la notion de "construction". Une démonstration est sans nul doute elle-même une construction : cela suffira je pense à justifier le fait qu'il n'y a pas et ne peut y avoir de "définition a priori" de ce que sont les "constructions". Par suite, la discussion sur "les principes de travail" ne peut être faite une fois pour toutes, et doit sans cesse être reprise, poursuivie, étendue : au même rythme que les mathématiques elles-mêmes.

R sont des propriétés. L'équivalence est définie comme la conjonction des deux implications, directe et réciproque.

$\vdash \quad (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \Rightarrow R)$
$\vdash \quad ((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R))$
$\vdash \quad (R \text{ et } (P \text{ ou } Q)) \Leftrightarrow ((R \text{ et } P) \text{ ou } (R \text{ et } Q))$
$\vdash \quad (R \text{ ou } (P \text{ et } Q)) \Leftrightarrow ((R \text{ ou } P) \text{ et } (R \text{ ou } Q))$
$\vdash \quad \neg (P \text{ et } \neg P)$
$\vdash \quad \neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
$\vdash \quad \neg (P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$
$\vdash \quad (P \Rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow \neg P)$
$\vdash \quad \neg (P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ et } \neg Q)$
$\vdash \quad (P \text{ ou } Q) \Rightarrow \neg (\neg P \text{ et } \neg Q)$
$\vdash \quad (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
$\vdash \quad P \Rightarrow \neg \neg P$
$\vdash \quad \neg P \Leftrightarrow \neg \neg \neg P$
$\vdash \quad \neg \neg (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg (P \text{ et } \neg Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow \neg \neg Q) \Leftrightarrow (\neg \neg P \Rightarrow \neg \neg Q)$

Nous passons maintenant à la logique des prédicats, où apparaissent explicitement les quantificateurs. De nouveau nous proposons en exercice de "démontrer" quelques règles valides constructivement, en s'appuyant sur l'interprétation donnée des connecteurs logiques et des quantificateurs.

Précisons quelques conventions. Tout d'abord, implicitement, toute variable est d'un type bien défini. Appelons A un prédicat. Si un quantificateur portant sur α apparait dans la formule, nous notons alors $A(\alpha)$ si α figure dans A et nous notons A si α ne figure pas dans A (mais d'autres variables peuvent figurer dans A). On note t un terme.

$\vdash \quad A(t) \Rightarrow \exists \alpha \; A(\alpha)$
$\vdash \quad \forall \alpha \; A(\alpha) \Rightarrow A(t)$
$\vdash \quad \forall \alpha \; A \Leftrightarrow A$
$\vdash \quad \exists \alpha \; A \Leftrightarrow A$
$\vdash \quad \forall \alpha \; \forall \beta \; A(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \forall \beta \; \forall \alpha \; A(\alpha,\beta)$
$\vdash \quad \exists \alpha \; \exists \beta \; A(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \exists \beta \; \exists \alpha \; A(\alpha,\beta)$
$\vdash \quad \exists \alpha \; \forall \beta \; A(\alpha,\beta) \Rightarrow \forall \beta \; \exists \alpha \; A(\alpha,\beta)$
$\vdash \quad \forall \alpha \; (A(\alpha) \text{ et } B(\alpha)) \Leftrightarrow (\forall \alpha \; A(\alpha) \text{ et } \forall \alpha \; B(\alpha))$
$\vdash \quad \exists \alpha \; (A(\alpha) \text{ ou } B(\alpha)) \Leftrightarrow (\exists \alpha \; A(\alpha) \text{ ou } \exists \alpha \; B(\alpha))$
$\vdash \quad \neg \exists \alpha \; A(\alpha) \Leftrightarrow \forall \alpha \neg A(\alpha)$
$\vdash \quad \exists \alpha \; \neg A(\alpha) \Rightarrow \neg \forall \alpha \; A(\alpha)$
$\vdash \quad \forall \alpha \; (A \Rightarrow B(\alpha)) \Leftrightarrow (A \Rightarrow \forall \alpha \; B(\alpha))$
$\vdash \quad \forall \alpha \; (A(\alpha) \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists \alpha \; A(\alpha) \Rightarrow B)$
$\vdash \quad \exists \alpha \; (A \Rightarrow B(\alpha)) \Rightarrow (A \Rightarrow \exists \alpha \; B(\alpha))$
$\vdash \quad \exists \alpha \; (A(\alpha) \Rightarrow B) \Rightarrow (\forall \alpha \; A(\alpha) \Rightarrow B)$
$\vdash \quad \exists \alpha \; (A(\alpha) \Rightarrow B(\alpha)) \Rightarrow (\forall \alpha \; A(\alpha) \Rightarrow \exists \alpha \; B(\alpha))$
$\vdash \quad \forall \alpha \; (A(\alpha) \Rightarrow B(\alpha)) \Rightarrow (\forall \alpha \; A(\alpha) \Rightarrow \forall \alpha \; B(\alpha))$

3) Exemples caractéristiques de divergences entre logique classique et logique constructive

Lorsqu'on se trouve confronté au besoin de changer les règles de la logique, pour passer de la logique classique à la logique constructive, on subit un dépaysement qui fait qu'on n'a plus au

départ d'intuition sûre sur ce qui est acceptable et ce qui ne l'est pas. Le retour systématique à l'explication de la signification constructive des connecteurs et des quantificateurs est en un premier temps nécessaire. Quand un énoncé vrai d'un point de vue classique ne semble pas clair d'un point de vue constructif, on peut essayer des "contre-exemples". Ces contre-exemples montrent que l'assertion douteuse implique un principe qui n'est pas acceptable d'un point de vue constructif. Ces principes peuvent en général être classés dans la rubrique des principes d'omniscience, dans la mesure où leur acceptation ne serait compatible avec le sens constructif des énoncés que si Homo Sapiens était doué de capacités d'omniscience du type : appréhender d'un seul coup l'ensemble des valeurs d'une suite infinie arbitraire d'entiers naturels.

