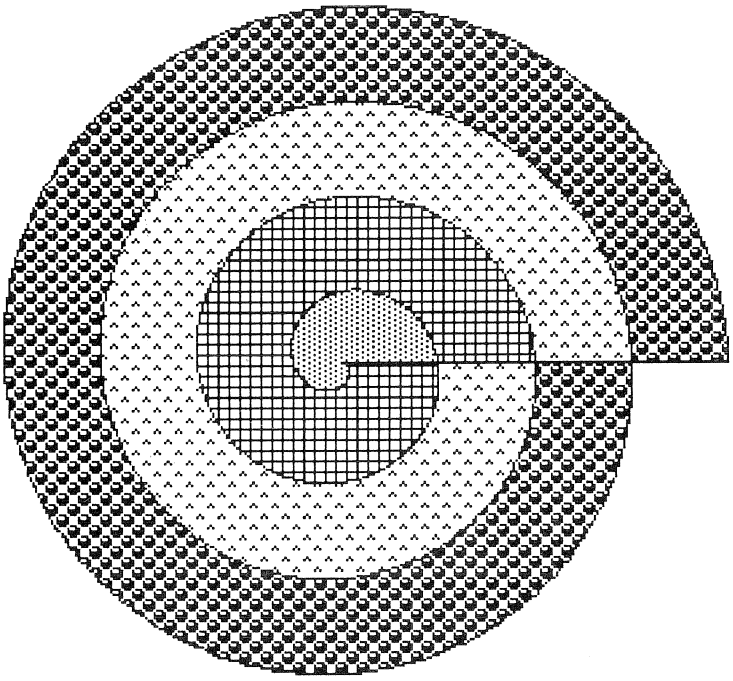
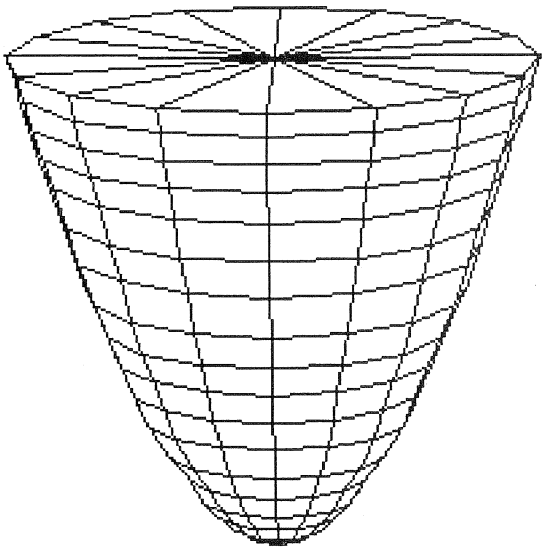
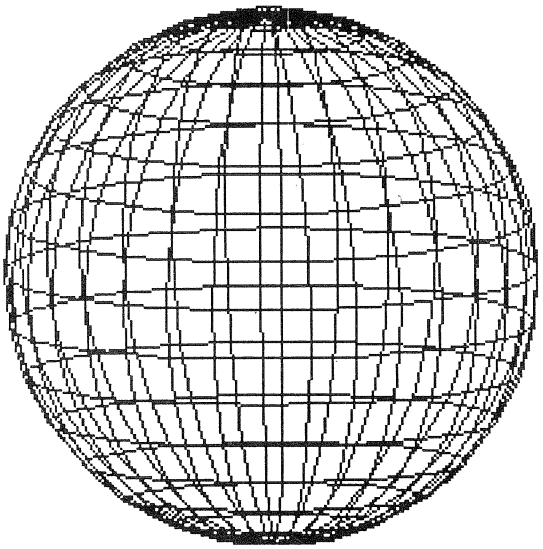
LE TRESOR D'ARCHIMEDE







BERNARD BETTINELLI

IREM DE BESANCON

LE TRESOR D'ARCHIMEDE

BERNARD BETTINELLI

INTRODUCTION

Cet ouvrage prétend présenter les démonstrations fondamentales des livres d'Archimède sous forme d'une suite de dessins.

La lecture des œuvres d'Archimède est passionnante d'un bout à l'autre, et on sent le génie de cet homme exceptionnel qui fut un novateur en géométrie comme en mécanique. C'est avec 17 siècles d'avance qu'il manie les nombres réels et le concept de limite dans le cadre géométrique, comme on le verra dans cet ouvrage.

Néanmoins, les moyens d'écriture de l'époque sont tels que toutes les relations décrites par ce grand visionnaire le sont à travers un texte écrit sans symbole et presque sans dessin.

Cette rédaction rend fastidieuse une lecture de textes qui décrivent par des mots une exceptionnelle foison d'images mentales.

J'ai donc pris le parti de faire partager mon enthousiasme pour les travaux d'Archimède en traduisant, aussi fidèlement que possible, les images mentales en dessins. Le texte est toujours présent, mais réduit au minimum, afin d'apporter un éclairage particulier lorsque la lecture des dessins présente quelque équivoque. La notation géométrique classique qui code les points-clé du plan par des lettres majuscules, a été évitée chaque fois que c'était possible, à cause du même caractère fastidieux des descriptions.

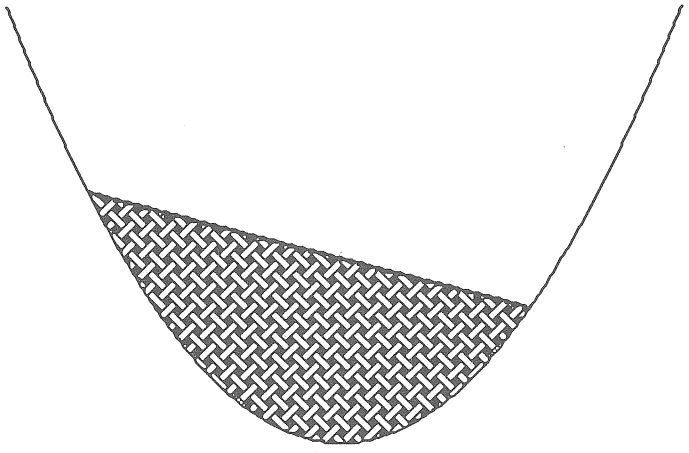
Chaque section élémentaire d'un livre d'Archimède porte le nom de PROPOSITION suivi d'un numéro d'ordre. J'ai préféré donner un nom caractéristique à chacune, car ce qui m'intéresse n'est pas l'énoncé d'un résultat, mais la présentation de l'idée neuve qui découle chaque fois des connaissances précédentes.

La plupart des livres comportent des résultats préliminaires nécéssaires aux démonstrations fondamentales. Certains sont connus d'Archimède et il renvoie le lecteur à l'auteur pour la preuve. Ainsi, tous les résultats démontrés dans ses livres, sont des découvertes d'Archimède. Le nombre énorme des résultats contenus dans les livres qui nous sont parvenus, ainsi qu'un souci d'efficacité pédagogique, m'ont conduit à extraire les démonstrations les plus caractéristiques de cette œuvre, et à proposer en exercice les corollaires qui en découlent ou des questions qui permettent une meilleure compréhension ou un élargissement.

Chapitre 1

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

(méthode géométrique)

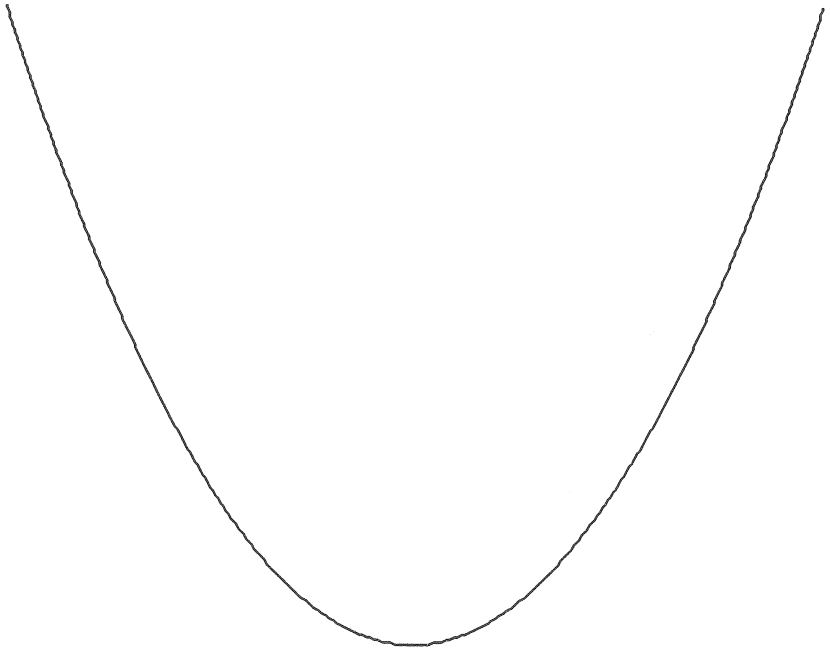


L'œuvre se partage en trois parties. La première présente des relations presque toutes connues des prédécesseurs d'Archimède et pour lesquelles il renvoie le lecteur à ces auteurs. La deuxième donne une démonstration purement mécanique du résultat fondamental de l'œuvre qui concerne l'aire d'un segment de parabole. La troisième partie reprend la même démonstration par des moyens géométriques. C'est donc une œuvre particulièrement interessante puisque s'y trouvent mèlés les deux pôles du génie d'Archimède.

C'est la démarche géométrique qui sera développée dans ce chapitre.

LE PROBLEME

LA PARABOLE

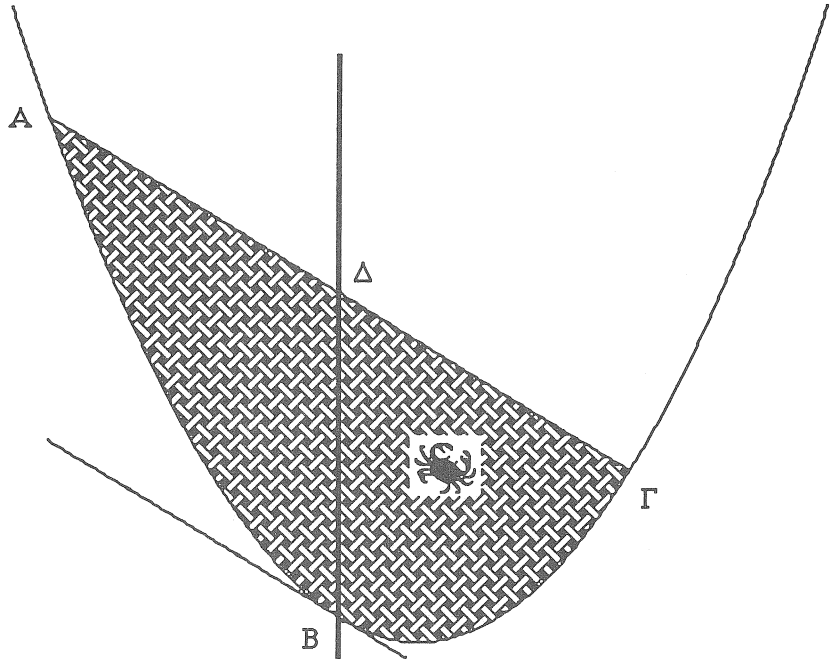


Une parabole, au temps d'Archimède, s'appelle **section droite d'un cône rectangle**. Chaque cônique est considérée comme section droite d'un cône, c'est-à-dire section par un plan perpendiculaire à une génératrice du cône. Si le cône a un angle au sommet aigu, on obtient une ellipse; s'il est droit, une parabole; et s'il est obtu, une branche d'hyperbole.

A l'époque d'Archimède, on n'a pas encore suffisamment étudié les côniques pour leur avoir inventé un nom et on n'a pas pensé - ou jugé interessant - de couper un cône autrement que perpendiculairement à une génératrice, et c'est pourquoi on considère 3 types de cônes pour engendrer les trois types de côniques.

Il faudra attendre Appolonios de Perge, le grand maître des côniques, pour une étude très poussée de ces courbes, ainsi que pour leur donner les noms de parabole, d'ellipse et d'hyperbole.

LE DEFI

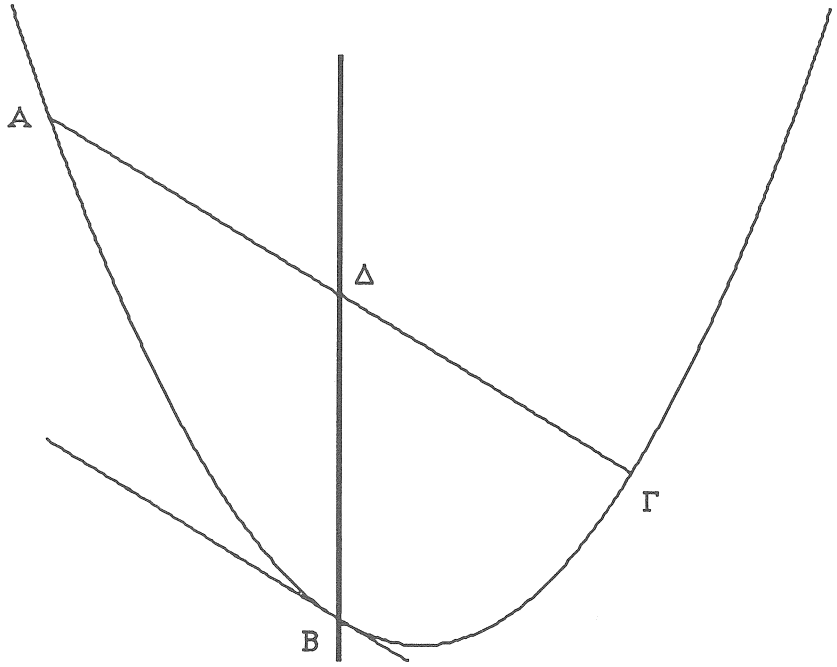


Archimède entreprend le problème de déterminer l'aire d'un **segment de parabole**, c'est-à-dire de la région située entre une parabole et une sécante. Beaucoup de tentatives furent faites par les Grecs pour rapprocher les aires de surfaces non polygonales, des grandeurs mesurables que sont les rectangles ; de la même façon qu'ils avaient su exprimer l'aire de toute surface polygonale par rapport à celle de certains rectangles (l'aire d'un triangle, par exemple, est toujours moitié de celle d'un rectangle "circonscrit").

C'est par un procédé dichotomique, c'est-à-dire par découpages en deux successifs, qu'Archimède réussit génialement la quadrature de la parabole. Il reprendra le même problème deux fois encore au cours de son œuvre, par des méthodes liées au principe physique du levier qui est un de ses titres de gloire. Nous verrons l'une d'elles au dernier chapitre.

LA RELATION FONDAMENTALE

TANGENTE AU SOMMET ET DIAMETRE

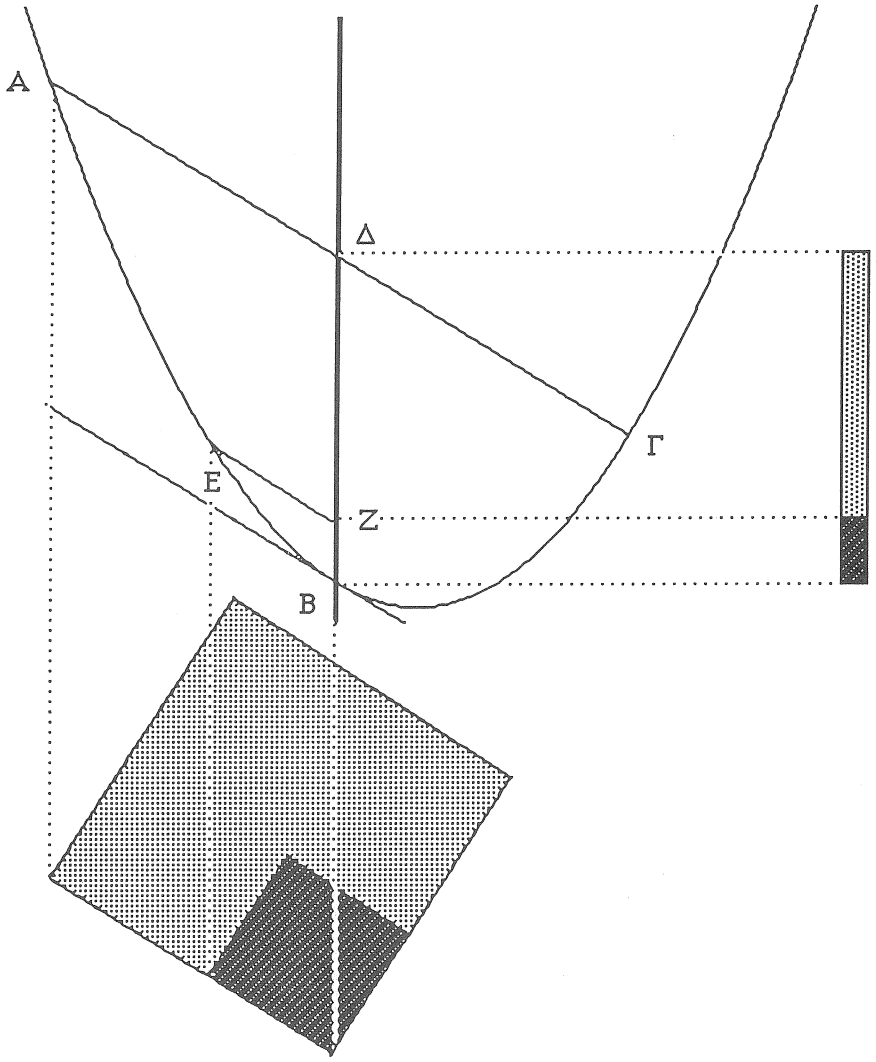


Lorsqu'on a une sécante à la parabole, et qu'on trace la parallèle à l'axe par le milieu de la sécante, celle-ci coupe la parabole en un point dont la tangente est parallèle à la sécante. Réciproquement, si une sécante et une tangente sont parallèles, la parallèle à l'axe passant par le point de contact coupe la sécante en son milieu.

Cette propriété n'est pas démontrée par Archimède.

Cette parallèle à l'axe par le milieu de la sécante est une ligne remarquable du segment de parabole, et nous aurons souvent recours à elle. Pour alléger le texte, il est utile de lui donner un nom : c'est **le diamètre du segment de parabole**. Il joue, pour le segment, un rôle comparable à celui de l'axe pour la parabole complète. Le point B où il coupe la parabole, est le **sommet** du segment de parabole.

RELATION FONDAMENTALE



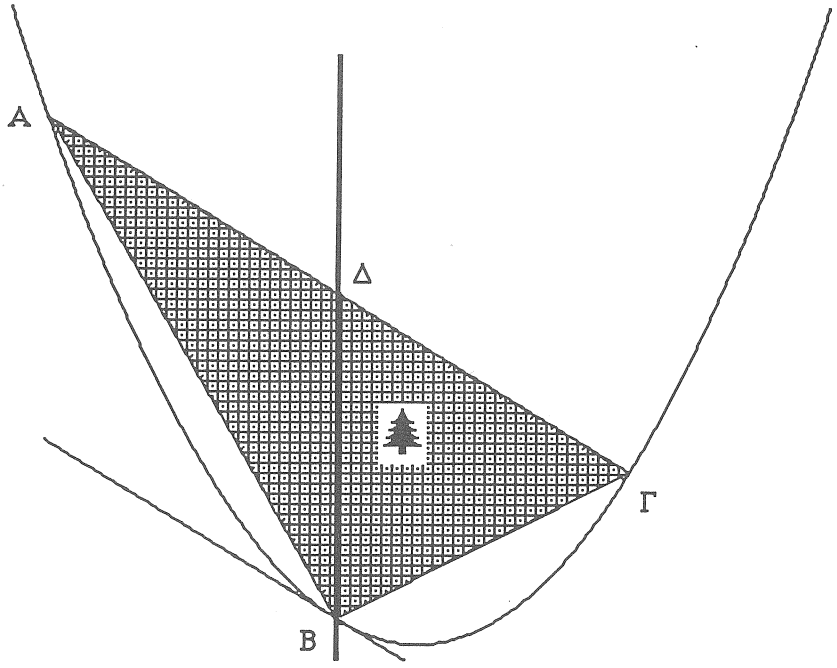
Cette relation fondamentale est équivalente à une équation de la parabole. Pour Archimède , on ne peut comparer que des grandeurs comparables; et c'est donc souvent en termes de rapports que s'expriment les relations. Elle dit que les carrés des segments découpés sur 2 sécantes parallèles, par la parabole et le diamètre du segment de parabole, sont dans le même rapport que les segments découpés sur ce diamètre, par la parabole et les 2 sécantes.

En termes actuels : $$\frac{EZ^2}{\Delta A^2} = \frac{BZ}{B\Delta}$$

Cette relation n'est pas démontrée par Archimède, car connue de son temps.

LA METHODE GEOMETRIQUE

LA METHODE

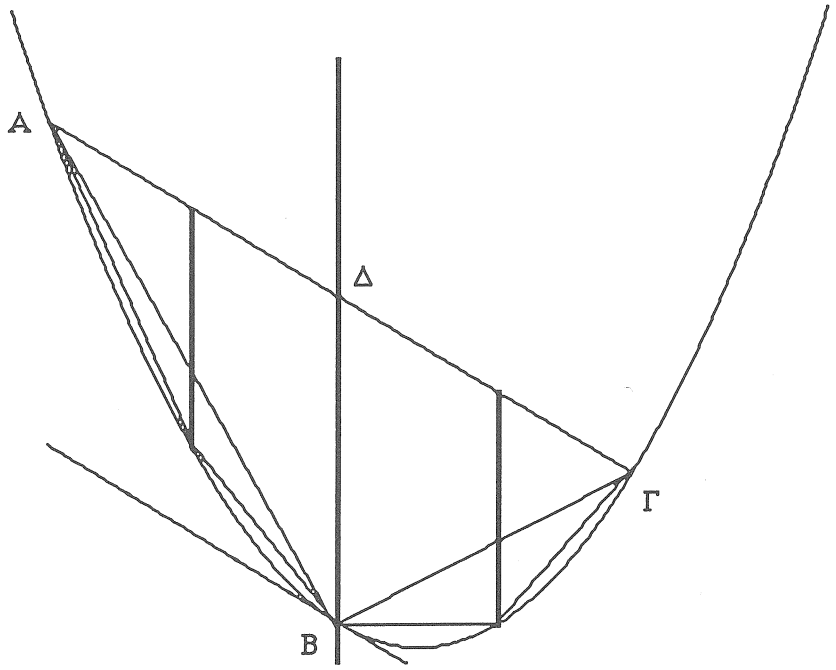


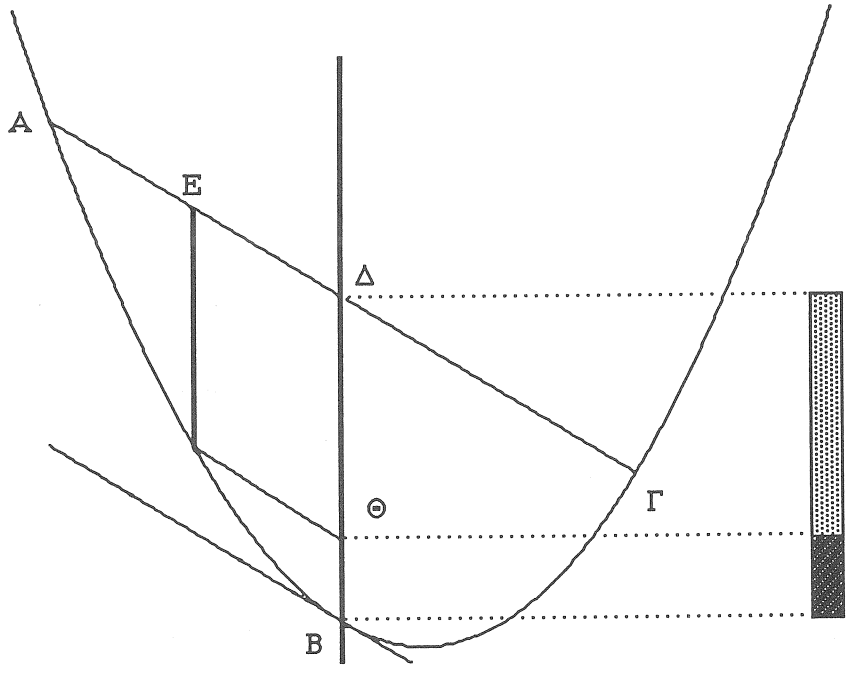
Comme les surfaces mesurables pour l'aire sont les polygones, il s'agit de comparer le segment de parabole à un triangle.

Le **triangle de référence** est inscrit dans la parabole, avec pour base, la sécante et pour sommet opposé le sommet du segment de parabole.

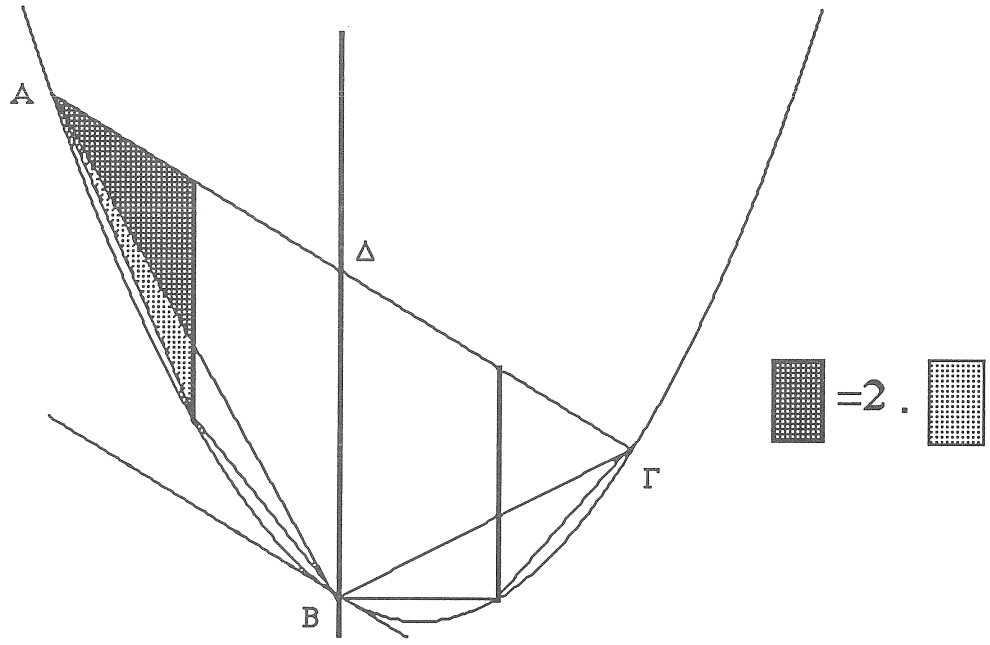
Archimède va progressivement agrandir ce triangle pour former un polygone qui va épouser de mieux en mieux la courbure de la parabole.

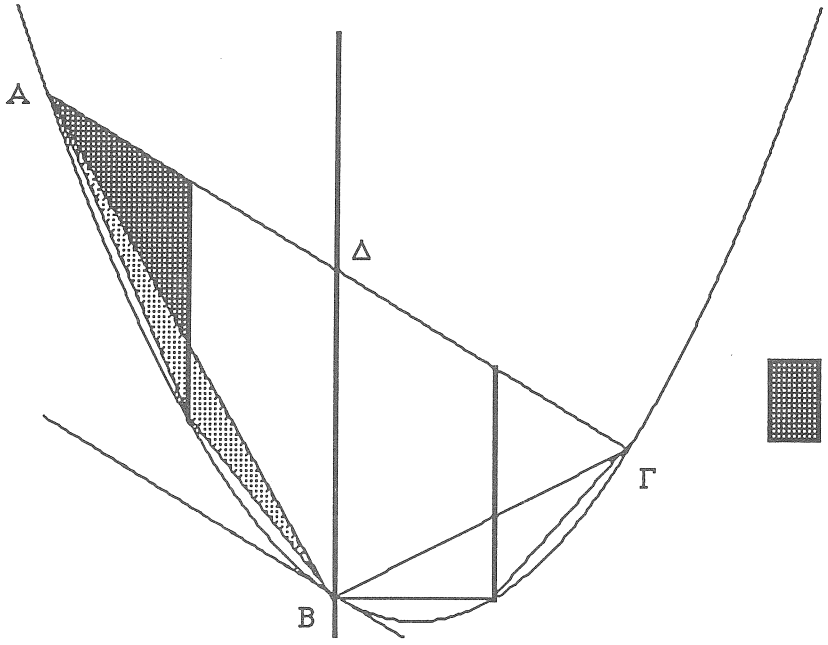
Pour celà, comme en page 8, il ajoute des segments de parallèles à l'axe, au quart et aux trois quarts de la sécante. La relation fondamentale permet d'affirmer que ces segments sont les 3/4 du segment médian BΔ.


A
Δ
Γ
B


A
E
Δ
Γ
Θ
B

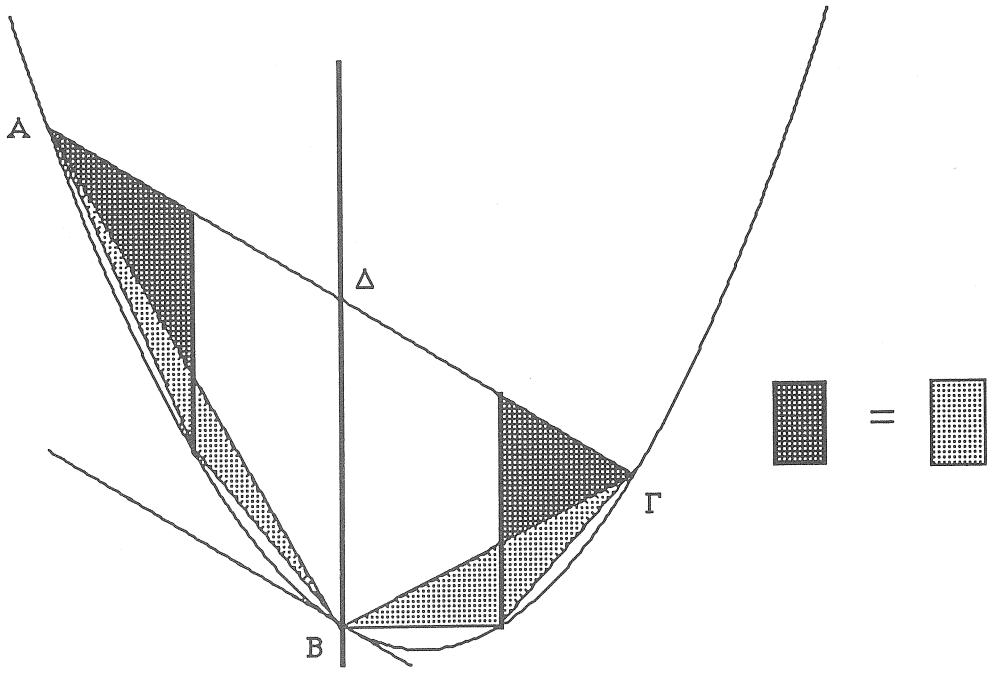
COMPARAISON DE TRIANGLES

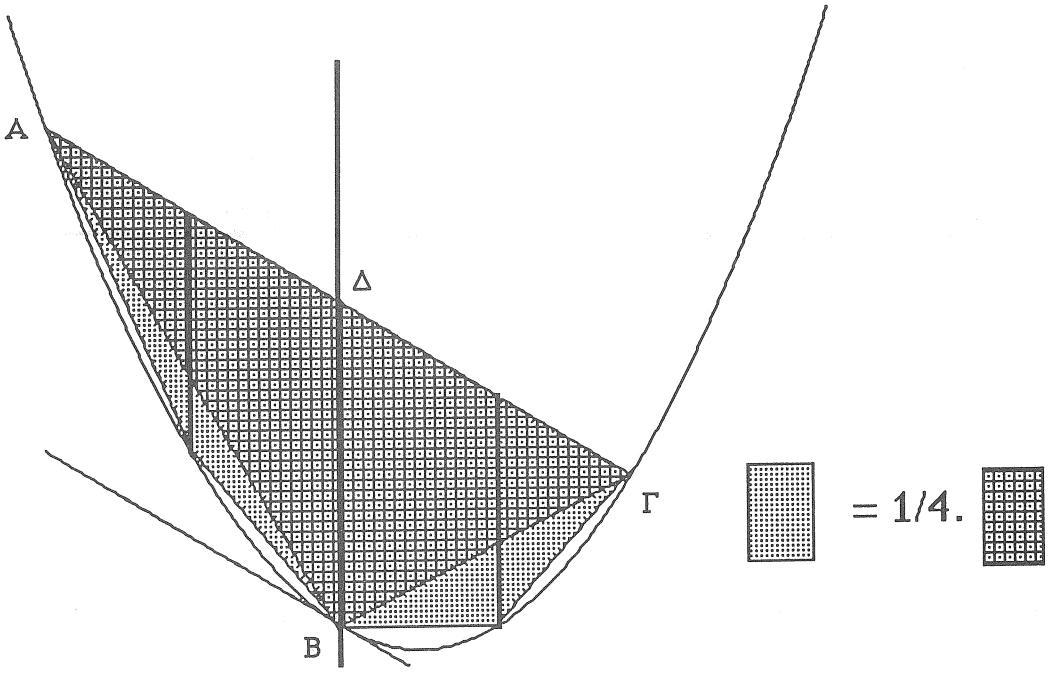




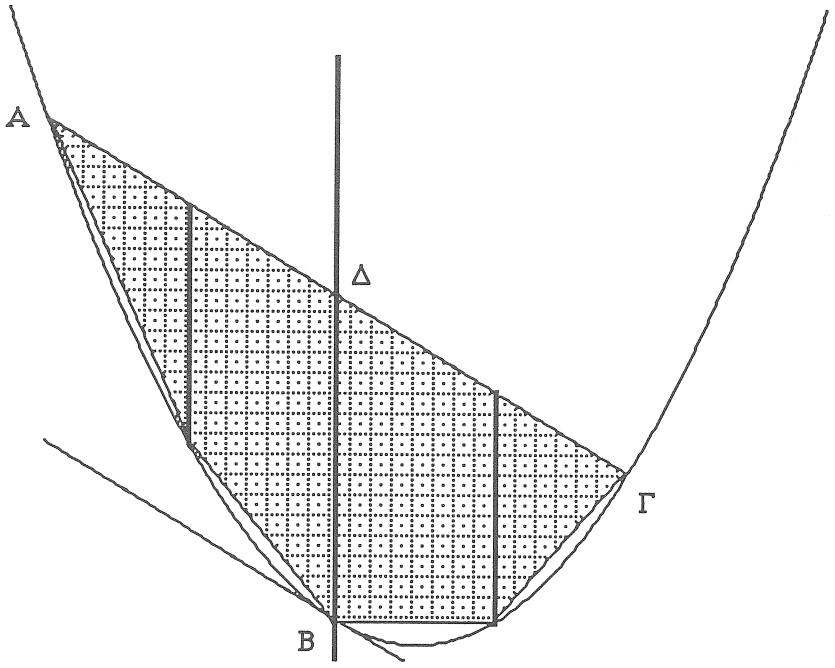


Il est facile de vérifier les égalités d'aire représentées sur les dessins : ce sont des triangles de même hauteur et dont les bases sont respectivement la moitié et le quart de BΔ.


A
Δ
Γ
B
=


A
Δ
Γ
B
= 1/4.

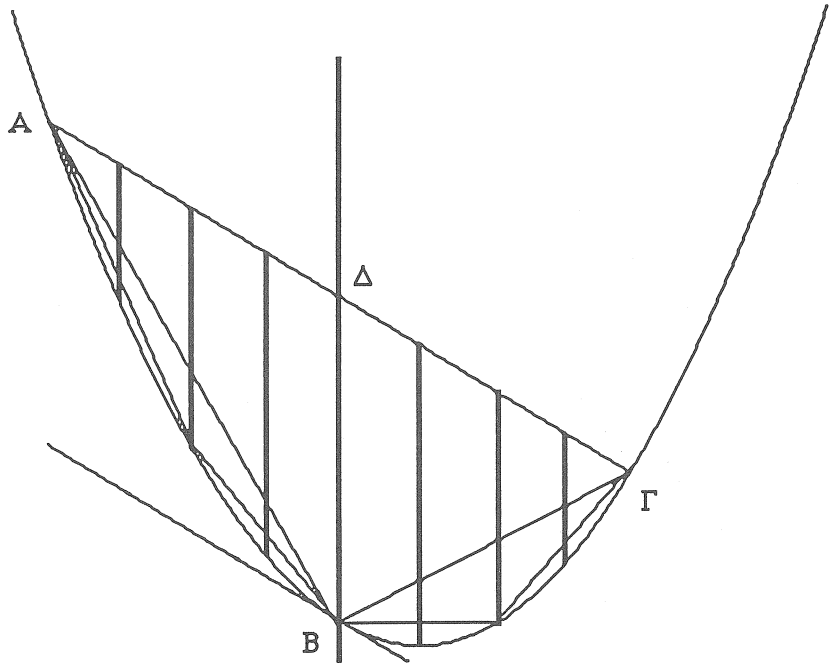
LE DEUXIEME POLYGONE INSCRIT



Le polygone obtenu en ajoutant 2 triangles sur les côtés du triangle de référence est plus proche du segment de parabole que le triangle de référence.

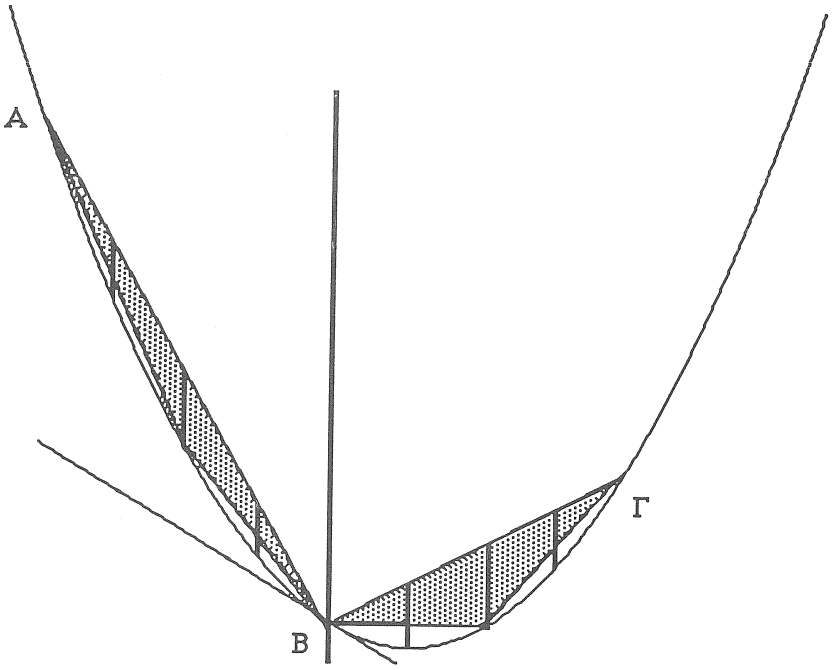
De plus, grâce à la relation fondamentale et aux comparaisons de la page précédente, nous savons que son aire est les 5/4 de celle du triangle de référence.

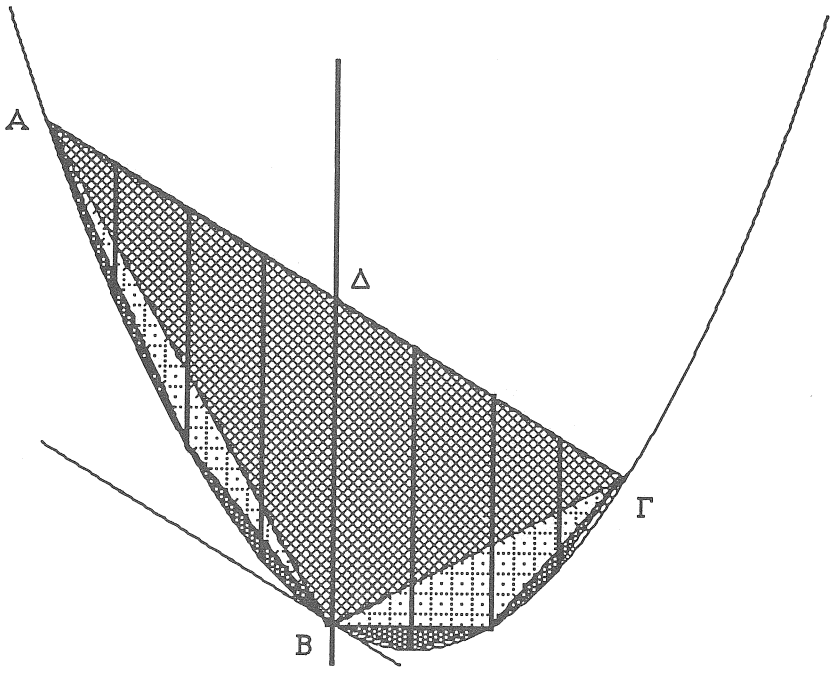
LE TROISIEME POLYGONE



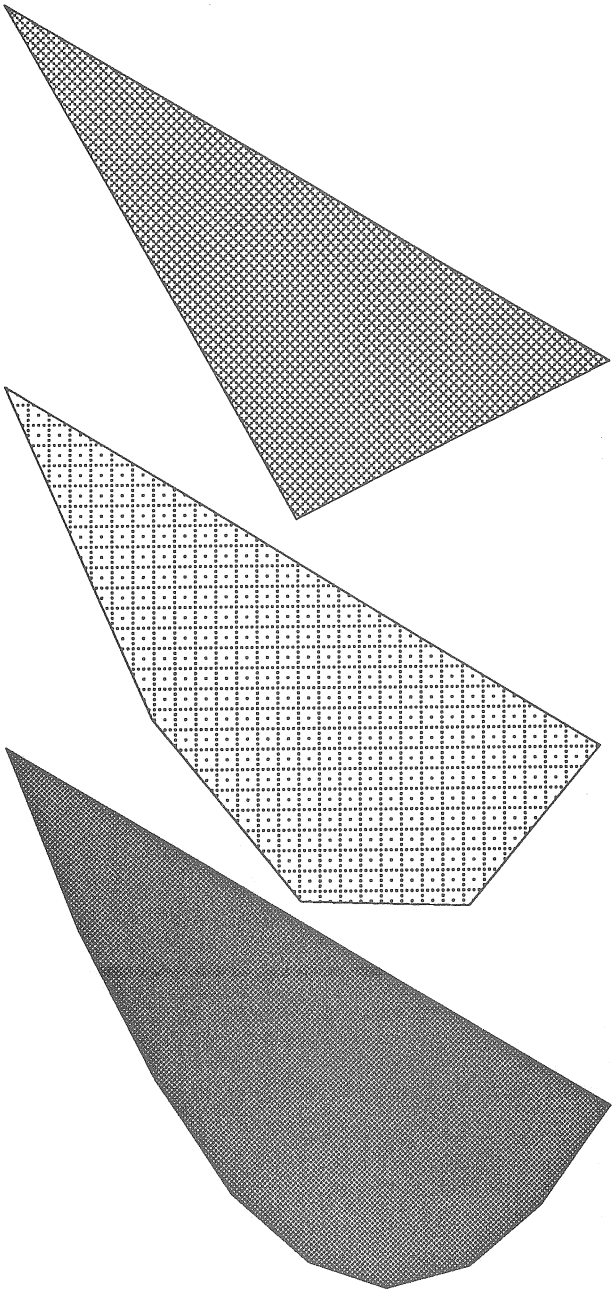
De la même façon, la sécante peut être partagée en 8 parties égales. Si on fait abstraction du triangle de référence, il reste 2 segments de parabole qui ont le point B en commun (Voir page 13).

