Mathématiques constructives
Hier et Demain

Introduction

Nous sommes arrivés dans une période où le goût des "grandes abstractions" est un peu retombé en mathématiques.
Cela tient en partie au développement des méthodes numériques efficaces dû à l'explosion informatique.
Par ailleurs, les ordinateurs, gros et moins gros, savent désormais manipuler des expressions formelles compliquées, calculer des intégrales sous forme littérale explicite ....
Cela a augmenté l'intérêt général pour les méthodes algorithmiques, et pas seulement dans le cadre de l'analyse numérique.
Enfin, la communauté mathématique a toujours été intéressée à rendre effectifs des résultats d'existence "abstraits". Une preuve d'existence qui donne un moyen algorithmique de construire l'objet (dont on affirme qu'il existe) est considérée par tout le monde comme supérieure à une preuve d'existence purement abstraite.

En 1967, le livre de Bishop "Foundations of Constructive Analysis" a créé une certaine surprise: ce livre démontrait dans la pratique que les résultats de base de l'analyse classique pouvaient être rendus "effectifs", "algorithmiques".
Autrement dit, les méthodes algorithmiques ne sont pas seulement praticables en algèbre pour des structures énumérées, mais dans tout le domaine mathématique.
Ce livre est cependant passé pratiquement inaperçu en France. Et alors que tous les mathématiciens sentent spontanément la différence entre une méthode abstraite et une méthode constructive, l'opposition radicale des deux méthodologies n'est pas clairement identifiée.

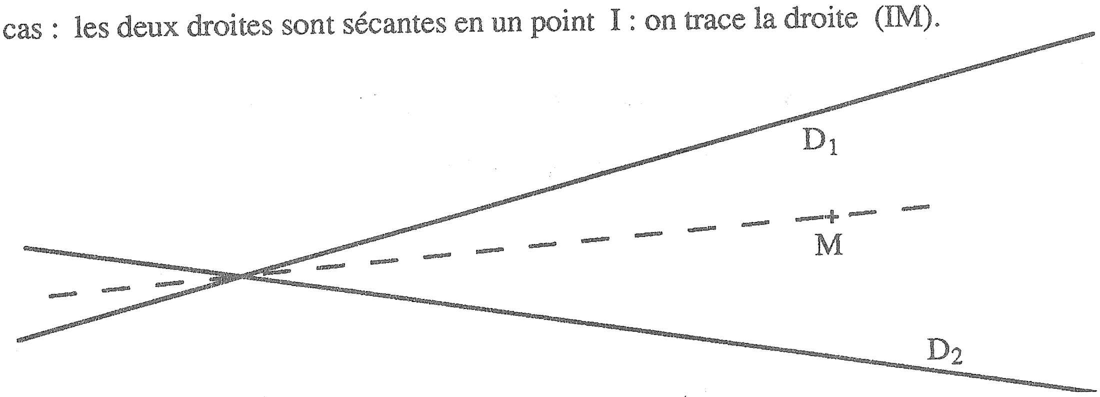
Trois exemples d'opposition entre les méthodologies cantoriennes et constructives

Constructions ... géométriques

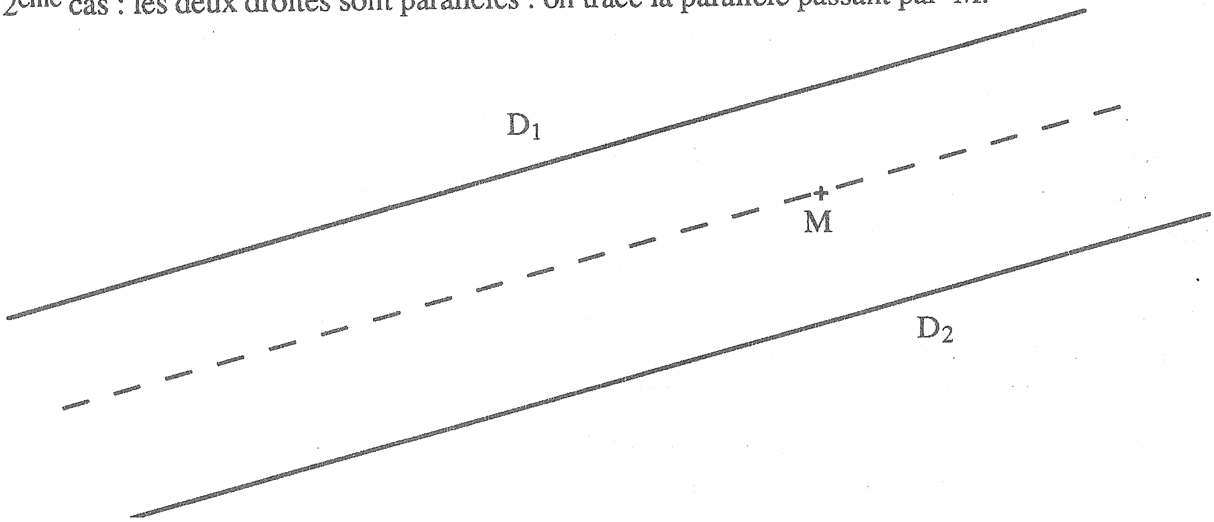
On donne deux droites distinctes D_1, D_2, et un point M extérieur à ces deux droites. Construire une droite D_3 passant par M et telle que les trois droites soient "en faisceau".