Nous allons nous livrer dans cette section 3 au petit jeu qui consiste à débusquer des principes d'omniscience derrière des affirmations d'apparence anodine. Nous commençons par décrire quelques uns de ces principes.

3a) Principes d'omniscience

Considérons un nombre réel x défini par une suite de Cauchy de rationnels (x_n) vérifiant

$$\forall\, n \quad |\, x_n - x_{n+1}\,| < 1/2^{n+1}$$

de sorte que nous savons que x_n approche x avec un écart $< 1/2^n$. La propriété $x > 0$ équivaut à $\exists\, n \;\; x_n > 1/2^n$. La négation de $x > 0$ est notée $x \leq 0$ et équivaut à $\forall\, n \;\; x_n \leq 1/2^n$. La négation de $x \leq 0$ signifie que l'on sait réduire à l'absurde l'hypothèse $\forall\, n \;\; x_n \leq 1/2^n$. Le prédicat $x = 0$ est défini comme équivalent à $(x \geq 0$ et $x \leq 0)$ et le prédicat $x \neq 0$ comme équivalent à $(x > 0$ ou $x < 0)$.

Pour donner nos contre-exemples intuitifs aux règles classiques, nous utiliserons des propriétés du style $x > 0$ (pour un nombre réel x).

Nous avons déjà expliqué en quoi le tiers exclu $(P$ ou $\neg P)$ ne peut être valable constructivement. En particulier, un cas crucial et simple de tiers exclu non valide constructivement est pour un réel x arbitraire :

$$(x > 0 \text{ ou } x \leq 0)$$

Presque toutes les grandes conjectures mathématiques peuvent être ramenées à la forme $x \leq 0$ pour des valeurs particulières de x. Si on avait constructivement $(x > 0$ ou $x \leq 0)$ cela signifierait qu'on dispose d'une méthode générale, qui pourrait décider au moins en principe toutes ces conjectures mathématiques.
Le principe classique, non valide constructivement :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad (x > 0 \text{ ou } x \leq 0)$$

est appelé par Bishop le «petit principe d'omniscience» (PPO).
Il peut être formulé aussi sous la forme : $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad (x = 0$ ou $x \neq 0)$
Ce principe revient à affirmer que, étant donnée une suite d'entiers arbitraire, ou bien elle est identiquement nulle, ou bien il y a un terme non nul dans la suite :

$$\forall\, f \in (\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}) \quad ((\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; f(n) = 0) \text{ ou } (\exists\, n \in \mathbb{N} \;\; f(n) \neq 0))$$

Un principe plus faible, appelé le «mini principe d'omniscience» (MPO) est le suivant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad (x \geq 0 \text{ ou } x \leq 0)$$

Cela revient à dire que pour toute suite d'entiers, ou bien le premier terme non nul éventuel est de rang pair, ou bien il est de rang impair. Ceci n'est pas constructivement valide dans la

mesure où, pour une suite infinie qui a l'air identiquement nulle, on hésite indéfiniment avant de pouvoir décider l'alternative. Il est clair que PPO implique MPO([18]) .

Exercice : démontrez $\quad PPO \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R} \ (x \geq 0 \text{ ou } \neg x \geq 0)) \Rightarrow MPO$

3b) Le principe de Markov

Le principe de Markov (PM) (admis en général par les constructivistes russes), peut être formulé comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ (\neg x \leq 0 \Rightarrow x > 0)$$

Cela équivaut au fait de considérer que, lorsqu'on a prouvé l'absurdité qu'une suite d'entiers soit partout nulle, alors cette suite se révélera non identiquement nulle un jour ou l'autre.
Deux formulations équivalentes sont les suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ (\neg x = 0 \Rightarrow x \neq 0)$$

et

$$\forall f \in (\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}) \quad (\neg \ (\forall n \in \mathbb{N} \ f(n) = 0) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N} \ f(n) \neq 0))$$

Le principe de Markov est une instance particulièrement élémentaire du principe classique général de double négation

$$\vdash \quad \neg \neg P \Rightarrow P$$

Plus la propriété P a une structure logique compliquée et plus le principe classique de double négation a une signification obscure.
Le principe de Markov est en général refusé selon l'argument que l'existence d'un entier (vérifiant une condition explicite) ne peut pas être considérée comme explicite si la preuve ne fournit pas une borne pour cet entier. Ce qui est en jeu, en fait, c'est le caractère automatique de la construction que signifie une implication: il est intuitivement impensable qu'on dispose jamais d'une méthode universelle qui, à partir d'une double réduction à l'absurde de «la suite d'entiers (u_n) admet un terme non nul», soit capable de borner l'entier n pour lesquels $u_n \neq 0$ ([19]).

3c) Quelques comparaisons entre la logique formelle classique et la logique formelle constructive

Nous donnons maintenant quelques commentaires sur la non validité constructive de certaines règles classiques. Nous commençons par le calcul des propositions. Nous examinerons des cas plus subtils que le principe du tiers exclu :

---

18 Le fait que MPO est strictement plus faible que PPO (du point de vue des preuves constructives) est sans doute un peu mystérieux. En tout cas, cela se vérifie dans les systèmes formels constructifs capables de rendre compte des suites d'entiers naturels et/ou des nombres réels à la Cauchy. La considération de principes tels que MPO et PPO est intéressante parce que de nombreux théorèmes de mathématiques classiques sont équivalents constructivement à l'un de ces principes. Un travail de logique significatif serait de classifier les théorèmes de mathématiques classiques non valides constructivement selon leur équivalence avec l'un (parmi un petit nombre) des principes tels que MPO et PPO. Une affirmation comme MPO $\Rightarrow$ PPO , qui n'est sans doute pas prouvable constructivement, ne présente pas d'intérêt réel, du moins tant qu'on n'a pas repéré des théorèmes classiques significatifs qui seraient constructivement équivalents à cette affirmation.