Chacun de ces segments de parabole est partagé en 4, et pour lui la situation est celle de la page 10 : le fait de l'agrandir en un polygone lui ajoute une aire qui est le quart de son triangle de référence - qui est lui-même le quart du triangle de référence du segment de parabole donné.


A
B
Γ


A
Δ
B
Γ

LA SUITE DES POLYGONES INSCRITS

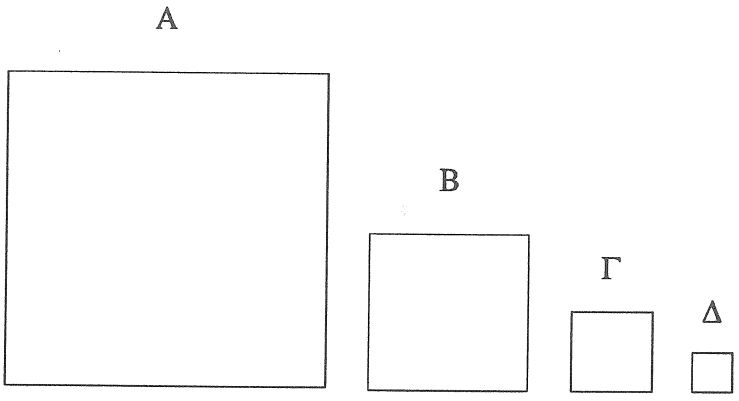


Nous pouvons imaginer une succession de polygones, chacun inclus dans le suivant, dont le premier est le triangle de référence du segment de parabole, et qui collent de plus en plus près à la courbure de la parabole.

Si l'aire du triangle de référence est prise comme unité de mesure, le deuxième polygone de la suite mesure 1+1/4, le troisième 1+1/4+1/4.1/4, et ainsi de suite...

Intuitivement, l'aire de ces polygones est de plus en plus proche de celle du segment de parabole. Mais pour résoudre son problème, Archimède doit trouver comment calculer l'aire de ces polygones successifs, c'est-à-dire celle du triangle de référence plus son quart, plus le quart du quart, plus le quart du quart du quart...

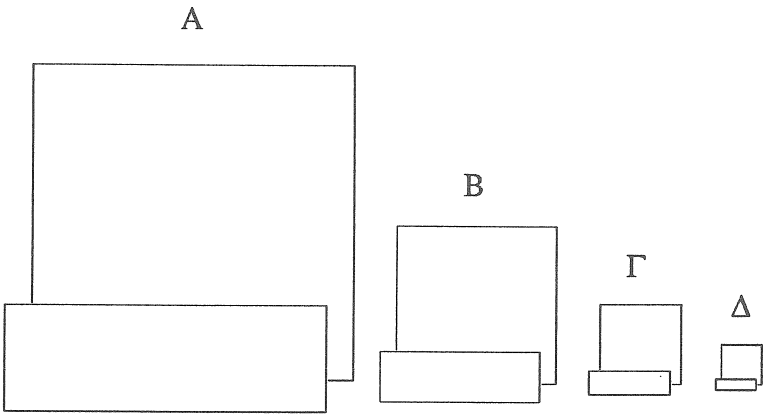
LA SUITE DES AIRES DES POLYGONES INSCRITS

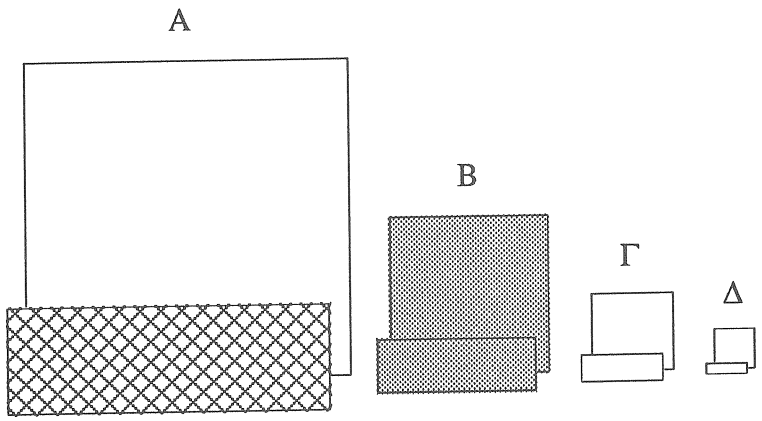


Archimède visualise l'aire du triangle de référence par le carré A. B est le quart de A, Γ le quart de B, Δ le quart de Γ, etc...

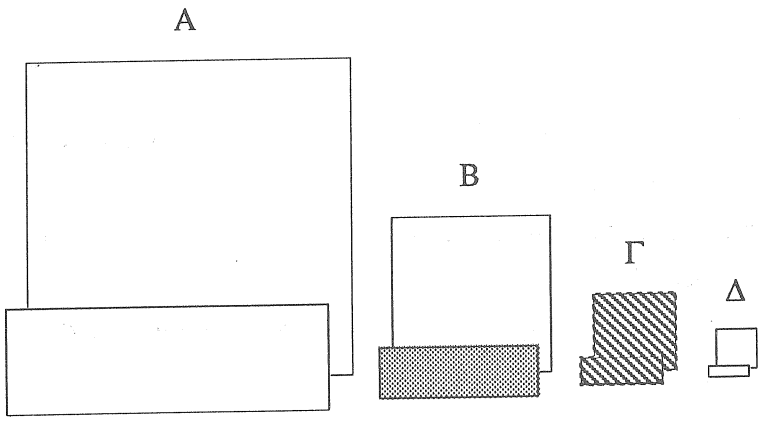
Les polygones inscrits dans le segment de parabole ont successivement pour aires A,A+B, A+B+Γ, A+B+Γ+Δ, etc...

Archimède ajoute un rectangle sous chaque carré qui est le tiers du carré correspondant, et utilise la relation : $1/4 + 1/3.1/4 = 1/3$

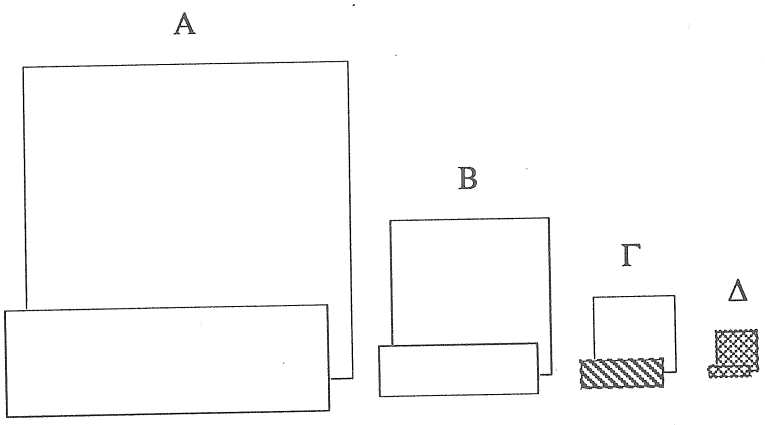




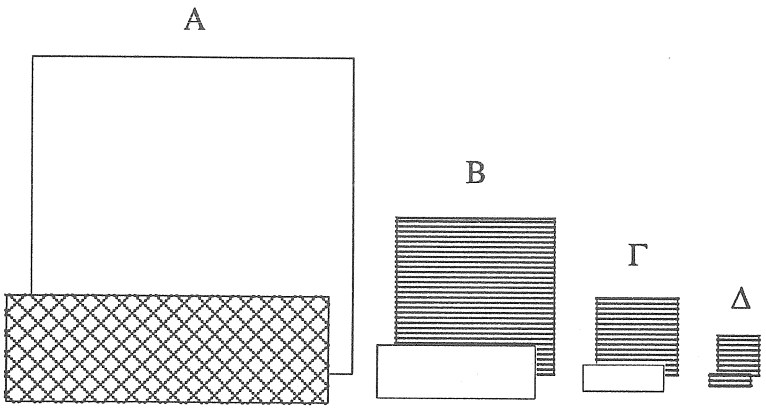
$B + 1/3.B = 1/3.A$



$\Gamma + 1/3.\Gamma = 1/3.B$



$\Delta + 1/3.\Delta = 1/3.\Gamma$



$$B + \Gamma + \Delta + 1/3.\Delta = 1/3.A$$

$$A + B + \Gamma + \Delta + 1/3.\Delta = 4/3.A$$

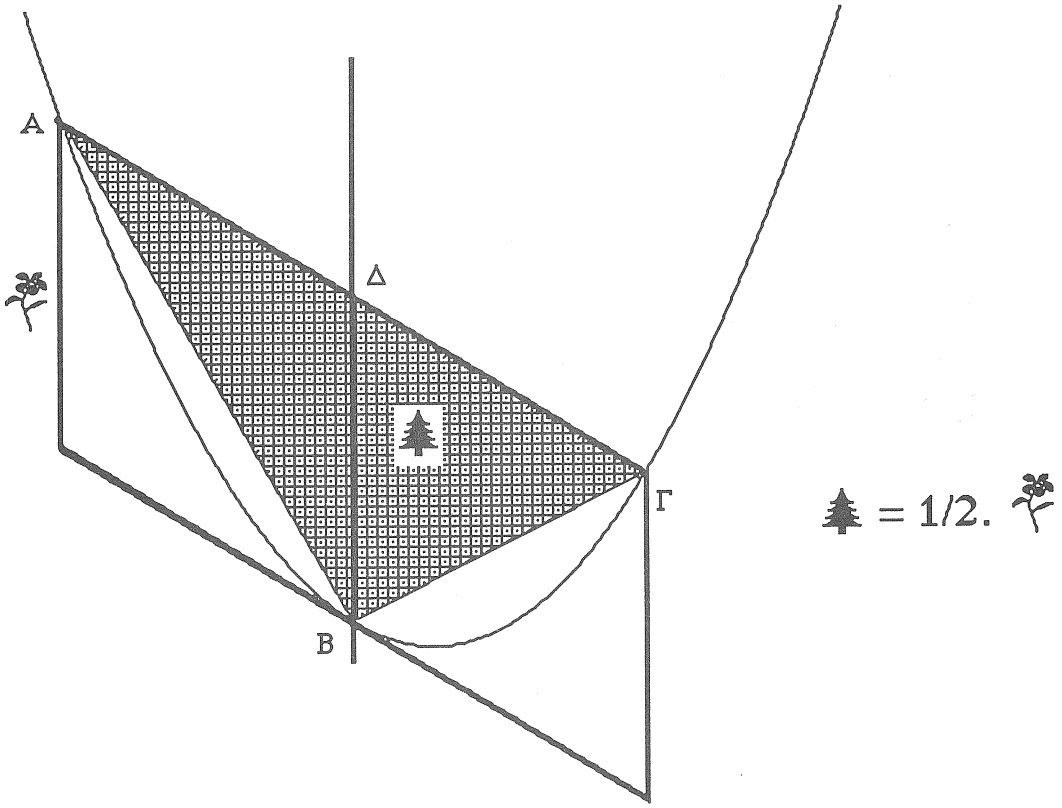
$$A + B + \Gamma + \Delta = 4/3.A - 1/3.\Delta$$

La valeur générale de cette formule est claire : quel que soit le nombre d'éléments de cette série, Archimède sait calculer leur somme. De plus cette somme est obtenue en retranchant le tiers du dernier élément d'une aire fixée : 4/3.A. Ce qui veut dire que la somme A+B+Γ+Δ+... est inférieure à 4/3.A, du tiers du dernier élément de la série, lequel peut être plus petit que toute aire donnée, en prolongeant assez la série.

Si on se souvient que ces sommes correspondent aux aires des polygones successifs inscrits dans le segment de parabole, on déduit qu'il existe de tels polygones aussi proches qu'on le veut de l'aire : 4/3.A .

Précisément : si une aire est donnée, il existe un polygone de la suite tel que la différence entre 4/3.A (A étant l'aire du triangle de référence) et ce polygone, est plus petite que l'aire donnée. Et ce polygone est - bien sûr - inférieur à 4/3.A.

L'ACCUMULATION DES POLYGONES



Intuitivement, ces polygones sont aussi proches que l'on veut de l'aire du segment de parabole, l'approchant de l'intérieur.

La convexité de la parabole, ainsi que la position particulière de la tangente au sommet du segment de parabole font que le segment de parabole est tout entier contenu dans un parallèlogramme dont la tangente au sommet et la sécante sont 2 côtés opposés; les 2 autres étant parallèles à l'axe.

Le triangle de référence du segment de parabole a une aire moitié de celle du parallèlogramme, et donc occupe plus de la moitié du segment de parabole.

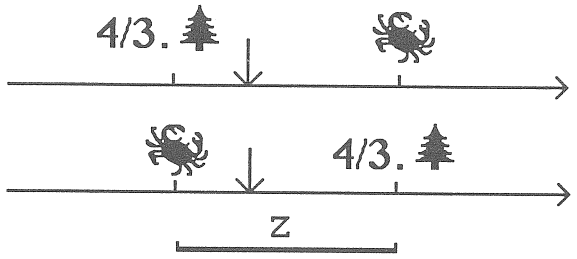
Donc, si on observe la différence entre le segment de parabole et les polygones inscrits successifs, elle est au début moins de la moitié du segment , puis moins de la moitié de la première différence, puis toujours moins de la moitié de la différence précédente.

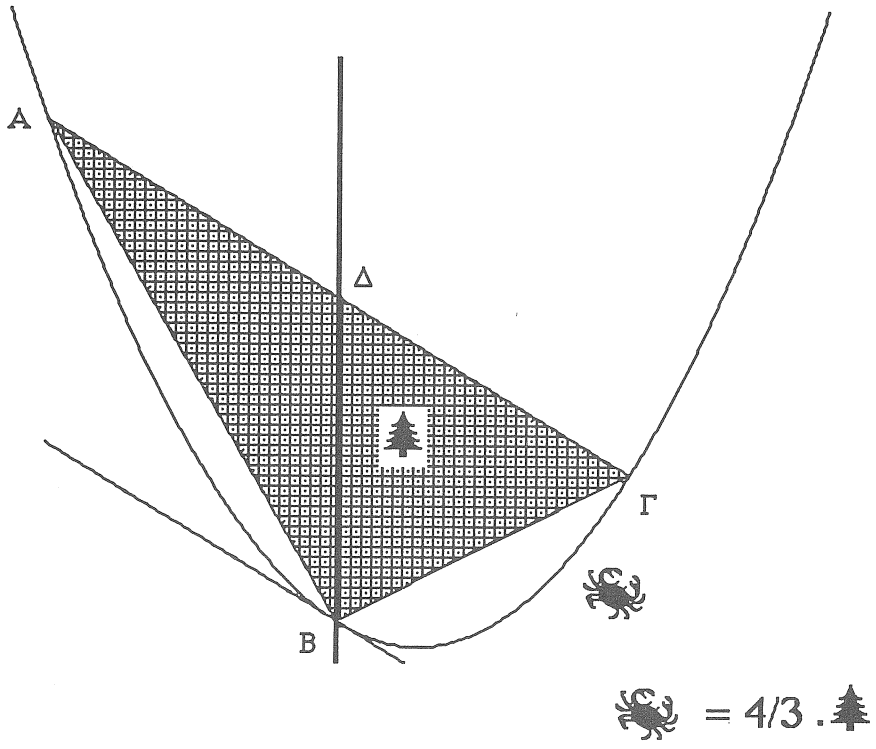
Archimède en conclut que cette différence peut être plus petite que toute aire donnée en choisissant un polygone adapté. Le polygone étant - bien sûr - inférieur au segment de parabole.

L'aire du segment de parabole est égale aux 4/3 de celle du triangle de référence.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Ces 2 aires existent et leur différence est une aire donnée (non nulle) Z.

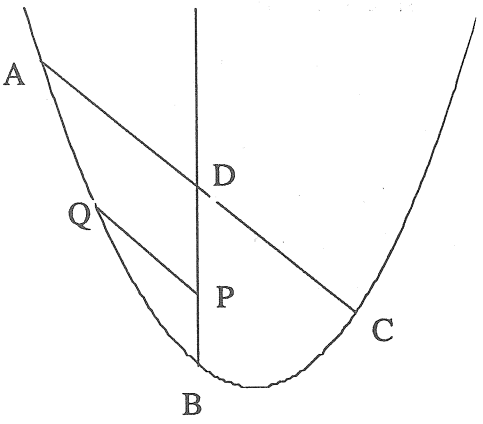
2 cas de figure suivant que l'aire du segment de parabole est supérieure ou non à 4/3.A. Mais dans les 2 cas, il existe un polygone de la suite à moins de Z du plus grand des deux. Ce polygone se place donc entre le segment de parabole et 4/3.A. Et dans chaque cas, celà veut dire qu'il est plus grand que l'un des deux. Ce qui est une contradiction.





EXERCICES

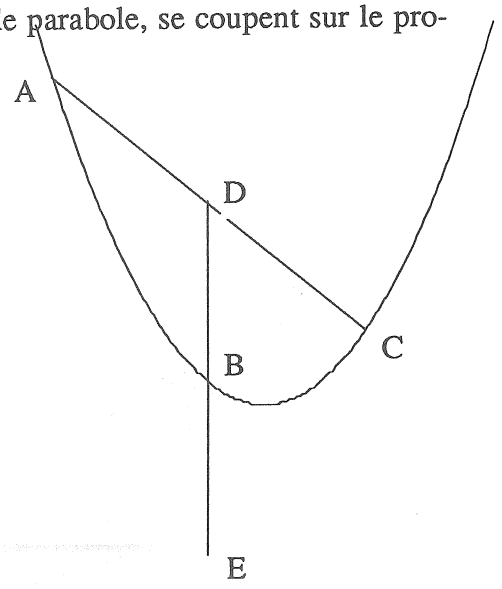
1) Soit un segment de parabole ABC et son diamètre BD. Montrer qu'il existe un point F sur le diamètre ou son prolongement, tel que pour tout segment PQ découpé entre le diamètre et la parabole, le carré de PQ a la même aire que le rectangle BP x BF (Voir la relation fondamentale).
F dépend du segment, et n'est pas le foyer de la parabole.



2) Construire F sous les hypothèses de l'exercice 1, en se servant d'une bissectrice de l'angle compris entre le diamètre et la tangente au sommet du segment de parabole.

3) Démontrer les relations des pages 5 et 6, à partir de la définition actuelle de la parabole : courbe d'équation $y = a.x^2$, dans un repère orthonormé.

4) Démontrer de même, à partir de l'équation de la parabole et des notations de l'exercice 1, que les tangentes aux deux extrémités A et C d'un segment de parabole, se coupent sur le prolongement du diamètre en un point E symétrique de D par rapport à B.



5) En prenant le triangle de référence ACE, construit à l'exercice 4, Archimède aurait pu emboiter une suite décroissante de polygones circonscrits au segment de parabole. Le premier étant le triangle ACE, le deuxième, le trapèze obtenu en coupant ce triangle par la tangente au sommet, et ainsi de suite en coupant chaque fois le polygone précédent par les tangentes aux points d'intersection des parallèles à l'axe, menées aux quarts, huitièmes,...(2^n)-ièmes de la base AC.
Retrouvez le résultat d'Archimède, en remplaçant ses polygones inscrits par ceux qui sont décrits ci-dessus.

6) A la page 17, Archimède se sert de la relation : $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

Peut-on de même trouver géométriquement la somme de la série :

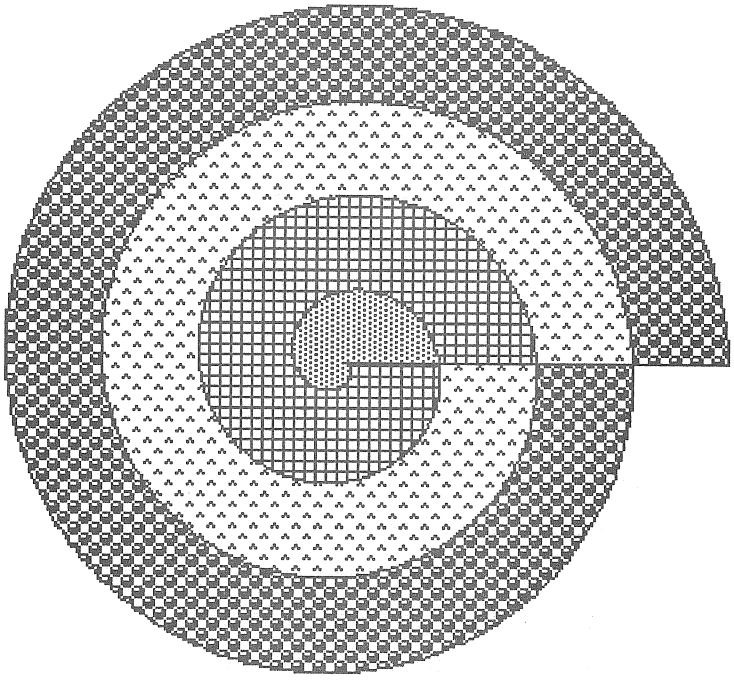
$$1 + \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + \ldots$$

Ou plus généralement :

$$1 + \frac{1}{p} + (\frac{1}{p})^2 + (\frac{1}{p})^3 + \ldots \ ?$$

Chapitre 2

LES REVOLUTIONS DE SPIRALE



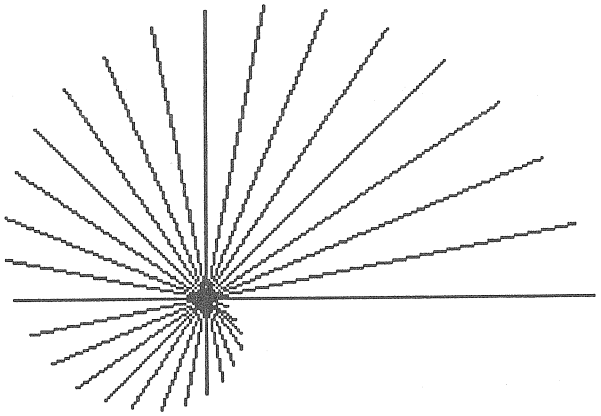
Archimède ne s'est pas contenté de résoudre des problèmes de son temps. Il invente aussi des figures complexes et en particulier les courbes spirales que tous les mathématiciens appellent toujours les spirales d'Archimède.

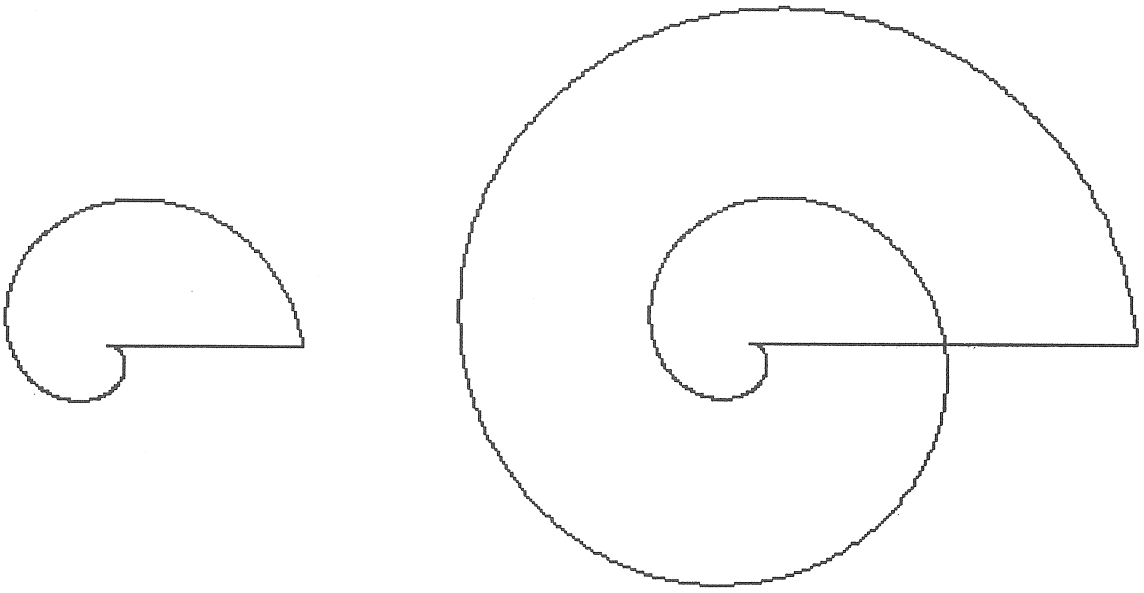
Ces courbes sont l'occasion pour Archimède de travailler sur les tangentes et normales en un point d'une courbe - ce qui n'est pas très facile avec les méthodes purement géométriques de l'époque - mais aussi, une fois de plus, de calculer des aires complexes comme limites d'une suite d'aires mesurables.

C'est ce dernier aspect qui sera développé sous forme d'une suite de dessins commentés dans le présent chapitre.

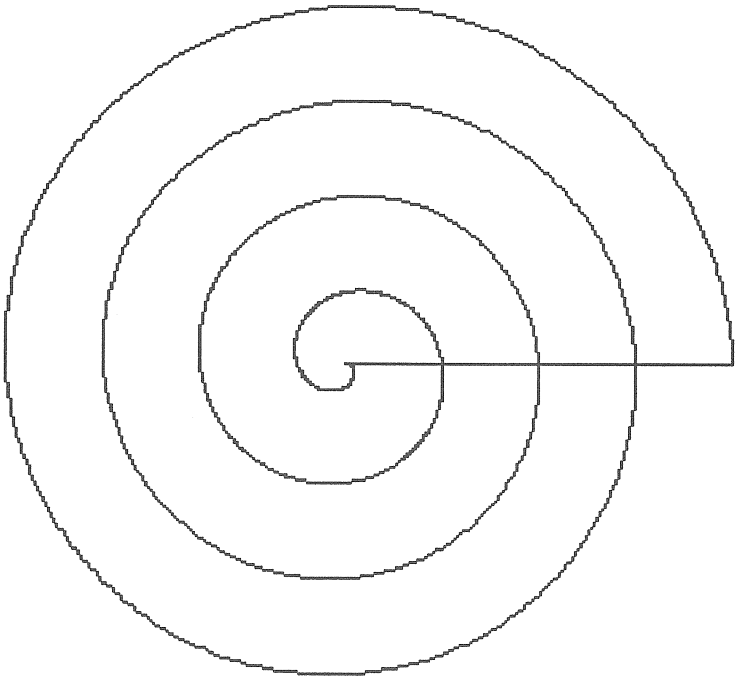
DEFINITION DES SPIRALES

Pour concevoir une spirale, Archimède recourt à un double mouvement. Tout d'abord, une demi-droite tourne d'un mouvement uniforme autour de son origine fixe. Simultanément, un point se déplace sur la demi-droite d'un mouvement uniforme depuis l'origine. Si on suit le mouvement du point mobile, on le voit tourner autour de l'origine tout en s'éloignant d'elle. Si le point laisse derrière lui la trace de son passage, il dessine une **spirale d'Archimède**.

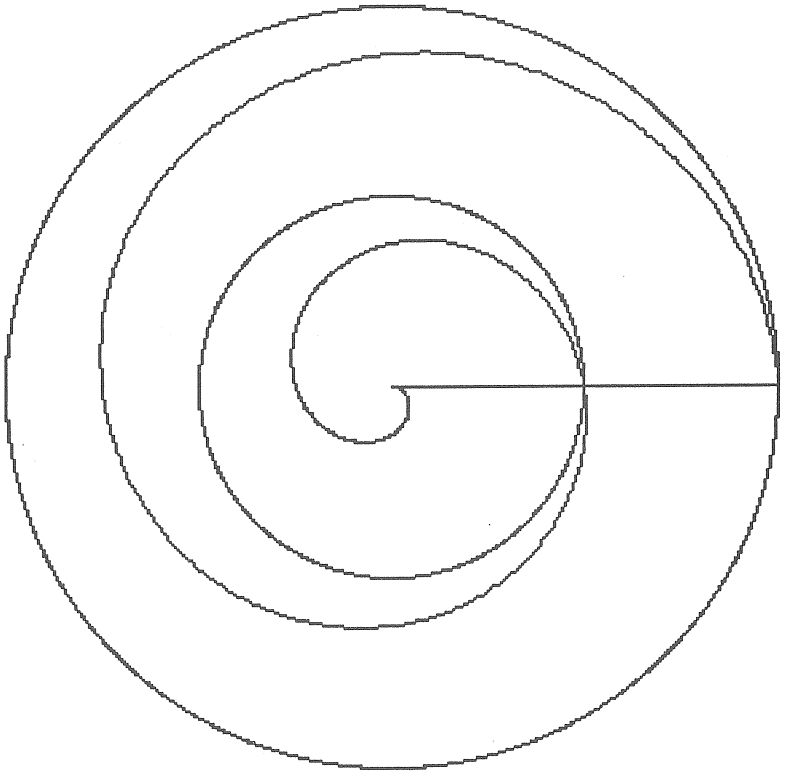




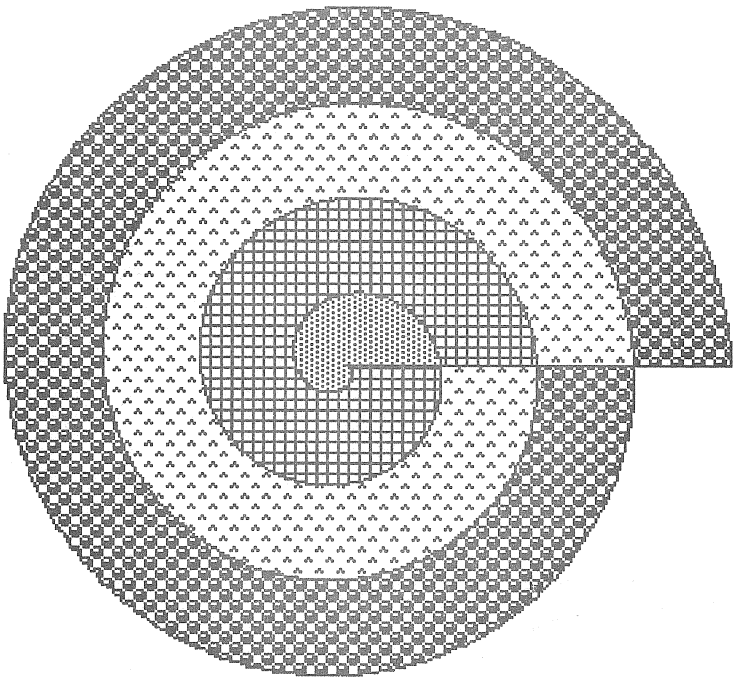
Première et deuxième révolutions



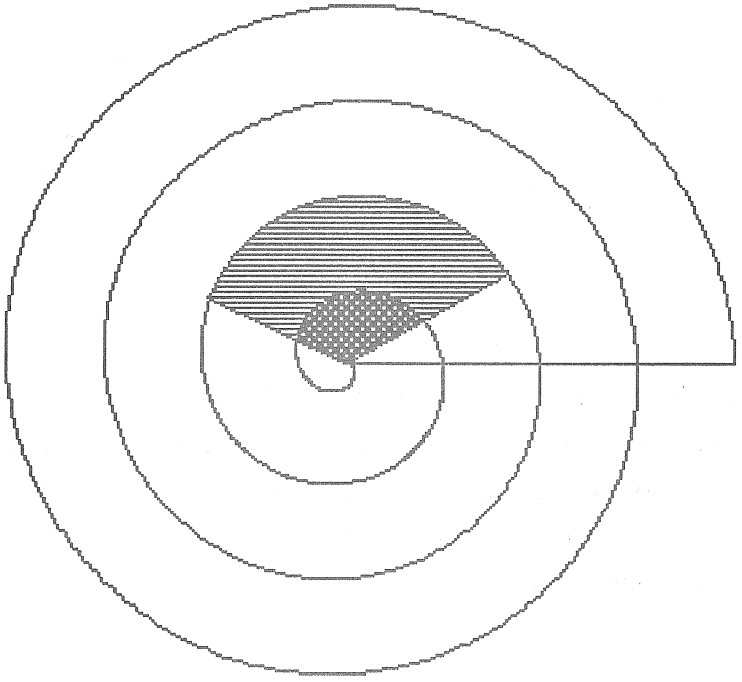
Quatrième révolution

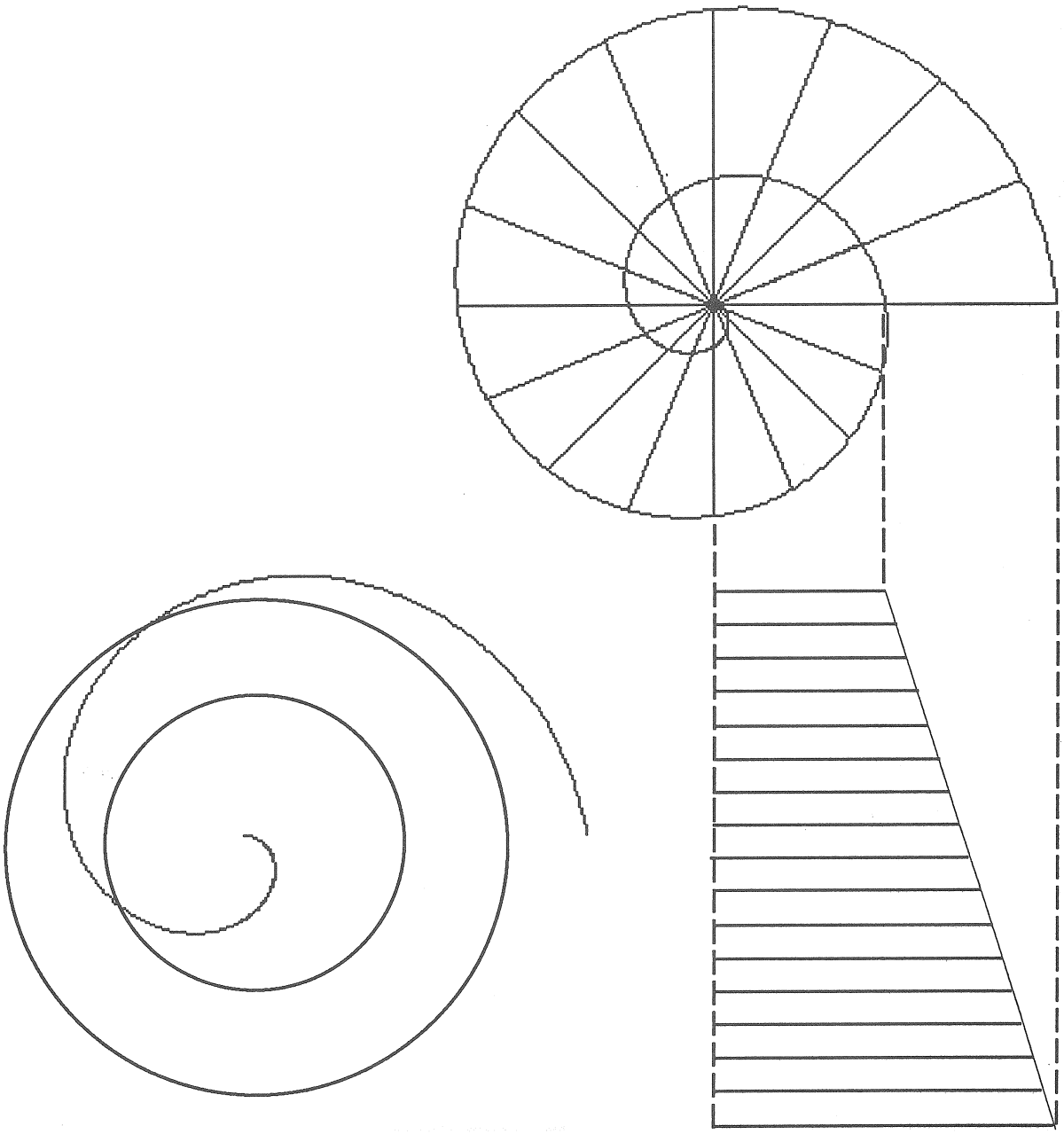


Certains éléments fondamentaux reviendront tout au long de cette étude : **la demi-droite en position initiale**, le fractionnement de la spirale en **première, deuxième,...révolution** par cette demi-droite en position initiale, **les cercles de première, deuxième,... révolution** centrés à l'origine et passant par le point de fin de première, deuxième,... révolution.



Archimède parle aussi de **secteurs de spirales**, qui sont l'intersection d'un secteur angulaire et d'une révolution de spirale.



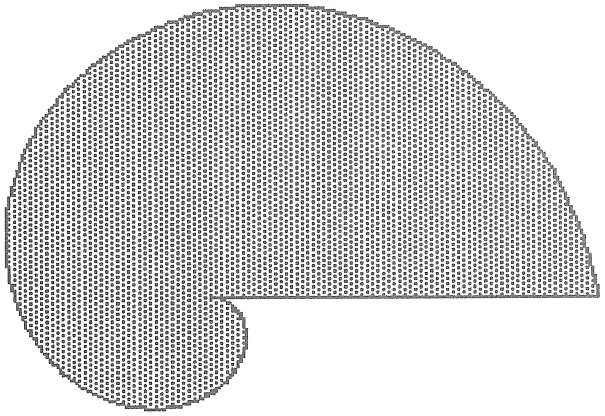


La qualité essentielle dont nous avons besoin dans les autres parties de ce document, est l'uniformité des deux mouvements générateurs qui se traduit géométriquement de la façon suivante :

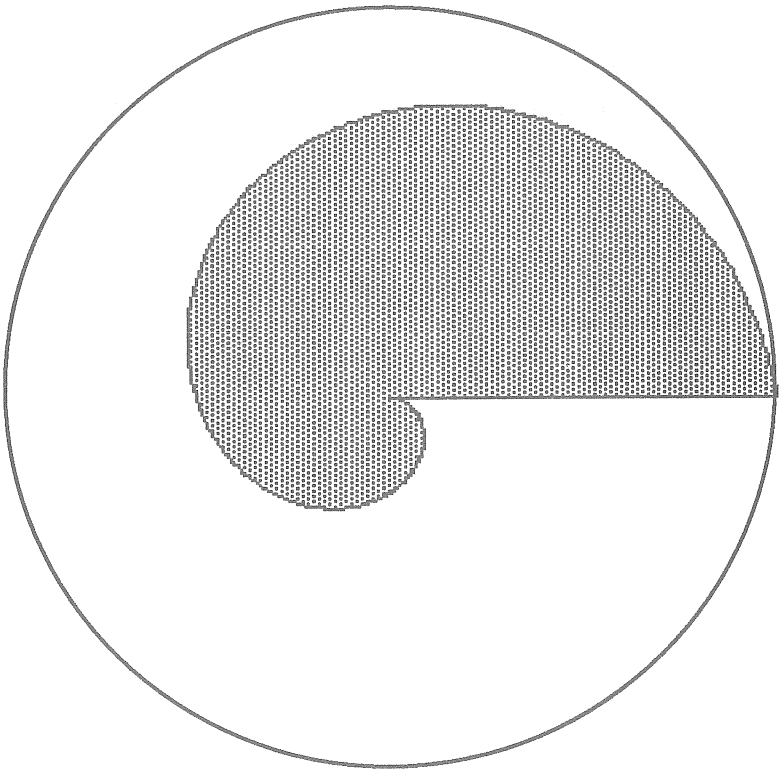
- si les cercles passant par deux points de la spirale sont tracés, la portion de spirale entre ces deux points est dans la couronne formée par ces deux cercles .
- si des rayons de la spirale sont disposés régulièrement autour de l'origine, leur longueur est en progression arithmétique.