Du point de vue cantorien abstrait habituel
Il n'y a pas à proprement parler de problème de construction. On dira:

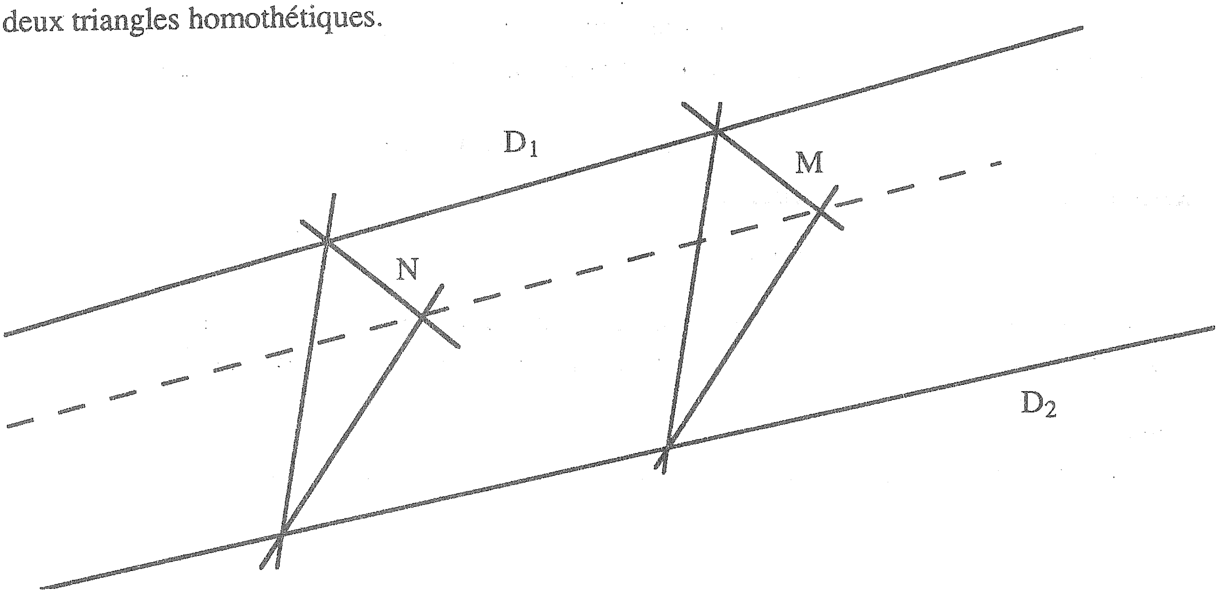
1er cas : les deux droites sont sécantes en un point I : on trace la droite (IM).



2ème cas : les deux droites sont parallèles : on trace la parallèle passant par M.



Du point de vue du dessinateur qui dispose d'une feuille de papier fini sur laquelle sont tracées les deux droites et le point si les deux droites se coupent en dehors de la feuille de papier, on résout le problème par une construction de 3ème concourante, faisant par exemple intervenir deux triangles homothétiques.



Il est à noter que cette construction donne aussi le bon résultat lorsque les deux droites sont parallèles.

Du point de vue des mathématiques constructives
On considère qu'on dispose d'une feuille de papier fini, mais arbitrairement grande. On n'a

donc aucune méthode *générale* pour décider si deux droites qui *semblent* parallèles sont sécantes ou non. La construction du dessinateur nous sauve cependant la mise. Il y a donc un concept constructif de $3^{ème}$ concourante, qui recouvre le cas de la $3^{ème}$ concourante lorsque les deux droites de départ sont sécantes et celui de la $3^{ème}$ parallèle lorsque les deux droites de départ sont parallèles. (par exemple, on peut définir trois droites "en faisceau", en disant que le produit des trois symétries par rapport à ces droites doit être une symétrie)
A noter cependant que, pour que la construction fonctionne bien, les deux droites de départ doivent être clairement distinctes.
Ainsi le point de vue constructif apparaît comme une abstraction "raisonnable" de celui du dessinateur, tandis que le point de vue cantorien, qui accepte le plan euclidien comme une totalité préexistante, est une abstraction "purement idéale".

Remarques
Le dessinateur est confronté à d'autres limitations que celle due à la taille finie, fixée a priori, de sa feuille de papier. Pour lui, en effet :

– deux points distincts mais "trop proches" ne définissent pas une droite

– deux droites sécantes mais "faisant un angle trop petit" ne définissent pas un point d'intersection

– un cercle de rayon trop petit ne peut pas être tracé

– le point de contact entre un cercle et une droite tangente doit être construit (alors qu'il est parfaitement défini comme unique point commun au cercle et à la droite).