19 Par contre, dans tous les systèmes formels constructifs, on dispose d'une telle méthode : si $\neg x \leq 0$ est prouvable, alors $x > 0$ également. Mais un système formel constructif précis ne constitue qu'un tout petit morceau de mathématiques constructives. Les prétentions à l'universalité des systèmes formels a définitivement été réduite à néant par le théorème d'incomplétude de Gödel.

Variations sur les lois de Morgan

Considérons les formulations suivantes des lois de Morgan.

$\vdash \quad \neg(\neg P \text{ et } \neg Q) \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$

$\vdash \quad \neg(P \text{ et } Q) \Rightarrow (\neg P \text{ ou } \neg Q)$

$\vdash \quad \neg(\neg P \text{ et } \neg Q) \Rightarrow (\neg\neg P \text{ ou } \neg\neg Q)$

Aucune n'est valable constructivement. Pour s'en convaincre, nous donnons un contre-exemple intuitif à la troisième loi (qui est manifestement une forme plus faible que des deux autres). Considérons un réel arbitraire x et pour P et Q les propriétés $x > 0$ et $x \leq 0$. Alors $(\neg P \text{ et } \neg Q)$ signifie $(Q \text{ et } \neg Q)$ et est donc absurde. La propriété $(\neg\neg P \text{ ou } \neg\neg Q)$ signifie $(\neg x \leq 0 \text{ ou } x \leq 0)$.
Par ailleurs $(x < 0 \Rightarrow x \leq 0)$, donc par contrapposition $(\neg x \leq 0 \Rightarrow x \geq 0)$.
Donc, si on avait $(\neg\neg P \text{ ou } \neg\neg Q)$ on aurait également $(x \geq 0 \text{ ou } x \leq 0)$ c.-à-d. MPO.

Notons par ailleurs que la première loi citée ci-dessus implique le principe général de tiers exclu puisqu'en prenant pour Q la propriété $\neg P$ on en déduit $(P \text{ ou } \neg P)$.

Variations sur l'implication

Considérons tout d'abord le "faux principe de contrapposition", classiquement vrai :

$\vdash \quad (\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

On donne un premier contre exemple intuitif en prenant pour Q la propriété $\neg(x = 0)$ et pour P la propriété $x \neq 0$, avec un réel x arbitraire. Alors l'hypothèse avec les négations est facile à prouver[20] tandis que la conclusion est le principe de Markov.
Ce faux principe de contrapposition implique en fait le principe général de tiers exclu : on prend pour P la propriété $(A \text{ ou } B)$ et pour Q la propriété $\neg(\neg A \text{ et } \neg B)$. Alors la premier membre de l'implication est vrai, tandis que le second membre est la première loi de Morgan citée au paragraphe précédent.

Considérons ensuite le principe classiquement vrai [21]

$\vdash \quad ((P_1 \text{ et } P_2) \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P_1 \Rightarrow Q) \text{ ou } (P_2 \Rightarrow Q))$

Un contre-exemple intuitif est fourni comme suit. On considère un réel x arbitraire, la propriété P_1 signifie $x \geq 0$, la propriété P_2 signifie $x \leq 0$ et la propriété Q signifie $x = 0$.
Le premier membre de l'implication est vrai par définition de l'égalité sur les réels.
La propriété $(P_1 \Rightarrow Q)$ implique $x \leq 0$ (pour le voir supposez $x > 0$ et réduisez cette hypothèse à l'absurde). De même La propriété $(P_2 \Rightarrow Q)$ implique $x \geq 0$.
Si la formule initiale était vraie on aurait donc MPO : $x \geq 0$ ou $x \leq 0$.

Considérons maintenant l'autre principe classiquement vrai [22]

$\vdash \quad (P \Rightarrow (Q_1 \text{ ou } Q_2)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q_1) \text{ ou } (P \Rightarrow Q_2))$

---

20 Il suffit de réduire à l'absurde Q et $\neg P$, c.-à-d., $\neg\neg P$ et $\neg P$.

21 Les deux membres de l'implication ci dessous sont classiquement équivalents à $(\neg P_1 \text{ ou } \neg P_2 \text{ ou } Q)$. Cependant cette implication est bel et bien troublante pour le profane qui se posera inévitablement la question : comment se fait il que toute preuve basée sur deux hypothèses puisse toujours se réduire à une preuve basée sur une seule des deux hypothèses ? ... la réponse est simplement que l'implication classique a perdu la signification intuitive de l'implication comme preuve lorsqu'on a introduit la révélation magique du tiers exclu. Dès lors les preuves n'ont plus le statut d'êtres mathématiques à part entière, et seuls demeurent le Vrai et le Faux immuables dans l'éternité des siècles. La seule manière de rendre le second membre évidemment faux est de rendre à la fois Q faux et P_1 et P_2 vrais ... et ce second membre est, du point de vue classique, réputé vrai dès qu'il n'est pas évidemment faux.