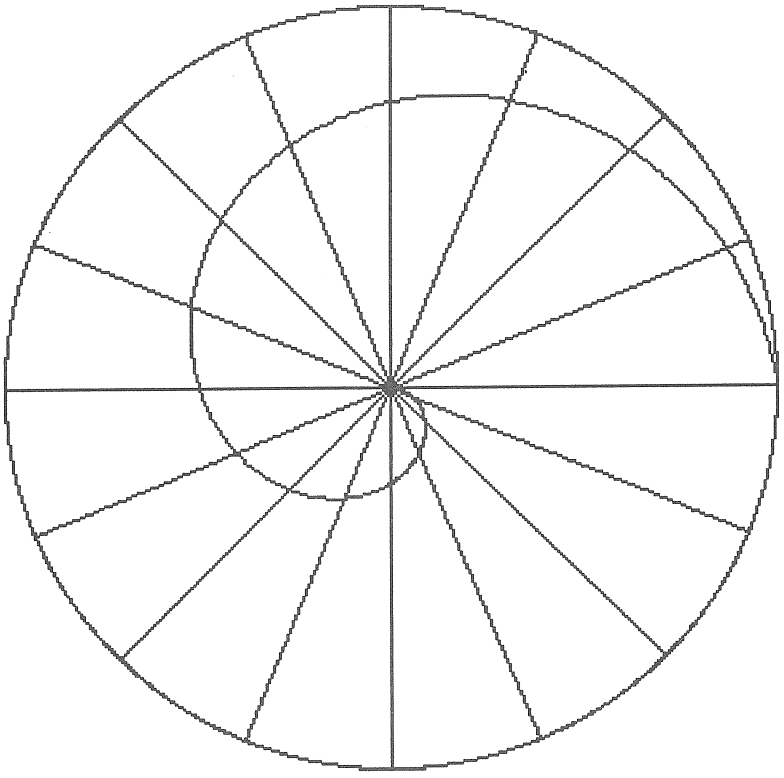
LA PREMIERE REVOLUTION

LE DEFI

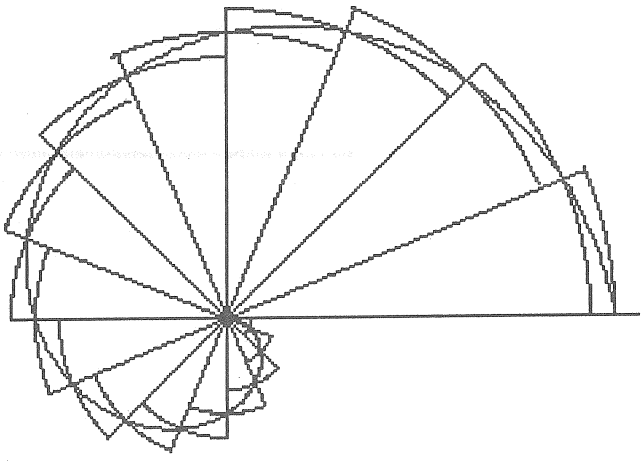


Dans un premier temps, Archimède s'intéresse à l'aire de la première révolution de spirale ; et bien sûr, pas en formule, mais par comparaison à une aire mieux connue et plus classique : le disque de fin de première révolution.



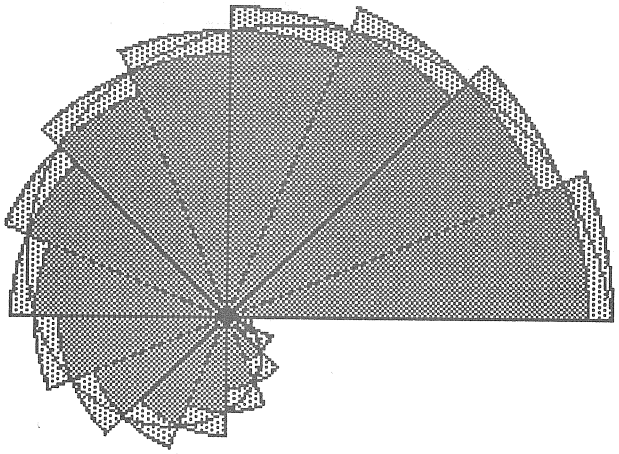


Pour celà, l'angle plein autour de l'origine est partagé en un certain nombre de secteurs angulaires. Chaque portion de spirale est incluse entre 2 secteurs circulaires emboités.

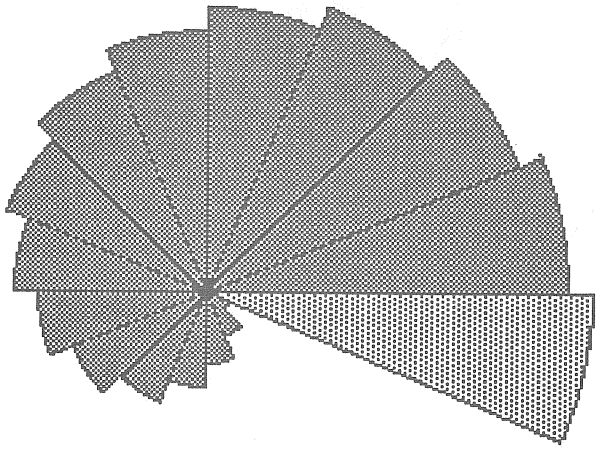


Ce qui fait que la première révolution de spirale est comprise entre 2 figures dentées (semblables à certaines pièces d'horloge).

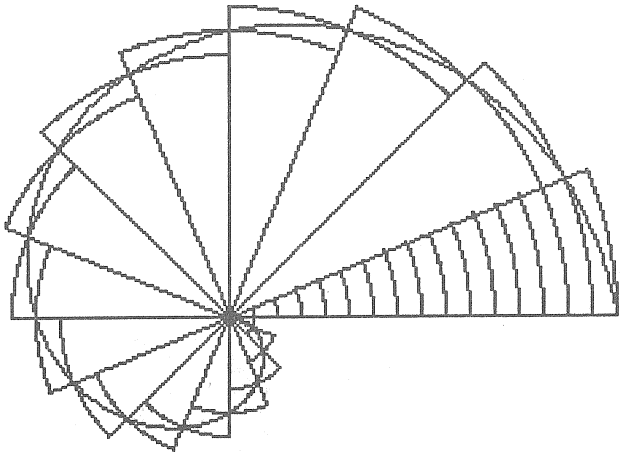
DIFFERENCE DES AIRES DES FIGURES DENTEES



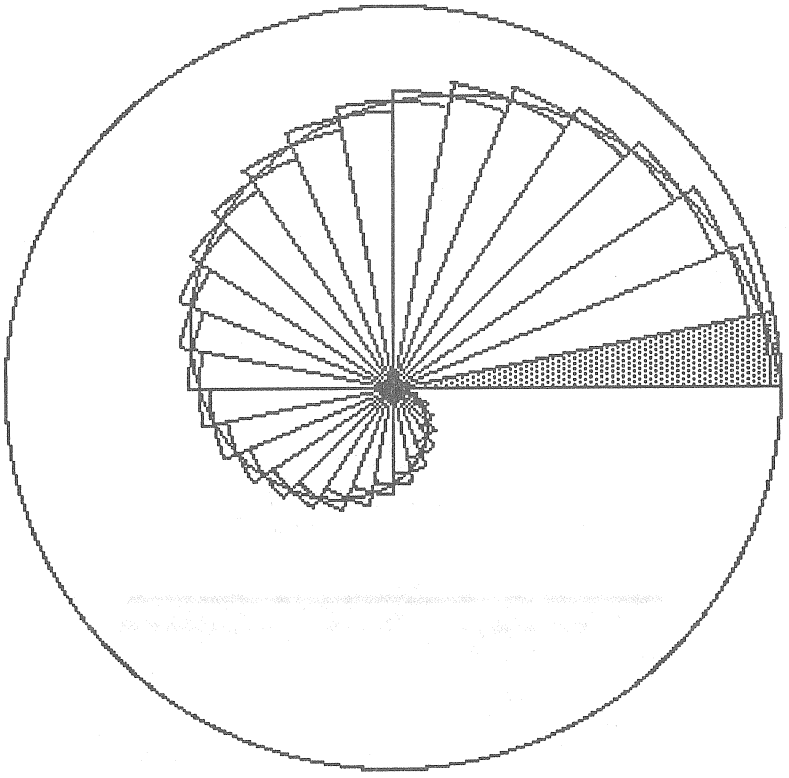
Archimède s'intéresse d'abord à la différence d'aire entre ces 2 figures dentées. Or, si on fait tourner la figure circonscrite de l'angle d'un secteur, elle se superpose exactement à la figure inscrite, à l'exception de son dernier secteur.



Ce qui veut dire que la différence entre les 2 figures dentées est égale au plus grand secteur de la figure circonscrite.



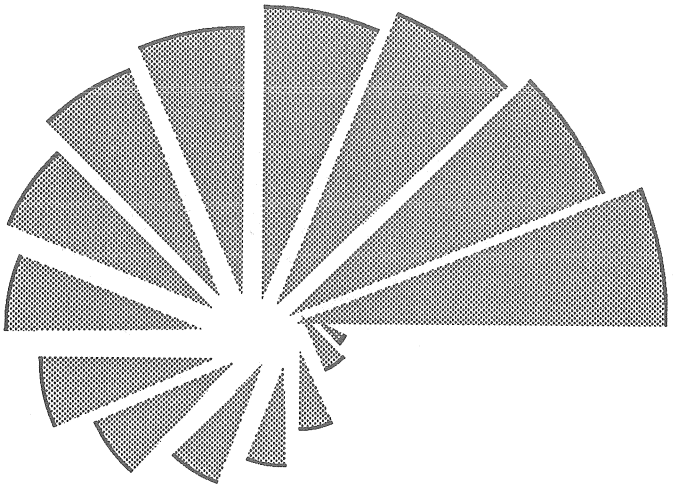
Une autre façon de voir ce résultat est d'imaginer que les secteurs de couronne successifs se referment les uns au-dessus des autres, lorsqu'on replie les figures dentées à la manière d'un éventail qu'on referme.



Si l'angle plein a été partagé en n secteurs, la différence entre les 2 figures dentées est le $n^{ième}$ de l'aire du disque de fin de première révolution.

Ce qui a pour conséquence que si une aire est donnée, il est possible de trouver un nombre n tel que la différence des 2 figures dentées soit inférieure à l'aire donnée (ce qu'on traduit en général en disant que cette différence peut être rendue aussi petite que l'on veut).

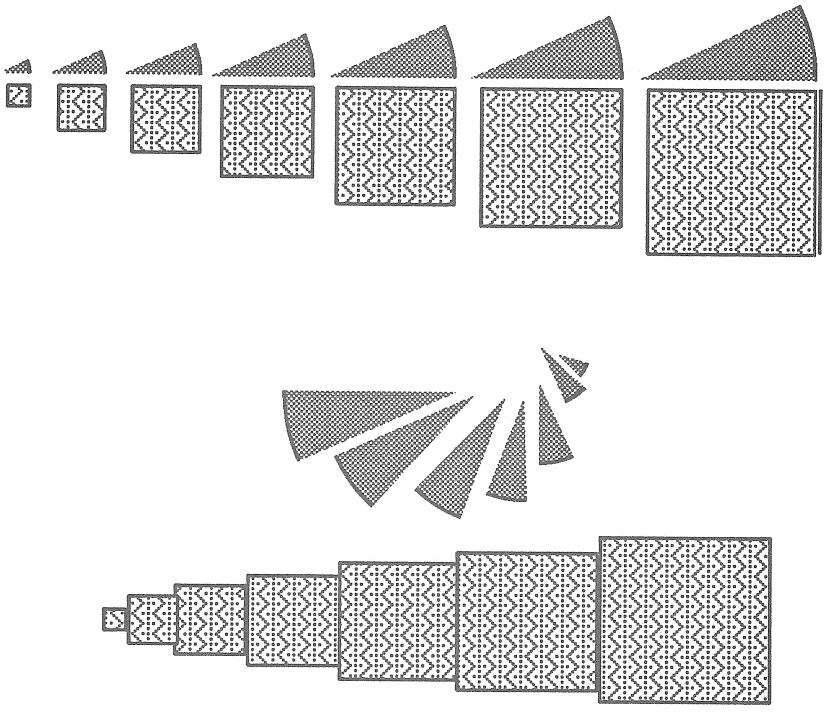
DES SECTEURS CIRCULAIRES AUX CARRES



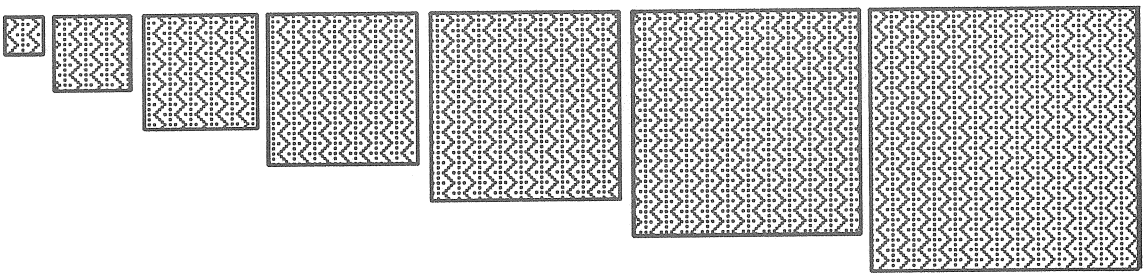
Les figures dentées sont formées de secteurs circulaires tous semblables puisqu'ils ont le même angle. Ces secteurs ont des rayons multiples du premier d'entre eux (Si le rayon du plus petit secteur est unité de longueur, les rayons des secteurs successifs mesurent : 1,2,3,...)

Pour connaitre l'aire des figures dentées, Archimède doit faire la somme des aires des secteurs successifs ; ce qui n'est pas aisé.

Archimède a l'idée étonnante de rapprocher chaque secteur du carré de son rayon.Le rapport des aires d'un secteur au carré correspondant est fixe ; et c'est aussi celui de la somme des aires des secteurs à la somme des aires des carrés.

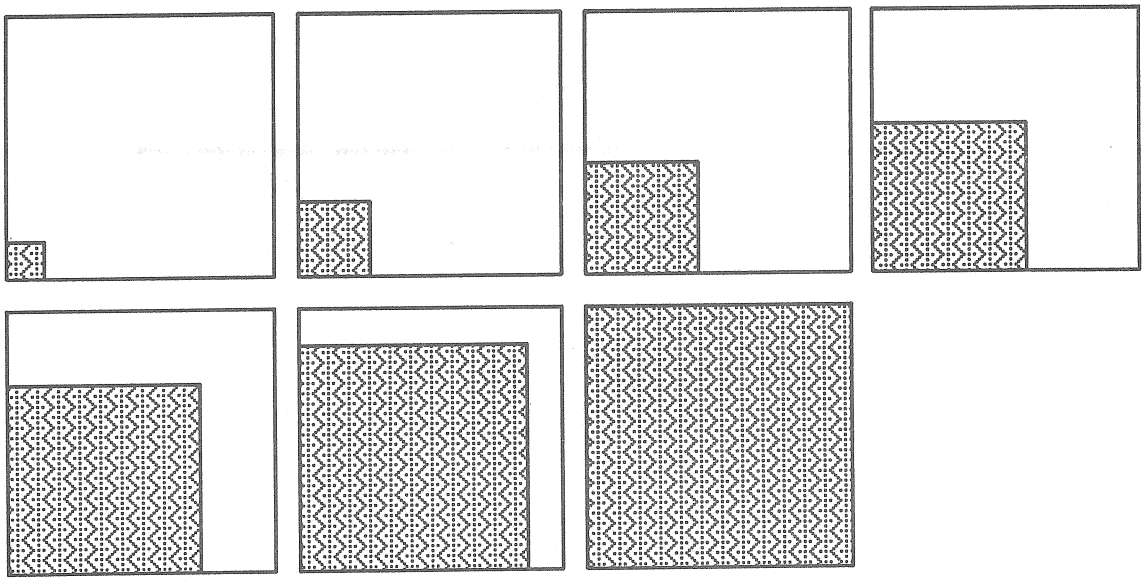


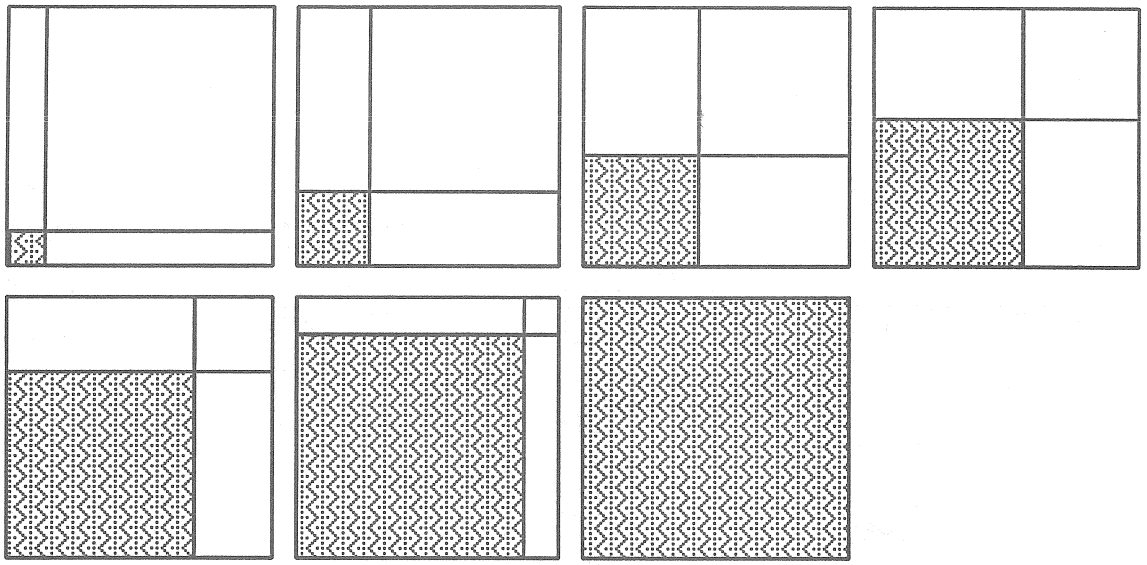
SOMME DES CARRES DES N PREMIERS MULTIPLES D'UNE LONGUEUR



Fort de cette comparaison secteurs-carrés, Archimède se met à étudier la somme des carrés des n premiers multiples d'une longueur, pour tranposer ensuite sur les secteurs, les résultats qu'il aura découverts.

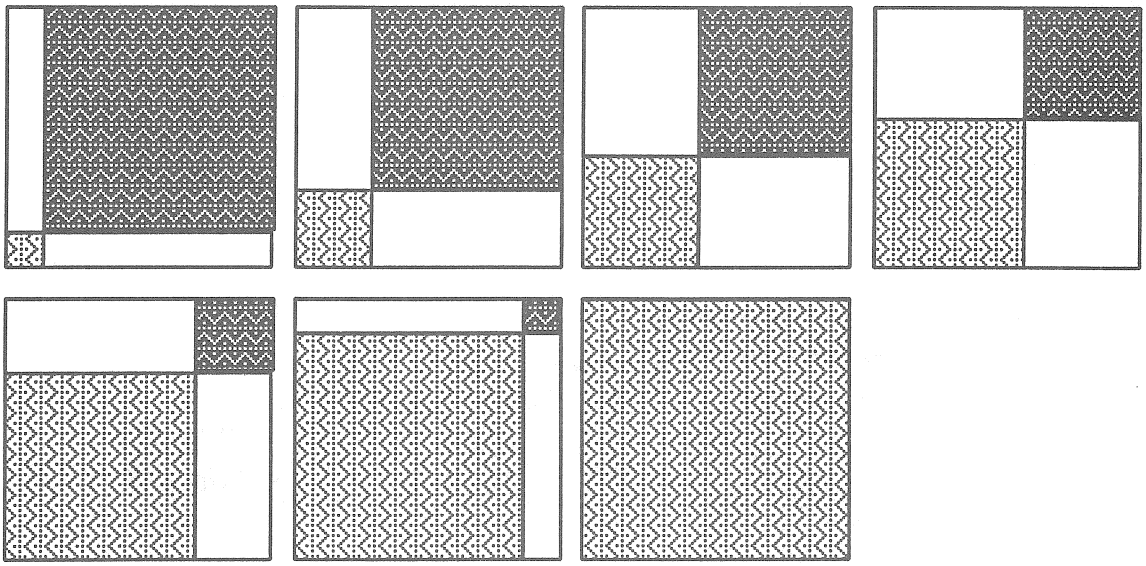
Il enferme chaque carré de la suite dans un carré de la plus grande taille.

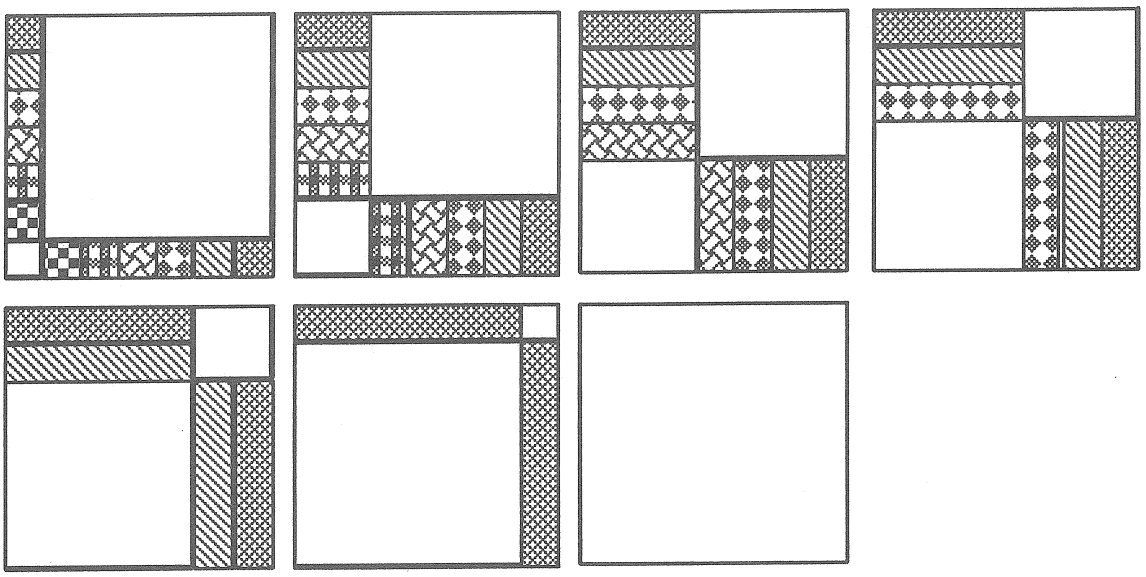




En découpant en 4 parties rectangulaires - dont le carré de la suite - chacun de ces grands carrés, il apparait en diagonale une deuxième suite identique à la première, à l'exception de son dernier terme.

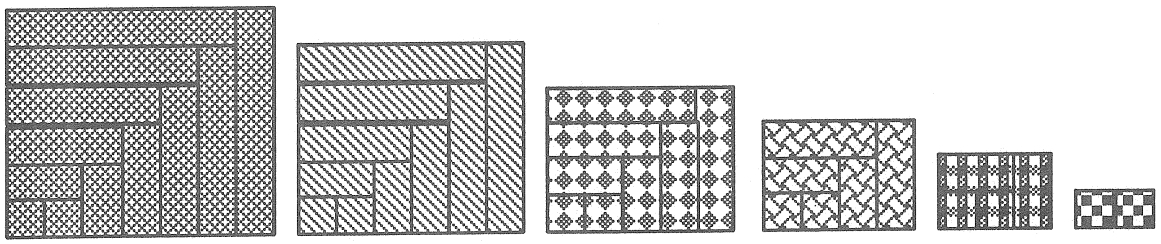
Archimède découpe ensuite chaque rectangle restant en bandes de largeur 1.

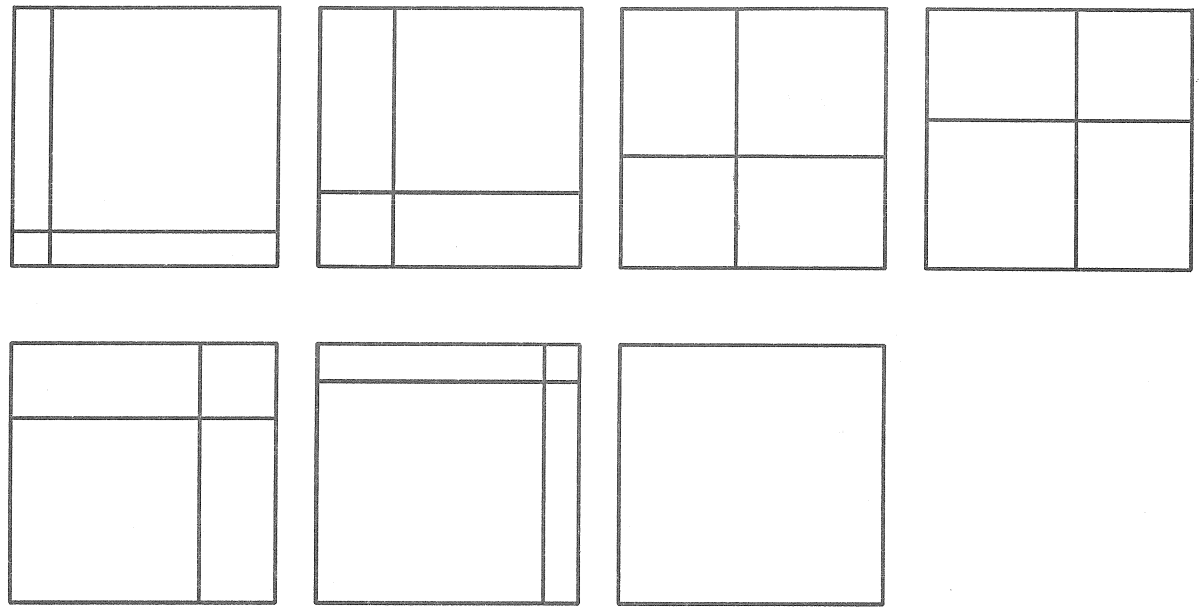


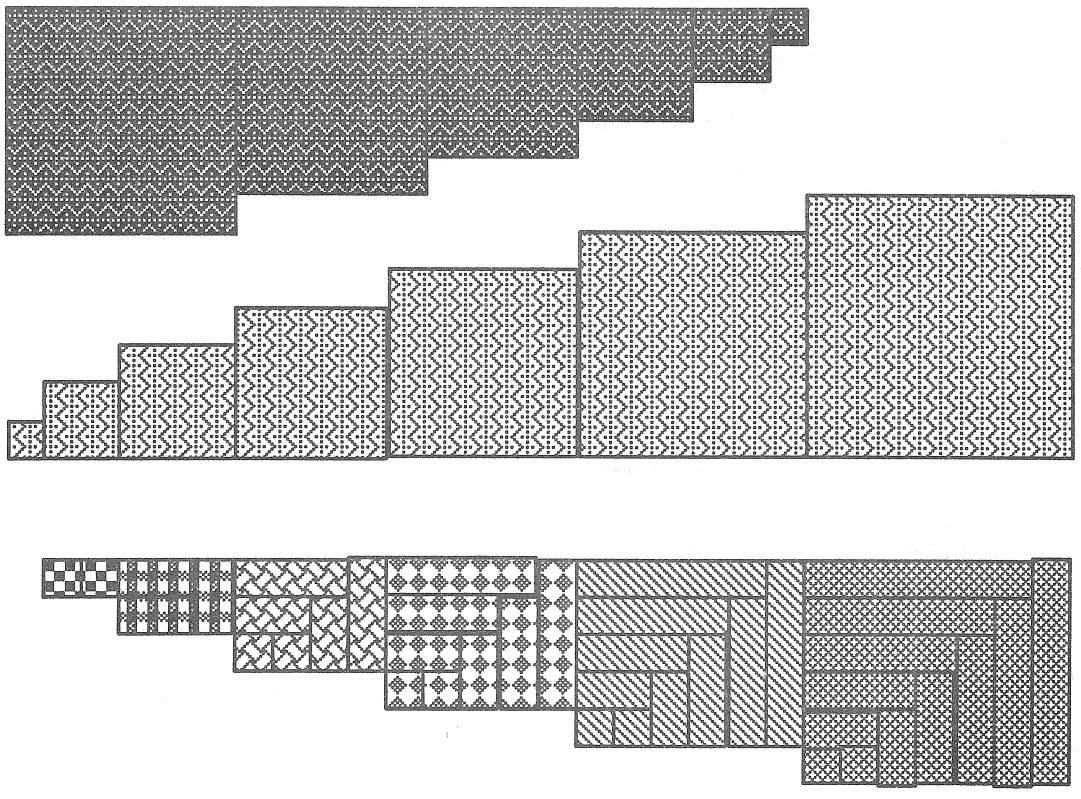


Les rectangles restants sont découpés par Archimède en bandes de largeur 1 et regroupés comme le suggèrent les textures. De cette manière, chaque série de bandes forme un escalier à bandes horizontales et un escalier à bandes verticales. Ces deux escaliers s'imbriquent pour former un rectangle.

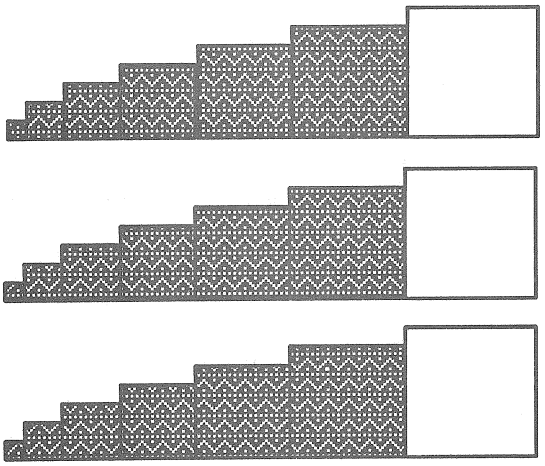
Le rectangle formée par les bandes extérieures a pour dimensions : (n-1) x n , le deuxième (n-2) x (n-1) et ainsi de suite. Chaque rectangle est ainsi intermédiaire entre 2 carrés de la suite.

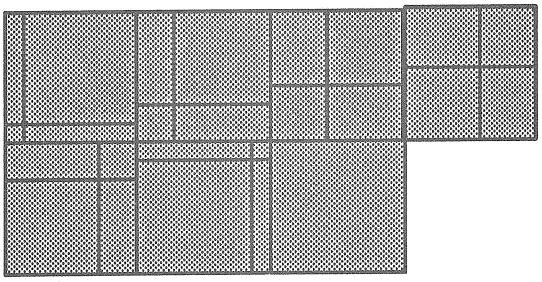


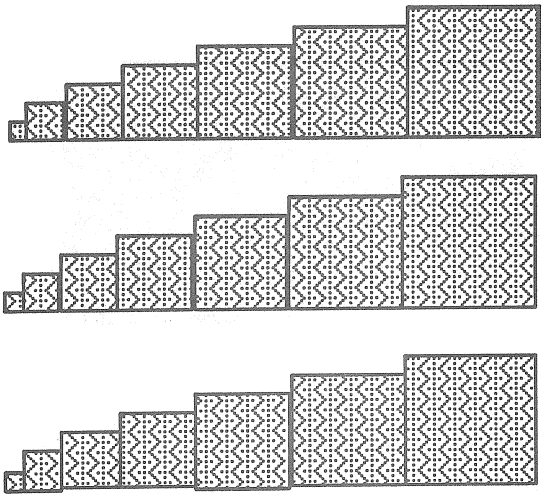




Voici, décomposé en trois séries, le contenu des n carrés du haut.







Les 3 séries de la page précédente sont inégales, la série des rectangles étant intermédiaire entre celles des carrés.

Le triple de la série des (n-1) carrés est inférieur à ces 3 séries, alors que le triple de la série des n carrés lui est supérieur.

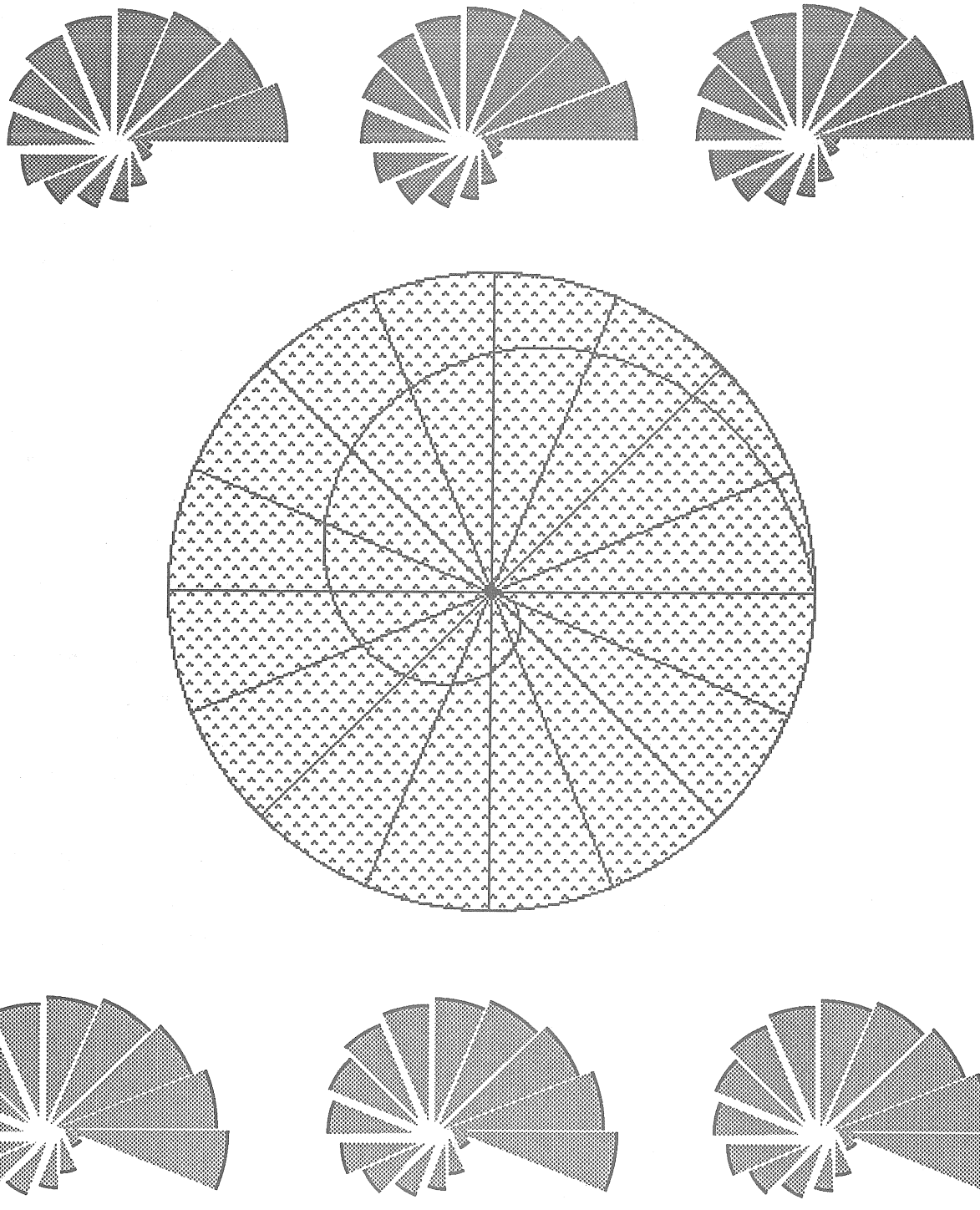
Voici donc trois aires inégales, disposées en ordre croissant de haut en bas :

-le triple de la série des (n-1) carrés

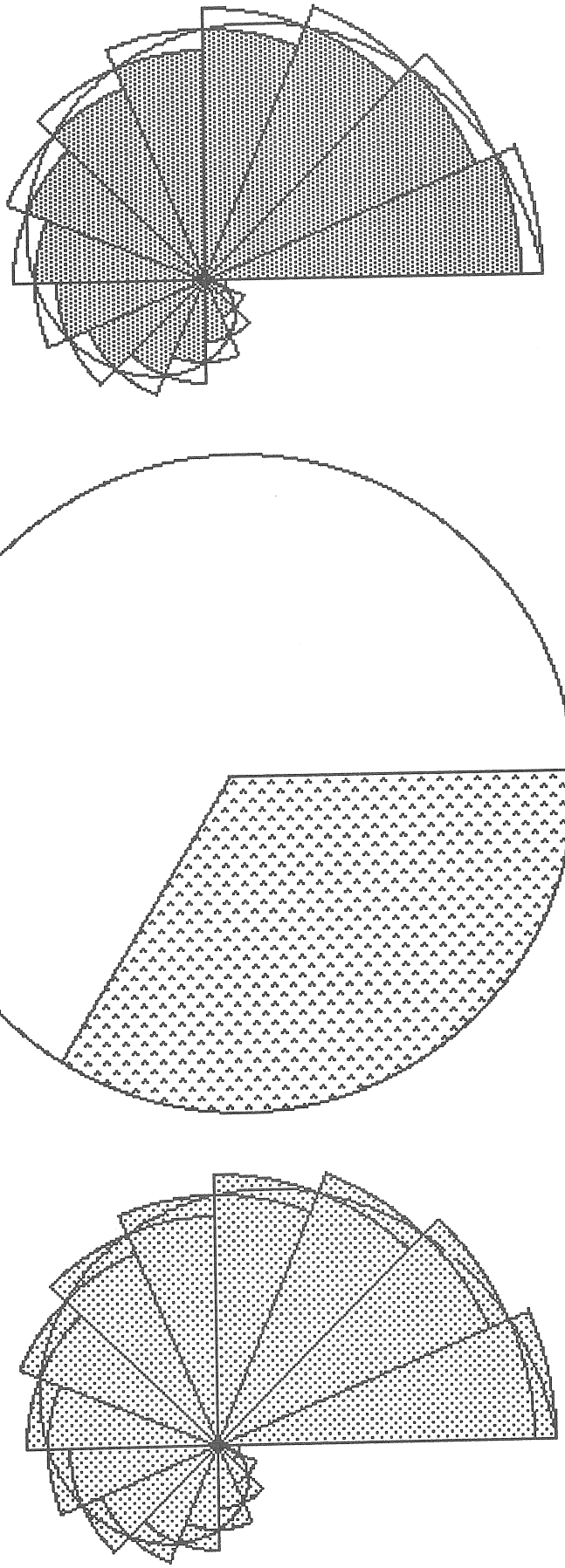
-les n carrés de la plus grande taille

-le triple de la série des n carrés.

TRANSPOSITION AUX SECTEURS



Et voici la transposition de l'inégalité sur les séries de carrés aux séries de secteurs par linéarité (les n grands secteurs forment exactement le disque de fin de première révolution).



En divisant chaque aire de l'inégalité par 3, nous obtenons l'ordre ci-contre, croissant de haut en bas :

-la série des (n-1) secteurs n'est autre que la figure dentée inscrite

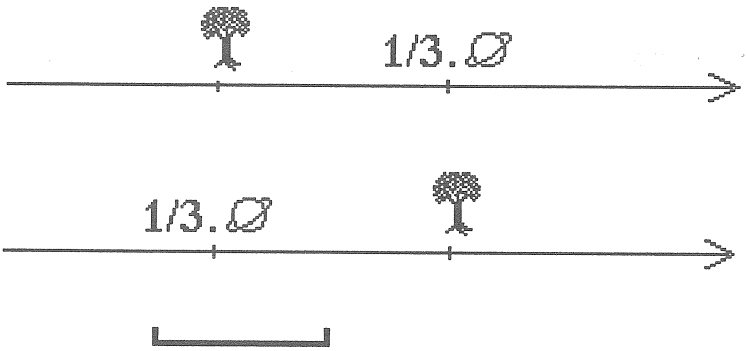
-le tiers du disque de fin de première révolution

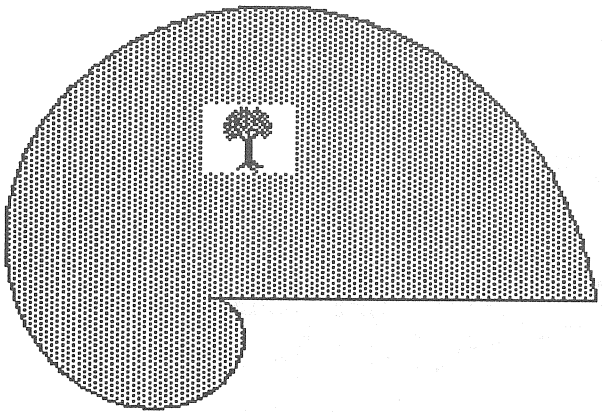
-la série des n secteurs n'est autre que la figure dentée circonscrite

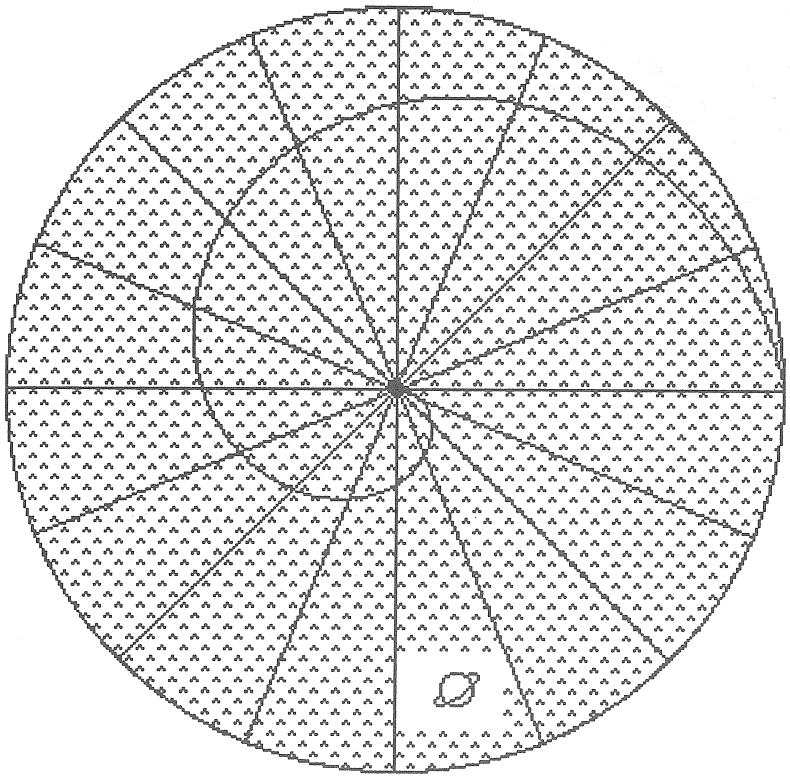
Les figures dentées varient suivant le nombre de secteurs choisi, alors que le disque de fin de première révolution en est indépendant. La première révolution de spirale est un autre élément fixe intermédiaire entre les 2 figures dentées.