En mathématiques constructives, on a des limitations tout à fait analogues:

– on ne peut pas dire "soit D une droite passant par A et B" sauf si on est assuré que les deux points sont clairement distincts, ou qu'ils sont confondus.

– etc...

Une preuve en arithmétique

On considère le théorème d'existence du PGCD de 2 nombres entiers positifs.

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall\, a, b \in \mathbb{N}^+ \ \exists\, c \in \mathbb{N}^+ \ \forall\, d \in \mathbb{N}^+ : \\ d \text{ divise } c \iff d \text{ divise } a \text{ et } b\end{array}}$$

Preuve constructive

1) on décrit l'algorithme d'Euclide (divisions successives)
2) on démontre qu'il se termine en moins de .... étapes
3) on prouve que le dernier reste obtenu, c est PGCD de a et b
4) on améliore un tout petit peu l'algorithme, de manière à ce qu'il fournisse en outre la relation de Bezout $u.a + v.b = c$ (avec u et v dans $\mathbb{Z}$).

Preuve cantorienne

1) on démontre le résultat général suivant :
 toute partie non vide de $\mathbb{N}^+$ possède un plus petit élément
2) on considère la partie I de $\mathbb{N}^+$ définie par

$$I := \{ x \in \mathbb{N}^+ \; ; \; \exists \; u, v \in \mathbb{Z} \; , \; u.a + v.b = x \}$$

on considère le plus petit élément c de I, et on démontre facilement que c est PGCD de a et b.
Le théorème est prouvé, et sans effort supplémentaire, on obtient l'existence "abstraite" d'une relation de Bezout.

Commentaires
La preuve cantorienne est plus élégante. Sans doute même éclaire-t-elle mieux le problème.
Cependant, elle ne fournit aucun moyen de construire le PGCD ou la relation de Bezout.
Si on veut rendre constructive la démonstration cantorienne, on procédera comme suit :

– le résultat (1) est vrai constructivement sous la forme suivante :

  Si on sait tester l'appartenance d'un entier à une partie explicitement non vide de $\mathbb{N}^+$, alors on sait construire le plus petit élément de cette partie

– pour utiliser le résultat (1) dans la deuxième partie du raisonnement, il faut donc montrer qu'il existe un test d'appartenance pour la partie I considérée.
C'est faisable, au prix de la perte de l'élégance de la démonstration.
En outre, on se rendra facilement compte du fait que l'algorithme sous-jacent à cette démonstration est beaucoup moins performant que l'algorithme d'Euclide : si a et b sont de l'ordre de 1 million, l'algorithme d'Euclide va demander une trentaine d'étapes et l'autre algorithme en moyenne 500 mille étapes.

Un théorème d'analyse

On considère le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $f : [\,a\,,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(a) < 0 < f(b)$ alors $\exists\, c \in \,]\,a\,,b\,[$ tel que $f(c) = 0$

Les premières démonstrations de ce théorème remontent à Bolzano et à Cauchy.
Bolzano donne une démonstration du type " borne supérieure des x où $f(x) \leq 0$ ". Pour lui, il s'agit de parachever les démonstrations par Gauss du théorème fondamental de l'algèbre. Bolzano remarque que les différentes démonstrations proposées utilisent toutes des arguments du genre "théorème des valeurs intermédiaires".
Or, dit Bolzano, en toute rigueur, l'évidence géométrique ne doit pas être utilisée pour démontrer un résultat dans un domaine où la géométrie n'a rien à voir.
Pour Cauchy, l'évidence géométrique du théorème est suffisamment forte (dans son cours à l'École Polytechnique) mais il prend quand même la peine de donner en annexe une démonstration par dichotomie pour ceux qui veulent une preuve relevant purement de l'analyse.
Nous allons voir qu'en fait, le théorème des valeurs intermédiaires, sous sa forme la plus générale, n'est pas démontrable constructivement. Ainsi, Bolzano, qui pensait avoir achevé la preuve de Gauss, n'avait fait que la moitié du travail. C'est Brouwer, au début du XXème siècle, qui donnera la première preuve constructive du théorème fondamental de l'algèbre.
Nous allons d'abord présenter l'algorithme classique par dichotomie, avant de le critiquer et de proposer quelques substituts au théorème "abstrait" des valeurs intermédiaires.

L'algorithme par dichotomie classique

Algorithme Zéro Dichotomie Exacte

<u>Description des variables utilisées</u>

```
nombres rationnels
a,b      :  bornes de l'intervalle
u, v     :  approximation par défaut et par excès de la racine
w        :  (u+v)/2
epsilon  :  majoration de l'erreur souhaitée
z        :  valeur approchée de la racine

Signes: (+1, -1  ou  0)
Su, Sv, Sw :     signes de la fonction aux points u, v, w

fonction continue sur   [a,b] :
f        :  la fonction dont on cherche un zéro
```

Cet algorithme traite les entrées a, b, epsilon, f et donne en sortie une valeur approchée (à epsilon près) z d'une racine c de f sur [a , b], la racine c ne dépendant pas de epsilon. La fonction f doit changer de signe aux bornes de l'intervalle de départ. L'algorithme donne un résultat sûrement correct si le calcul du signe de f(x) est effectif.