22 La lectrice pourra développer pour elle-même le même genre de considérations que celles de la note précédente.

Un contre-exemple intuitif est obtenu comme suit. La propriété P signifie $x \neq 0$, la propriété Q_1 signifie $x > 0$, la propriété Q_2 signifie $x < 0$. Le premier membre de l'implication est toujours vrai. Cependant $(P \Rightarrow Q_1)$ implique $x \geq 0$ (réduire à l'absurde $x < 0$) et $(P \Rightarrow Q_2)$ implique $x \leq 0$. Donc on aurait MPO.

Le principe de double négation

On peut donner un "contre-exemple" pour le principe classique de double négation, qui convainc mêmes les adeptes du principe de Markov. On considère un réel x et on prend pour P la propriété $(x > 0$ ou $x \leq 0)$. Cependant, sa double négation est équivalente à $\neg (x \leq 0$ et $\neg\, x \leq 0)$ et est donc constructivement valide. Ainsi, si on avait $\neg\neg P \Rightarrow P$ on en déduirait le principe PPO.
De la même manière, dans un système formalisé de calcul des propositions constructifs, le principe général de double négation implique le principe du tiers exclu.

Passons maintenant à quelques théorèmes classiques non valides constructivement dans le calcul des prédicats.

Calcul des prédicats

Comme premier exemple nous choisissons :

$$\vdash \quad \neg \forall \alpha\, A(\alpha) \Rightarrow \exists \alpha\, \neg A(\alpha)$$

Le principe de Markov est de cette forme. Mais on a aussi des contre-exemples plus forts, par exemple construits comme suit. Si on fait varier α dans l'ensemble $\{1,2\}$ la quantification universelle signifie alors la conjonction A_1 et A_2 tandis que la quantification existentielle doit être remplacée par un «ou» constructif. On obtient donc comme cas particulier le principe du calcul des propositions :

$$\vdash \quad \neg (A_1 \text{ et } A_2) \Rightarrow (\neg A_1 \text{ ou } \neg A_2)$$

Et nous avons montré que ce principe implique MPO.
On peut de la même manière donner des contre-exemples pour les deux principes classiques suivants :

$$\vdash \quad (A \Rightarrow \exists \alpha\, B(\alpha)) \Rightarrow \exists \alpha\, (A \Rightarrow B(\alpha))$$
$$\vdash \quad (\forall \alpha\, A(\alpha) \Rightarrow B) \Rightarrow \exists \alpha\, (A(\alpha) \Rightarrow B)$$

4) Démonstrations et constructions par induction

Les entiers naturels peuvent être construits à partir de 0 en utilisant l'opération "successeur" (qui est une opération élémentaire de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$). Cette construction est sans doute l'opération la plus "fondamentale" des mathématiques, celle qui permet d'abstraire l'idée de "potentiellement réalisable" à partir de la constatation des objets "effectivement réalisés".

4a) Construction par récurrence

Du fait que tout entier naturel peut être construit à partir de 0, on déduit facilement le principe de "construction par récurrence" suivant :

- soit A un type d'objets, x un objet de type A, et F une opération de $A \times \mathbb{N}$ dans A, alors il existe une opération G de $\mathbb{N}$ dans A, qui vérifie :
  - à partir de 0, l'opération G construit l'objet x
  - si, à partir de $n \in \mathbb{N}$, l'opération G construit l'objet $y \in A$, alors, à partir de $n+1 \in \mathbb{N}$, l'opération G construit l'objet F(y,n).

Ce principe est quasiment "clair par lui-même" à partir du moment où on a compris comment se construisent les entiers naturels. Si l'opération F et l'objet x sont donnés de manière explicite, la lectrice peut voir tout de suite quelles constructions il faut faire pour calculer, par exemple G(45).
On doit considérer que l'opération G résulte "mécaniquement" de la donnée de l'objet x et de l'opération F. Autrement dit, le passage du couple (x,F) à l'opération G est lui-même une opération.
Le principe de construction par récurrence est donc l'affirmation, pour chaque type d'objet A, d'une "opération" R_A de type

$$(A \times ((A \times \mathbb{N}) \longrightarrow A)) \longrightarrow (\mathbb{N} \longrightarrow A))$$

avec $R_A(x,F) = G$

4b) Démonstration par récurrence

À ce principe de "construction par récurrence", correspond un principe de "démonstration par récurrence" (qui s'en déduirait d'ailleurs si on considérait que les démonstrations d'une propriété sont des objets d'un certain type bien défini).
C'est le suivant :

- soit P une propriété portant (entre autres) sur une variable $n \in \mathbb{N}$, et notons là P(n). Alors, si on a une démonstration de P(0) et une démonstration de $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$, on en déduit mécaniquement une démonstration de $\forall\, k \in \mathbb{N}$ P(k).

En symboles, cela donne, pour chaque propriété P(n) portant (entre autres) sur un entier variable n, l'axiome suivant :

$$\vdash (P(0) \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}\ (P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow \forall\, k \in \mathbb{N}\ P(k)$$

Si $\underline{n}$ est une valeur précisée de "l'entier variable" n, la démonstration de $P(\underline{n})$ sera donnée par la construction suivante :

- démontrer P(0)
- construire l'entier $\underline{n}$ à partir de l'entier 0 au moyen de l'opération successeur
- à chaque nouvel entier $\underline{k}+1$ ainsi obtenu, effectuer les constructions nécessaires à la démonstration de $P(\underline{k}) \Rightarrow P(\underline{k}+1)$, et en déduire la construction globale nécessaire à la démonstration de $P(\underline{k}+1)$.

4c) Induction pour d'autres types élémentaires

De manière analogue, lorsqu'un type d'objet sera défini comme :

> les objets construits à partir de certains objets "initiaux" et de certaines "opérations élémentaires"

on aura de même un principe de construction et un principe de démonstration par induction correspondant à ce type d'objet. Il en est ainsi par exemple, pour le type "mots sur l'alphabet fini...(à préciser) ". Les objets initiaux sont les mots à une lettre (ou le mot vide, au choix), et les opérations élémentaires consistent à rajouter une lettre à la fin du mot.