Il reste à formuler correctement le résultat fondamental qui est maintenant intuitif.

L'AIRE DE LA PREMIERE REVOLUTION







La première révolution de spirale ainsi que le tiers du disque de fin de première révolution étant 2 aires fixes, encadrées par 2 figures dentées aussi proches l'une de l'autre que l'on veut, ne peuvent qu'être égales.

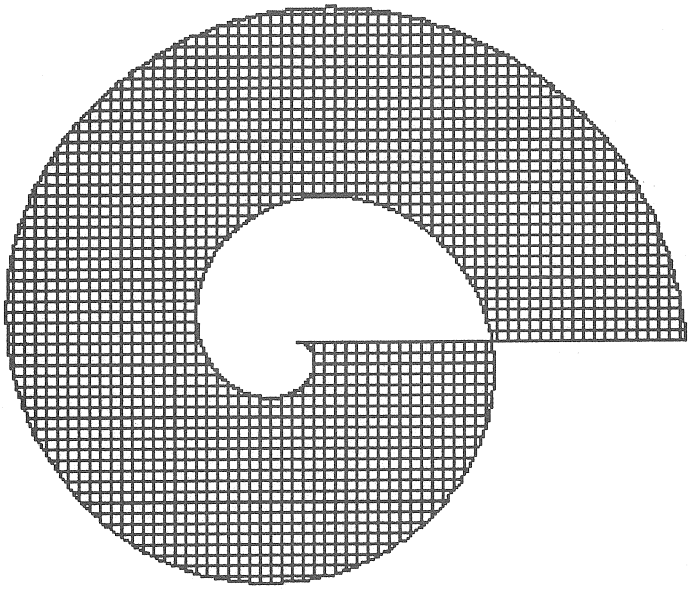
En effet, si elles sont inégales, dans un sens ou l'autre, on choisit un découpage en secteurs assez fin pour que les 2 figures dentées aient une différence moindre que leur différence. Ainsi que le dessin le suggère, il est impossible que les 2 figures dentées encadrent simultanément l'un et l'autre.

L'aire de la première révolution de spirale est le tiers de celle du disque de fin de première révolution.

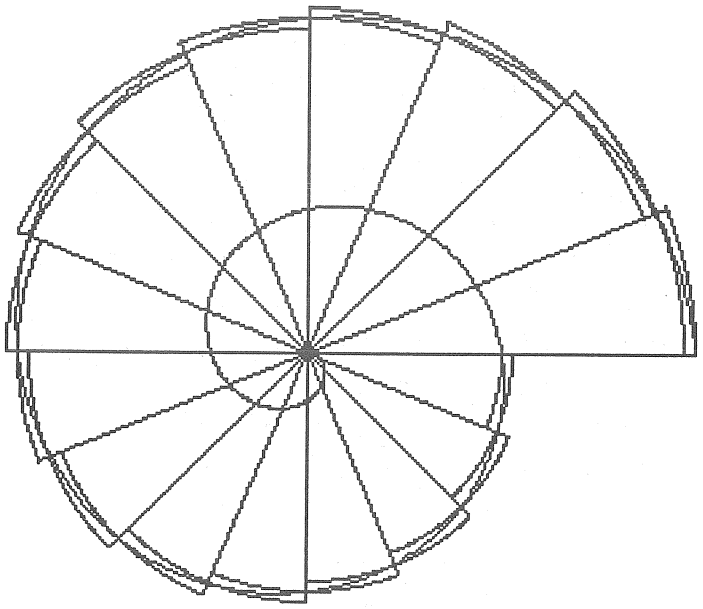
= 1/3. ∅

L'AIRE DE LA DEUXIEME REVOLUTION

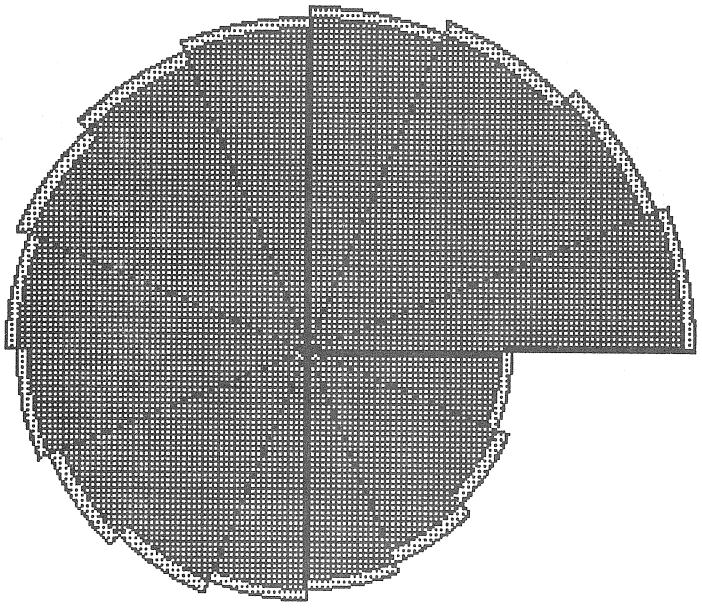
LA DEUXIEME REVOLUTION

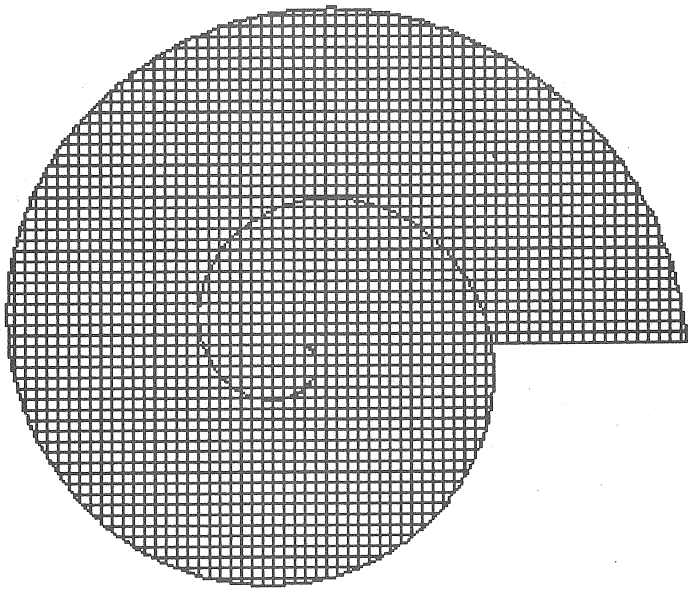


Pour déterminer l'aire de la seconde révolution de spirale, Archimède reprend la même démarche et essaie de l'encadrer par deux figures dentées formées de secteurs circulaires.

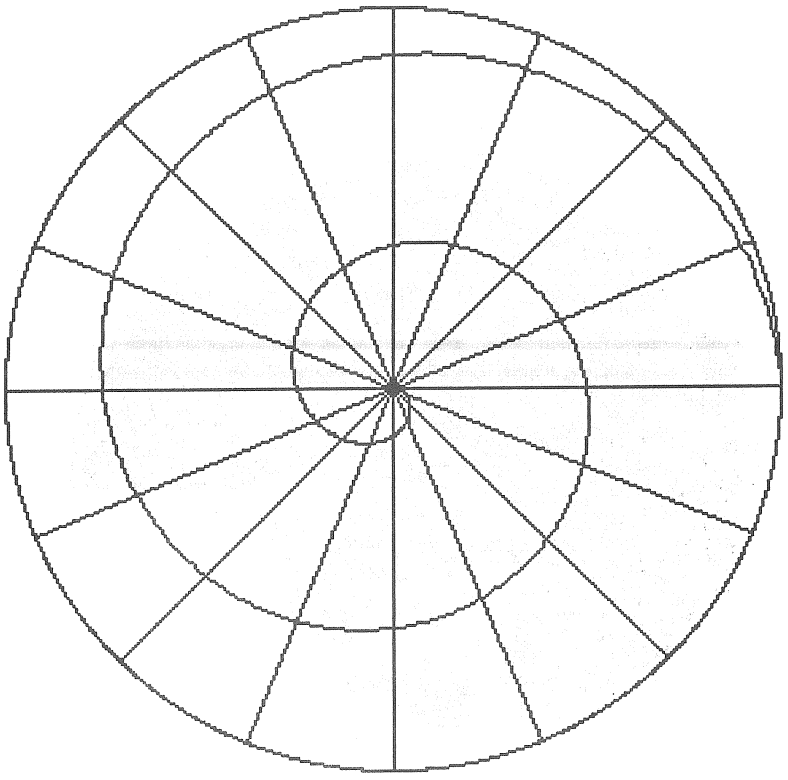


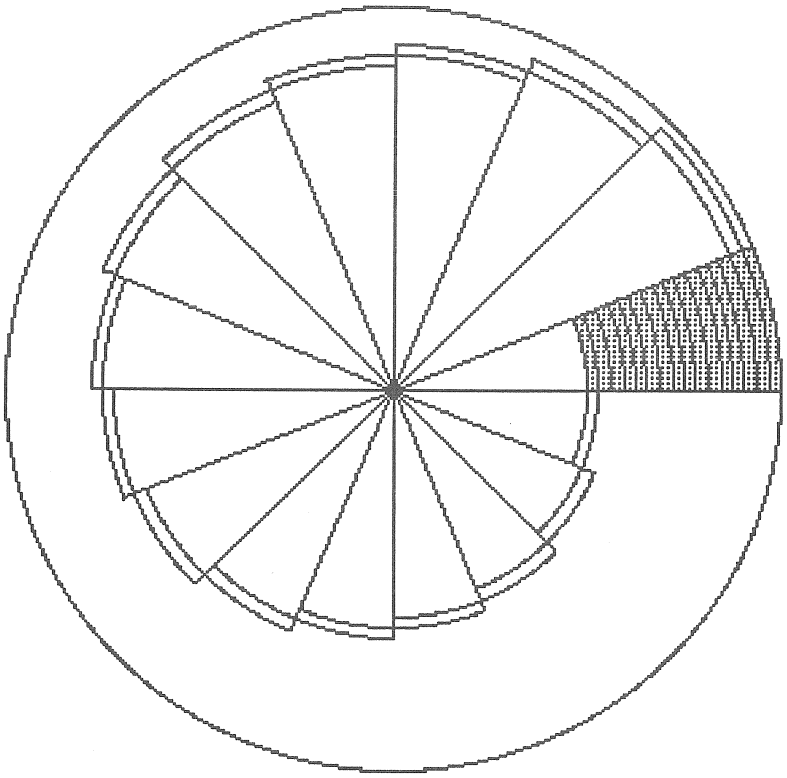
L'angle plein autour de l'origine est partagé en n secteurs angulaires et chaque portion de spirale est encadrée par 2 secteurs circulaires. On forme 2 figures dentées emboitées comme précédem ment sauf que les rayons des secteurs sont en progression arithmétique sans être multiples du premier



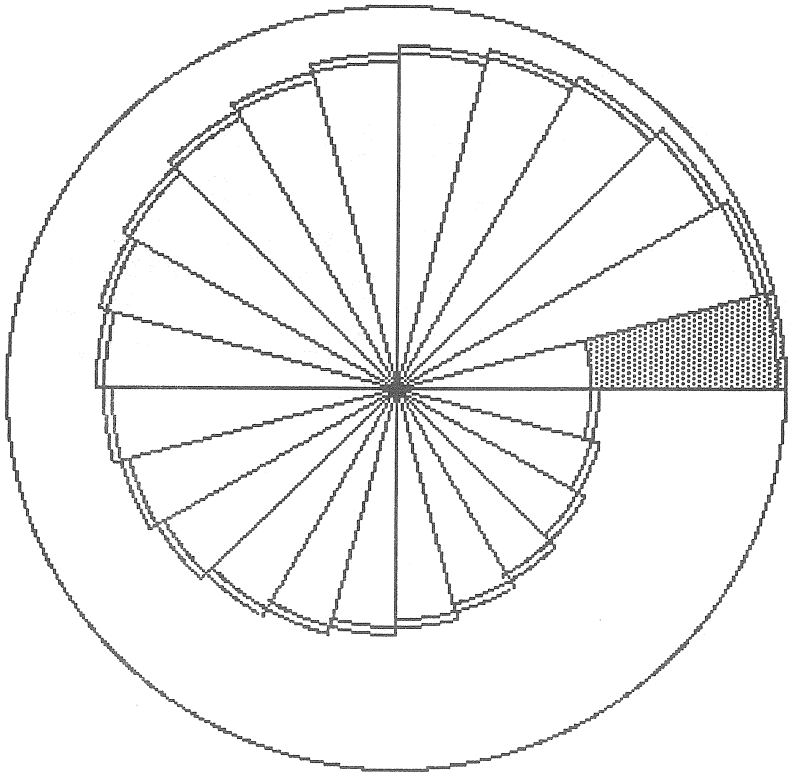


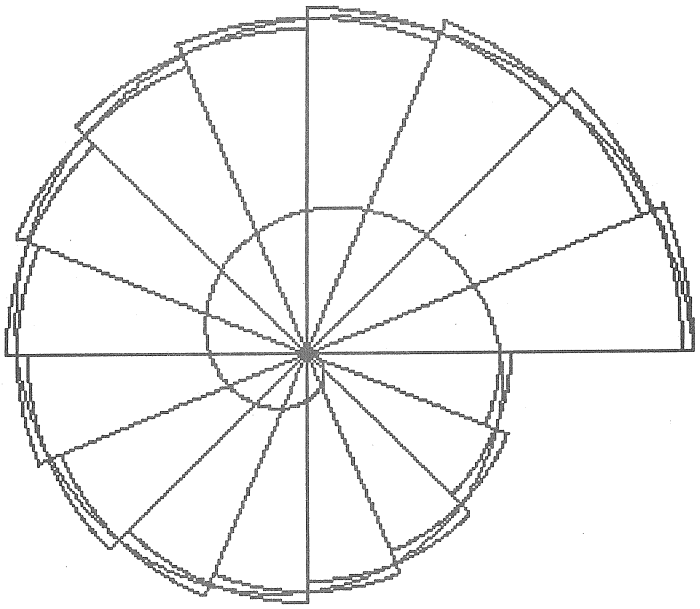
La surface encadrée est, en fait, l'ensemble des deux premières révolutions. Et cette surface est comparée au disque de deuxième révolution, dans lequel elle s'inscrit.



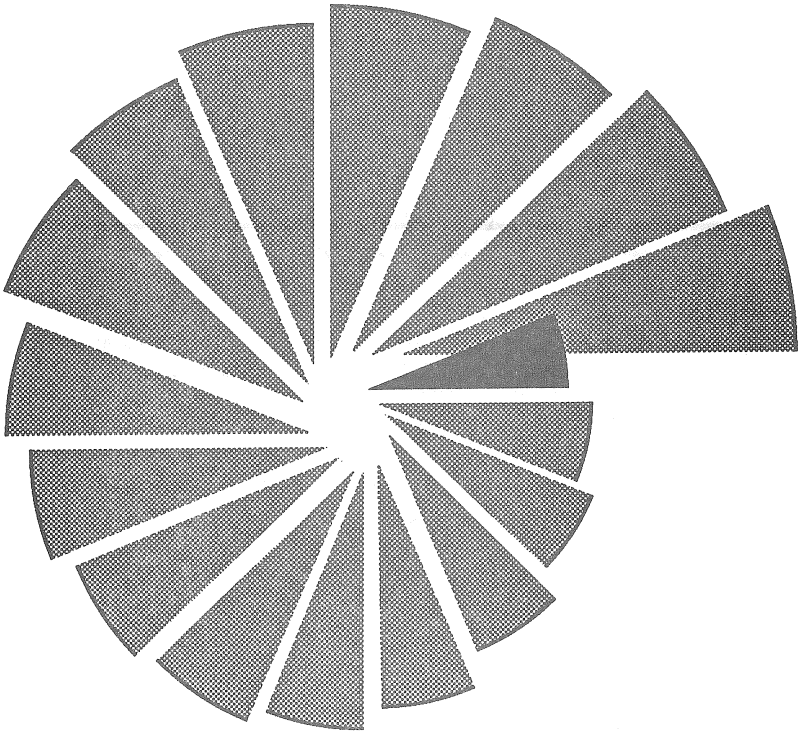


La différence entre les 2 figures dentées est une fraction d'un secteur du disque de fin de deuxième révolution. En prenant n assez grand, ce secteur - donc la différence - peut être rendu inférieur à toute surface donnée.

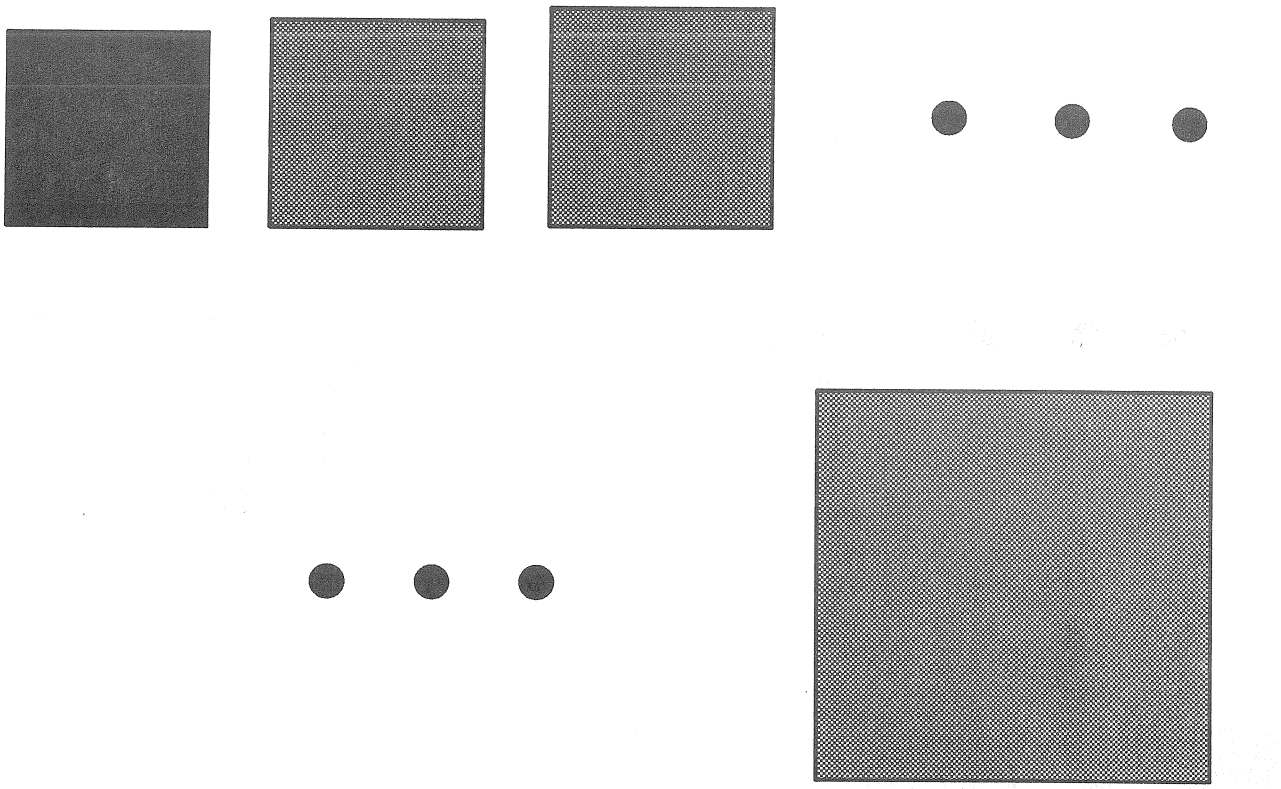




Archimède part de la suite de (n+1) secteurs dont le premier a le rayon de fin de première révolution et le dernier, le rayon de fin de deuxième révolution (le premier et le dernier se chevauchent). La figure dentée inscrite est la somme des n premiers secteurs (exception est faite du dernier) ; la figure dentée circonscrite est la somme des n derniers secteurs (exception est faite du premier).

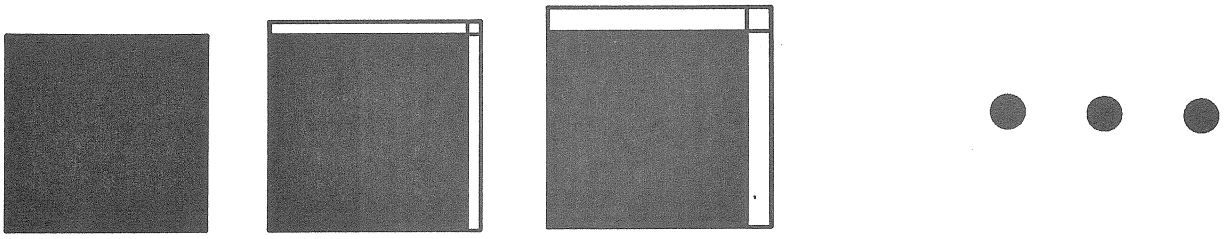


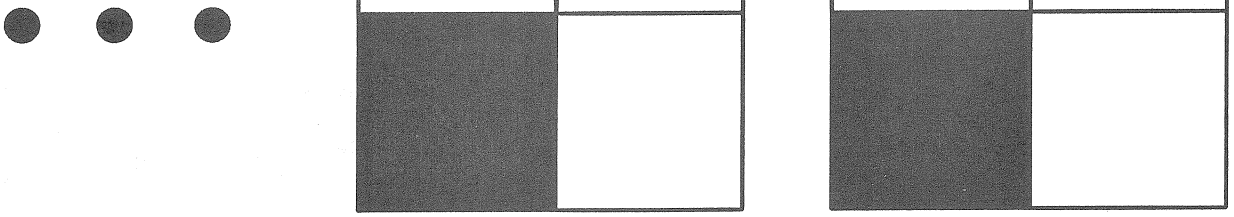
TRANSPOSITION EN CARRES

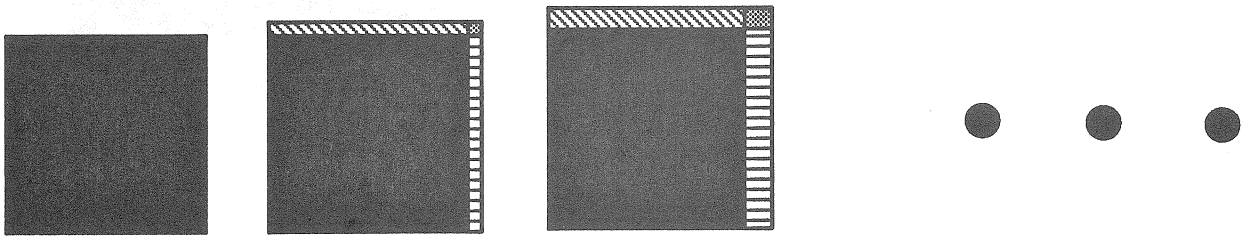


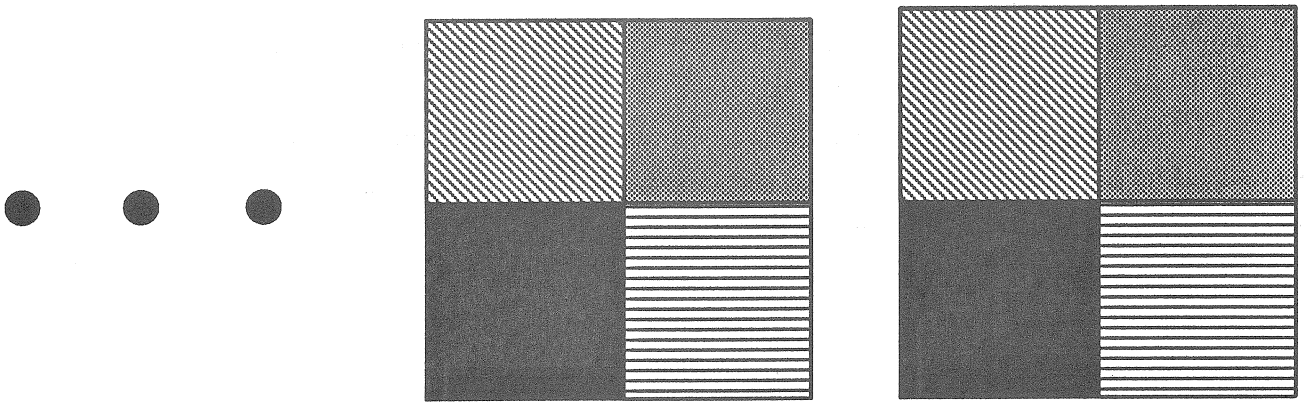
Comme en page 31, chaque secteur est associé au carré de même côté. Nous disposons de (n+1) carrés de côtés en progression arithmétique.

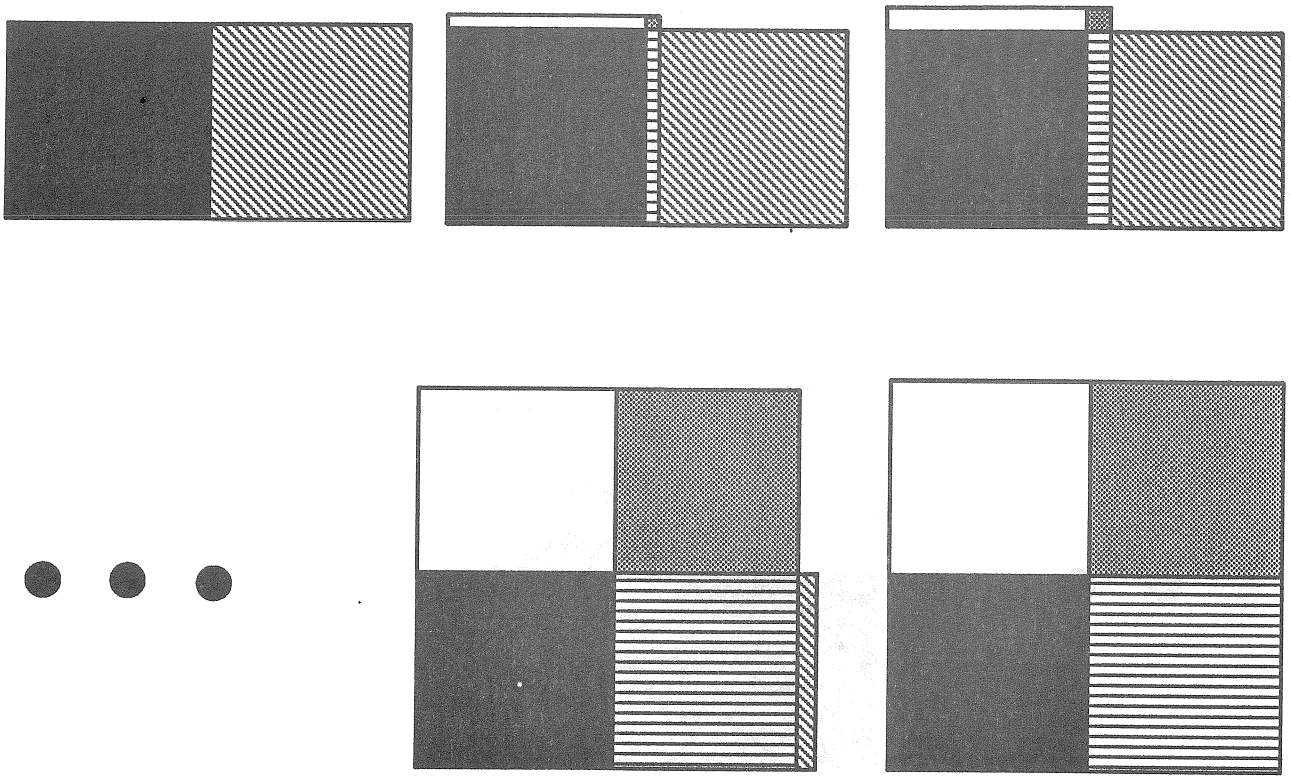
La matière qui compose cette série est remodelée par Archimède qui découpe d'abord un carré égal au premier dans chacun, ce qui fait apparaître en diagonale, une suite de carrés similaires à ceux de la page 32 (dont les côtés sont les multiples du premier).











Outre les carrés en diagonale, chaque carré comprend 2 rectangles. Archimède les associe deux à deux ; tous ceux de la partie supérieure sont tournés d'un quart de tour puis accolés à ceux du bas en inversant leur ordre : le premier avec le dernier, le deuxième avec l'avant-dernier, etc...

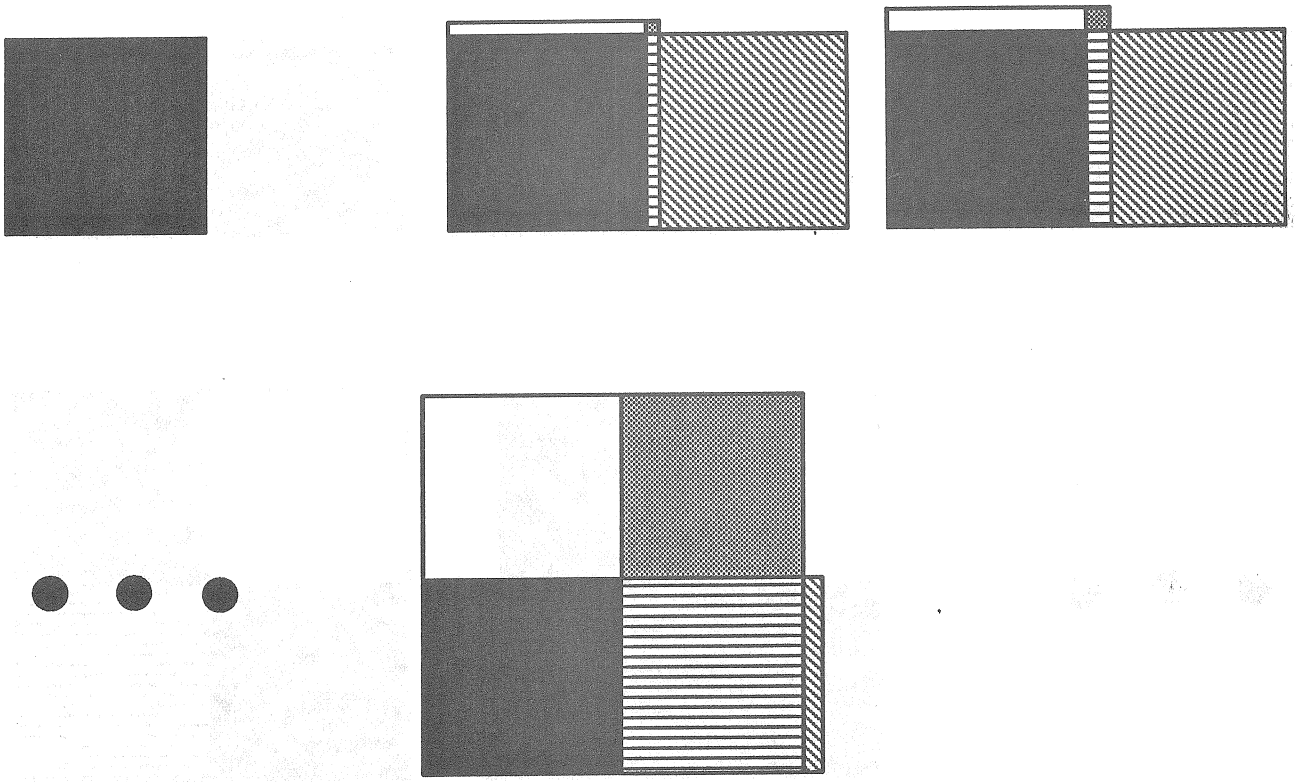
Il forme ainsi dans chaque terme, un second carré accolé au noir.

C'est une nouvelle série, dont chaque terme est un double carré égal au noir surmonté d'un carré en progression.

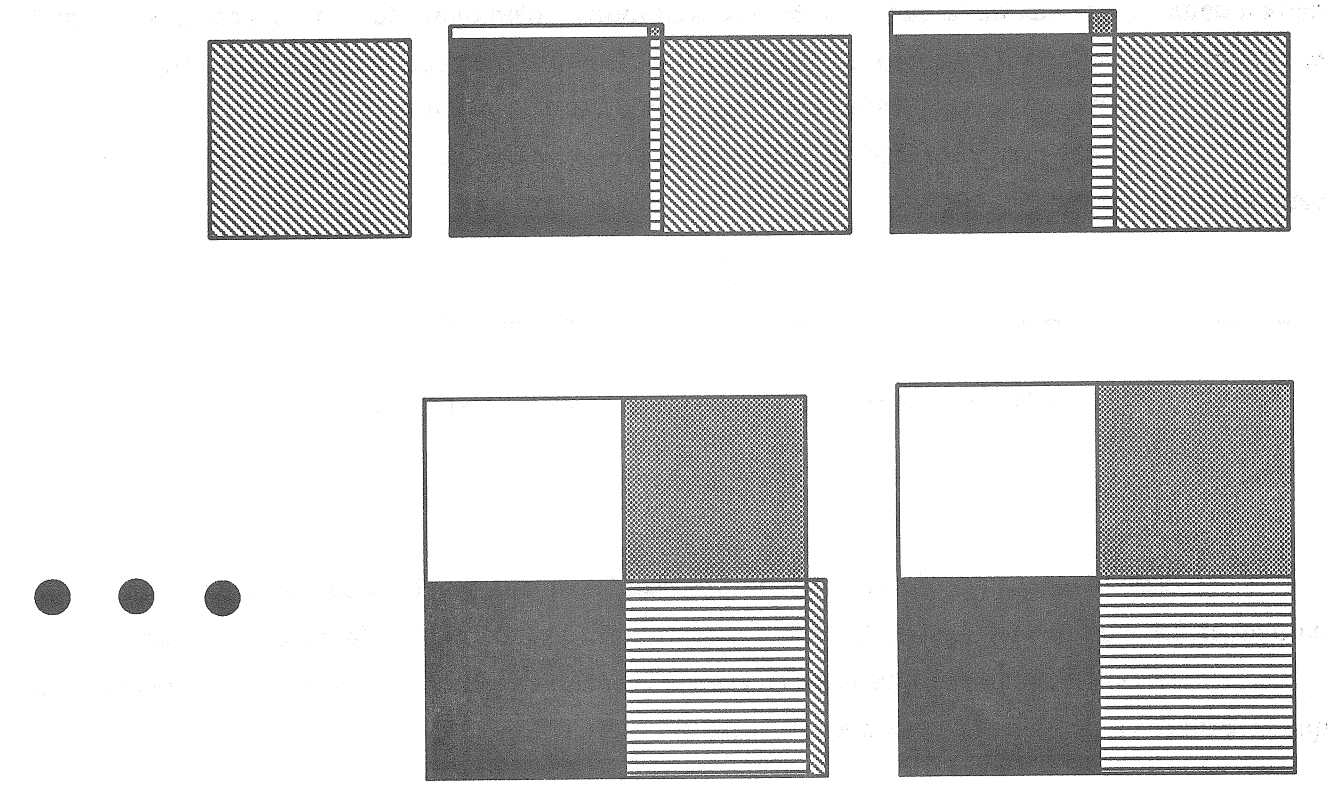
COMPARAISON DES DEUX SERIES RECTANGLES-CARRES

Les (n+1) carrés de la page 45 correspondent aux (n+1) secteurs de la page 44. En particulier, les n premiers corespondent à la figure inscrite, les n derniers, à la figure circonscrite.

Si on ôte **la matière du dernier carré** dans la série remodelée ci-dessus, on obtient moins que la série des n premiers de cette nouvelle série :

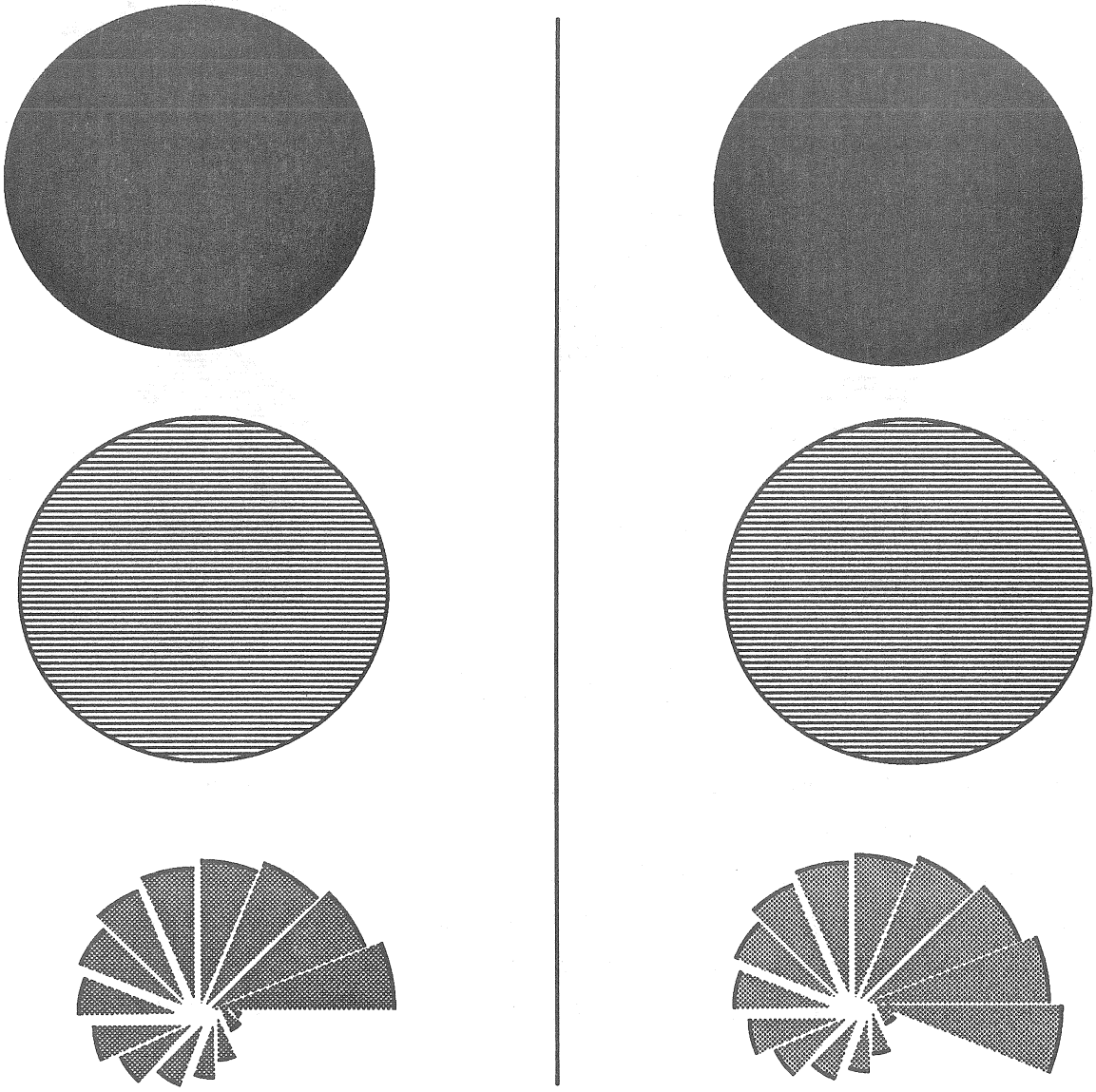


Et si on ôte **la matière du premier carré**, plus que la série des n derniers de la nouvelle série.



Ce qui veut dire que les nouvelles séries extraites, viennent s'insérer entre les anciennes.