Algorithme détaillé

```
Module ZÉRO  DICHOTOMIE  EXACTE
    Variables
      entrées     : a, b, f, epsilon
      retournées  : z
      locales     : u, v, w, Su, Sv, Sw
Début
     u ← a; v ← b;
     Su ← Signe(f(u)); Sv ← Signe(f(v)) ;
     Si  Su.Sv < 0  alors
          Début
          Répéter
               w ← (u+v)/2;
               Sw ← Signe(f(w));
               Si  Sw = 0  alors début  u ← w; v ← w fin
               sinon si Su.Sw > 0 alors  u ← w sinon  v ← w;
          jusqu'à ce que  |u - v|  < 2.epsilon ;
          z ← (u+v)/2
          fin
     sinon  signaler "intervalle mal choisi"
fin
```

Commentaire

L'algorithme ne tourne en pratique que si on sait déterminer les signes successifs de f(w). Donc, si f est donnée, de manière absolument générale en tant que fonction uniformément continue sur l'intervalle considéré, l'algorithme ne tourne pas à tout coup: il peut très bien échouer à tester le signe de f(w) pour une certaine valeur de w .

D'ailleurs, cet algorithme fournit un zéro (calculé avec une précision arbitraire) qui ne dépend que de la fonction f . Mais une méthode algorithmique générale traitant en entrée une fonction continue définie sur [a , b] (avec f(a) et f(b) fixés par exemple) et qui fonctionne de

manière *extensionnelle*(1) donne obligatoirement un résultat qui dépend continûment de la donnée f . Ceci parce qu'un algorithme n'a accès qu'à un nombre fini d'informations au cours de son calcul.
Or, manifestement, le calcul du zéro d'une fonction f strictement croissante (pour ne considérer que ce cas) ne peut pas être prolongé *continûment* aux fonctions croissantes "tout court".

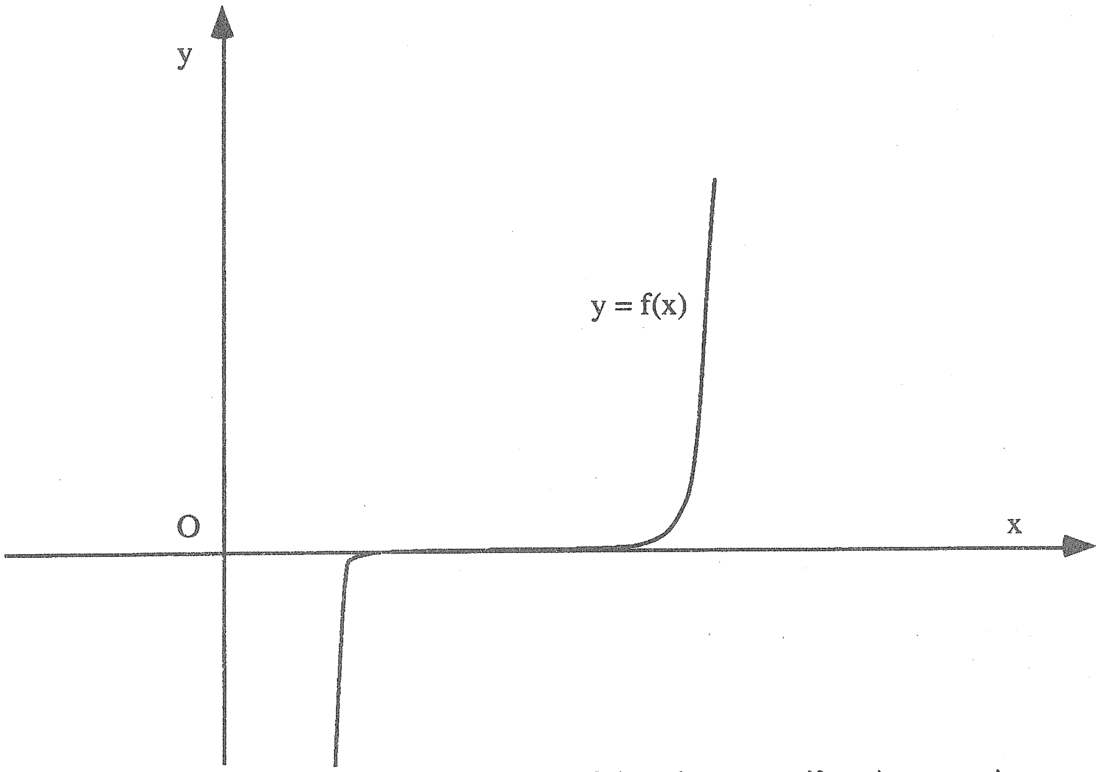


figure 3 : une fonction très voisine de f (pour la norme uniforme) peut avoir un zéro unique très éloigné de celui de f

Quelles sortes d'objets sont un nombre réel, une fonction continue, d'un point de vue algorithmique, constructif ?