4d) Preuves par induction pour des types construits

À partir du principe de démonstration par induction sur l'ensemble des entiers naturels, on peut établir des principes de démonstration par induction pour des ensembles ordonnés plus sophistiqués, comme par exemple : "$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre lexicographique".

– soit P une propriété portant (entre autres) sur deux variables n et $m \in \mathbb{N}$, et notons là P(n,m). Alors, si on a P(0,0) et si on a démontré
$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}$ $((\forall (n',m') < (n,m)\ P(n',m')) \Rightarrow P(n,m))$
alors on peut démontrer $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2\ P(n,m)$.

Pour établir ce principe, on prouve par induction sur n que P(n,m) est vrai pour tout m, et cette preuve elle même se fait par induction sur m.
De même, on peut expliciter un principe de construction par induction pour cet ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre lexicographique.
Un ensemble ordonné avec un premier élément sur lequel on peut pratiquer les preuves par induction est appelé un ensemble bien ordonné.

Pour certains ensemble ordonnés, on pourra se trouver dans la situation intermédiaire suivante : la démonstration de la validité des principes de construction et démonstration par induction ne semble pas pouvoir être déduite à partir des principes correspondants pour les entiers naturels mais des "commentaires" (du type de celui qu'on fait pour la récurrence) et l'expérience accumulée conduisent à admettre cette validité : c'est tout le problème de l'invention de nouvelles méthodes de démonstrations qui est alors posé.
Ce phénomène peut en particulier se présenter sous la forme suivante : il existe certains ensembles ordonnés dénombrables ayant une description parfaitement explicite, et qui, en mathématiques classiques, sont prouvés être des ensembles bien ordonnés. Mais la preuve classique (du fait que l'ordre est une bon ordre) n'est pas entièrement convaincante d'un point de vue constructif. D'autre part, le fait d'admettre qu'un tel ordre est bien un bon ordre n'est pas non plus frappé d'interdit par des "contre exemples" analogues à ceux développés à la section 3.
Ce genre de discussion n'a en fait apparemment pas de conséquence sur les mathématiques usuelles, car les théorèmes fondamentaux ne sont jamais établis en utilisant des preuves par induction sur des ensembles bien ordonnés trop sophistiqués(23). Ce qui fait problème dans l'immense majorité des preuves classiques, c'est bien plutôt des principes d'omniscience tout à fait simples comme PPO ou MPO, ainsi que certains usages de l'axiome du choix.

4e) Constructions de type par induction

Abordons ce problème à partir d'un exemple. Pour tout entier n, on peut considérer le type A_n, défini par récurrence comme suit :
$A_0 = \mathbb{N}$ $A_{n+1} = (A_n \longrightarrow \mathbb{N})$.

---

23 Un fait d'expérience est que, chaque fois qu'un théorème classique usuel possède une version constructive, les algorithmes qui correspondent au théorème n'utilisent que des constructions par induction sur des bons ordres assez simples, le cas typique étant celui d'un "algorithme à oracles uniformément primitif récursif" : considérons par exemple le théorème élémentaire d'analyse constructive qui affirme qu'une fonction uniformément continue f sur l'intervalle [0,1] admet une borne supérieure. La "variable" du théorème est la fonction uniformément continue f. Comme on ne veut pas faire d'hypothèse contraignante concernant comment une fonction uniformément continue vient à être calculée, elle est représentée par deux oracles : le premier oracle donne la précision $(1/2^n)$ avec laquelle doit être donnée x pour que soit assurée une précision $(1/2^m)$ pour y = f(x) (l'oracle répond n à la question m). Le deuxième oracle donne la réponse "f(x) avec une précision $1/2^m$" lorsqu'on lui pose la question (x,m) où x est un rationnel de l'intervalle. Il n'est pas difficile de produire un algorithme qui, à l'aide de ces deux oracles, et sans aucune autre information concernant la fonction f, est capable de calculer avec une précision donnée la borne supérieure de f. La preuve constructive du théorème contient toujours en filigrane un tel algorithme à oracle (cf. [Knu]).

Enfin, on peut considérer le type $A = \Pi_{n\in \mathbb{N}} A_n$ défini comme suit : un objet de type A est une construction F qui, pour chaque entier n, fournit un objet F_n de type A_n. Il n'est pas difficile de produire des objets F de type A.
Mais le type A ne peut pas être ramené à un type construit à partir $\mathbb{N}$ au moyen des autres procédés de constructions déjà légitimes.
Cette explication est-elle suffisamment claire pour qu'on puisse admettre qu'on a bien défini ainsi A comme un type d'objet légitime ?
Cela mérite sûrement une discussion. Mais en fait, comme à la section précédente 4d), cela n'a apparemment pas de conséquence sur les mathématiques usuelles.

5) Ensembles, égalités, fonctions, espaces métriques complets

5a) L'égalité doit en général être définie

Dans un texte mathématique formalisé, deux objets définis "exactement de la même manière" peuvent être considérés "identiques" (quoique définis en deux moments différents). Mais les mathématiques préexistent à leur formalisation (formalisation qui est toujours partielle, limitée, insatisfaisante, rappelons-le). Et les "objets mathématiques" ont une existence indépendante du *nom* qui leur est donné dans tel ou tel système formel.
Il semble donc difficile d'admettre a priori une relation d'"identité" définie une fois pour toutes entre objets mathématiques.