RETOUR AUX SECTEURS

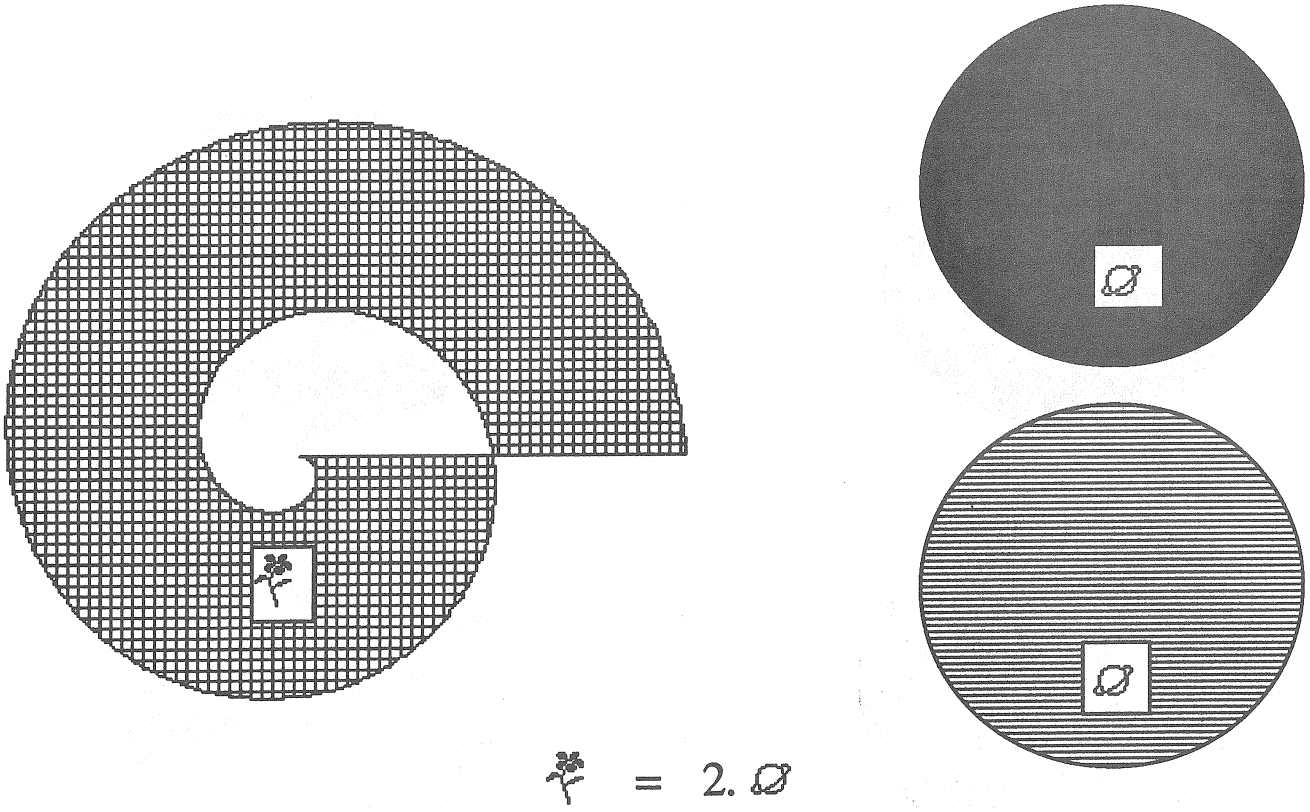


Remplaçons maintenant chaque carré de la nouvelle série par son secteur associé :

Dans la série formée des n premiers, nous avons 2.n secteurs qui constituent 2 disques de fin de première révolution, plus (n-1) secteurs qui forment une figure inscrite dans la première révolution ; tandis que dans la série formée des n derniers, nous avons aussi de quoi faire les 2 mêmes disques, plus n secteurs qui forment une figure circonscrite dans la première révolution.

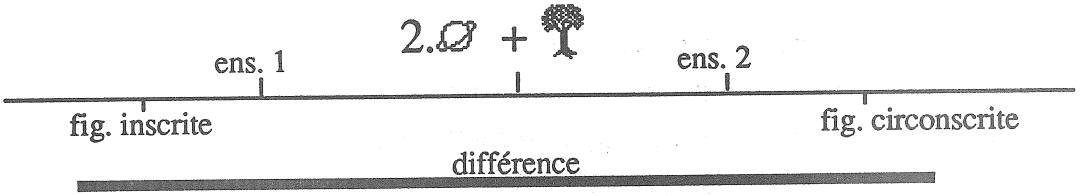
Et, ce dont Archimède s'est assuré, c'est que les aires de ces deux ensembles s'insèrent entre les figures inscrite et circonscrite de la page 41.

AIRE DE LA DEUXIEME REVOLUTION



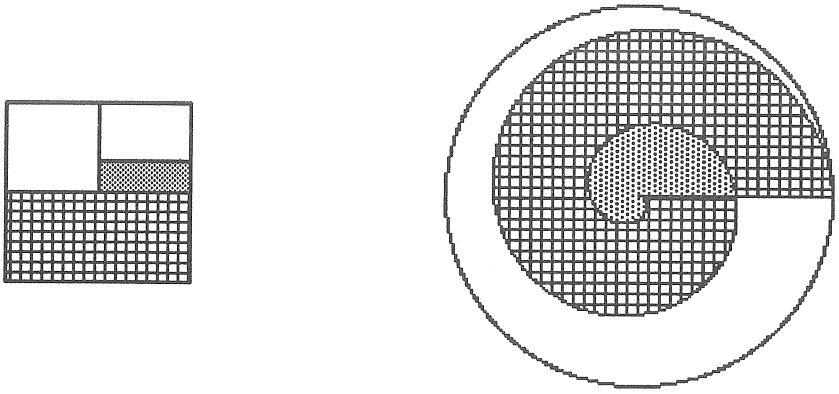
L'aire de la deuxième révolution de spirale équivaut au double du disque de fin de première révolution.

Supposons qu'ils soient différents. La différence entre ces deux aires serait donnée ; et on pourrait choisir n pour que les figures inscrite et circonscrite (page 43) soient plus proches que cette différence. Ce qui est vrai aussi pour les ensembles de la page précédente qui s'insèrent entre ces figures. Entre les 2 ensembles, se trouve l'ensemble formé de 2 disques de fin de première révolution plus la première révolution.

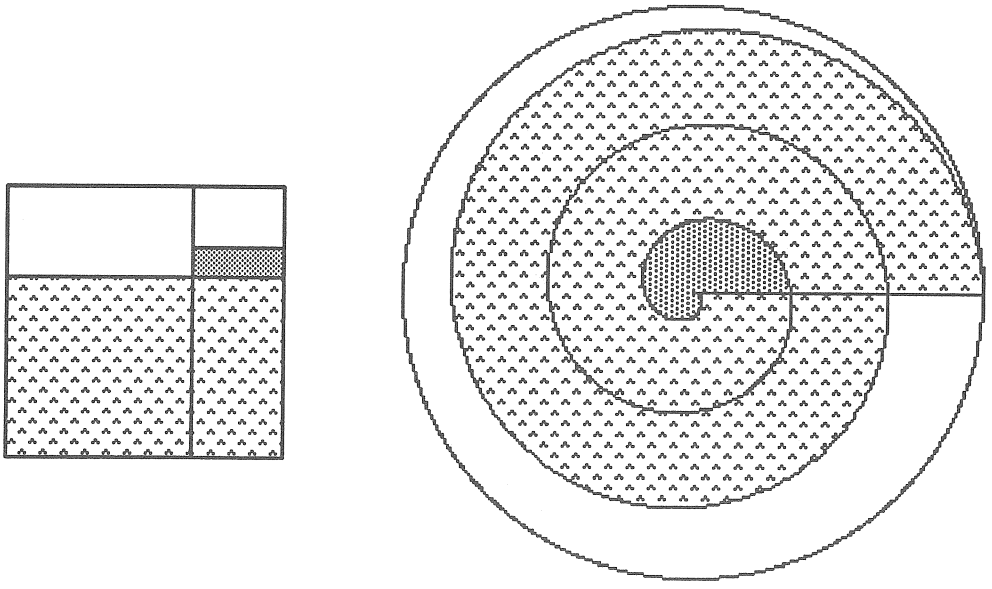


Il serait impossible de placer l'ensemble des deux premières révolutions entre ses figures inscrite et circonscrite !

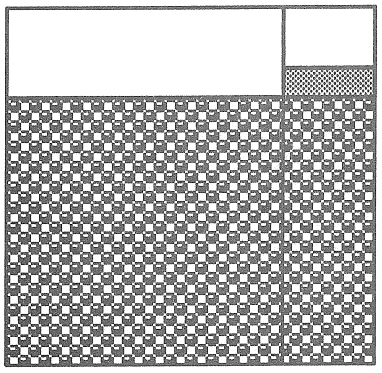
L'AIRE DES REVOLUTIONS SUCCESSIVES

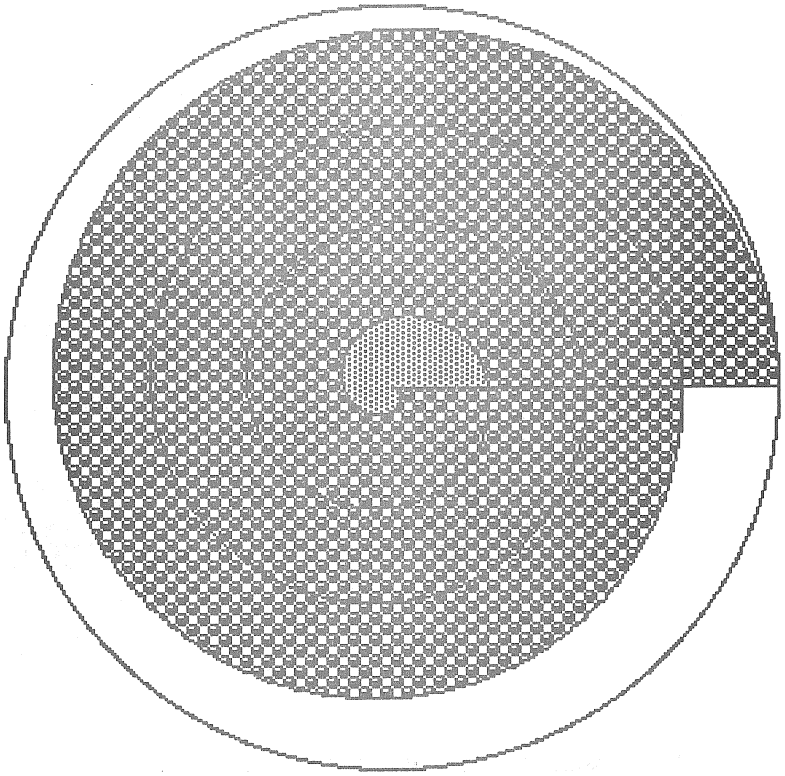


Pour résumer la démarche qui a fournie l'aire de la deuxième révolution, nous pouvons simplement dessiner le premier et le dernier carrés de la série de la page 45, l'un sur l'autre. Leurs côtés sont les rayons de fin de première et deuxième révolutions. Si au premier carré, nous associons un disque de fin de première révolution, nous pouvons représenter les aires en proportion : les 2 carrés inférieurs correspondent à 2 disques, donc à la deuxième révolution ; un tiers du carré supérieur droit à la première révolution ; et le carré circonscrit, au disque de fin de deuxième révolution.

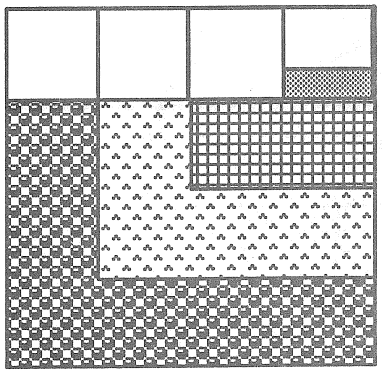


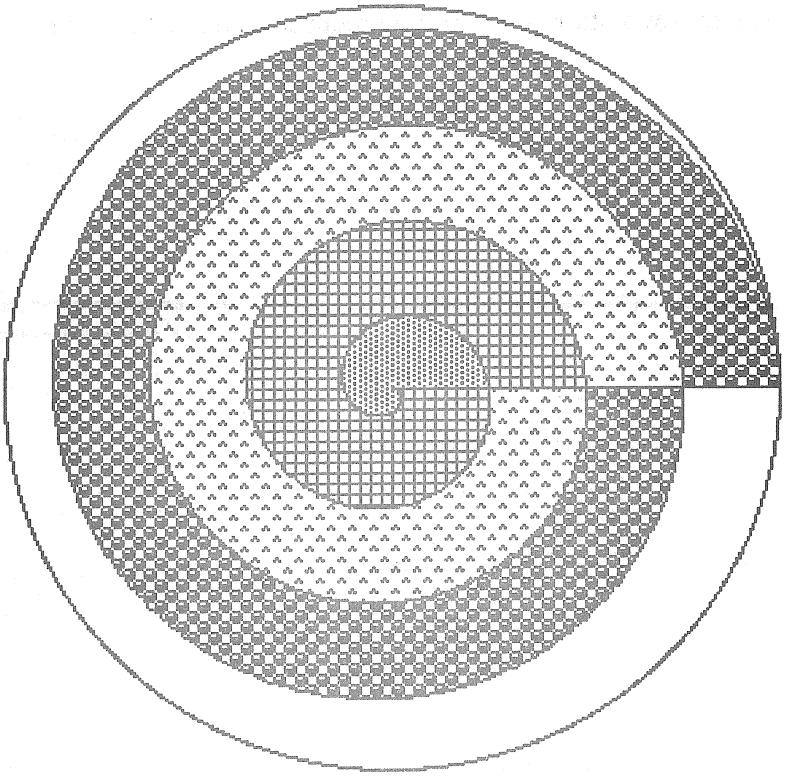
Les révolutions suivantes se représentent le la même manière.



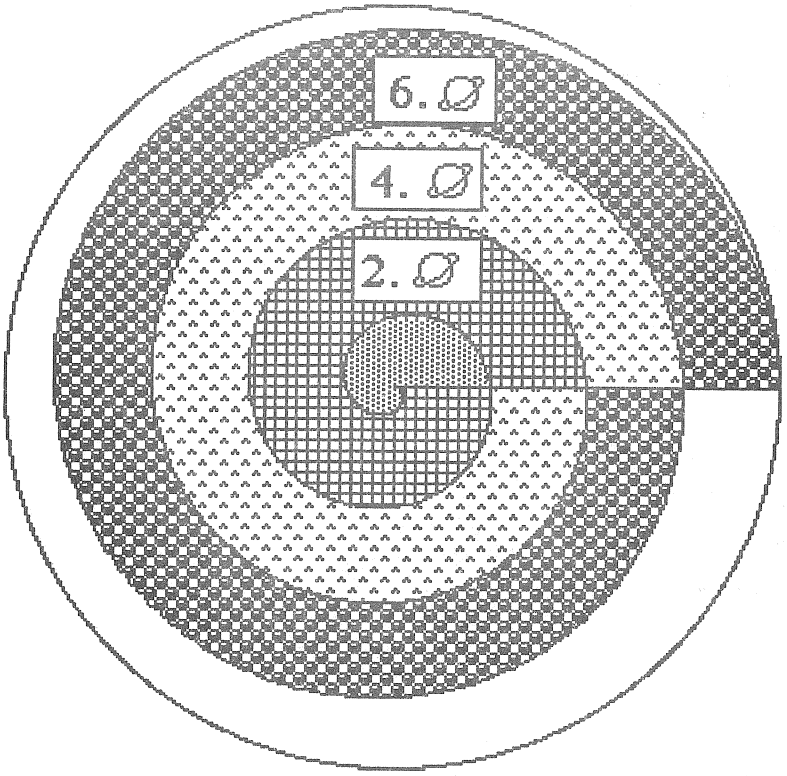


La succession des dessins précédents peut se superposer. Les figures de même trame sont en même proportion dans les deux figures

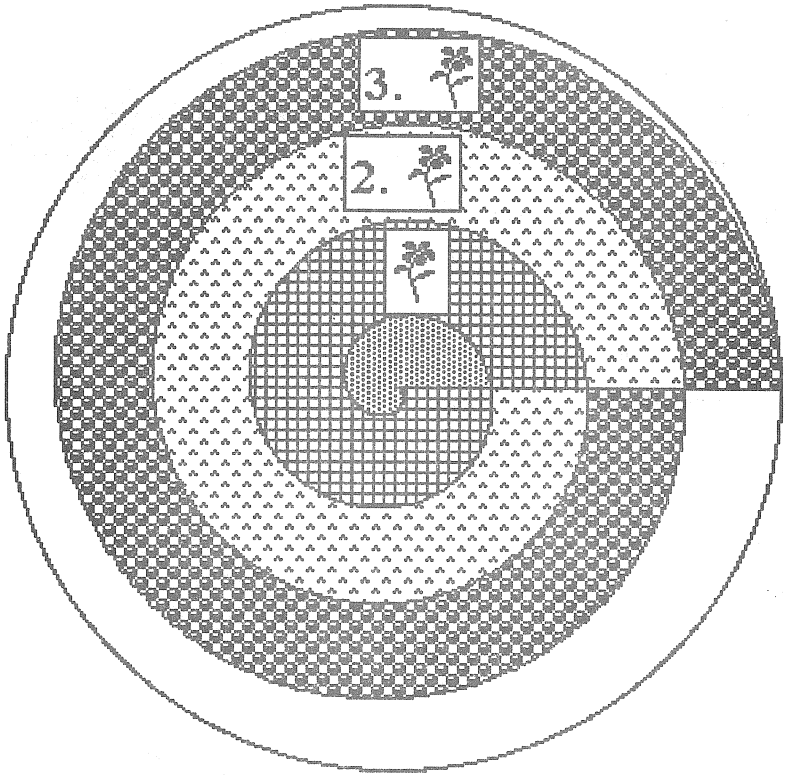




AIRE DES REVOLUTIONS DE SPIRALE



En transposant le rapport d'aire des polygones correspondants, et en sachant qu'un carré unité correspond au disque de fin de première révolution, l'aire de chaque révolution de spirale peut s'exprimer en fonction de ce disque.



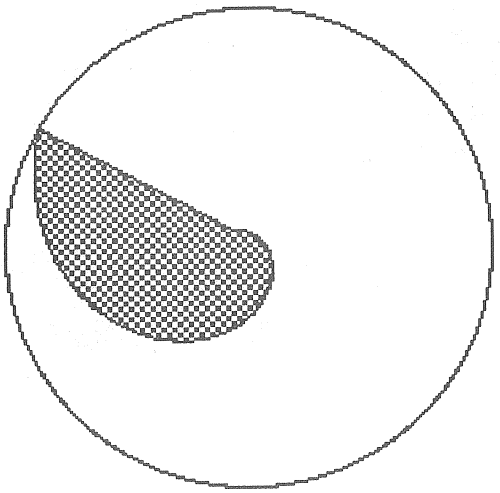
Il est interessant de remarquer aussi, que les aires des révolutions successives, à l'exception de la première, s'expriment très simplement en fonction de celle de la deuxième révolution.

L'aire des révolutions successives, à l'exception de la première, forme la suite des multiples de l'aire de la deuxième révolution de spirale.

EXERCICES

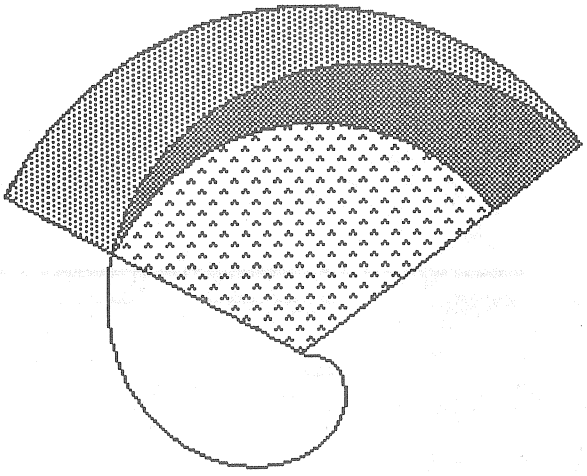
1) Montrer que les rayons de fin de révolution successifs sont les multiples du premier.
Montrer que l'aire du disque de fin de $n^{ième}$ révolution est le produit du premier par n^2

2) Si, à chaque secteur de la série de la page 31, on associe un cylindre de hauteur fixe et de même rayon, montrer que l'empilement des (n-1) - et celui des n - cylindres, enferment un cône. Comparer le volume du cône à celui du cylindre circonscrit, en transposant le résultat de la page 37.



3) Un secteur de spirale commençant est obtenu par balayage du rayon générateur, à partir de la position d'origine. Montrer que l'aire d'un secteur commençant est le tiers de celle du secteur de disque circonscrit.

4) On suppose l'angle plein partagé en n, et on étudie le secteur de spirale commençant à la division p et finissant à la division q.
Par une démarche analogue à celle qui a donné l'aire de la deuxième révolution, ou en utilisant l'exercice 3, montrer que les figures de même trame sont en mêmes proportions dans les 2 figures ci-contre (le carré supérieur est partagé au tiers).

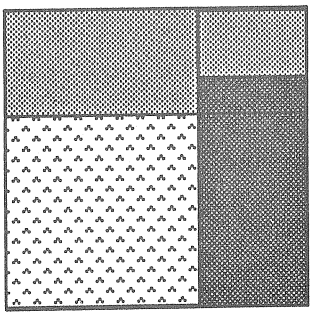


5) Retrouver le résultat de l'aire de la deuxième révolution, à partir de celui de la première, mais en considérant un secteur de 720°.

6) l'équivalent algébrique de la somme des carrés de la page 32, est la connaissance de la formule :

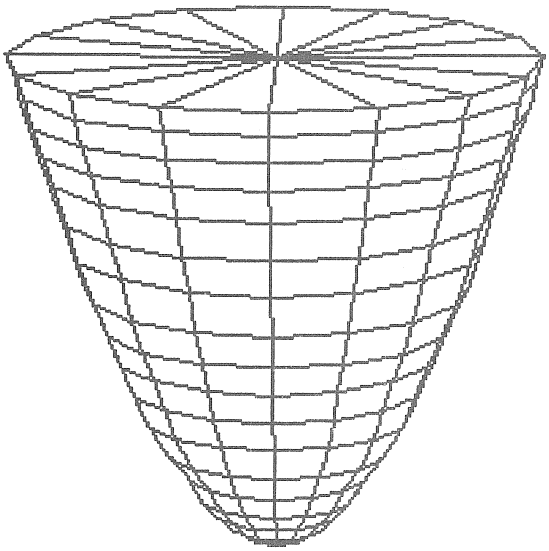
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

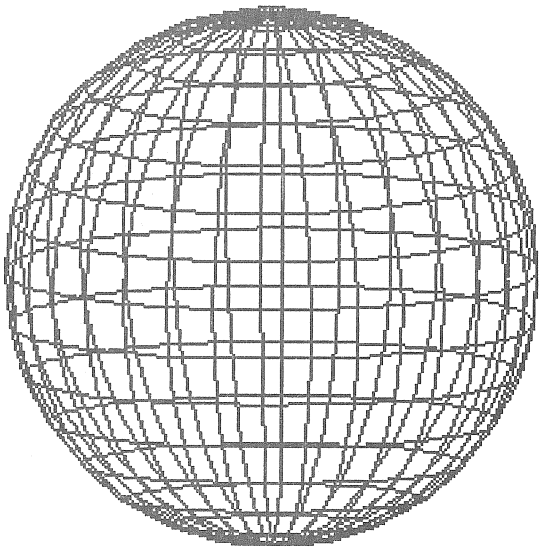
Retrouvez l'aire de la première révolution en utilisant cette formule.



Chapitre 3

LA METHODE RELATIVE AUX THEOREMES MECANIQUES





Dans cet ouvrage retrouvé récemment, Archimède utilise, au service de la géométrie, ses grandes intuitions de physicien. Il exploite le principe du levier, qui est son invention, pour découvrir des mesures complexes : aire du segment de parabole, volume de la boule, volume du paraboloïde, de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde, centre de gravité du paraboloïde et de la demi-boule, ...

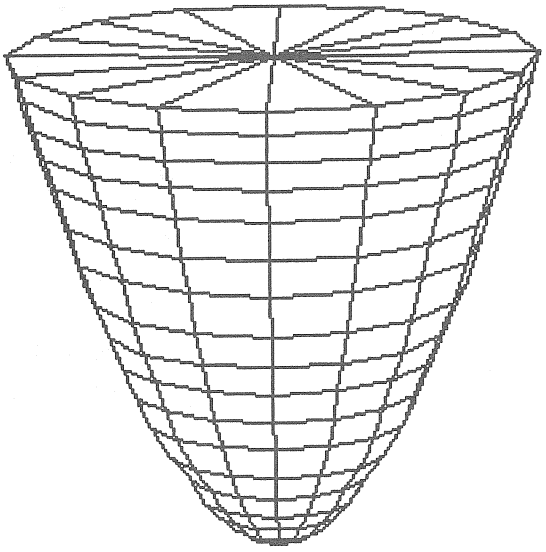
C'est la méthode qui est intéressante, même si, comme le dit Archimède, elle ne démontre pas les faits mais donne l'idée que la conclusion est juste ; et tous les résultats de ce livre seront démontrés dans d'autres livres par des méthodes géométriques, c'est-à-dire reposant sur un encadrement d'une valeur, ou une accumulation au voisinage d'une valeur.

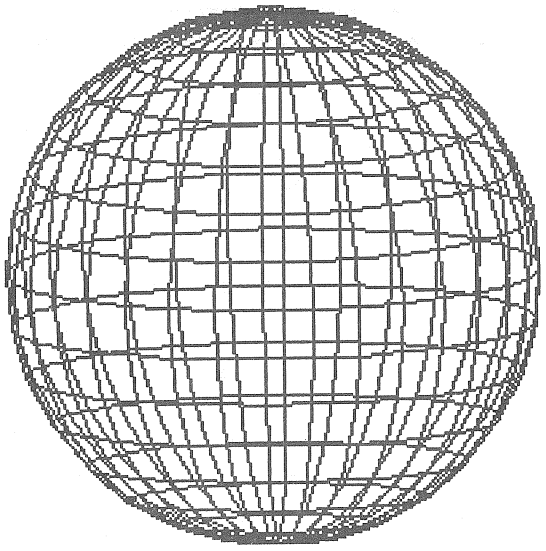
Il est, dans cet ouvrage, le précurseur de la théorie des indivisibles de Cavaliéri qui fut la première forme de l'intégration au XVIIième siècle.

LES OBJETS ETUDIES

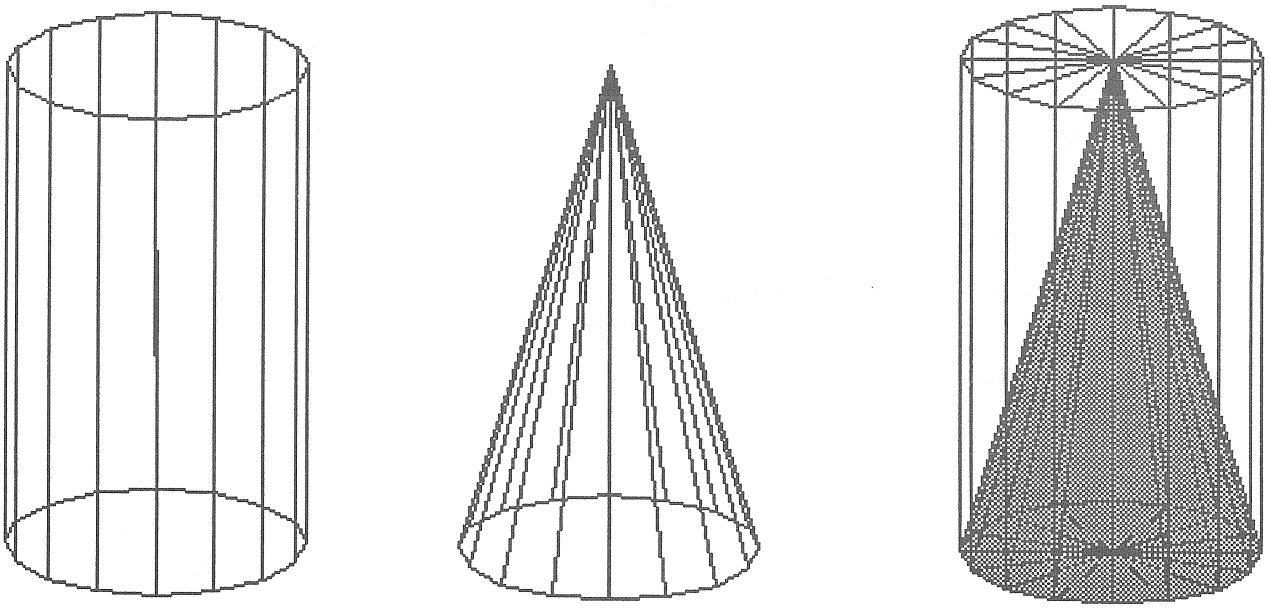
REPRESENTATION DES OBJETS

Quatre résultats seront montrés dans ce chapitre. Deux concernent le segment de paraboloïde droit (volume et centre de gravité) et les deux autres se rapportent à la boule (volume de la boule et centre de gravité de la demi-boule).

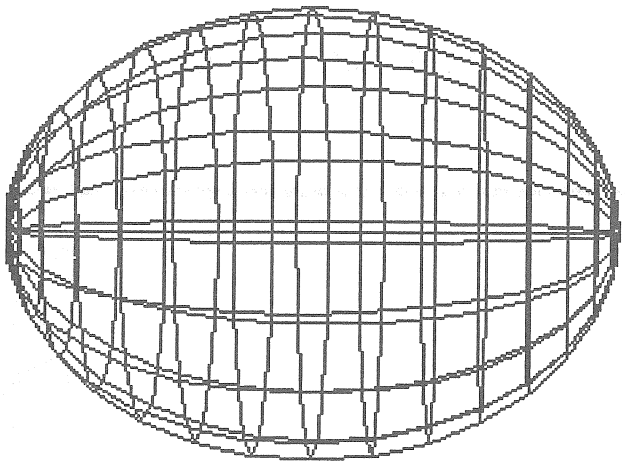




Les figures auxiliaires indispensables sont les cylindres et les cônes droits. Archimède sait et utilise le fait qu'un cône a un volume qui est le tiers de celui du cylindre circonscrit (voir exercice 3 page 54).



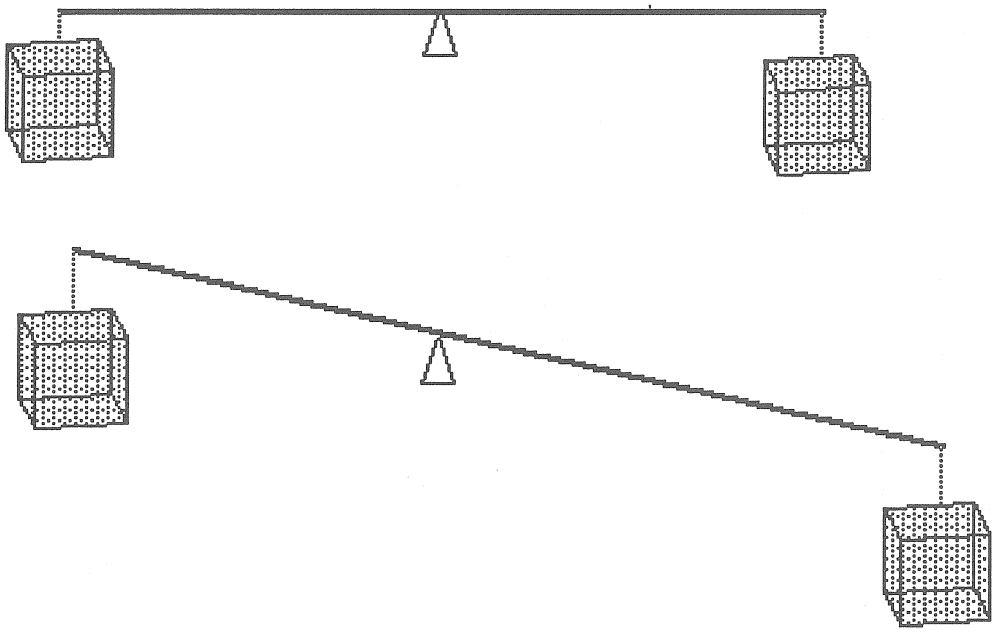
A ces quatre solides, vient s'adjoindre un cinquième, l'ellipsoïde de révolution, qui provient entre autres, d'un écrasement de la boule par affinité.



Tous cinq sont des solides de révolution, obtenus en faisant tourner un segment de parabole droit, un disque, un rectangle, un triangle isocèle et une ellipse autour d'un de leurs axes de symétrie.

LE LEVIER D'ARCHIMEDE

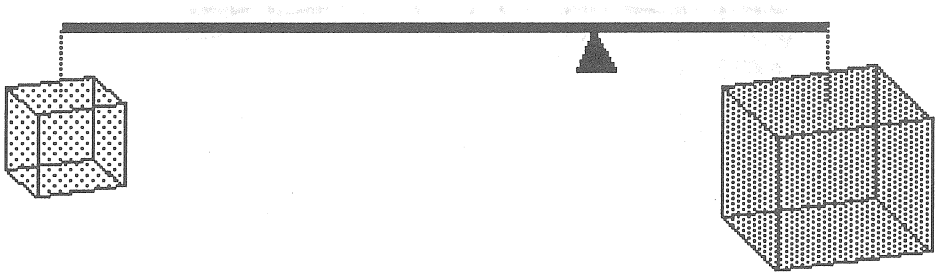
PREMIER POSTULAT



Des masses égales s'équilibrent à des distances égales du point d'appui.

Et si des masses égales sont disposées à des distances inégales du point d'appui, il y a inclinaison du côté du plus grand bras.

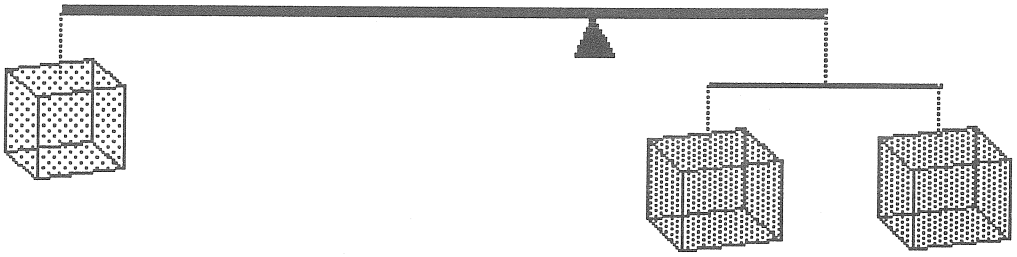
DEUXIEME POSTULAT



Si 2 masses sont en équilibre autour d'un point, et qu'on enlève de la matière à l'une d'elles, il y a inclinaison du côté de l'autre masse.

Si on ajoute de la matière à l'une d'elle, il y a inclinaison de son côté.

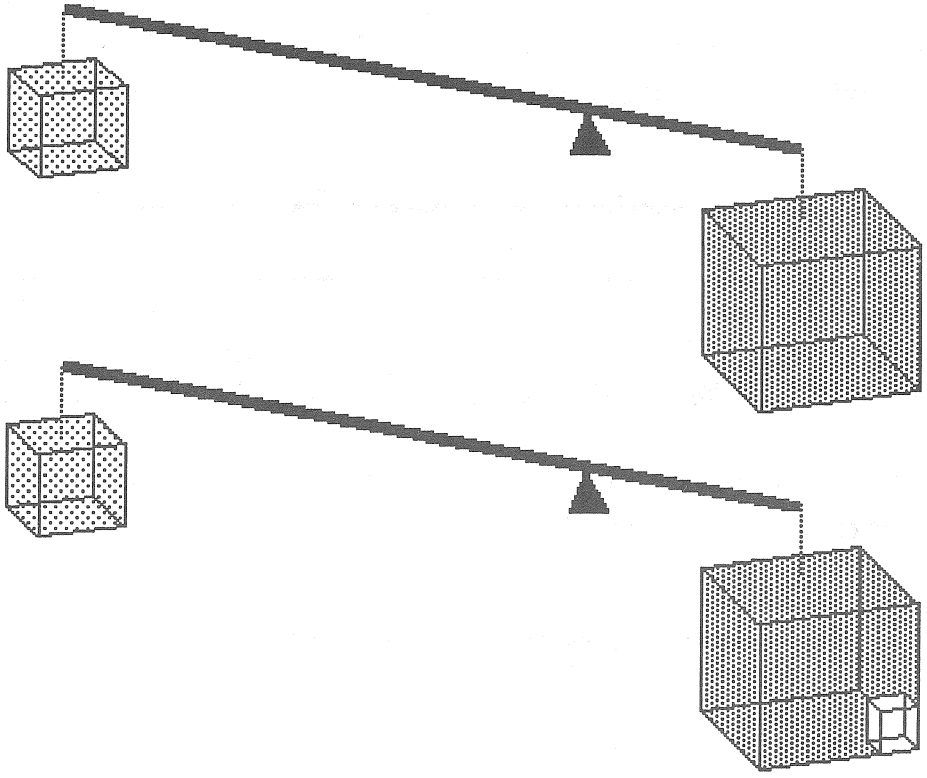
TROISIEME POSTULAT



On peut remplacer une masse par 2 masses moitiés disposées symétriquement sans changer l'équilibre.

Et réciproquement, on peut remplacer 2 masses égales par une double placée au milieu.

QUATRIEME POSTULAT

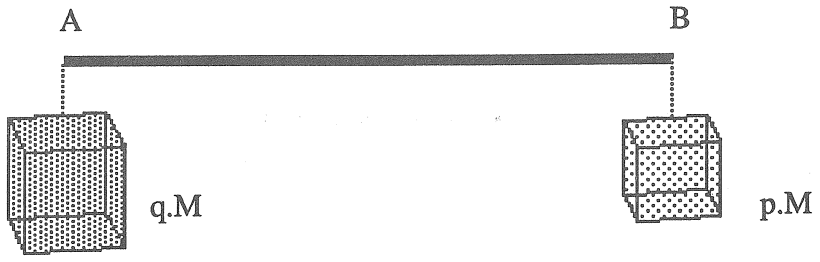


Si 2 masses sont en déséquilibre, on peut ôter de la matière à celle qui est en position basse sans modifier le déséquilibre.

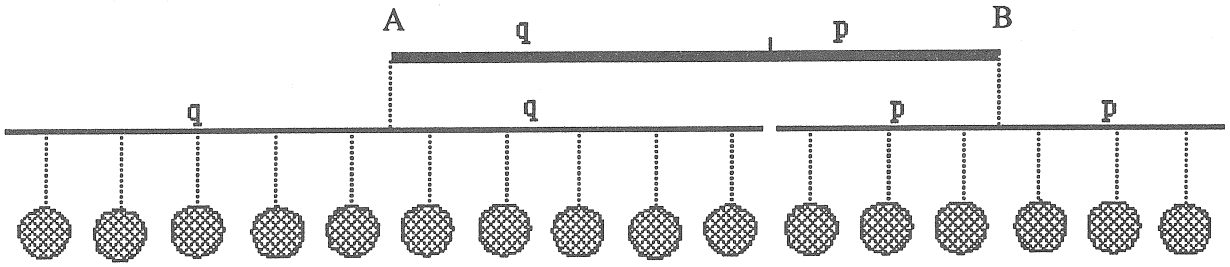
Et de même, on peut en ajouter à celle qui est en position haute sans modifier le déséquilibre.

LE THEOREME DU LEVIER D'ARCHIMEDE

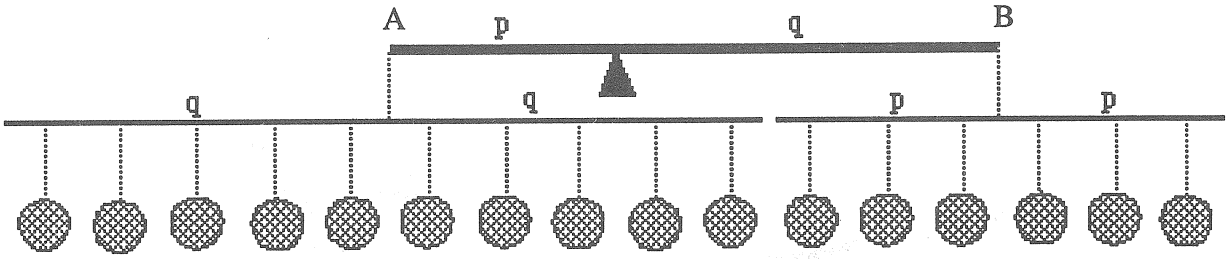
(cas rationnel)



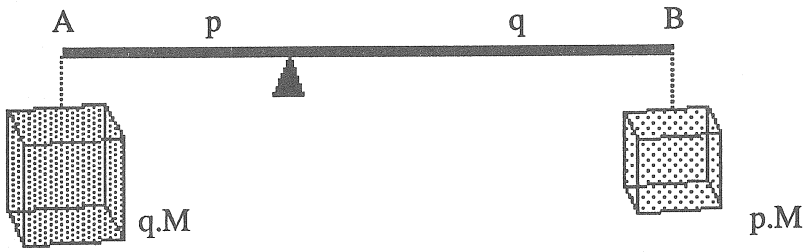
Deux masses inégales sont suspendues à une barre sans poids. Supposons dans un premier temps que leur rapport soit le rationnel $\frac{q}{p}$. Il existe une masse M qui mesure les 2 masses



La barre est divisée en (p+q) segments égaux de longueur U. Un mobile est constitué en suspendant une barre de longueur 2.q à une extrémité, 2.p à l'autre extrémité ; et en suspendant une masse M/2 au milieu des 2.q parties et des 2.p parties de longueur U de ces 2 barres.



L'ensemble est formé de 2.q + 2.p masses, et si on suspend la barre supérieure au point qui la partage en $\frac{p}{q}$, il y a symétrie des masses, donc équilibre.



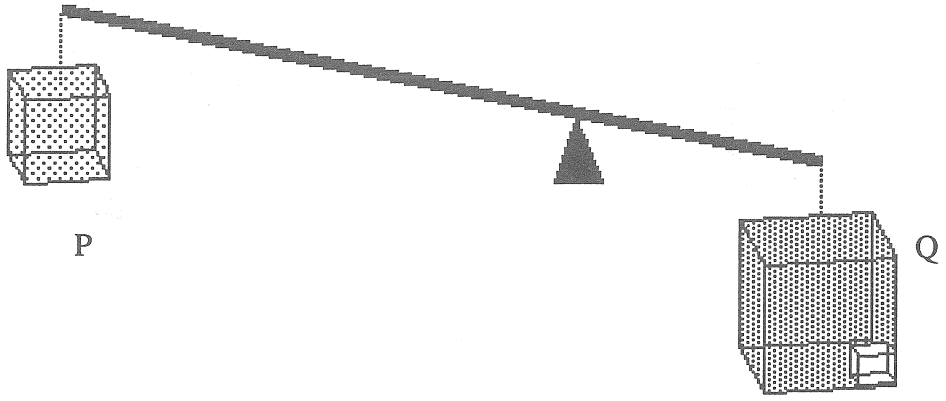
Mais les masses suspendues en A équivalent à q.M, et les autres à p.M.