Un nombre réel x est connu lorsqu'on connaît, pour chaque entier n un nombre rationnel qui approche x à $1/2^n$.

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est connue *en tant que fonction continue* lorsqu'on connaît, pour chaque entier n une approximation rationnelle de f avec la précision $1/2^n$, pour la norme uniforme. Par "approximation rationnelle" on entendra par exemple une fonction linéaire par morceaux rationnels.

Remarque : on traite de la même manière tous les espaces métriques complets séparables.

On voit que de ce point de vue, un nombre réel ou une fonction continue peuvent très bien être considérés comme une entrée ou une sortie d'un algorithme.
Nous sommes fondamentalement dans la même situation que celle décrite pour le plan euclidien: nous avons accès à une partie finie, mais arbitrairement grande, de l'information contenue dans l'objet considéré.

---

1 c'est à dire que le résultat ne dépend que de la donnée f en tant que fonction, et non de la manière dont cette donnée est présentée

Le lecteur se demande sans doute ici s'il est bien sérieux d'envisager de faire de l'analyse sans le théorème des valeurs intermédiaires. Nous allons expliquer comment la difficulté peut être tournée.

Trois théorèmes constructifs qui explicitent les significations réelles du théorème des valeurs intermédiaires

Hypothèse : soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(a) < 0 < f(b)$

Théorème 1 (le théorème pour les physiciens)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c \in [a, b] : \ |f(c)| \leq \varepsilon$$

L'algorithme se déduit aisément de l'algorithme de dichotomie classique: on calcule un rationnel approchant $f(w)$ à $\varepsilon/2$, ce qui permet de situer $f(w)$ sur un intervalle rationnel de longueur $\leq \varepsilon$. On en déduit : $f(w) < 0$ ou $f(w) > 0$ ou $|f(w)| \leq \varepsilon$. On montre que l'algorithme termine en un temps fini en utilisant la continuité uniforme de la fonction f (continuité uniforme qui est connue de manière explicite).

Théorème 2 (le théorème pour les pinailleurs)

Si $f(x)$ est clairement distinct de 0 pour tout $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$,
alors $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$
En particulier, il est absurde de supposer que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x)$ soit clairement distinct de 0.

En effet, sous l'hypothèse énoncée, l'algorithme par dichotomie classique “tourne”: quand un nombre est supposé clairement distinct de 0, il suffit de le calculer avec une précision suffisante pour connaître son signe.
La deuxième affirmation du théorème explicite le contenu constructif du théorème des valeurs intermédiaires classique. On voit que cela présente un intérêt relativement limité.
La première affirmation du théorème permet par exemple de démontrer le théorème de la valeur intermédiaire classique pour une fonction polynome à coefficients rationnels. Cela ne suffit pas pour traiter tous les polynomes à coefficients réels.
Néanmoins, on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 3 (pour les fonctions analytiques réelles)

Si $x \longmapsto f(x)$ est une fonction analytique réelle, alors $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$

La démonstration de ce théorème est relativement difficile, et il faut bien expliciter le contenu algorithmique de l'affirmation “la fonction réelle f est une fonction analytique”. Si le but est de démontrer le théorème fondamental de l'algèbre, on pourra se limiter aux fonctions polynomes à coefficients réels, pour lesquelles une preuve relativement simple peut être donnée.

Il faut noter cependant qu'il existe des preuves du théorème fondamental de l'algèbre reposant sur une évidence géométrique : par exemple on pose $z = r\,e^{i\theta}$, et on regarde comment évolue la courbe fermée obtenue pour r fixé et θ variable, lorsque r varie de 0 à ∞. C'est sûrement une démonstration beaucoup plus éclairante du théorème, même si elle manque de rigueur dans la mesure où il est difficile d'en déduire un algorithme de calcul d'une racine du polynome.

Points de repère historiques concernant le débat philosophique

On aura remarqué que la différence entre les deux méthodologies (constructive et cantorienne) repose sur une différence d'attitude à l'égard de l'infini.
Le point de vue constructif tient l'infini pour une abstraction de caractère "négatif" (l'ensemble des nombres entiers n'est jamais épuisé), et se rattache à la tradition grecque de l'infini potentiel.
Le point de vue cantorien estime l'existence d'ensembles infinis "en acte" comme assurée, au moins dans un univers mathématique idéal. En conséquence, on peut raisonner avec les ensembles infinis de la même manière qu'avec les ensembles finis, sans précautions supplémentaires.
Les points de repère qui suivent se veulent tout sauf exhaustifs et objectifs. Ils sont écrits d'*un* point de vue constructif (parmi d'autres).

L'infini chez les grecs

Chez Euclide, une droite n'existe jamais "en entier". Il y a seulement des segments de droites, qu'on peut prolonger "à volonté".
Le nombre $\sqrt{2}$ ne peut pas être *nommé,* il n'a pas le statut d'un nombre parce qu'il ne possède pas de description arithmétique finie (ce n'est pas une fraction).
Une théorie de la comparaison des rapports de grandeurs est développée, qui permet de parler des nombres réels sans jamais les nommer comme "infinis actuels". Comme en mathématiques constructives, l'égalité est de nature négative (double réduction à l'absurde), alors que les inégalités strictes ont un caractère positif.
Cette distinction entre énoncés de caractère positif et énoncés de caractère négatif disparaît si l'on admet que " deux négations valent une affirmation".
Le paradoxe de Zénon nous parle aussi de l'infini. Il peut être interprété comme une réfutation de la possibilité d'existence de l'infini actuel.