De plus, si on considère, par exemple, deux opérations F et G de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la notion la plus importante à manipuler n'est pas celle de leur identité, encore appelée égalité intentionnelle (les opérations F et G sont définies par la même procédure de calcul([24])), mais c'est celle d'égalité extensionnelle, à savoir :

pour tout entier n, $Fn = Gn$

Il se peut que F et G soient des méthodes de calcul très différentes mais qu'elles aboutissent systématiquement au même résultat. Cette notion d'égalité extensionnelle([25]) est la notion la plus productive d'un point de vue mathématique.

Ceci conduit à adopter le point de vue suivant :
- l'égalité de deux objets de même type élémentaire est une relation dont la vérité résulte d'un simple calcul (voire d'un simple constat)
- l'égalité de deux objets d'un même type plus complexe X est une relation sujette à définition. Une relation d'égalité, définie sur le type X, doit évidemment être une relation d'équivalence.

Remarque : même pour les entiers naturels on peut considérer que seule la relation " $n = 0$ " résulte d'un constat, auquel cas on pourra construire par récurrence une opération E de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ convenable, et définir l'égalité, par : $E(n,m) = 0$. Ce point de vue est

---

24 L'identité de deux procédures de calcul est une chose quasiment impossible à définir en dehors d'un système formel d'écritures qui formalisent certaines procédures de calcul, (par exemple les calculs récursifs) selon des codifications qui ne peuvent que comporter une grande part d'arbitraire. En conséquence la notion d'égalité purement intentionnelle entre opérations de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ n'est pas très réaliste. Néanmoins, en face de la notion d'égalité purement extensionnelle, on peut imaginer différents degrés d'intentionnalité pour différentes relations d'égalité.

25 extensionnel est dit par opposition à "intentionnel" : "deux" objets sont "intentionnellement égaux" lorsqu'ils sont donnés comme le même objet

peut-être plus proche de la pratique : la comparaison du nombre de billes dans deux boites ne résulte généralement pas d'un simple constat. Par ailleurs et a contrario, quand deux entiers naturels (qui peuvent résulter de calculs différents) ont été ramenés à leur forme d'entiers naturels "à l'état pur", c.-à-d. comme successeurs itérés de 0, alors leur égalité n'est rien d'autre que leur identité.

5b) Ensembles

Le slogan de Bishop (cf. [Bis] ou [BB]) est qu'un ensemble est bien défini constructivement lorsqu'on sait ce qu'il faut faire pour construire un élément arbitraire de cet ensemble, et ce qu'il faut faire pour démontrer que deux éléments de cet ensemble sont égaux.
Avec les notions que nous avons développées jusqu'à présent, cela signifie qu'un ensemble est constructivement défini par la donnée d'un type (légitime) d'objets et la définition d'une relation d'égalité.
Une conception relativement prudente, mais rassurons nous, tout à fait efficace, de la notion d'ensemble "constructif" sera donc la suivante : un ensemble E est donné par :

- un type X_E,
- une relation binaire pour les objets de ce type, notée $x =_E y$, et
- une preuve que cette relation binaire $x =_E y$ est bien une relation d'équivalence

Cette notion d'ensemble renvoie donc aux notions de type[26] et de propriété, plus fondamentales.
Par exemple l'ensemble des nombres réels est formé à partir du type «suites de rationnels de Cauchy» et de la relation d'égalité convenablement définie.
Quant à l'ensemble des entiers naturels, il n'est pas vraiment distinct de sont type sous-jacent $\mathbb{N}$ puisque la relation d'égalité entre entiers naturels est considérée comme "primitive" (au même titre que les entiers naturels).
Par rapport aux ensembles des mathématiques classiques, il y a au moins deux différences de points de vue importantes. La première est qu'un ensemble constructif est toujours[27] obtenu comme résultat d'une série de descriptions précises (qui permettent de définir le type et la relation d'égalité) et de constructions (qui permettent de prouver que la relation d'égalité est une relation d'équivalence). La deuxième est que l'appartenance d'un objet à un ensemble n'est pas un fait brut et éternel, mais est directement dépendant d'une preuve donc d'une construction.
Tout ensemble constructif arrive donc sur la scène mathématique sous forme relativement concrète : c'est un ensemble classique avec une "présentation". Dans la présentation de l'ensemble, la preuve du fait que la relation d'égalité est une relation d'équivalence est en général omise. Et deux ensembles dont les présentations ne diffèrent que sur la preuve en question sont considérés comme «les mêmes». Mais même si la preuve n'est pas mentionnée, elle doit être disponible quelque part.

Le produit cartésien de deux ensembles est une notion claire : le produit de l'ensemble $E = (X_E,=_E)$ et de l'ensemble $F = (X_F,=_F)$ est l'ensemble $G = (X_E \times X_F,=_G)$ avec la relation $(x,y) =_G (x',y')$ définie comme signifiant : $x =_E x'$ et $y =_F y'$. On notera $E \times F$ l'ensemble ainsi obtenu (malgré l'ambigüité avec le produit cartésien de deux types).