Donc le point qui partage AB en $\frac{p}{q}$ est le point d'équilibre des 2 masses données.

LE THEOREME DU LEVIER D'ARCHIMEDE

(cas irrationnel)

Si le rapport des 2 masses n'est pas rationnel, on les suspend quand même au point qui partage la barre dans le rapport inverse des masses.



Supposons qu'il n'y ait pas équilibre, et que la balance penche du côté de Q :

Puisqu'on pourrait ôter une masse M à Q, suffisamment faible pour ne pas changer le déséquilibre (quatrième postulat), on peut aussi partager la masse P en n parties U plus petites que M. Q est compris entre 2 multiples successifs de U.

$$p \cdot U < Q < (p+1) \cdot U$$

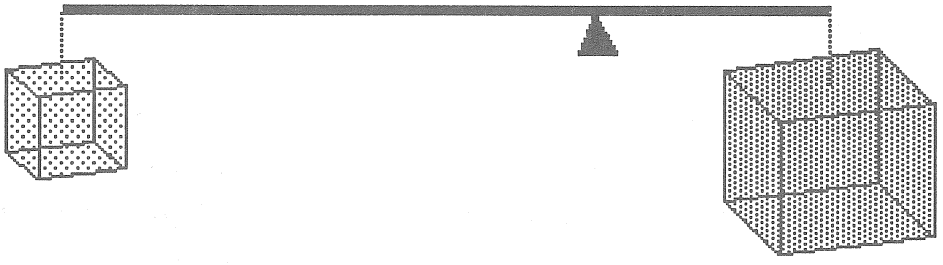
Archimède remplace Q par (p . U) et le déséquilibre est toujours dans le même sens, mais le rapport des masses suspendues est rationnel.

Mais alors, le point d'équilibre devrait être plus proche de la masse P d'après la relation de la page précédente

et cependant la barre penche du côté de (p . U), ce qui veut dire que le point d'équilibre est plus proche de (p . U).

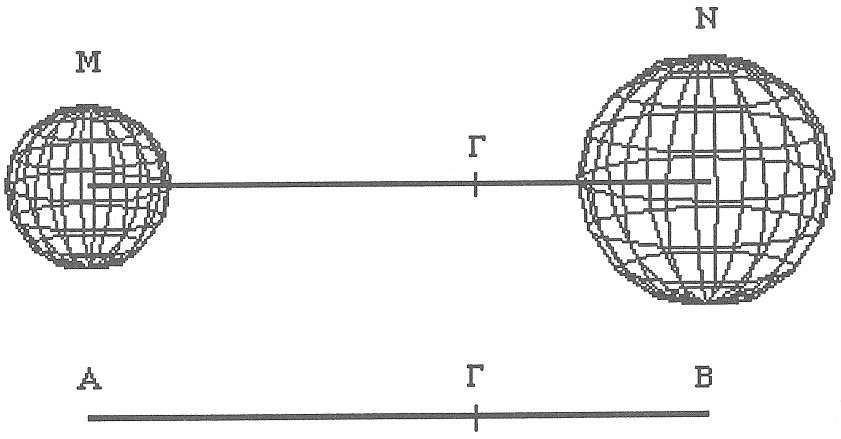
C'est contradictoire !

Le point d'équilibre de 2 masses suspendues est le point qui partage la barre dans le rapport inverse des masses.



LES CENTRES DE GRAVITE

PREMIER PRINCIPE



$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{N}{M}$$

Le concept du centre de gravité est celui d'un point capable de concentrer une masse et de la remplacer pour les effets de gravitation. Ainsi, au lieu de travailler sur une matière continue, Archimède peut travailler sur des points pesants. Entre ces points, il imagine des barres sans poids les reliant physiquement.

Le théorème du levier lui permet d'affirmer que **le centre de gravité de l'ensemble de 2 masses est le point qui partage le segment qui joint leurs centres de gravité, dans le rapport inverse des masses.**

L'utilisation du troisième postulat, faite dans le théorème du levier, peut être reprise pour affirmer qu'on peut remplacer les centres de gravités de 2 masses d'un ensemble par leur centre de gravité, sans modifier le centre de gravité de l'ensemble complet.

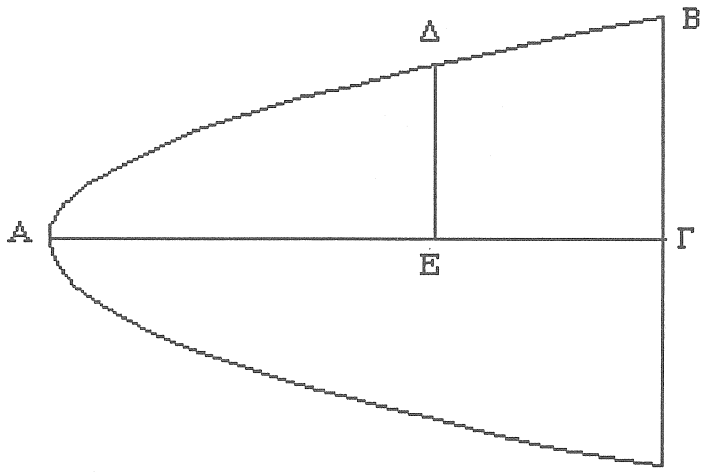
SECOND PRINCIPE

Si 2 masses égales sont disposées isométriquement, leurs centres de gravités se correspondent par l'isométrie

Si un solide possède un axe de symétrie, son centre de gravité est porté par cet axe (ce qui est le cas des 5 solides des pages précédentes) ; et s'il possède un centre de symétrie, ce centre est le centre de gravité du solide (vrai pour la boule, le cylindre et l'ellipsoïde). Il suffit pour celà de créer 2 parties isométriques en le coupant par un plan passant par l'axe ou le centre de symétrie.

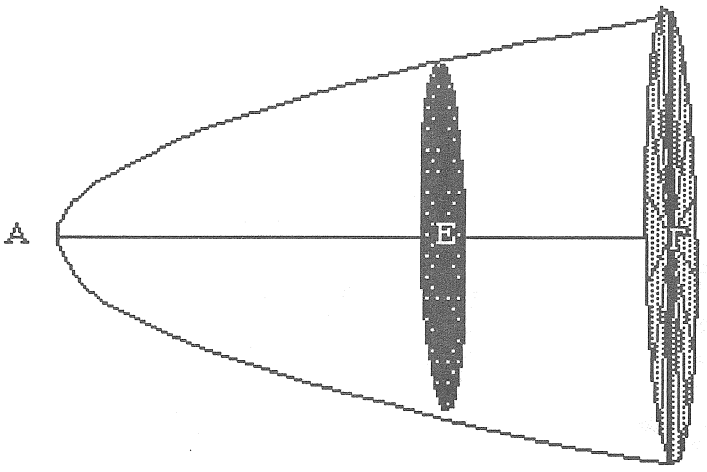
LE SEGMENT DROIT DE PARABOLOÏDE DE REVOLUTION

RELATION FONDAMENTALE

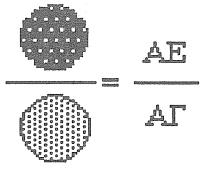


C'est l'adaptation de la relation fondamentale de la parabole, donnée page 6, qui est traduite pour le paraboloïde.

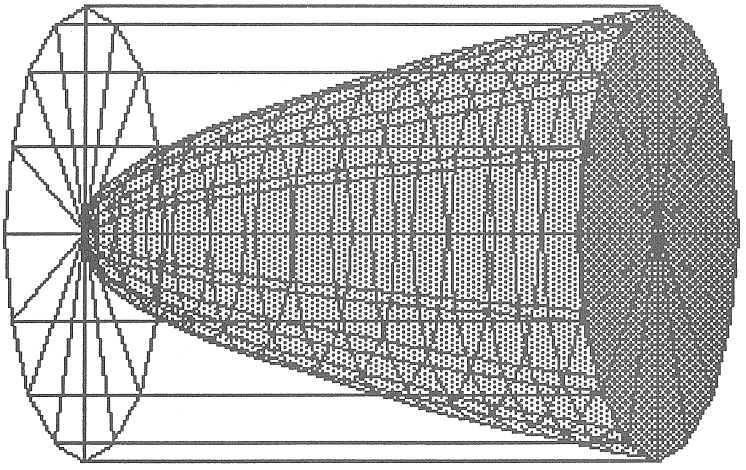
$$\frac{\Delta E^2}{B\Gamma^2} = \frac{AE}{A\Gamma}$$



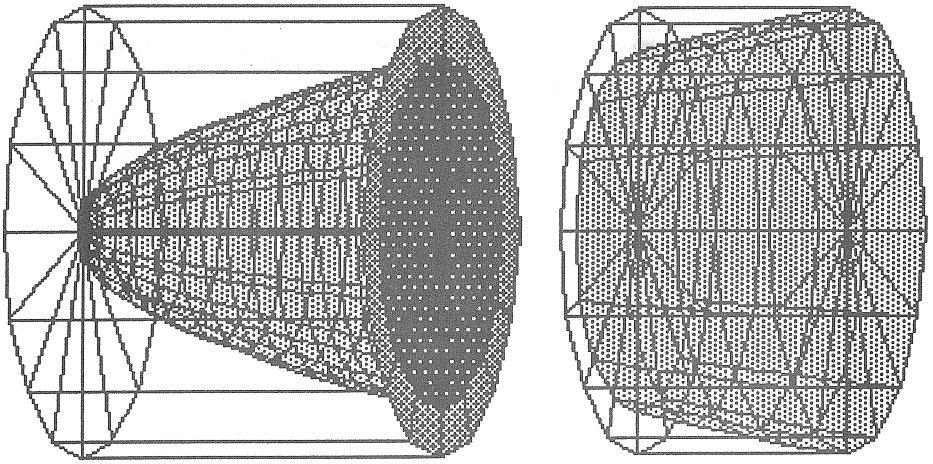
Et, comme les coupes droites en E et Γ, sont deux disques proportionnels aux carrés ci-dessus,la relation s'adapte aux aires des coupes.



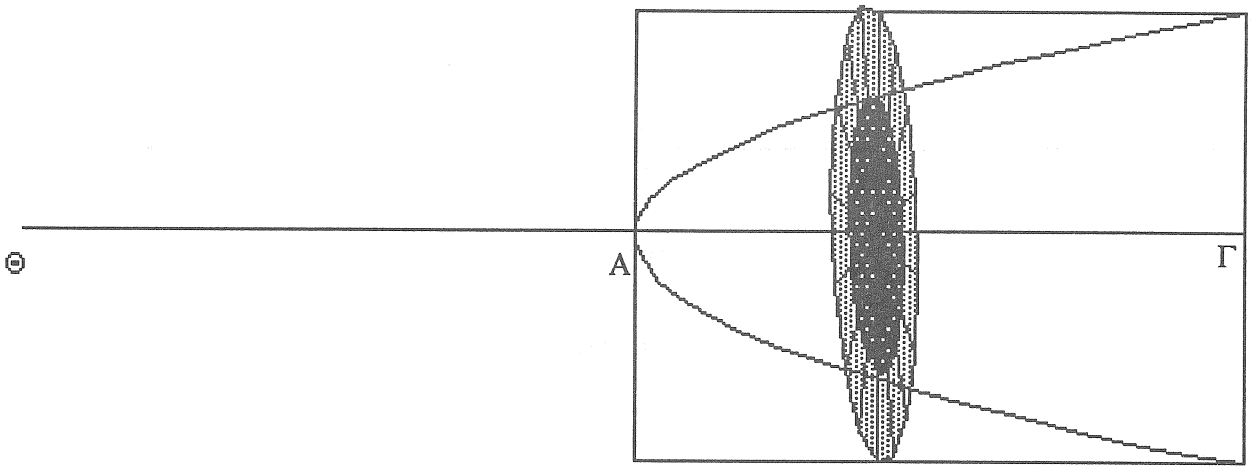
$$= \frac{AE}{A\Gamma}$$



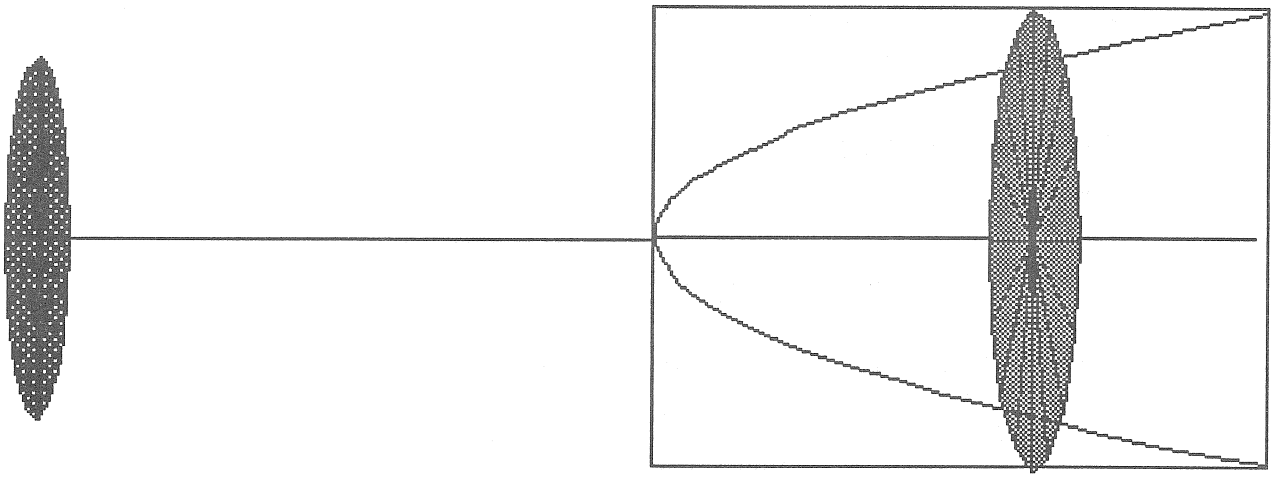
Le segment de paraboloïde est placé dans un cylindre de même base et même hauteur. Lorsqu'on coupe l'ensemble, on obtient les deux disques de la page précédente comme coupe, l'un du paraboloïde et l'autre, du cylindre.



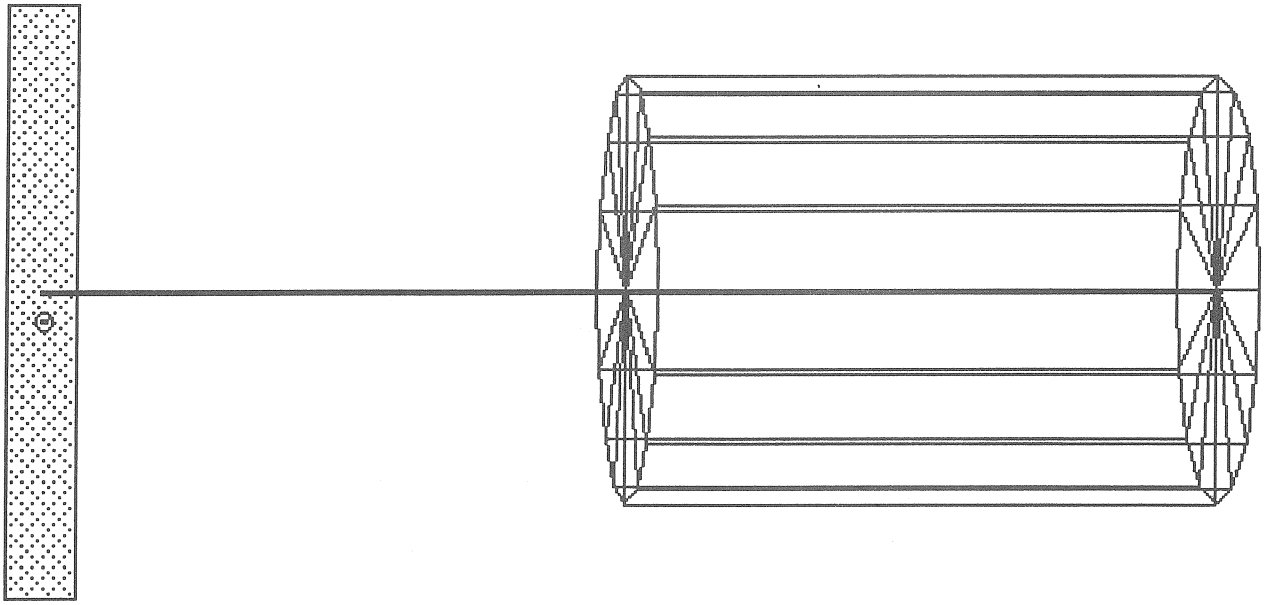
LE LEVIER



Une barre qui mesure le double de l'axe du paraboloïde est suspendue en son milieu A.



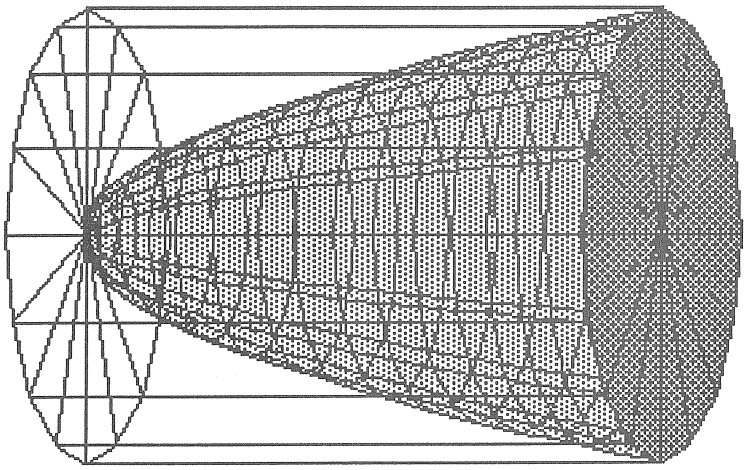
Le point Θ est symétrique de Γ par rapport à A.Si on suspend en Θ un disque de coupe du paraboloïde, il est en équilibre avec le disque correspondant du cylindre.



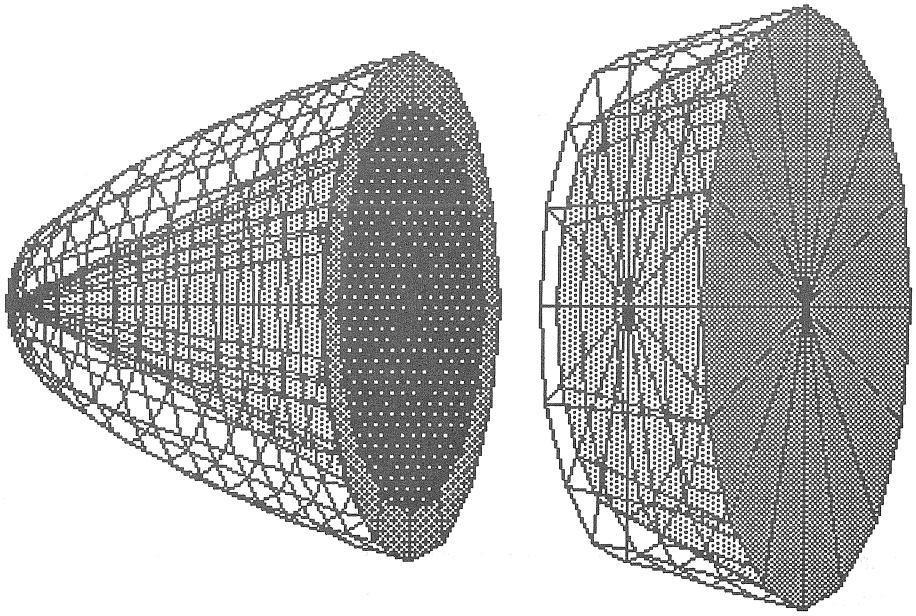
C'est dans cette conclusion, que réside la grande intuition d'Archimède : il suppose le segment de paraboloïde et le cylindre coupés en tranches. Chaque tranche de paraboloïde est pendue en Θ, tandis que la tranche correspondante de cylindre est laissée en place. Deux par deux, elles s'équilibrent, si bien que le volume complet du paraboloïde pendu en Θ, contrebalance celui du cylindre laissé en place.

Le centre de gravité du cylindre étant le milieu de AΓ, il faut un poids moitié de celui du cylindre en Θ pour le contrebalancer.

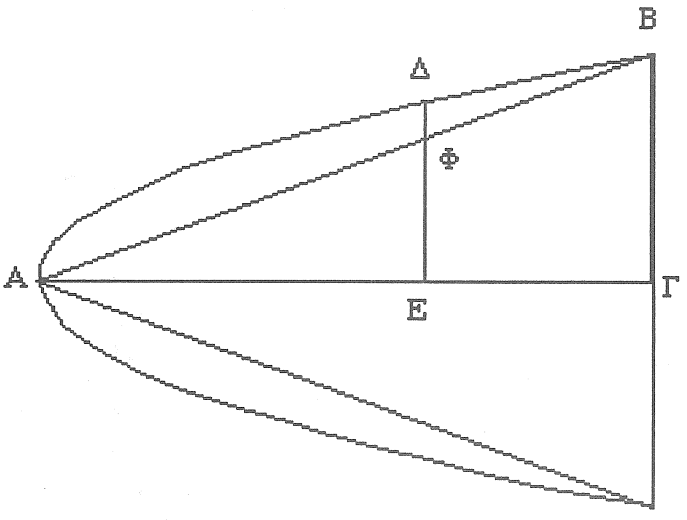
Donc **le volume du segment droit de paraboloïde de révolution est la moitié de celui du cylindre circonscrit.**



LE CENTRE DE GRAVITE DU SEGMENT DROIT DE PARABOLOÏDE



Cette fois, Archimède inscrit un cône dans le paraboloïde, et compare les coupes simultanées des deux solides, par un plan perpendiculaire à l'axe.



$$\frac{\Phi E}{B\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma}$$

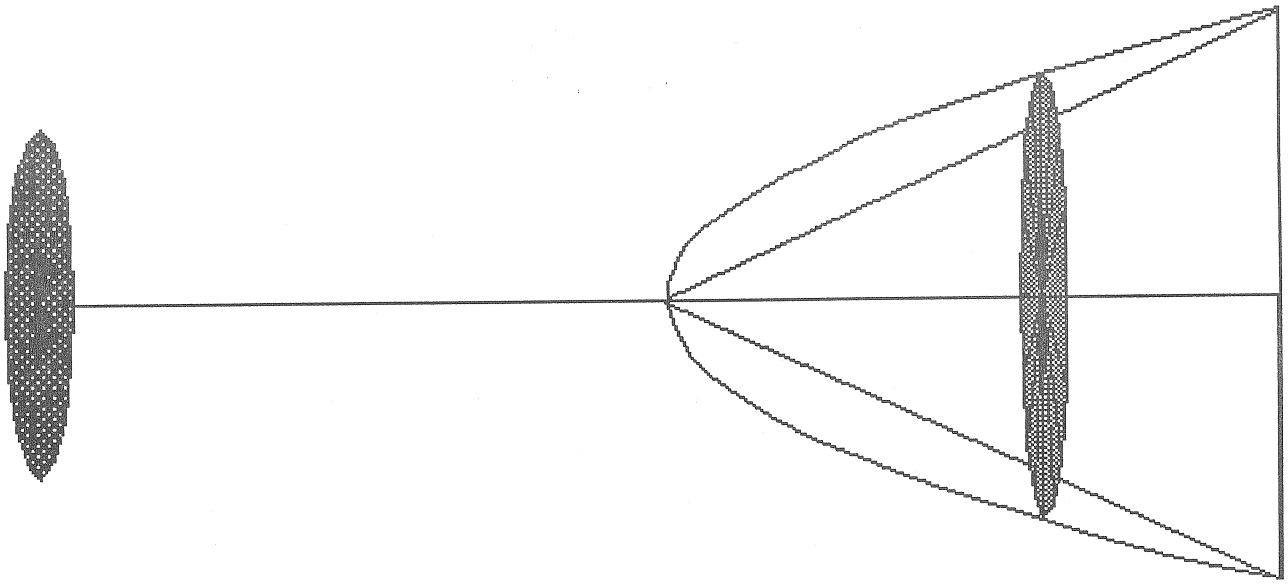
Par proportionnalité dans les triangles semblables.

$$\frac{\Phi E^2}{\Delta E^2} = \frac{\Phi E^2}{B\Gamma^2} \cdot \frac{B\Gamma^2}{\Delta E^2}$$

$$= \frac{AE^2}{A\Gamma^2} \cdot \frac{A\Gamma}{AE}$$

d'après la relation fondamentale.

$$\boxed{\frac{\Phi E^2}{\Delta E^2} = \frac{AE}{A\Gamma}}$$

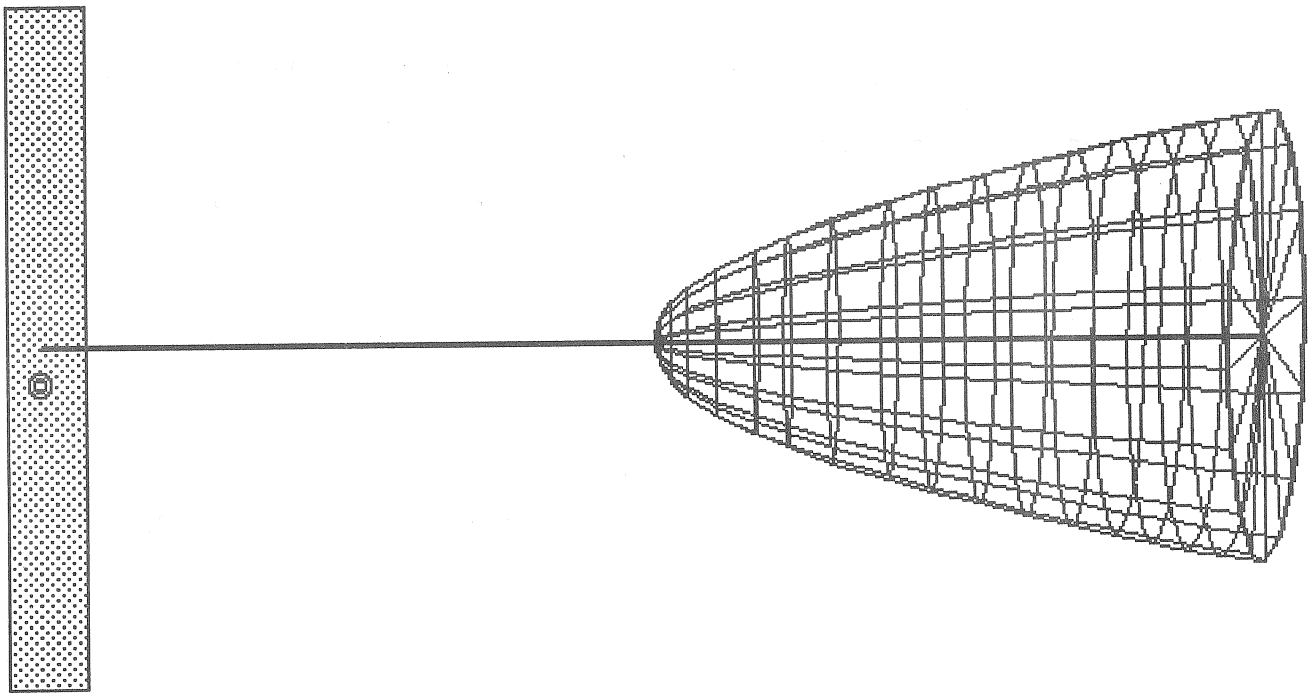


Cette fois, c'est le cône et le segment de paraboloïde qui sont découpés en tranches, simultanément, et le cône dont toutes les tranches sont accrochées en Θ, cependant que le paraboloïde est laissé en place.

Comme précédemment, il y a équilibre. Le volume du cône (connu) est le tiers de celui du cylindre circonscrit, donc les deux-tiers de celui du segment de paraboloïde.

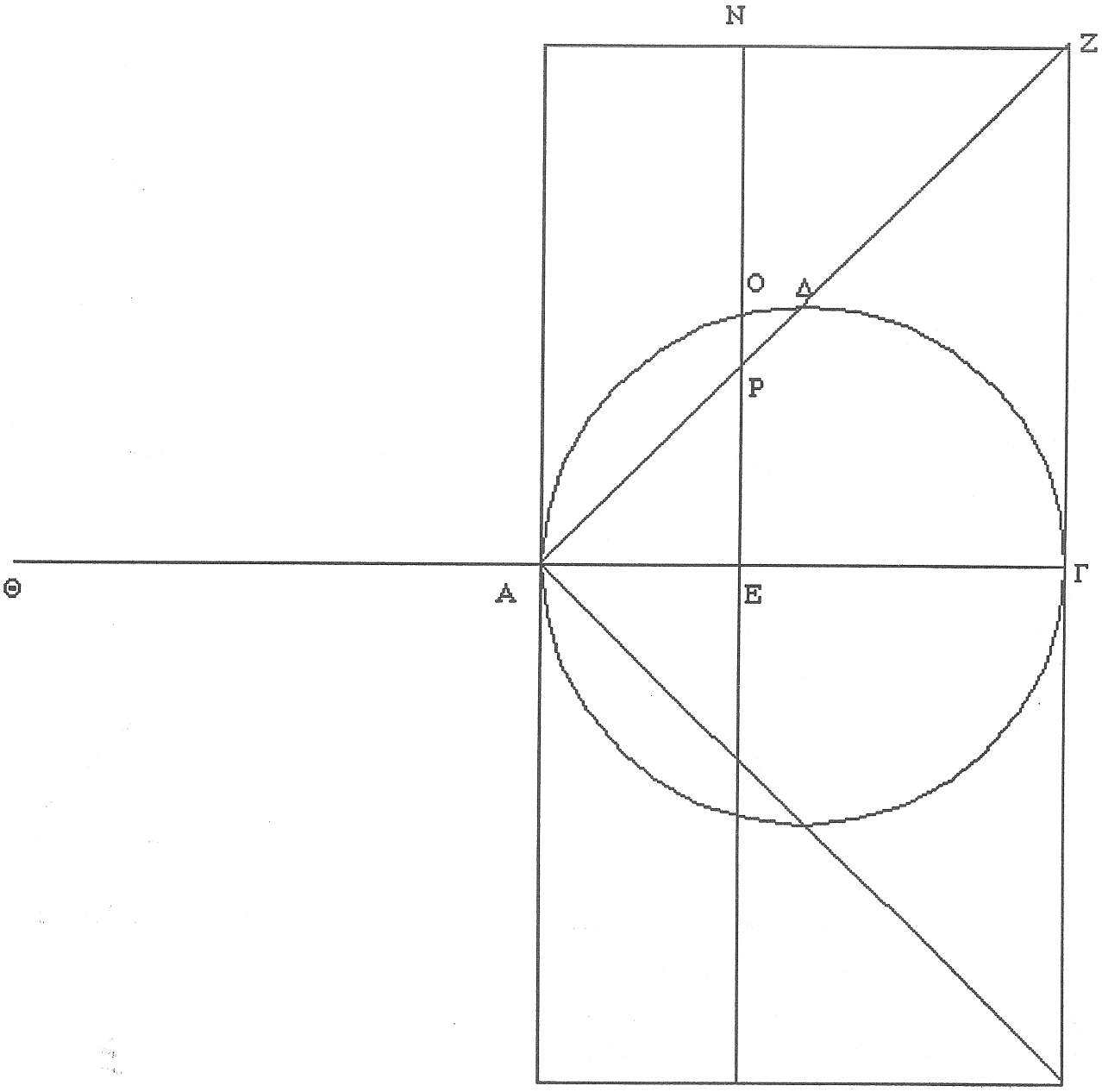
Il faut donc que le paraboloïde soit pendu aux 2/3.AΓ.

Le centre de gravité d'un segment droit de paraboloïde de révolution, est le point de son axe, situé aux deux-tiers de celui-ci à partir du sommet.



LA BOULE

RELATION UTILISEE



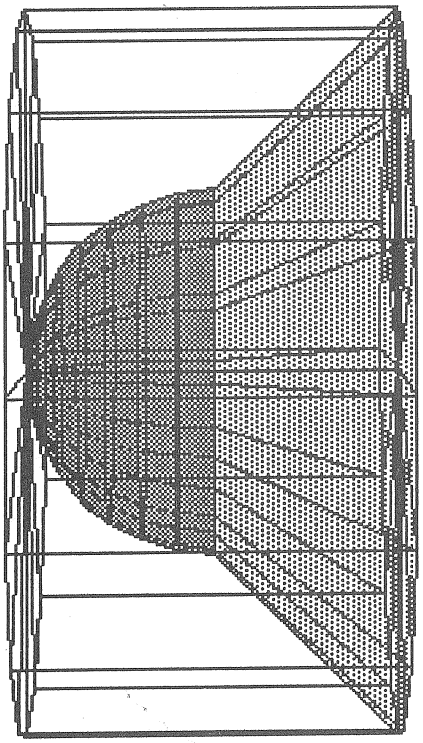
Le cercle est inscrit dans un double carré, dont l'un a pour diagonale AZ.

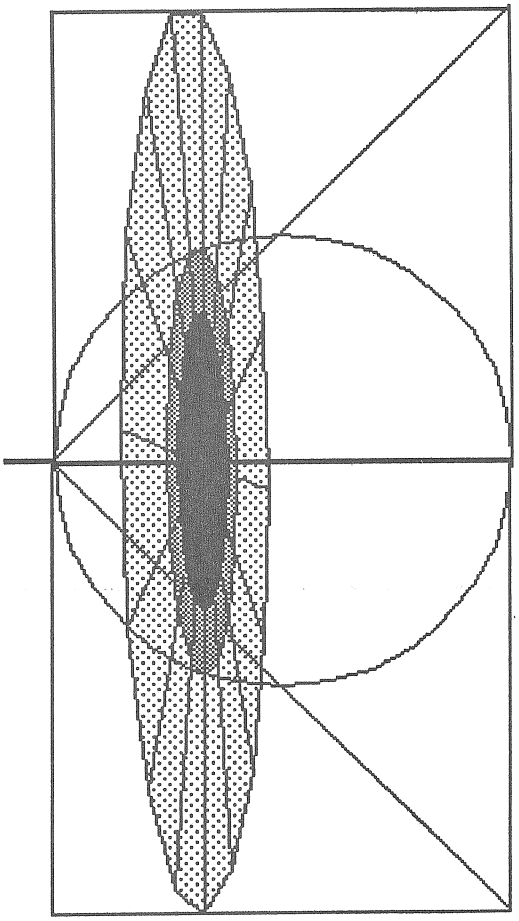
$AO^2 = AE \,.\, A\Gamma$ Parce que AOΓ est rectangle

$AO^2 = AE^2 + EO^2 = EP^2 + EO^2$ D'après Pythagore dans AEO et le fait que AEP est un demi-carré.

$$EP^2 + EO^2 = AE \,.\, A\Gamma$$

LA BOULE, LE CONE ET LE CYLINDRE



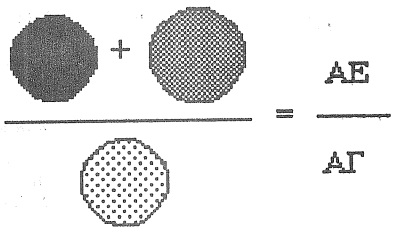


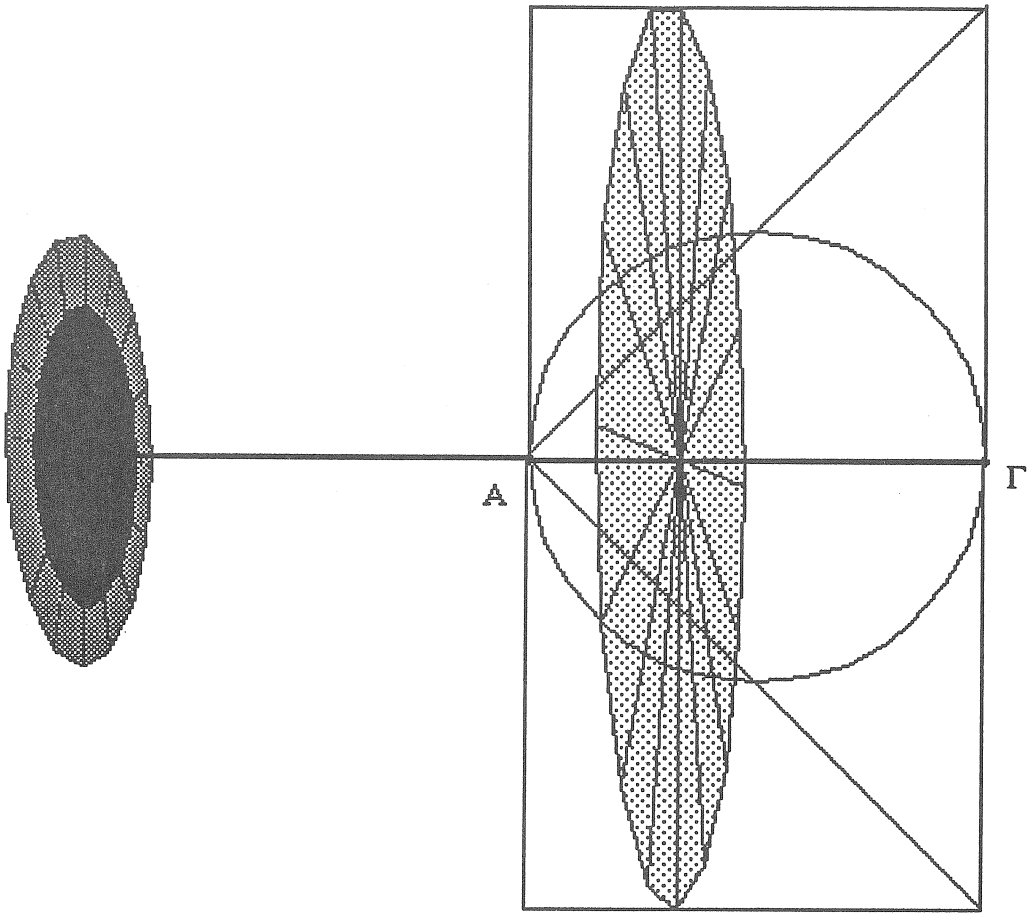
Le cercle va tourner autour de son diamètre horizontal pour engendrer la sphère. Dans le même temps, le triangle AZΓ, va engendrer un cône de même axe. En même temps encore, le carré va engendrer un cylindre circonscrit au cône.

En divisant la relation de la page 69 par $EN^2 = A\Gamma^2$, on obtient :

$$\frac{EP^2 + EO^2}{EN^2} = \frac{AE}{A\Gamma}$$

Ou, avec les disques correspondants aux carrés :



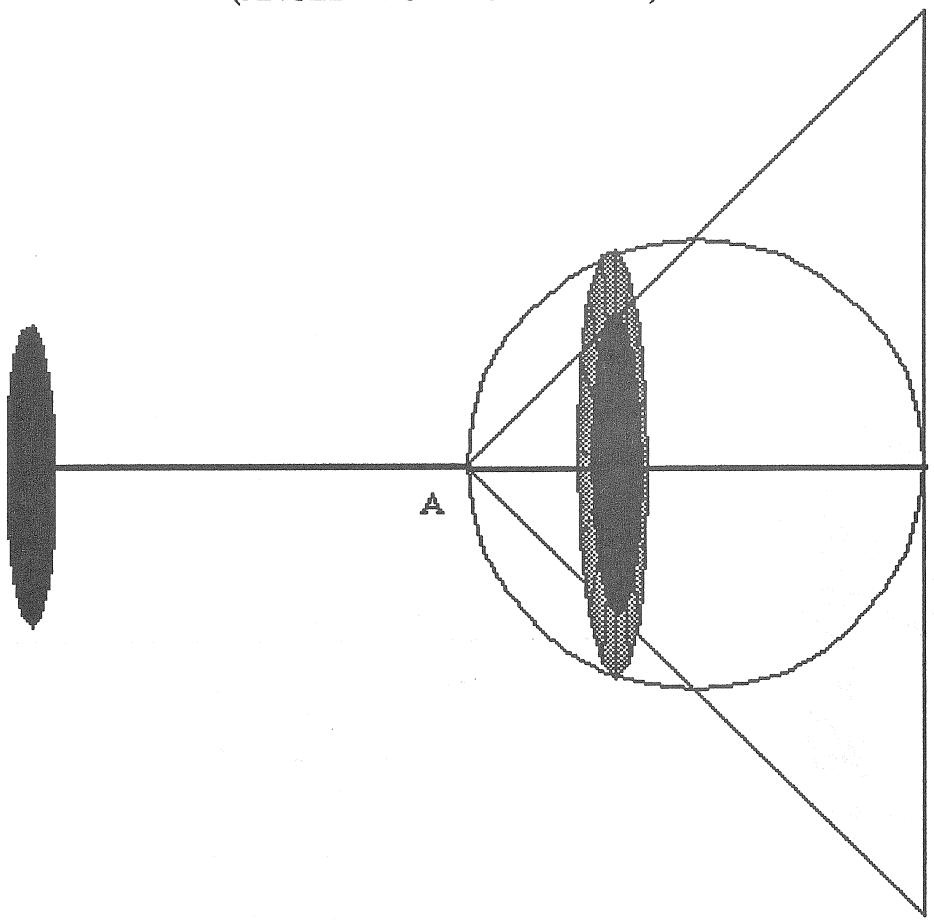


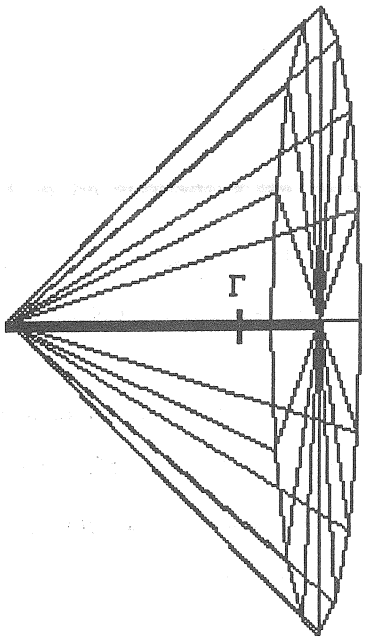
La barre ΘΓ, où Θ est le symétrique de Γ par rapport à A, est suspendue en A. La relation de la page précédente, nous permet de pendre en Θ, l'ensemble des 2 disques-coupes du cône et de la boule, cependant que le disque-coupe du cylindre est laissé en place, et d'affirmer qu'il y a équilibre.