La crise des infinitésimaux

L'efficacité du calcul différentiel et de la méthode des infinitésimaux prépare le terrain pour la reconnaissance d'un statut "ordinaire" accordé à l'infini. C'est en raisonnant sur des infiniment grands et infiniment petits *comme si* c'était des quantités finies, c'est à dire en se débarrassant des scrupules imposés par la tradition grecque, qu'on obtient, par des méthodes uniformes et extraordinairement efficaces, des résultats qui auparavant étaient inaccessibles ou dans le meilleur des cas demandaient une ingéniosité toujours renouvelée.
Les notions de nombre réel et de fonction s'avèrent des notions fondamentales.
Cependant, on ne trouve pas de justification convaincante pour ces objets qui sont des sortes d'infinis en acte.
La crise sera résolue en chassant les infinitésimaux au profit de la notion de limite, mais en accordant un statut à part entière aux nombres réels en tant qu'infinis actuels.
Il faudra attendre l'analyse non standard d'A. Robinson dans les années 60 pour s'apercevoir que les infinitésimaux ne sont ni plus ni moins sulfureux que les nombres réels. Dans sa version Internal Set Theory, l'analyse non standard peut aujourd'hui être considérée comme une meilleure heuristique de l'analyse constructive que l'analyse classique.

La crise des géométries non euclidiennes

L'existence des géométries non euclidiennes, tout aussi cohérentes que la géométrie euclidienne, introduit un bouleversement conceptuel concernant la notion de vérité, et la place des mathématiques.
Avant les géométries non euclidiennes, on pouvait croire à l'existence d'une vérité géométrique "absolue", que l'esprit humain, par la seule force de son raisonnement, arrivait à maîtriser.
Après, tout change. L'esprit humain ne fait plus que proposer des modèles mathématiques imparfaits pour une description proprement humaine d'une réalité extérieure fuyante et insaisissable dans sa totalité. Il va maintenant falloir mesurer la somme des angles de très grands triangles et regarder des étoiles cachées derrière le soleil pour savoir dans quel univers on vit. La vérité perd son caractère absolu pour devenir une construction proprement humaine et donc très relative. A tous points de vue, nous ne sommes plus au centre du monde, mais bel et bien perdus dans un coin de galaxie.
Cette notion de vérité mathématique construite par l'esprit humain est au coeur de la problématique intuitionniste de Brouwer.

Cantor et l'avènement de l'infini actuel

On a du mal à imaginer à quel point Cantor heurtait de front les conceptions établies en introduisant la théorie des ensembles infinis "actuels". C'était à l'époque un véritable acte de foi. Ses articles étaient systématiquement refusés par Kronecker. Des affirmations telles que «l'ensemble $\mathbb{N}$ est strictement plus petit que l'ensemble $\mathbb{R}$ » semblaient relever de la folie. Et Cantor lui-même avait du mal à admettre que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ont le même cardinal.
Cependant, c'est bien grâce aux infinis actuels de Cantor qu'on a pu donner une "construction" de l'ensemble des nombres réels, ou la définition générale de la notion de fonction.

Les paradoxes de la théorie des ensembles et les avatars de l'hypothèse du continu

Les constructions d'infinis autorisés par la théorie des ensembles de Cantor sont a priori aberrantes: imaginez par exemple que vous mettez une relation de bon ordre sur $\mathbb{R}$, puis que par récurrence transfinie sur ce bon ordre vous construisez à chaque étape l'ensemble des parties de la réunion des ensembles précédemment construits, en ayant démarré avec l'ensemble $\mathbb{N}$ .... au bout du compte vous obtenez quelque chose de vraiment très très très **gros**, et dont l'utilité mathématique est tout à fait contestable.
Certains ensembles infinis s'avèrent de toute manière trop grands, trop infinis: par exemple

$$X = \{ x ; \ x \text{ est un ensemble tel que } x \notin x \}$$

Ensemble pour lequel on a $X \in X \Leftrightarrow X \notin X$.
On se tirera d'affaire en décrétant que les ensembles trop infinis ne sont pas des ensembles, mais des classes(2). La théorie formelle correspondante n'a depuis donné lieu à aucune contradiction logique.
Par ailleurs Brouwer développe une réfutation systématique de la notion d'infini actuel et met en pratique des mathématiques où le principe du tiers exclu n'est plus admis pour les affir-