---

26 Bishop parle de préensemble plutôt que de type

27 sauf pour les ensembles les plus élémentaires, comme l'ensemble des entiers naturels, car il est impossible de bâtir quoique ce soit sur du vide, malgré les illusions d'optique créées par la théorie des ensembles classiques dans sa forme la plus achevée «à la Zermelo-Frankel»

5c) Fonctions

Considérons un ensemble $E = (X_E, =_E)$, un ensemble $F = (X_F, =_F)$, et une opération f de X vers X_F. On dira que cette opération est extensionnelle (pour $=_E$ et $=_F$) si on a :
– $\forall x \in X_E, \forall x' \in X_E, \quad x =_E x' \Rightarrow f(x) =_F f(x')$
On voit donc que le type "opérations extensionnelles de E vers F" est un type bien défini.
On peut faire de ce type un ensemble $G = \mathcal{F}(E,F)$ en adoptant la définition d'égalité extensionnelle entre opérations :
– $f =_G g$ signifie : $\forall x \in X_E \quad f(x) =_F g(x)$
Bien que des raffinements de la notion constructive de fonction puissent être imaginés (cf. [Bee] et la note ci-après), on peut en général s'en tenir à la convention selon laquelle toute fonction doit être définie à partir d'une opération entre les types sous-jacents, ce que nous ferons désormais. Donc l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ défini ci-dessus sera considéré comme l'ensemble des fonctions de E vers F.[28]

Essayons de préciser les choses avec quelques exemples.
Vu le caractère a priori de l'égalité entre entiers naturels, toute opération de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ est une fonction. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ est donc formé sur le type $(\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N})$ avec pour relation d'égalité l'égalité extensionnelle.
Revenons à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Son type sous-jacent est le type $SC(\mathbb{N},\mathbb{Q})$ des opérations de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Q}$ vérifiant le critère de Cauchy, mais sa relation d'égalité est plus grossière que l'égalité extensionnelle entre suites de rationnels[29].
A partir de l'ensemble $\mathbb{R}$ on peut définir l'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Voici comment. Le type sous-jacent est le type des opérations de $SC(\mathbb{N},\mathbb{Q})$ vers $SC(\mathbb{N},\mathbb{Q})$ qui sont extensionnelles pour l'égalité entre réels $=_{\mathbb{R}}$. Qu'est-ce qu'une opération de $SC(\mathbb{N},\mathbb{Q})$ vers $SC(\mathbb{N},\mathbb{Q})$? C'est une construction qui prend en entrée un élément de $(\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q})$ et qui pour fonctionner peut utiliser le fait que la suite de rationnels considérée est de Cauchy. En sortie, cette opération fournit un élément de $SC(\mathbb{N},\mathbb{Q})$, c.-à-d. un élément de $(\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q})$ avec une preuve qu'il s'agit bien d'une suite de Cauchy.
Ici l'auteur et la lectrice (ou le lecteur) commencent à avoir mal à la tête. Aussi l'auteur tient à se rassurer lui-même et à rassurer si possible la lectrice : l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'a pratiquement aucun intérêt mathématique, et aucune activité mathématique productive ne semble jamais avoir été basée sur la considération d'ensembles aussi compliqués. L'ensemble des fonctions réelles

---

28 A strictement parler, on a plutôt défini l'ensemble des opérations extensionnelles de E vers F ; on peut imaginer en effet que la construction qui permet de passer de x à f(x) dépende non seulement de l'objet x lui-même, mais aussi de la preuve que $x \in X_E$, et certaines fonctions, malgré leur caractère extensionnel, ne pourraient alors pas être définies en tant qu'opérations portant sur les types sous-jacents. Mais ce raffinement, même s'il est légitime, ne semble pas avoir de conséquence mathématique réellement significative, et nous nous en passerons.

29 On peut calquer la terminologie classique et dire que $\mathbb{R}$ est un ensemble quotient de l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels. Mais en mathématiques constructives on ne prétend pas manipuler des classes d'équivalences en tant que telles, qui sont à vrai dire des "objets" bien encombrants. Tout réel est représenté par une suite de Cauchy, et comme il est impossible de définir un représentant canonique dans la classe d'équivalence, il n'y a pas moyen en mathématiques constructives d'identifier un réel avec un objet de structure simple. Cela ne contredit pas le caractère relativement simple de l'ensemble $\mathbb{R}$. C'est uniquement le mythe de l'égalité comme identité (deux réels classiques, eux, sont bien égaux si et seulement si ils sont identiques) qui a conduit à préférer le concept d'ensemble quotient comme ensemble de classes d'équivalence, à celui d'ensemble quotient comme relâchement de la relation d'égalité, sans modification des objets. Pour Gauss, les *entiers modulo p* n'existaient pas comme objets distincts des entiers naturels, et l'étude des entiers modulo p n'est rien d'autre que l'étude des congruences modulo p sur les entiers naturels.

continues, l'ensemble des fonctions réelles analytiques, l'ensemble des fonctions réelles indéfiniment dérivables, ou l'espace des fonctions réelles de carré sommable, qui sont, eux, des ensembles utiles et significatifs, ont une structure beaucoup plus simple que cet extraordinaire ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ cher à Cantor. Ce sont des espaces métriques séparables complets, c.-à-d. que leur structure n'est pas plus compliquée que celle de $\mathbb{R}$ (voir infra). L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des mathématiques classiques est à vrai dire encore beaucoup plus compliqué et certainement plus mystérieux que celui que nous avons décrit (dans lequel les fonctions non continues ont beaucoup de mal à entrer), mais son utilité comme fourre-tout n'a-t-elle pas été détronée depuis un certain temps par l'ensemble des distributions réelles (toute fonction ne définit pas une distribution, et vice versa, mais le fourre-tout des distributions est bien plus significatif que celui des fonctions).

5d) Propriétés "concernant les objets d'un ensemble"

Étant donné un ensemble $E = (X_E,=_E)$ une propriété $P(x)$ concernant une variable x de type X_E sera dite : concerner les objets de l'ensemble E si on a :

– $\forall\, x \in X_E, \forall\, x' \in X_E,\quad x =_E x' \Rightarrow (P(x) \Leftrightarrow P(x'))$

On dit encore que la propriété $P(x)$ définie pour les objets de type X_E est cohérente avec la relation d'égalité $=_E$. En mathématique classique on dirait que la propriété $P(x)$ passe au quotient.