En découpant simultanément ces 3 solides, Archimède affirme que les volumes du cône et de la boule, entiers, suspendus en Θ feront équilibre au cylindre laissé en place. Comme le centre de gravité du cylindre est le milieu de son axe, la boule et le cône réunis font la moitié du cylindre. Et comme le cône, à lui seul, en est le tiers, c'est que la boule en est le sixième.

Ou, d'une autre façon, **la boule a un volume moitié de celui du cône.**

LE CENTRE DE GRAVITE DU CONE RECTANGLE (ANGLE DROIT AU SOMMET)





En divisant la relation de la page 69 par $EP^2 = AE^2$, on obtient :

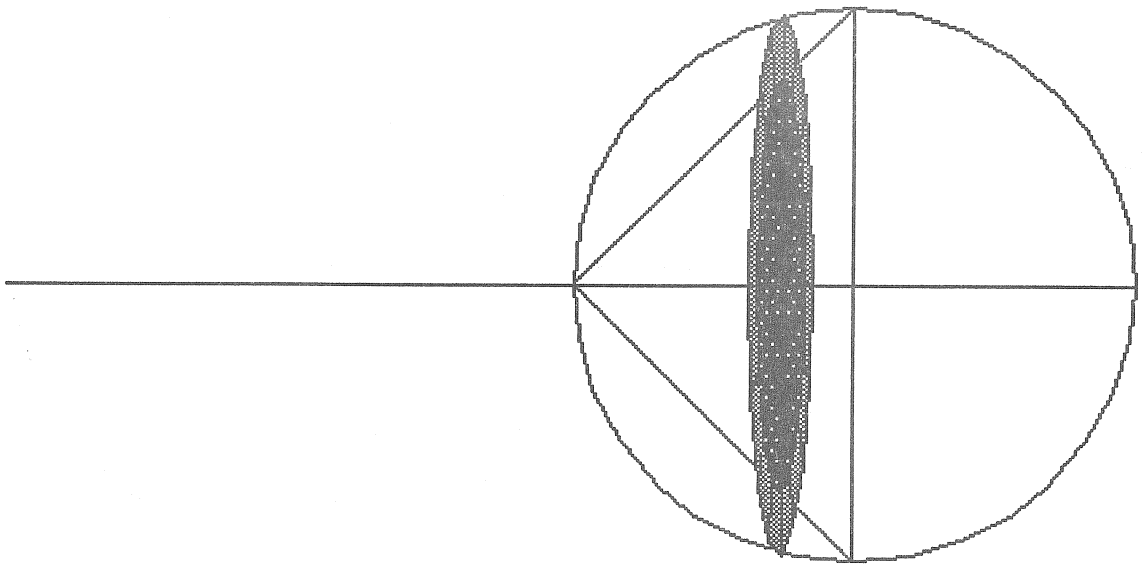
$$\frac{EP^2 + EO^2}{EP^2} = \frac{A\Gamma}{AE}$$

Ce qui fait que les disques-coupes du cône et de la boule laissés en place, équilibrent en Θ, un autre disque-coupe du cône.

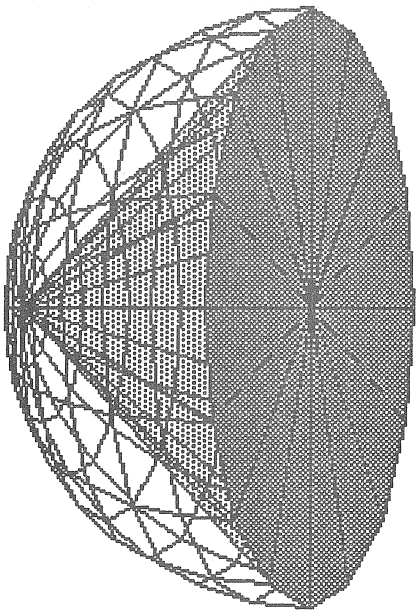
Et, donc, que la boule et le cône, laissés en place, équilibrent un second cône, identique au premier pendu en Θ. Comme la boule équivaut à un demi-cône pendu au milieu de AΓ, il faut un autre cône placé du même côté, aux trois-quarts de AΓ, pour équilibrer le cône en Θ.

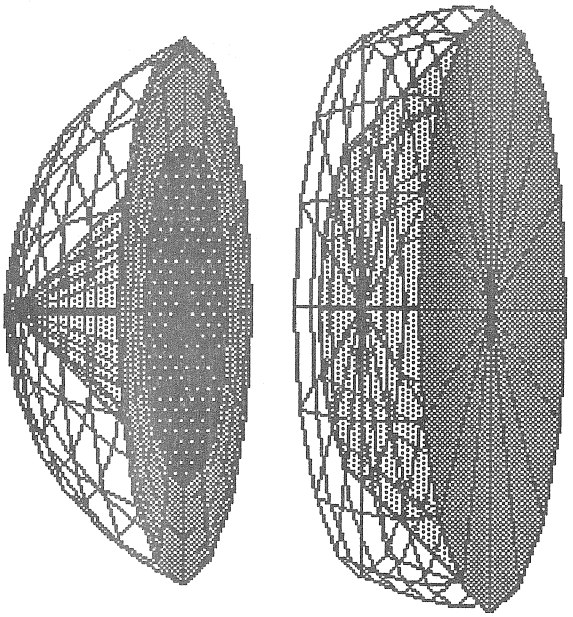
Le centre de gravité d'un cône de révolution rectangle, est le point de son axe, situé aux trois-quarts, à partir du sommet.

LA DEMI-BOULE

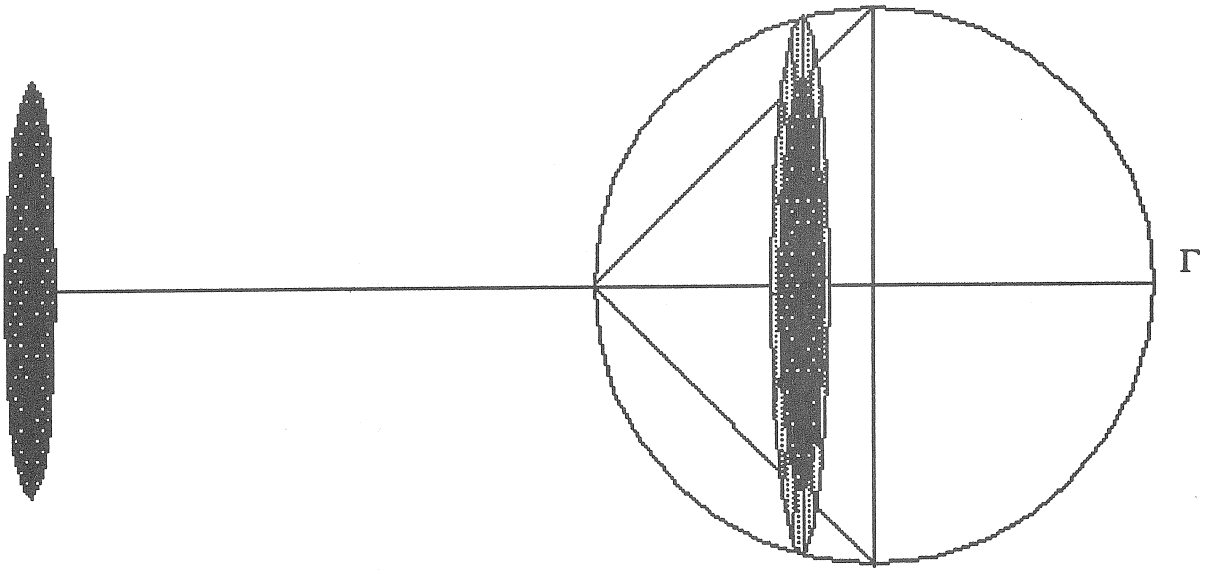


La démarche de la page précédente peut être reprise avec une demi-boule. Le cône associé est le cône inscrit dans la demi-boule. Ce cône est une réduction, dans le rapport 1/2, de celui des pages précédentes, et il a donc un volume qui en est le huitième. La demi-boule est double du cône en volume.





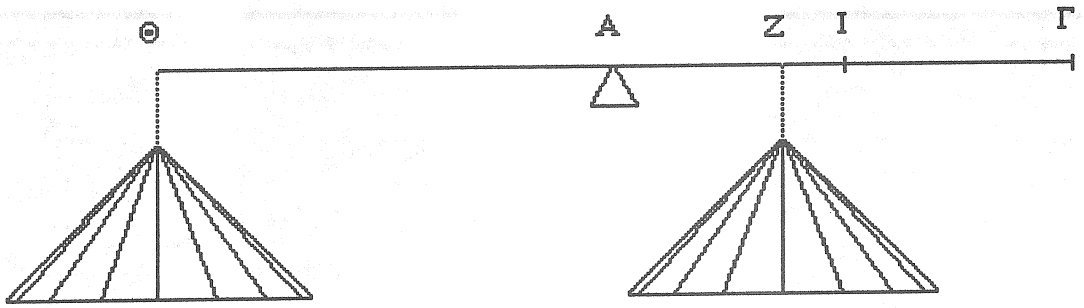
L'EQUILIBRE DES CONES ET DE LA DEMI-BOULE



Tout se passe comme à la page 71 ; chaque disque-coupe du cône, pendu en Θ équilibre l'ensemble des disques-coupes de la demi-boule et d'un second cône, laissés en place.

Donc, la demi-boule et le cône laissés en place, équilibrent un second cône placé en Θ.

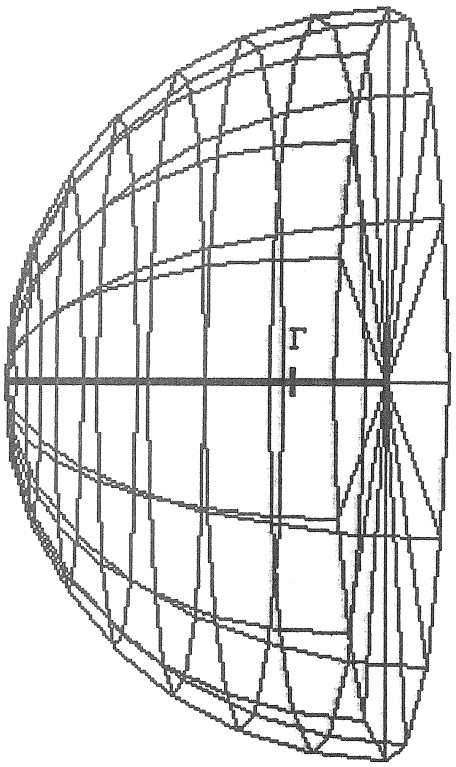
Le problème est le suivant : un cône est pendu en Θ, un second au point Z, qui est aux trois-quarts de AI (I est le milieu de AΓ), donc aux 3/8 de AΓ ; où pendre un double-cône (la demi-boule) pour qu'il y ait équilibre autour de A ?



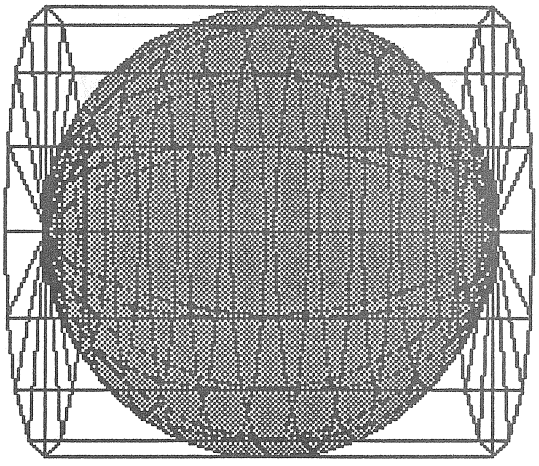
Un troisième cône serait à pendre aux 5/8 de AΓ pour équilibrer les 2 autres. Donc un double-cône sera pendu aux 5/16 de AΓ ; soit aux 5/8 de AI.

LE CENTRE DE GRAVITE DE LA DEMI-BOULE

Le centre de gravité d'une demi-boule est le point de son axe situé aux 5/8 à partir du sommet.

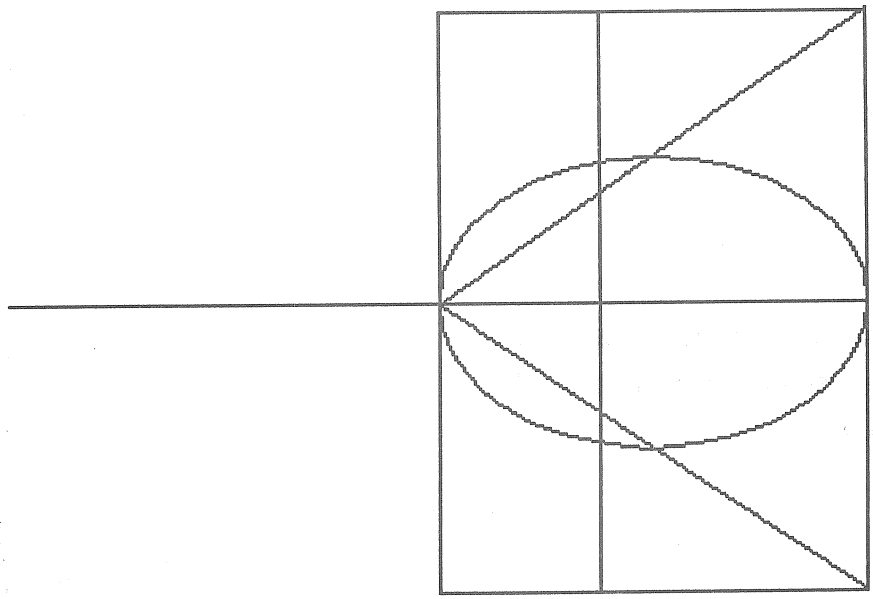


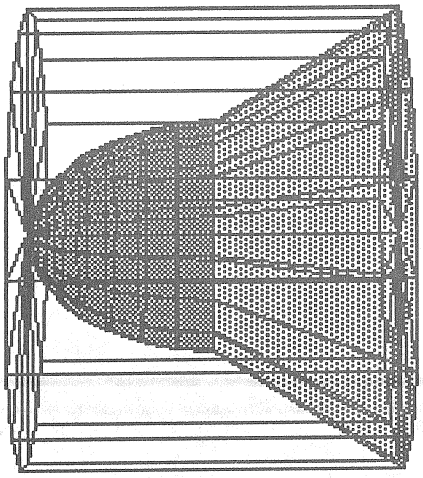
RETOUR SUR LE VOLUME DE LA BOULE



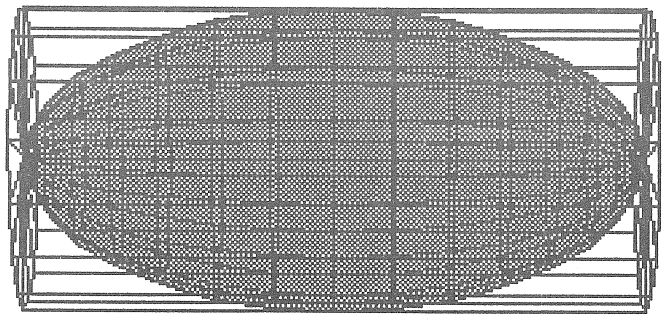
Le cône auquel la boule était comparée à la page 70, n'est pas le solide le plus simple à associer à une boule. Nous pouvons donc reprendre ce résultat en lui substituant le cylindre circonscrit à la boule. La boule est le sixième du grand cylindre de la page 70, qui est 4 fois plus grand que celui-ci.

La boule a un volume qui est les 2/3 de celui du cylindre circonscrit.

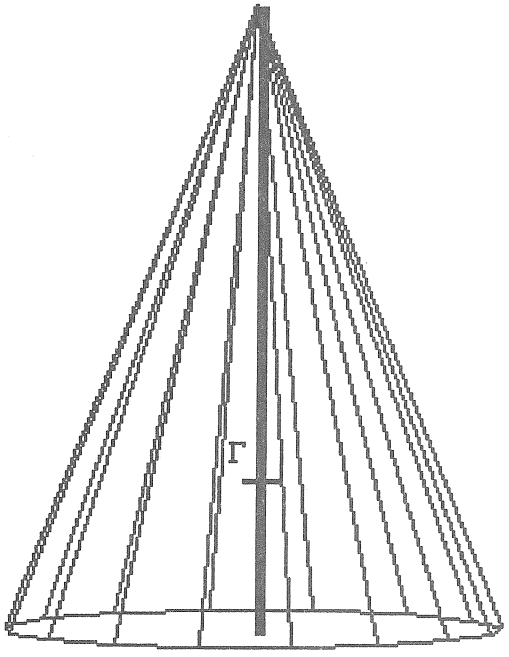




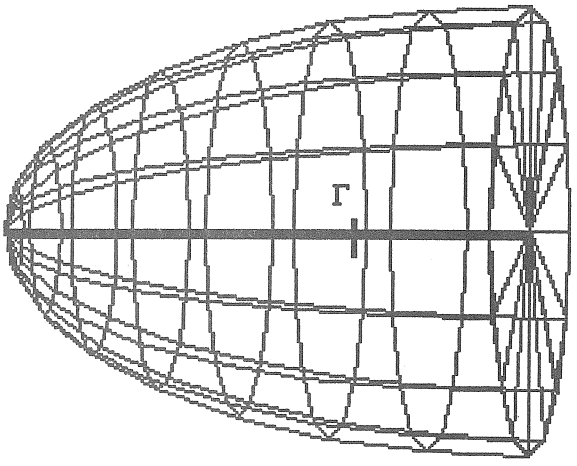
En comparant ces dessins à ceux des pages 69 et 70, on voit que la démarche des pages 69 à 75 s'adapte très facilement à un ellipsoïde de révolution, puisque la relation sur laquelle repose les équilibres est exprimée soit en rapport de segments sur l'axe, soit en rapport de disques-coupes d'un plan perpendiculaire. Le premier rapport est inchangé car ses termes le sont, le second, parce que les 2 termes sont multipliés par le carré du rapport d'affinité.



Le volume d'un ellipsoïde de révolution est les 2/3 de celui du cylindre circonscrit.



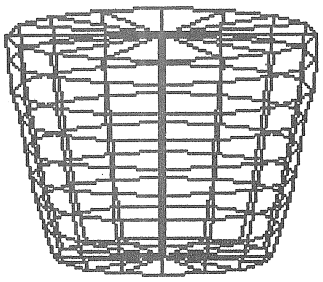
Le centre de gravité d'un cône de révolution est le point de son axe qui est aux trois-quarts à partir du sommet.



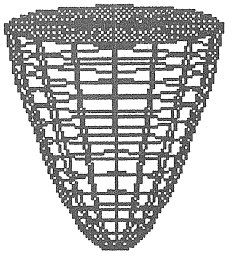
Le centre de gravité d'un demi-ellipsoïde de révolution est le point de son axe qui est aux 5/8 à partir du sommet.

EXERCICES

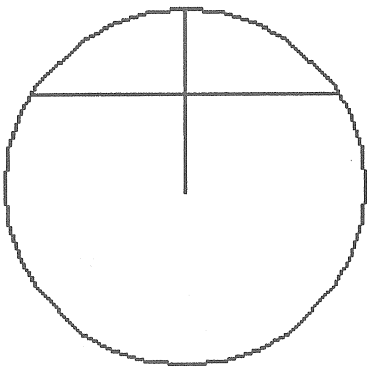
1) En n'utilisant que les 4 postulats sur les leviers (et non le théorème), démontrer les 3 propositions suivantes :
   - Des masses s'équilibrant à même distance du point d'appui sont égales.
   - Si des masses inégales sont disposées à même distance du point d'appui, il y a inclinaison du côté de la plus grande.
   - Des masses inégales s'équilibrent à des distances inégales ; la plus grande étant la plus proche.



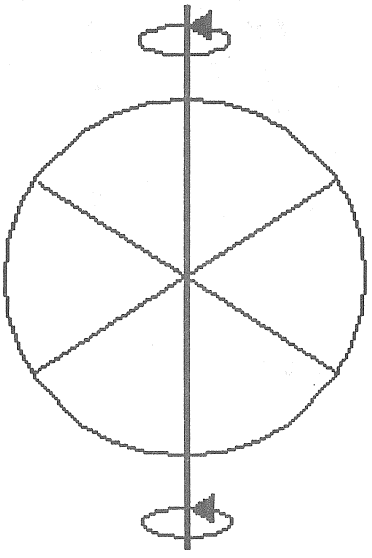
2) Montrer que le centre de gravité d'un triangle en fil est situé sur le segment qui joint le sommet d'un angle au point qui partage le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents. Et que ce segment n'est autre que la bissectrice intérieure de l'angle.
   Où est situé le centre de gravité d'un triangle en fil ?



3) En admettant - ce qui est vrai et a été démontré par Archimède - que tous les segments de parabole ont leur centre de gravité sur leur axe, en un point qui partage cet axe dans le même rapport, utiliser la décomposition d'un segment donnée à la page 7 en un triangle et 2 autres segments de parabole, pour déterminer la valeur de ce rapport.



4) Si on coupe un segment droit de paraboloïde par un plan perpendiculaire passant au milieu de son axe, quelle fraction représente chaque tronçon ? où est situé le centre de gravité du tronc de paraboloïde ?
   A quel niveau couper ce segment de paraboloïde par un plan perpendiculaire à l'axe pour que les 2 parties aient même volume ?

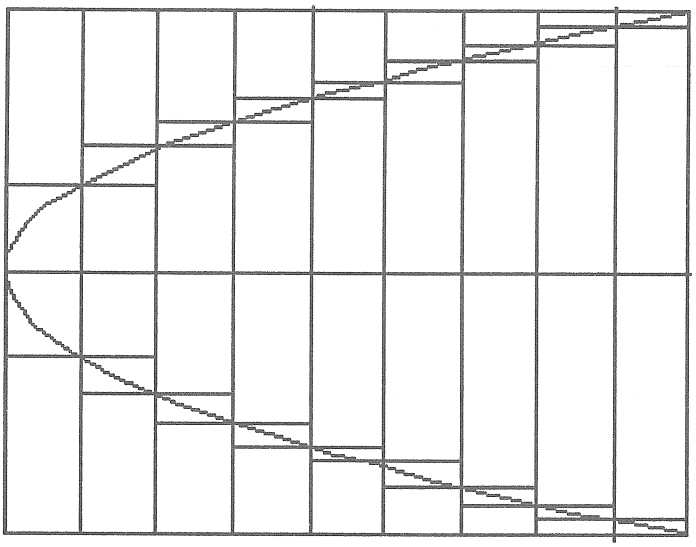


5) Si une boule est coupée par un plan perpendiculaire à un rayon et passant par son milieu, quel est le volume de la petite calotte (copier la démarche du volume de la boule) ?
   Où est son centre de gravité ?

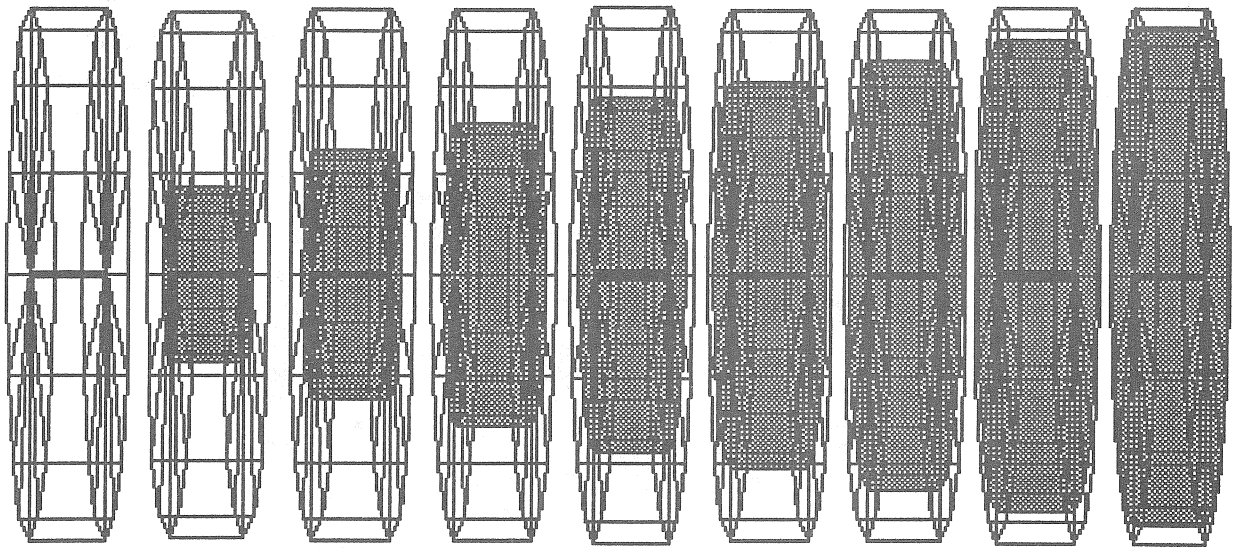
6) On coupe un disque suivant 2 diamètres inclinés à 60° du diamètre axe de révolution. La boule engendrée est partagée en 3 parties : 2 figures réunion d'un cône et d'une calotte sphérique, et une sorte d'anneau fermé.
   Comment se partage le volume ?

Note

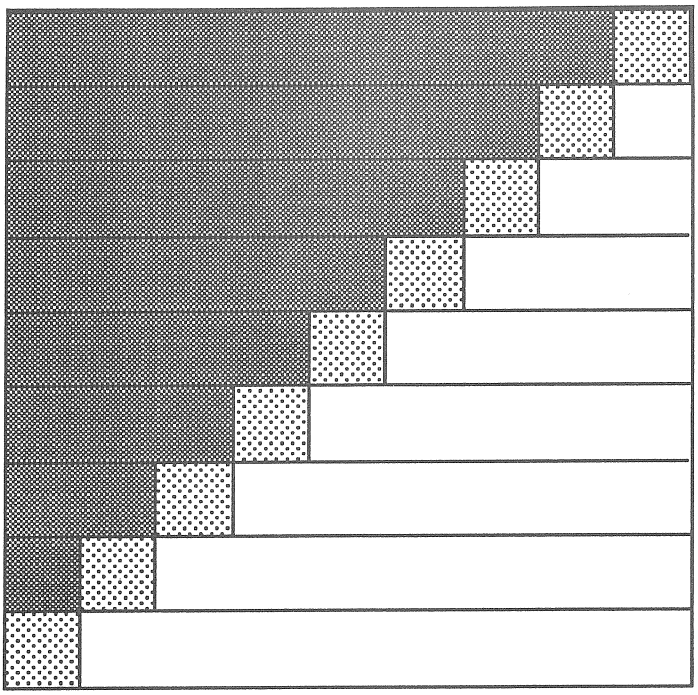
LE VOLUME DU PARABOLOÏDE



Pour calculer géométriquement le volume du paraboloïde, il suffit de le tronçonner en n parties de même hauteur et d'encadrer chaque partie entre 2 cylindres. On coupe simultanément le cylindre circonscrit en n tronçons cylindriques.



Il est clair que la différence des figures circonscrite et inscrite au paraboloïde est un tronçon de cylindre de hauteur n (car ce sont des anneaux qui s'imbriquent les uns dans les autres comme des ronds de fourneau) ; donc peut être rendue aussi petite que l'on veut en choisissant n assez grand.

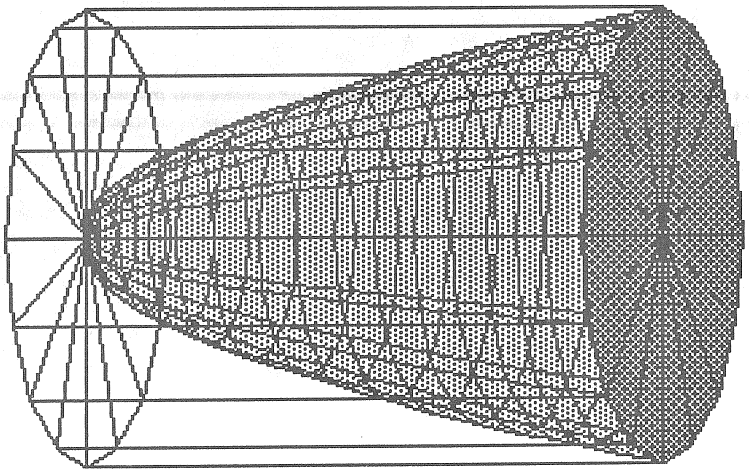


Les tronçons dont nous parlons, sont tous des cylindres de même hauteur : 1/n^{ième} de celle du paraboloïde ; leurs volumes sont proportionnels à leurs bases. D'après la relation de la page 63, tout se passe en proportion comme dans le carré ci-dessus : une bande horizontale correspond à un tronçon du cylindre, et les bandes grisées incluses dans la même bande aux cylindres inscrit et circonscrit inclus dans ce tronçon.

Le carré complet correspond au cylindre, le triangle gris foncé à la figure inscrite, le triangle gris clair, à la figure circonscrite, et la diagonale, à la différence de ces 2 dernières.

Ce qui montre que la figure inscrite est inférieure en volume à la moitié du cylindre, alors que la figure circonscrite est supérieure.

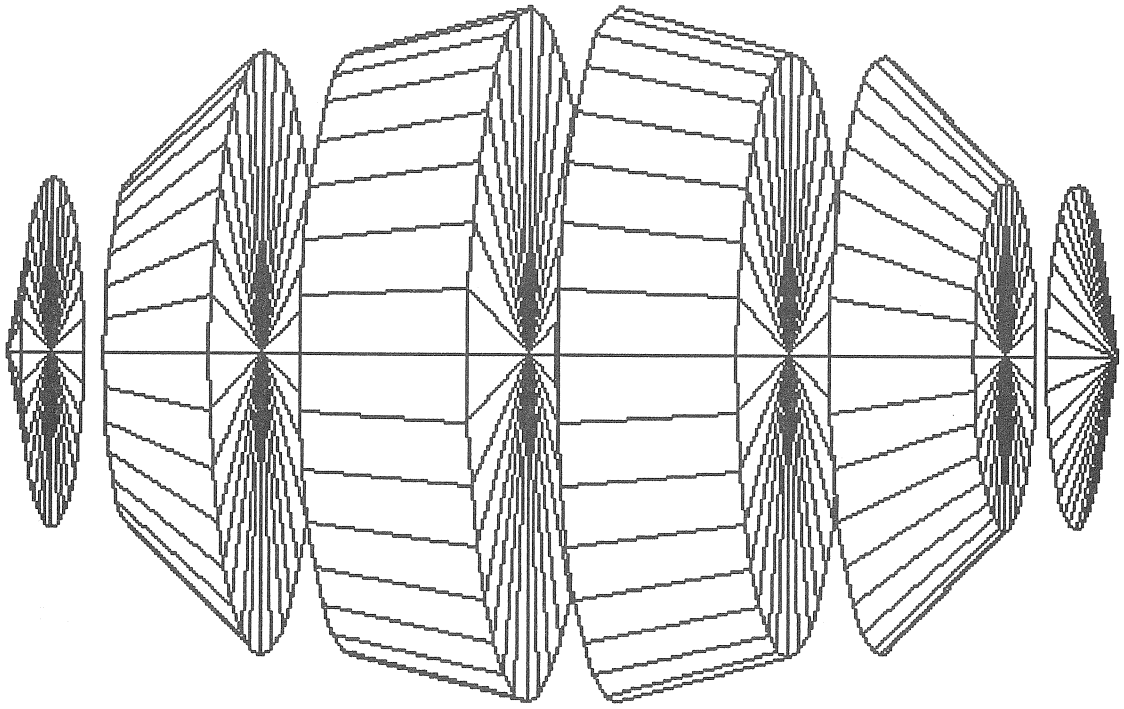
Si le volume du paraboloïde était différent de la moitié du cylindre, on pourrait choisir n pour qu'un tronçon de cylindre ait un volume inférieur à cette différence.Les figures inscrite et circonscrites encadreraient en volume, le volume du paraboloïde, d'une part, et la moitié du cylindre d'autre part - en étant plus proches l'une de l'autre que ces 2 derniers. C'est impossible !



Le volume du segment droit de paraboloïde de révolution est la moitié de celui du cylindre circonscrit.

Chapitre 4

L'AIRE DE LA SPHERE



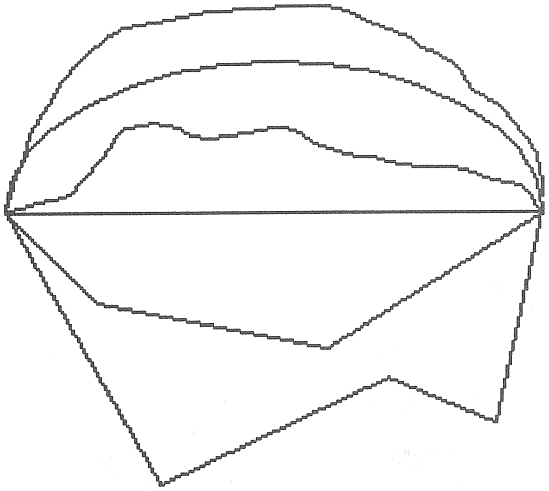
Le livre de la sphère et du cylindre est l'occasion, pour Archimède, de montrer un très beau résultat : il peut comparer l'aire d'une sphère à une aire plane.

C'est le seul cas de mesure d'une aire non développable !

Ce résultat lui permet en même temps de mesurer l'aire d'une calotte sphérique quelconque, et fournit en supplément une démonstration géométrique du volume de la boule.

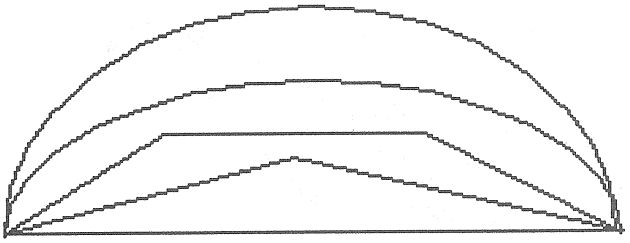
LES POSTULATS D'ARCHIMEDE

PREMIER POSTULAT



Le segment de droite est la plus courte des lignes de mêmes extrémités

DEUXIEME POSTULAT



Les lignes d'un même plan, de mêmes extrémités, qui tournent leur concavité dans le même sens, ont des longueurs ordonnées de la manière suivante :

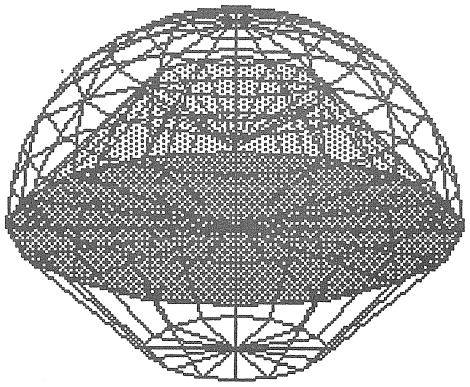
si une ligne est comprise entre le segment et une seconde ligne, sa longueur est comprise entre celle du segment et celle de la seconde ligne.

Les sens sont ceux des vecteurs qui définissent les demi-plans limités par la droite qui contient le segment : les vecteurs perpendiculaires au segment. Il faut entendre qu'il s'agit des lignes contenues dans un même demi-plan et telles que la surface bordée par la réunion du segment et de la ligne soit convexe. Une ligne est comprise entre le segment et une seconde ligne, si elle est incluse dans la surface bordée par la réunion du segment et de la seconde ligne .

Ces deux premiers postulats servent simplement de modèles à leurs équivalents dans l'espace.

TROISIEME POSTULAT

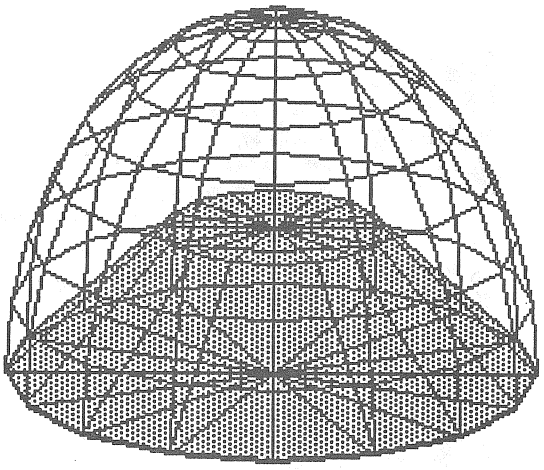
L'aire d'une surface compacte contenue dans un plan est la plus petite des aires des surfaces de l'espace qui ont même bord qu'elle.



QUATRIEME POSTULAT

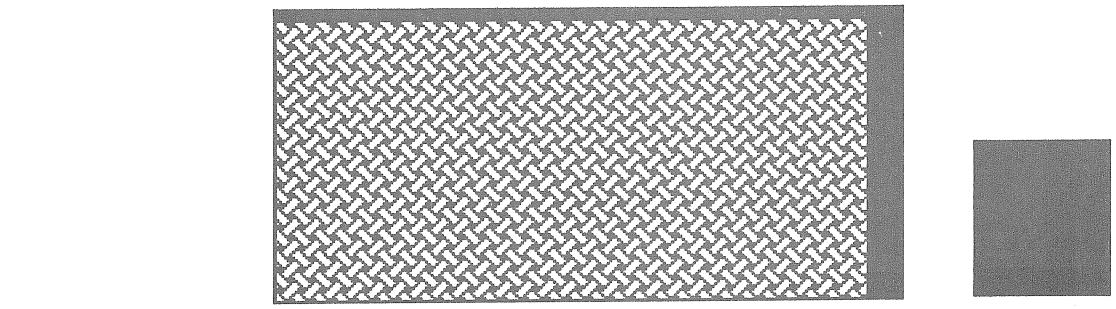
Les surfaces de même bord contenu dans un plan, et qui tournent leur concavité dans le même sens, ont des aires ordonnées de la manière suivante :

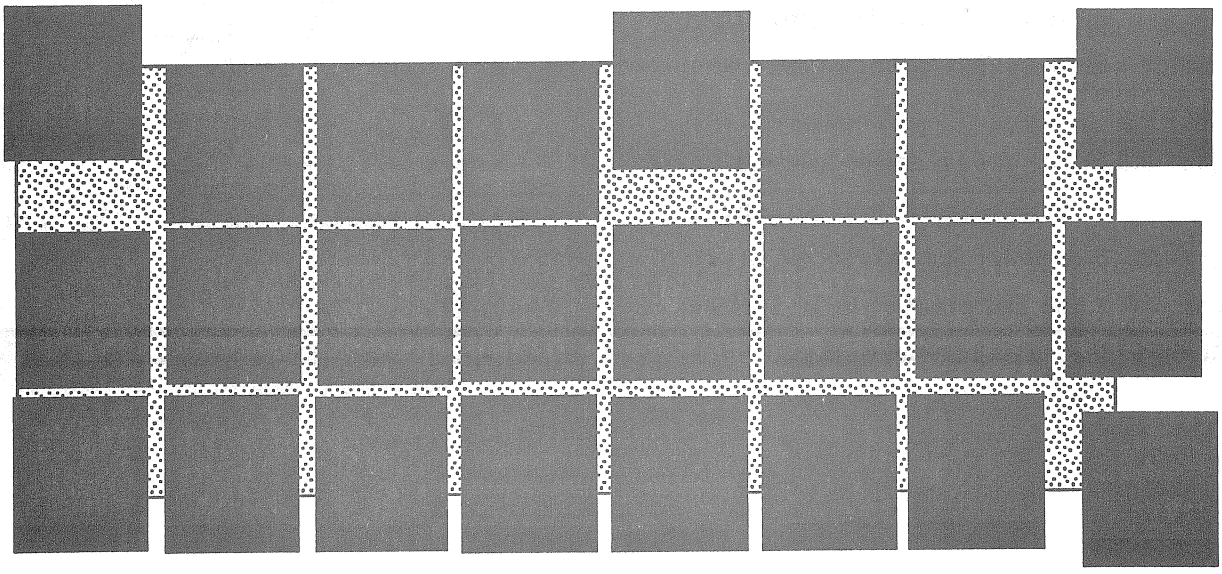
Une surface comprise entre la surface plane et une seconde surface a une aire comprise entre celle de la surface plane et celle de la seconde surface.



Les sens sont ceux des vecteurs qui définissent les demi-espaces limités par le plan : les vecteurs perpendiculaires au plan. Il faut entendre qu'il s'agit des surfaces contenues dans un même demi-espace et telles que le solide bordé par la réunion de cette surface et de la surface plane, soit convexe. Une surface est comprise entre la surface plane et une seconde surface, si elle est incluse dans le solide bordé par la réunion de la surface plane et de la seconde surface.