2 Un ensemble peut être élément d'une classe, mais les classes "trop infinies" ne sont éléments d'aucun ensemble

mations correspondant à une infinité de vérifications. La logique sous-jacente sera formalisée par Heyting, sous le nom de logique intuitionniste.
Enfin, la comparaison des infinis selon leur taille va réserver quelques surprises.
Cantor passera la fin de sa vie à essayer, sans succès, de démontrer "l'hypothèse du continu": il n'y a pas de cardinal strictement compris entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$.
Skolem démontrera que toute théorie mathématique formelle cohérente possède un modèle dont le cardinal est celui de $\mathbb{N}$: dans un tel modèle, $\mathbb{R}$ n'admet pas "plus" d'éléments que $\mathbb{N}$, et il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ... mais elle ne fait pas partie du modèle.
Plus tard K. Gödel et P. Cohen démontreront que l'hypothèse du continu est indépendante des axiomes communément admis pour la théorie des ensembles.
Face à ce genre de résultats, deux attitudes opposées sont développées.
Les uns, comme Skolem, estiment que la comparaison des cardinaux a un caractère très relatif. Pour eux, l'infini ne correspond à aucune réalité et est simplement une manière de parler.
Les autres, comme Gödel, s'en tiennent à un point de vue "réaliste": un univers mathématique cantorien existe bel et bien, et dans cet univers, l'hypothèse du continu est nécessairement vraie ou fausse. En conséquence, ils estiment que de nouveaux axiomes raisonnables doivent être cherchés, qui décideront vraie ou fausse l'hypothèse du continu.
Du point de vue constructif, $\mathbb{R}$ est un infini potentiel *plus compliqué (et non pas plus grand)* que $\mathbb{N}$. Mais il y a aussi des parties de $\mathbb{N}$ qui sont plus compliquées que $\mathbb{N}$, et en particulier il n'est pas absurde de supposer que l'infini potentiel $\mathbb{R}$ est isomorphe à une partie compliquée de l'infini potentiel simple $\mathbb{N}$ (cette hypothèse est admise comme vraie par l'école constructive russe héritière de Markov).

Le programme de Hilbert

Hilbert tient les critiques de Brouwer pour sérieuses. Mais ce qui lui importe, c'est avant tout de faire des mathématiques. Or les mathématiques sont plus faciles à faire dans le paradis de Cantor que dans l'enfer de Brouwer.
Hilbert tient le langage suivant : finalement peu nous importe de savoir si les infinis actuels existent ou non, si l'hypothèse du continu est vraie ou fausse, si elle a un sens ou si elle n'en a pas; ce qui nous importe, c'est de savoir si, en utilisant la théorie des ensembles infinis, on est assuré de ne jamais démontrer des énoncés qui ont du sens mais qui seraient faux. C'est exactement la même attitude que vis à vis des nombres imaginaires qui servent à trouver la racine réelle d'une équation du troisième degré : l'important est avant tout que, une fois le calcul terminé, et les nombres imaginaires évaporés, le résultat soit juste.
Autrement dit, si on pouvait réduire l'infini mathématique à n'être qu'une manière de parler, on serait pleinement satisfaits.
Pour cela, il faut considérer une théorie purement formelle, dans laquelle on puisse librement utiliser les infinis de Cantor d'une part, et dans laquelle on puisse écrire les énoncés mathématiques qui "ont sûrement du sens", d'autre part.
Ensuite, il faut, par des méthodes constructives, démontrer que tout énoncé "ayant du sens" et démontré comme vrai dans la théorie formelle, est vrai dans la réalité.
La première théorie à tester est une théorie très simple (la théorie formelle dite *de Peano*) où on peut tout juste écrire quelques énoncés concernant les entiers naturels, mais où la logique du tiers exclu est admise, même pour des énoncés correspondant à une infinité de vérifications.
Ensuite, il faudra passer à des théories plus sophistiquées, en espérant un jour traiter la théorie des ensembles elle-même.
Gödel apportera deux réponses contradictoires au problème posé.

La première réponse est que, pour de qui concerne la théorie de Peano, la logique *avec tiers exclu* n'introduit aucune contradiction. En particulier, comme la théorie de Peano sans tiers exclu (l'arithmétique de Heyting) est admise comme consistante par tout le monde, on peut être assuré que la théorie de Peano est non contradictoire (Hilbert gagne donc par un point à zéro). Gödel ira plus loin et proposera de donner un sens constructif aux énoncés et aux preuves de la théorie de Peano (Hilbert gagne par deux points à zéro).
Néanmoins, on n'a pas réussi pour le moment à faire le travail analogue pour des théories formelles plus sophistiquées que celle de Peano; et cette dernière est bien trop pauvre pour pouvoir être prise comme base du travail mathématique ordinaire.
La deuxième réponse est que, pour toute théorie formelle qui prétend décrire au moins $\mathbb{N}$, la cohérence de la théorie ne peut pas être démontrée avec les seuls moyens formalisés dans la théorie.
A fortiori, la théorie des ensembles semble bien ne jamais pouvoir être prouvée consistante dans la mesure où on a incorporé dans son formalisme toutes les méthodes de démonstrations connues, mêmes celles qui sont le plus douteuses (deux points à un).
En fait, le théorème d'incomplétude de Gödel milite en faveur d'une vérité mathématique non préétablie, mais en état de construction permanente.
Une réponse d'une toute autre nature est apportée par Bishop en 1967 avec son livre d'analyse constructive: Cantor n'est pas le paradis, et Brouwer n'est pas l'enfer. En ne mettant en oeuvre que les idées les plus incontestables de Brouwer, on fait une mathématique, certes un peu plus difficile, mais où tous les énoncés ont du sens, où tous les théorèmes sont incontestables (par toutes les écoles de pensée), et où, simplement, on regarde un peu plus en détail la signification algorithmique réelle des énoncés classiques. (deux points partout).