Par exemple, dire qu'une opération f de X_E vers X_F est extensionnelle (paragraphe précédent) signifie que la propriété $y =_F f(x)$ concerne l'objet x de l'ensemble E.

Un exemple important est la relation d'inégalité (positive) dans l'ensemble $G = \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$. Étant données deux suites d'entiers $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ la relation $u \neq_G v$ signifie par définition :

– $\exists\, n \in \mathbb{N}\ \ u_n \neq v_n$

Cette relation d'inégalité concerne bien les éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$. En outre

– $\neq_G$ est symétrique : $\quad x \neq_G y \Rightarrow y \neq_G x$
– $\neq_G$ est cotransitive forte : $\quad x \neq_G y \Rightarrow (x \neq_G z$ ou $y \neq_G z)$
– $\neq_G$ est de caractère positif (sa vérité résulte d'un simple calcul)
– $=_G$ est équivalente à la négation de $\neq_G$

Les ensembles munis d'une relation d'inégalité vérifiant ces propriétés sont relativement agréables à utiliser d'un point de vue constructif. Parmi ceux-ci, il y a l'ensemble des réels et plus généralement les espaces métriques séparables complets.

5e) Espaces métriques séparables complets

Constructivement un espace métrique séparable complet M est donné par :

– un ensemble énumérable E_M (c.-à-d. un ensemble E_M et une fonction surjective de $\mathbb{N}$ sur E_M) qu'on peut voir comme l'ensemble des points rationnels de M
– un écart défini sur E_M c.-à-d. une fonction $d_M : E_M \times E_M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ vérifiant les propriétés usuelles de symétrie et d'inégalité triangulaire.

Le type sous-jacent à l'ensemble M est alors le type des suites de points rationnels

$$(x_n) \in (\mathbb{N} \longrightarrow E_M)\ \ (30)$$

---

30 Comme l'ensemble E_M est énumérable, les êtres mathématiques permettant de définir les points de l'espace M peuvent être vus comme des suites d'entiers. Ainsi les objets de base des mathématiques usuelles sont basés sur le seul type $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

qui sont des suites de Cauchy. En pratique on peut se limiter à celles vérifiant un critère de convergence "géométrique" :

– $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad d_M(x_n,x_{n+1}) < 1/2^n$

On définit alors une inégalité et une égalité sur M par :

– $(x_n) \neq_M (y_n)$ signifie $\exists\, n\ d_M(x_n,y_n) > 1/2^{n-1}$, et $x =_M y$ signifie $\neg\, x \neq_M y$

On montre qu'on peut prolonger par continuité l'écart d_M défini sur E_M et on obtient une distance, encore notée d_M , définie sur M .

On peut rendre compte de cette manière de la plupart des espaces manipulés en analyse et donner un contenu constructif à l'analyse enseignée à l'université.

5f) Et l'axiome du choix ?

Un énoncé équivalent à l'axiome du choix classique est le suivant :

– si on a deux ensembles X et Y et une fonction surjective f de X sur Y alors il existe une fonction g de Y vers X telle que $f \circ g = Id_Y$

Il résulte immédiatement des définitions données jusqu'à maintenant que l'axiome du choix est valable sous la forme suivante en mathématiques constructives :

– si on a deux types X et Y et une opération surjective f de X sur Y alors il existe une opération g de Y vers X telle que $f \circ g = Id_Y$

Le problème avec l'axiome du choix est lorsqu'on demande qu'une opération réalisant certains buts puisse être remplacée par une fonction, c.-à-d. qu'elle ait un caractère extensionnel. Par exemple, pour tout réel x il existe un entier naturel m tel que $x < m$. Cela signifie constructivement que, à partir d'une suite de Cauchy de rationnels (rappelons nous que le fait d'être une suite de Cauchy, puisqu'il est affirmé, est explicitable), on pourra construire un entier m strictement supérieur à sa limite. Cette opération $(x_n) \longmapsto m$ n'offre aucune difficulté, mais on ne sait pas la remplacer par une fonction qui réaliserait les mêmes objectifs (car les seules fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{N}$ qu'on sache construire sont les fonctions constantes).

J'entends déjà des soupirs de désespoir : est-il vraiment possible de faire des mathématiques sans disposer de la fonction «partie entière» sur les réels ? La réponse est bien simplement «oui». Si on a besoin d'avoir un entier qui minore le réel x on sait le faire sans le secours de cette fonction. Et si on a besoin de la fonction elle même (pas seulement d'une opération), en général c'est sous la forme «la fonction partie entière en tant qu'élément de tel ou tel espace fonctionnel», mais alors justement, peu importe que la fonction soit partout définie, et il est bien clair que la fonction partie entière est, constructivement, presque partout définie.

Très brève conclusion

Nous terminerons ici notre présentation des mathématiques constructives, en ayant l'espoir d'avoir suscité la curiosité de la lectrice. Si notre but est atteint nous espérons pour elle qu'elle lit bien l'anglais mathématique et qu'elle a facilement accès à des bibliothèques universitaires, ce qui lui permettra, peut être, de prendre connaissance de quelques textes de base signalés dans la bibliographie.

Signalons qu'aucun éditeur scientifique de langue française contacté à ce jour (tous conseillés par d'éminents mathématiciens, en général bourbakistes([31])) ne semble intéressé par le projet d'une édition en français du texte fondateur de Bishop.

---

31 Il ne faut quand même pas désespérer. Les éditions Hermann ont fini par accepter en 1984 de publier une traduction française de "Preuves et Réfutations" de I. Lakatos, un des socles de l'épistémologie contemporaine des mathématiques, ... mais l'épistémologie de Lakatos n'étant pas celle de Bourbaki, il a fallu patienter très trés longtemps ....