Le point de vue formaliste

Il s'agit d'une attitude repli frileux, bizarrement adoptée par Bourbaki dans son introduction, et qui n'a en réalité que bien peu d'adeptes()[3]. On peut la résumer par "courage, fuyons!", fuyons la question du sens puisqu'elle nous embête. Vous croyiez naïvement faire *des* mathématiques dans le but de construire des modèles abstraits pour le mouvement des planètes, la propagation de la chaleur où les éruptions volcaniques. Vous vous trompiez, vous êtes en train de jouer à un nouveau jeu, fort intelligent, très sophistiqué, qui s'appelle *la* mathématique, et dont les règles ont été édictées, 4000 ans a posteriori mais pour l'éternité à venir, par quelques très grands savants dans leur infinie sagesse, très grands savants qui, comble de modestie, ne donnent même par leur nom sur la couverture. Les situations (parfois encore appelées énoncés) gagnantes de ce jeu subtil s'appellent "théorèmes". Amusez-vous bien. Plus les théorèmes démontrés auront l'air d'avoir du sens et plus ce sera amusant. Mais gardez vous bien de croire qu'ils aient réellement du sens.

Et demain ?

La situation actuelle est dominée par la pragmatisme. Dans la mesure où les résultats de nature effective sont de plus en plus recherchés, on peut penser que la méthodologie constructive va finir par s'imposer comme la méthodologie normale. Néanmoins, les facilités offertes par le tiers exclu et l'axiome du choix sont grandes, et les fabricants de théorèmes ne sont pas prêts à

---

3 La majorité des mathématiciens, y compris sans nul doute les rédacteurs de Bourbaki, est sur une position proche de celle de Gödel.

lâcher la proie pour l'ombre. En fait le programme de Hilbert reste à réaliser : démontrer que, si on délimite convenablement le cadre de travail, l'analyse et l'algèbre classiques, ou mieux, non standards, ne conduiront jamais à des résultats faux sur les énoncés qui ont du sens.

Quelques conclusions

Ce que ne sont pas les mathématiques constructives :

- une entreprise de déstabilisation de l'éducation nationale
- la volonté d'être encore plus rigoureux que Bourbaki, et encore plus difficile à comprendre
- un rejet des mathématiques classiques

Ce que sont les mathématiques constructives :

- une volonté de donner du sens aux énoncés mathématiques
- une bonne heuristique pour la recherche d'algorithmes performants
- l'adoption des résultats classiques (cantoriens) à titre d'heuristique pour la recherche de résultats ayant sûrement du sens
- une conception algorithmique des êtres mathématiques et de la vérité (pour les énoncés concernant ces êtres mathématiques)

Petit tableau comparatif des méthodologies cantoriennes et constructives

point de vue cantorien	point de vue constructif
utiliser des méthodes abstraites et puissantes pour obtenir de nombreux résultats, même très abstraits	donner des algorithmes pour résoudre des problèmes concrets, ou, du moins, idéalement concrets
un univers mathématique cantorien idéal existe: les êtres mathématiques y sont préexistants la vérité est préexistante dans cet univers, le but des mathématiques est de la découvrir	les êtres mathématiques sont des constructions humaines la vérité concernant ces êtres est elle-même l'objet d'une construction
acceptation de l'infini actuel	refus de l'infini actuel, acceptation de l'infini potentiel
raisonnement par l'absurde pour démontrer un théorème d'existence	toute démonstration d'existence fournit, en filigrane, un algorithme pour construire l'objet
refus du tiers cas : par exemple $\forall x \in \mathbb{R}\ (x = 0 \text{ ou } x \neq 0)$ est un théorème des mathématiques cantoriennes, alors même qu'aucun algorithme connu ne permet de le *réaliser*	acceptation du pouvoir limité du raisonnement humain, qui est de nature finie, algorithmique: le théorème en face n'est pas démontrable constructivement on peut tout juste démontrer le théorème suivant (sans intérêt) $\neg\exists x \in \mathbb{R}\ (x = 0 \text{ et } x \neq 0)$
une preuve constructive est toujours acceptable par un cantorien, mais elle semble souvent inutilement compliquée	il est souvent bien difficile d'attribuer une signification constructive à une preuve classique
la notion d'ensemble est la notion de base, prémathématique, non définie	les notions de base, non définies, sont celles de construction et d'entier naturel
$\forall x\ \exists y$ a un sens purement abstrait	$\forall x\ \exists y$ a le sens d'une construction