CINQUIEME POSTULAT



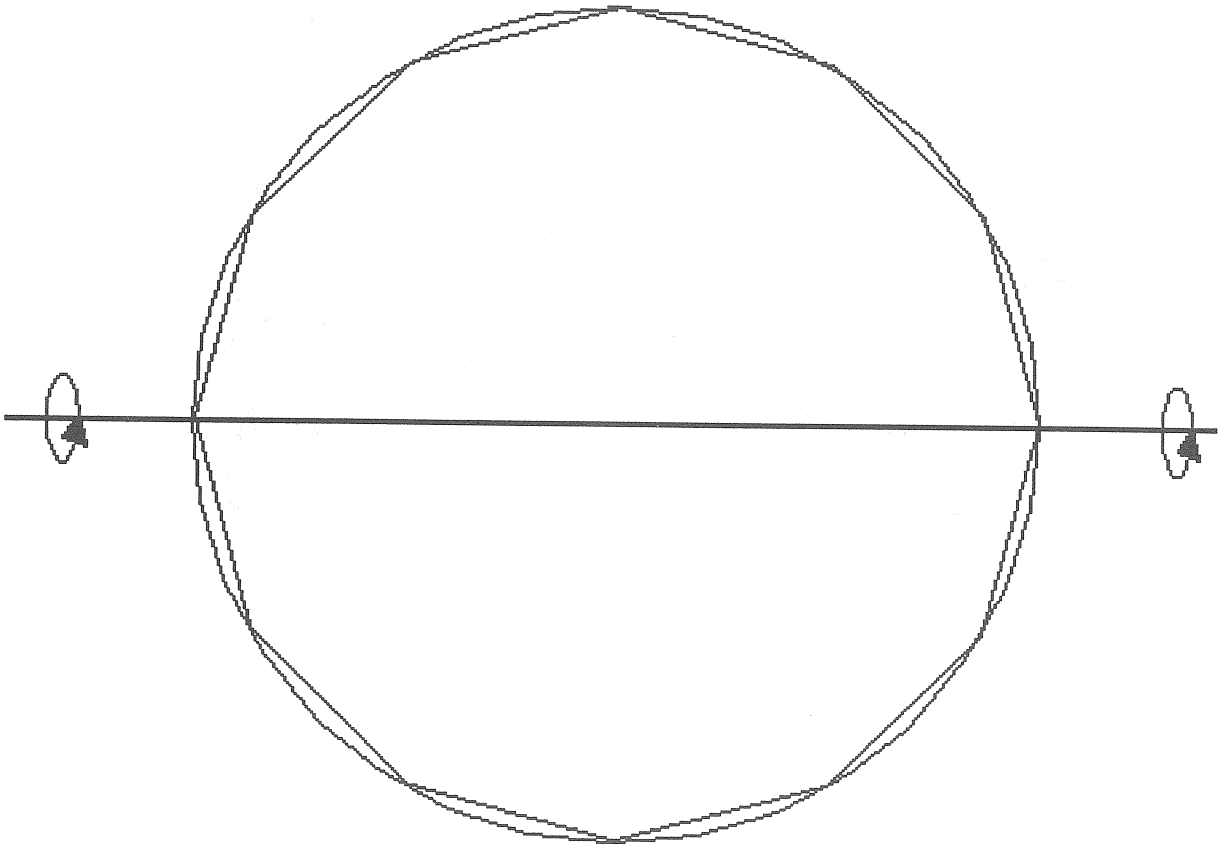


Si 2 lignes sont inégales et qu'une troisième est donnée.
Si 2 surfaces sont inégales et qu'une troisième est donnée...
Si 2 solides sont inégaux et qu'un troisième est donné...
il existe un multiple de la différence des 2 premiers qui est plus grand que le troisième.

Ce dernier est le postulat fondamental d'Archimède.

LA FIGURE INSCRITE DANS LA SPHERE

DEFINITION

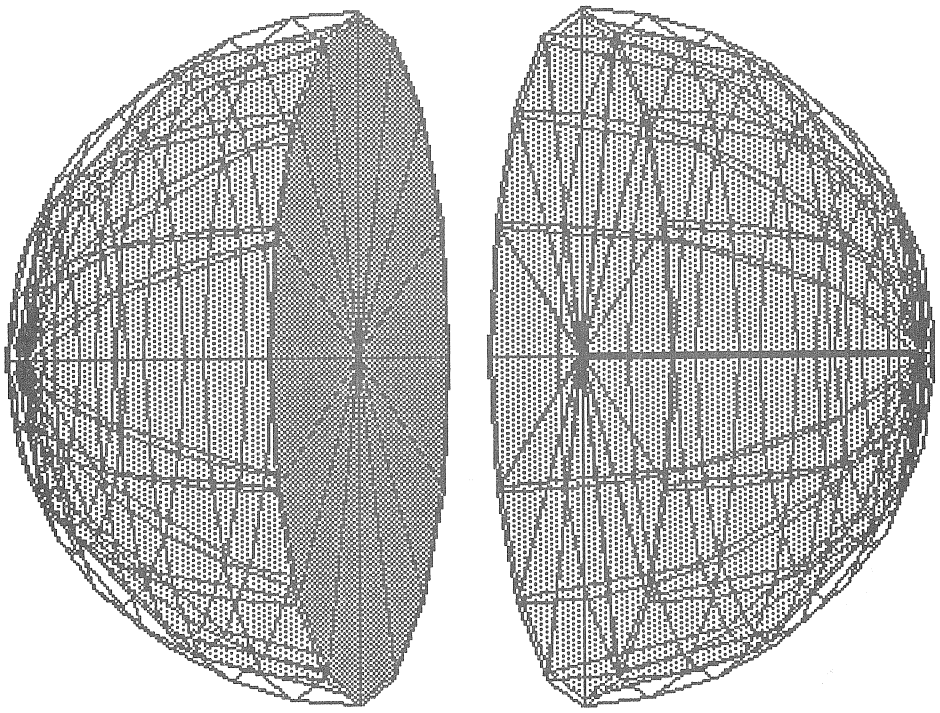


Si on fait tourner simultanément le cercle et un polygone régulier inscrit, dont le nombre de côtés est multiple de 4, autour du diamètre horizontal, le premier engendre la sphère, cependant que le second engendre une surface inscrite, formée d'un empilement de troncs de cônes.

Cette surface est d'autant plus proche de la sphère, que le nombre de côtés du polygone est grand, mais elle n'est jamais incluse dans la sphère.

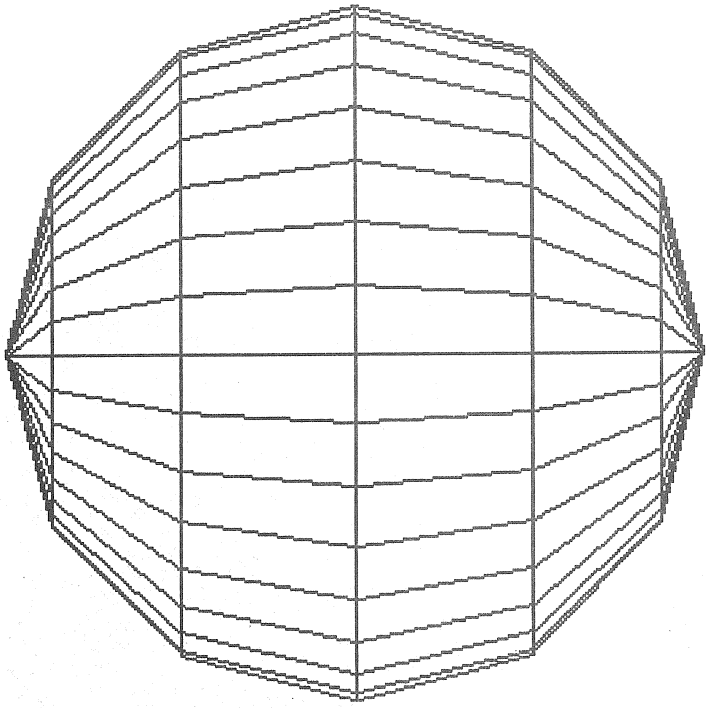
Notre chance d'avancer dans cette recherche, serait de pouvoir calculer l'aire de la figure inscrite !

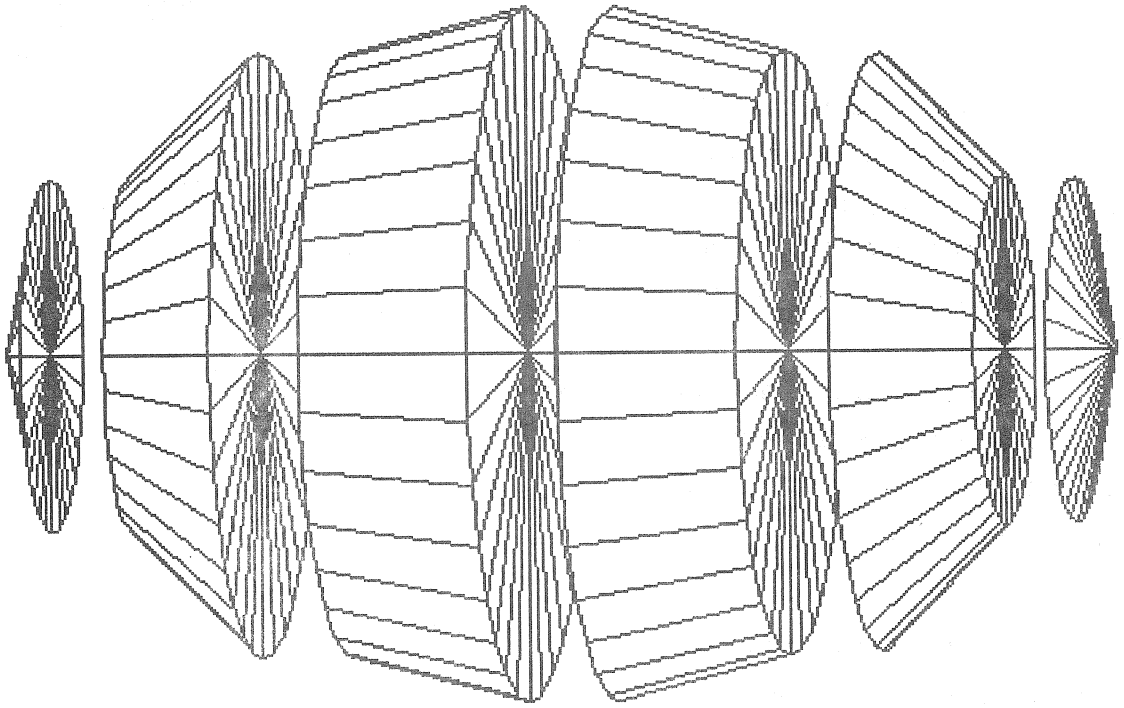
ORDRE DE LA FIGURE INSCRITE ET DE LA SPHERE



D'après le quatrième postulat, nous pouvons dire (en coupant en deux la figure par un plan vertical), que l'aire de la figure inscrite est inférieure à celle de la sphère.

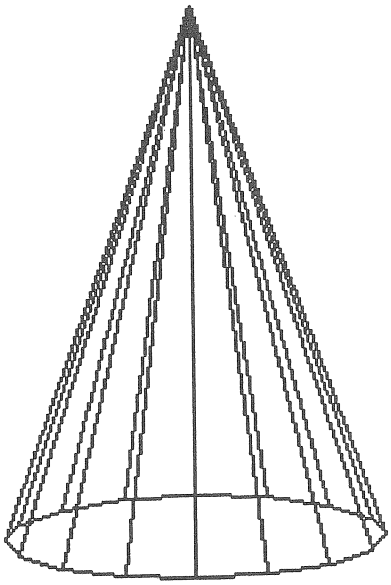
DECOMPOSITION DE L'AIRE

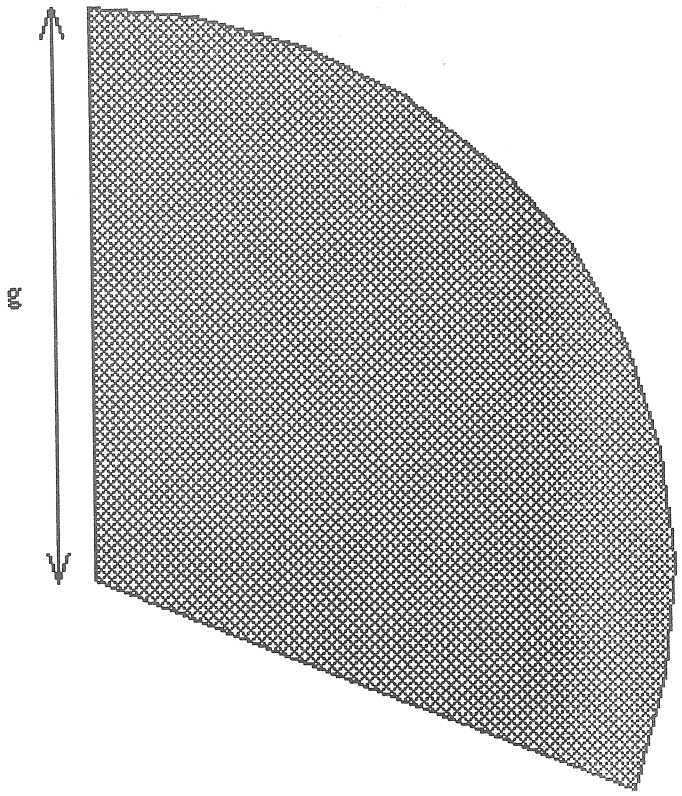




Nous repèrerons les éléments caractéristiques de cette figure, en les mettant en relief : le rayon du cercle : $\mathbb{R}$, son diamètre : $\mathbb{D}$, le côté du polygone générateur : c et l'aire de la figure : $\mathbb{A}$.

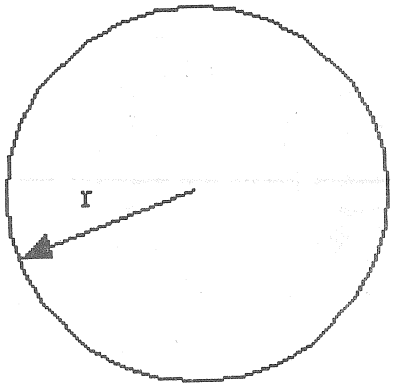
AIRE D'UN CONE





Archimède étudie l'aire latérale des cônes et troncs de cône, dont il a besoin pour trouver A, en les encadrant par des pyramides à base régulière. Pour simplifier cette étude, on peut tirer parti de la développabilité des cônes, et les étaler sur un plan.

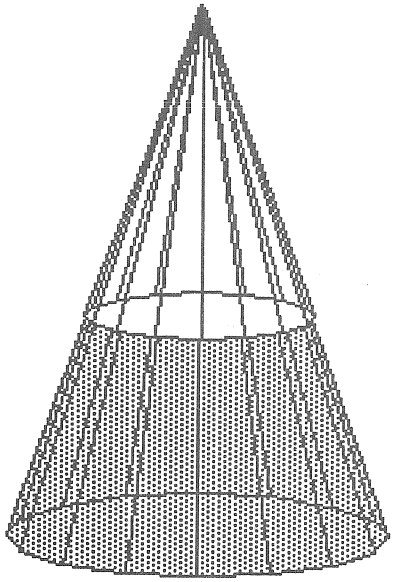
De même, il ramène cette aire à celle d'un disque. Il nous sera plus simple d'employer le nombre π, bien que sa situation de nombre n'ait été conçue qu'à la Renaissance.

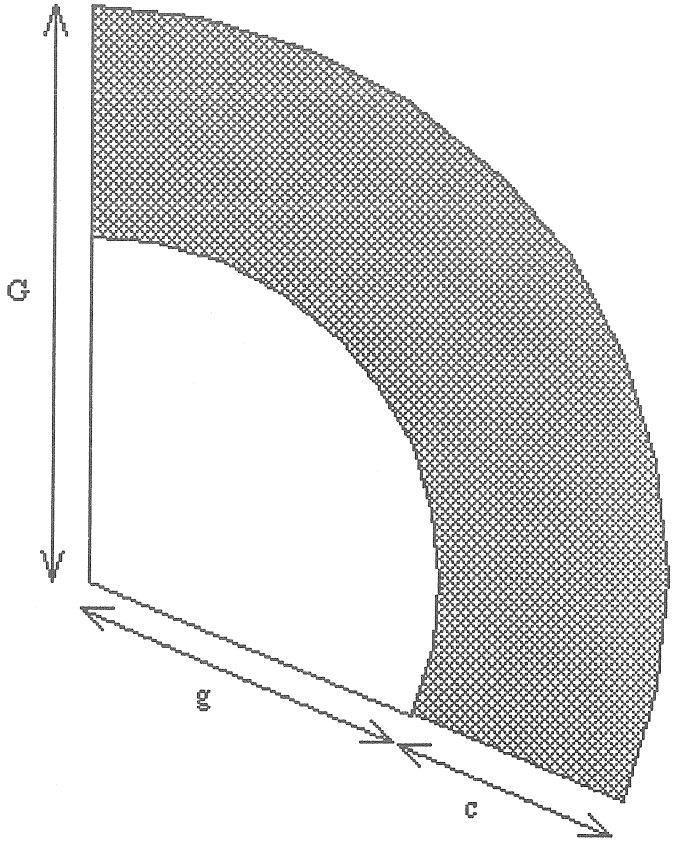


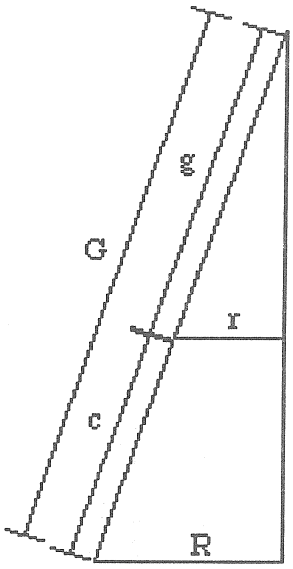
La surface latérale équivaut à un secteur du disque de rayon g, dont l'angle s'obtient en disant que le périmètre de la base est le même, qu'il soit lu dans la surface de base ou dans la surface latérale.

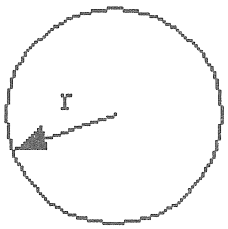
$$S = \frac{r}{g} . \pi . g^2 = \pi . r . g$$

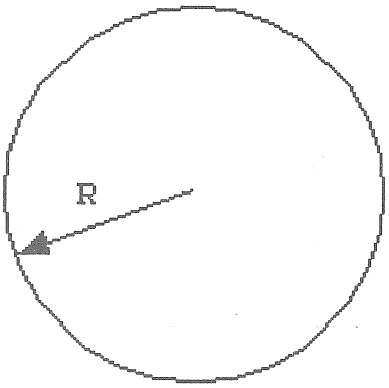
AIRE D'UN TRONC DE CONE











$$\frac{R}{r} = \frac{G}{g} \qquad \text{ou} \qquad R \,.\, g = r \,.\, G$$

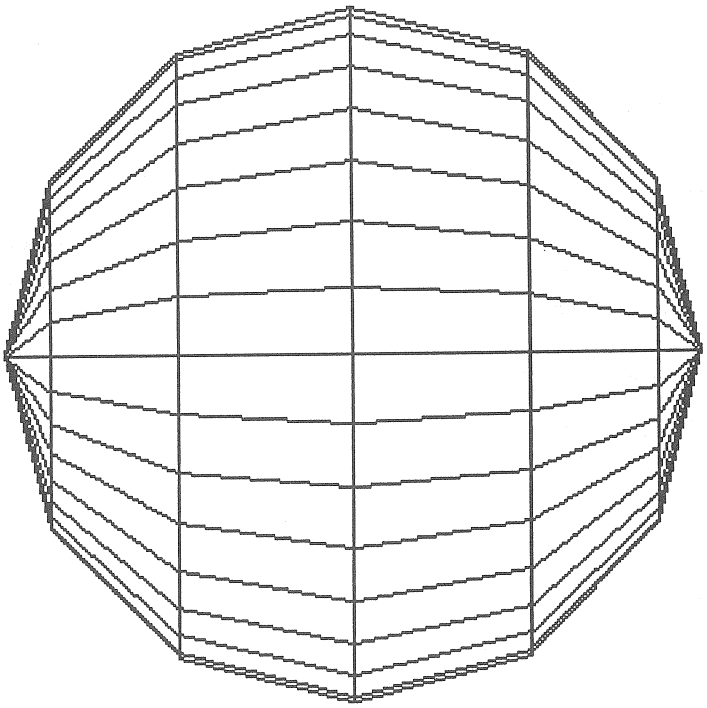
Pour un tronc de cône, il s'agit de la différence des surfaces latérales de 2 cônes de même angle :

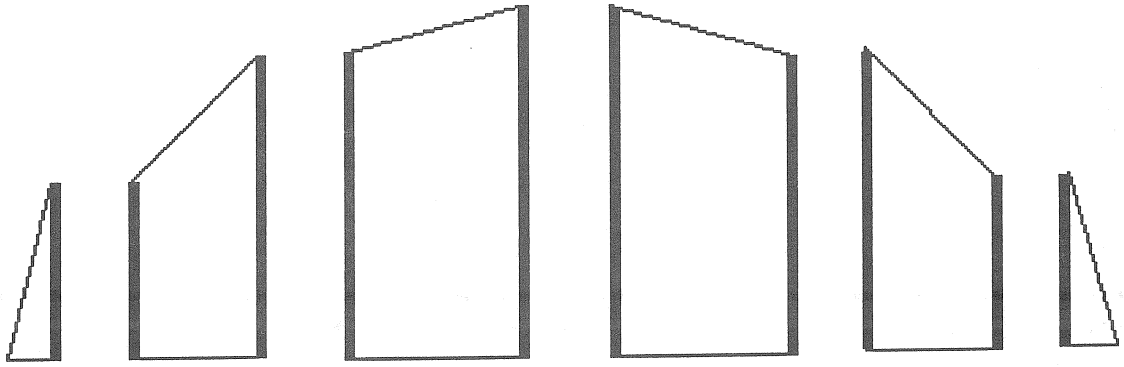
$$S = (\pi \,.\, R \,.\, G) - (\pi \,.\, r \,.\, g) = \pi \,.\, (R \,.\, G - r \,.\, g)$$

$$R \,.\, G = R \,.\, (c + g) = R \,.\, c + R \,.\, g = R \,.\, c + r \,.\, G = R \,.\, c + r \,.\, c + r \,.\, g$$

$$\boxed{S = \pi \,.\, (R + r) \,.\, c}$$

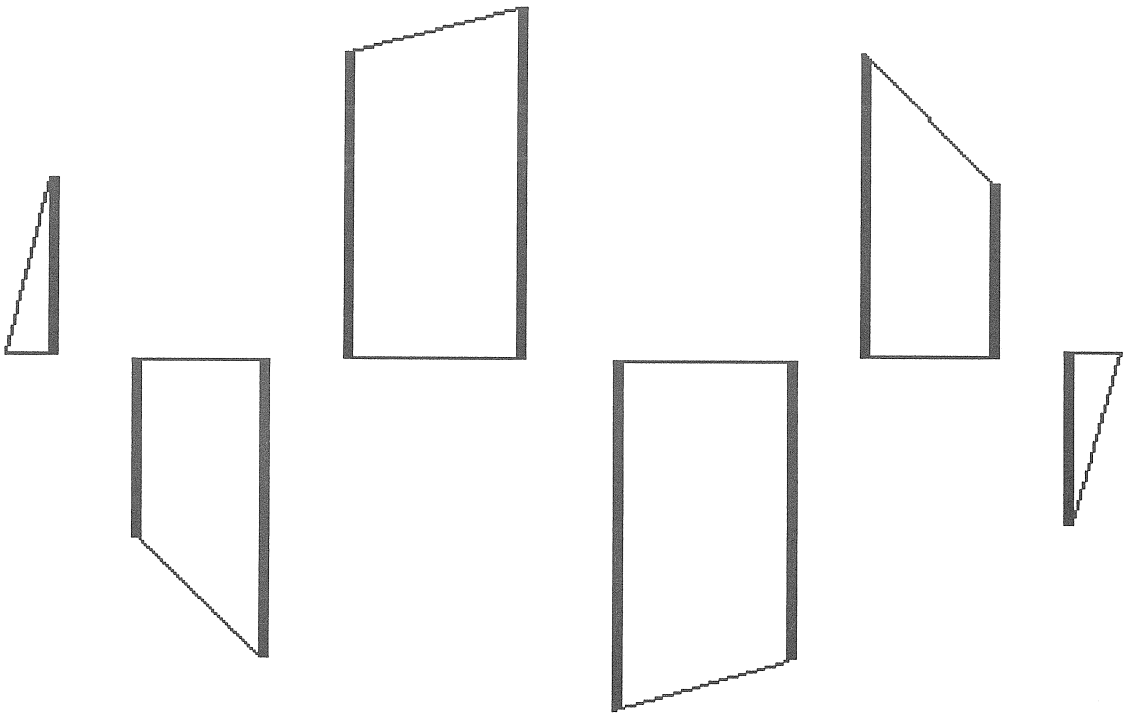
AIRE DE LA FIGURE INSCRITE



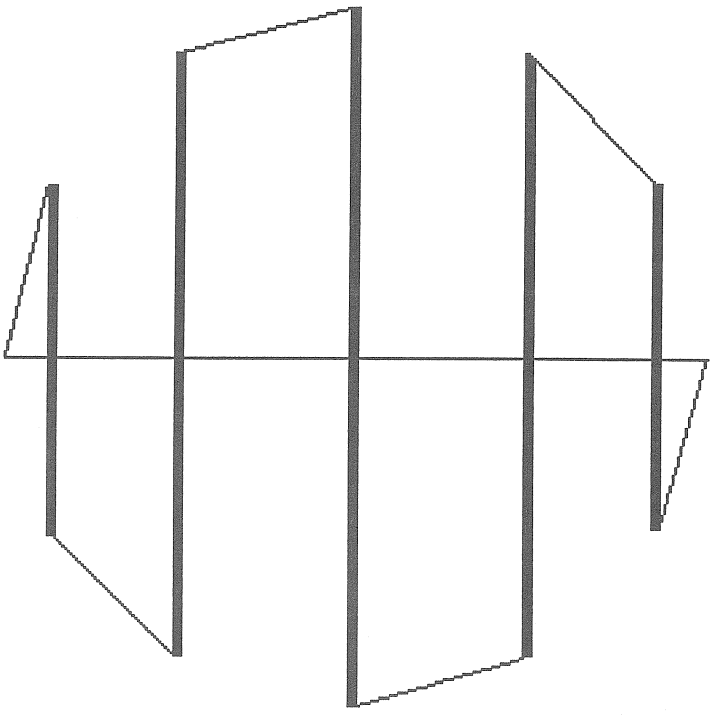


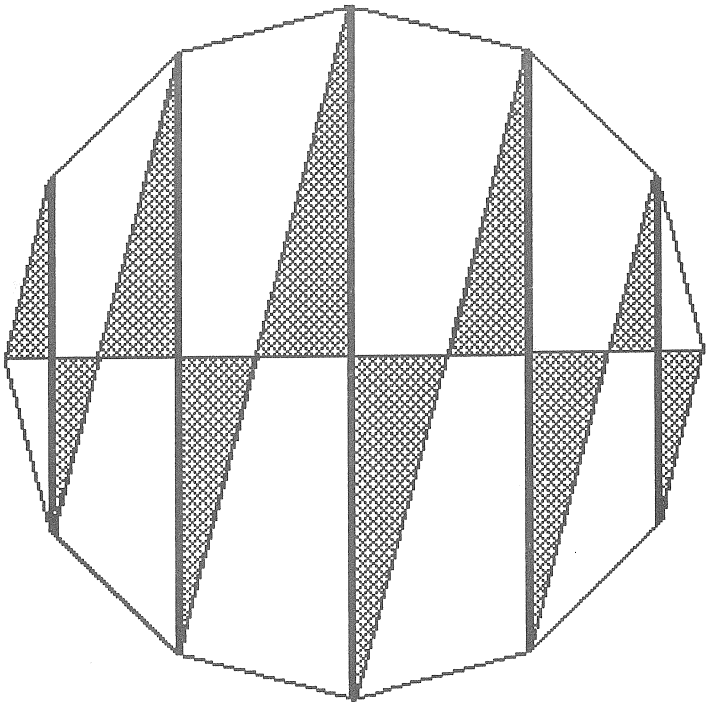
Les formules des 2 pages précédentes peuvent être appliquées à la figure inscrite. Leur grand intéret provient du fait que le même c entre dans la mesure de l'aire de tous les cônes et troncs de cône, puisque c'est le côté c du polygone régulier qui a engendré la figure inscrite. Il reste à maitriser la somme Σ de tous les rayons mis en caractères gras

$$\mathbb{A} = \pi \, . \, \Sigma \, . \, c$$

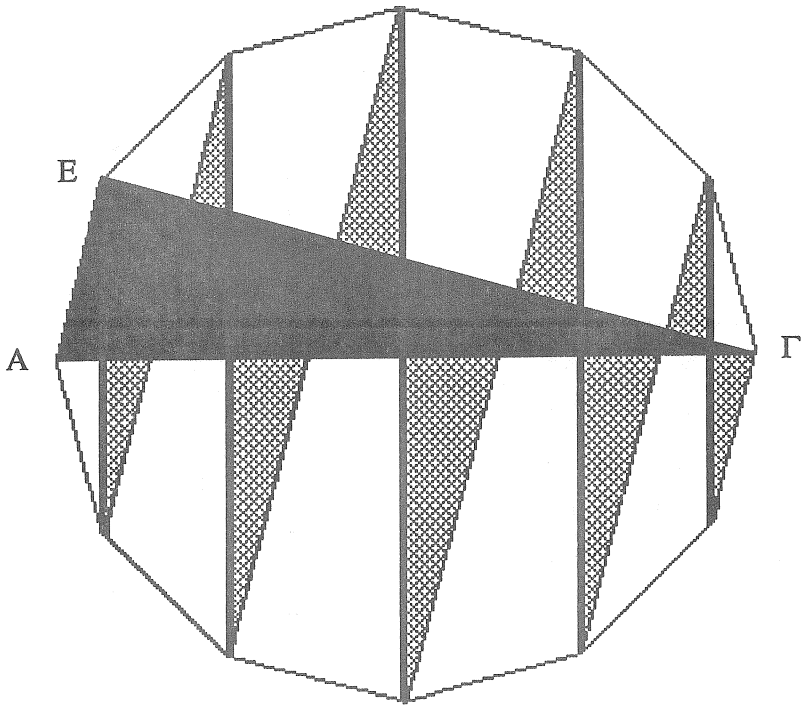


Si on symétrise, un sur deux, les trapèzes qui engendrent les troncs de cône, on voit que Σ est la somme des longueurs de toutes les diagonales verticales du polygone générateur.

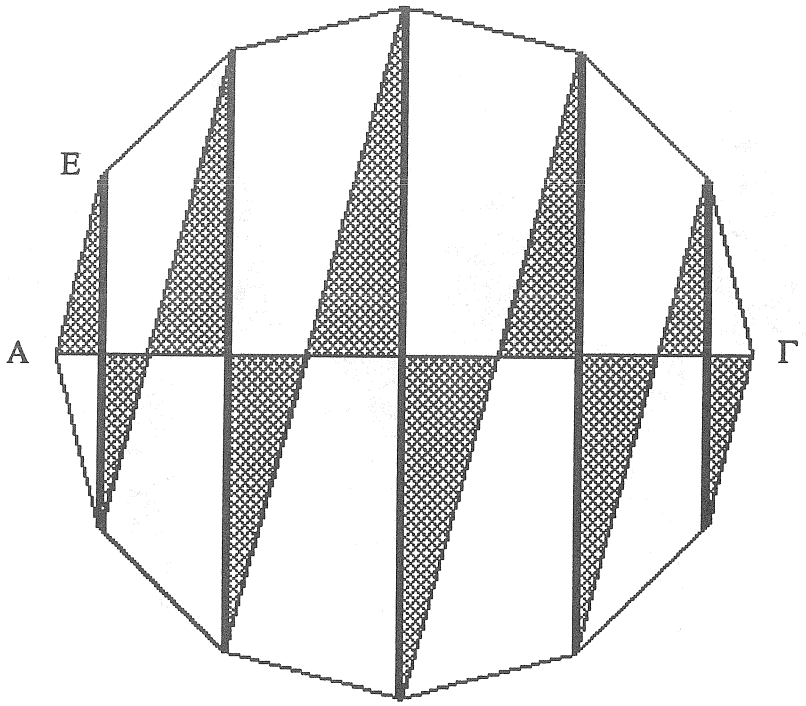


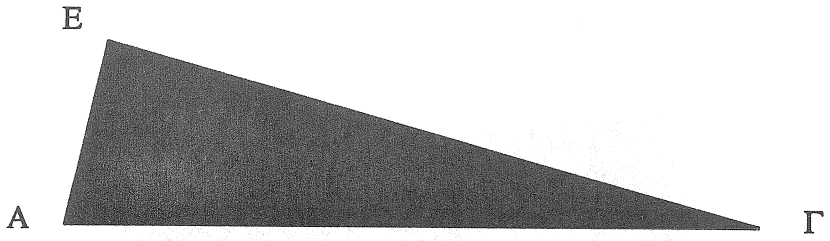


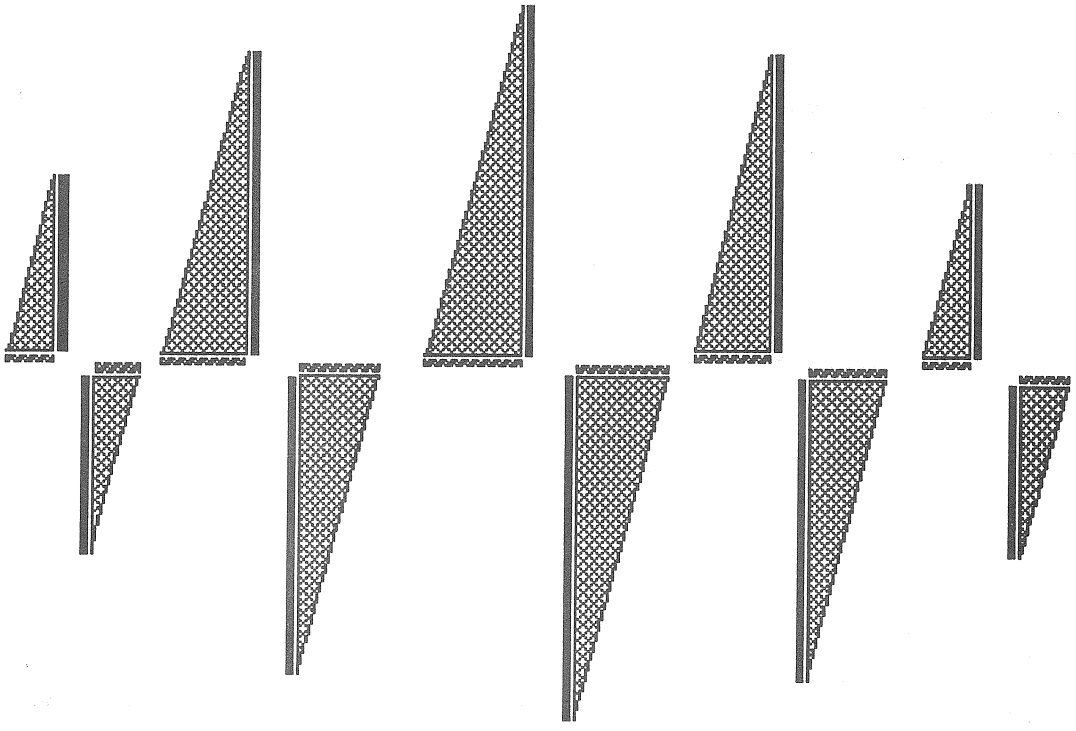
Archimède va maitriser la somme $\sum$ en créant une famille de triangles tous semblables.

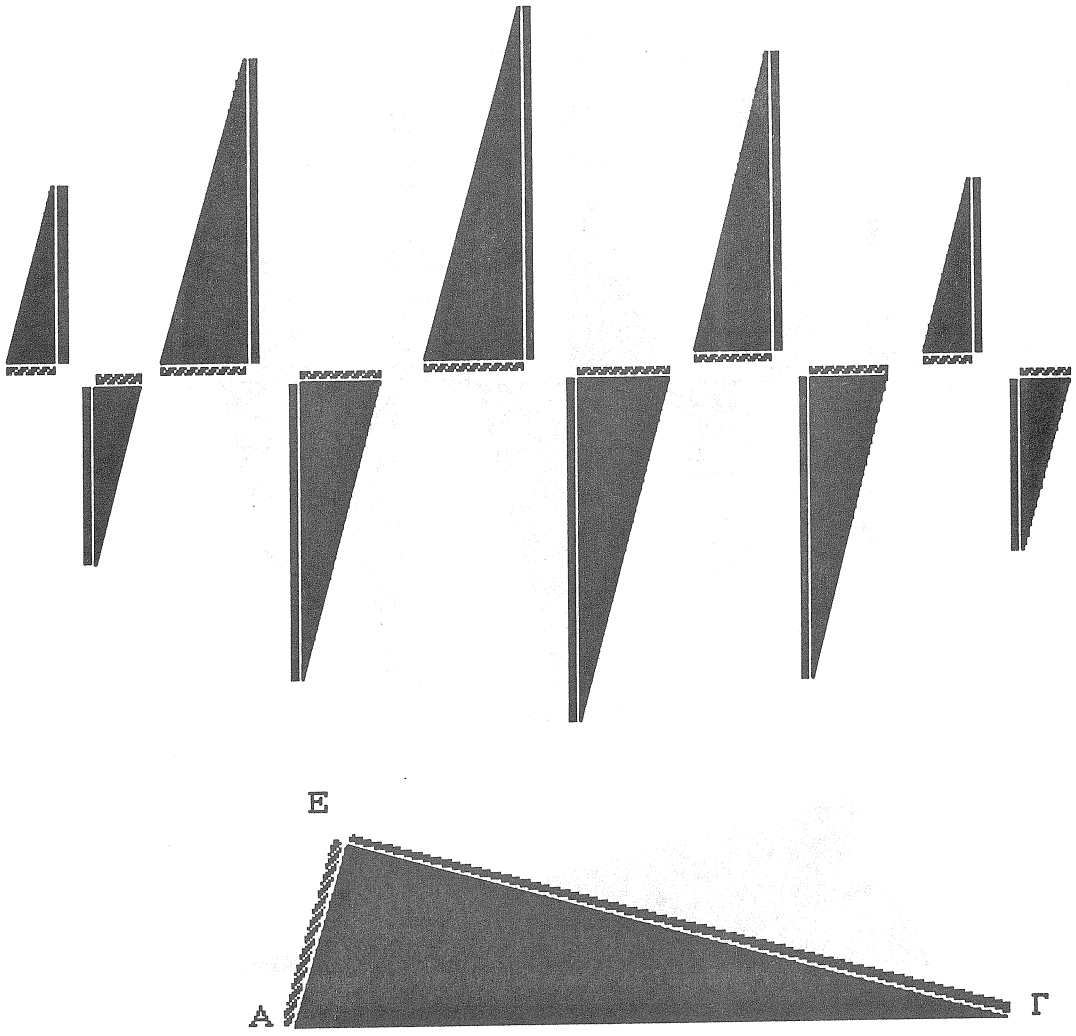


... et tous semblables au triangle rectangle AEΓ (les côtés des angles très aigus sont perpendiculaires).

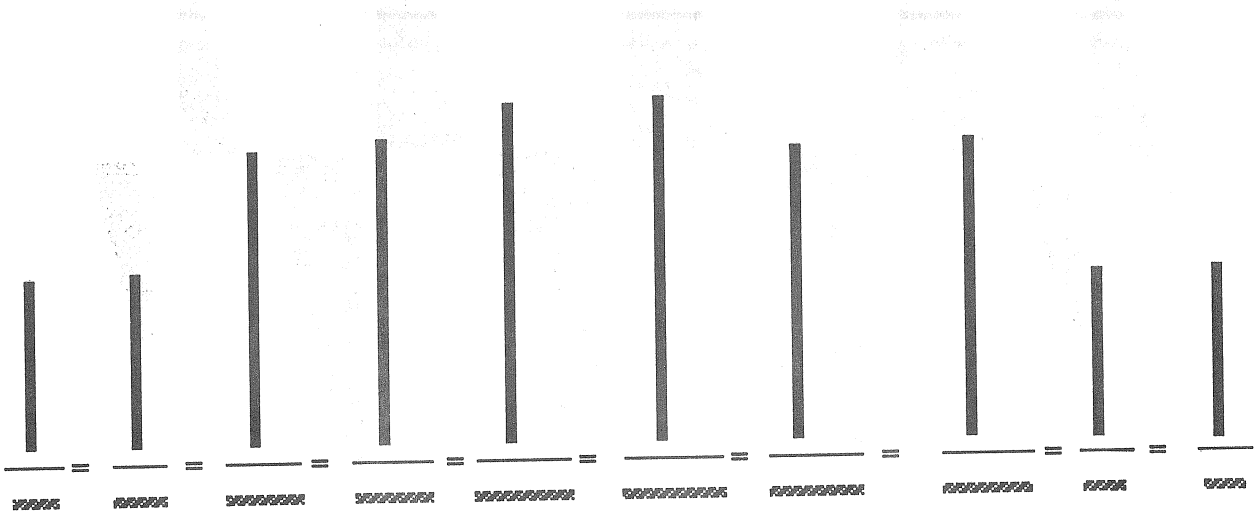

E
A
Γ

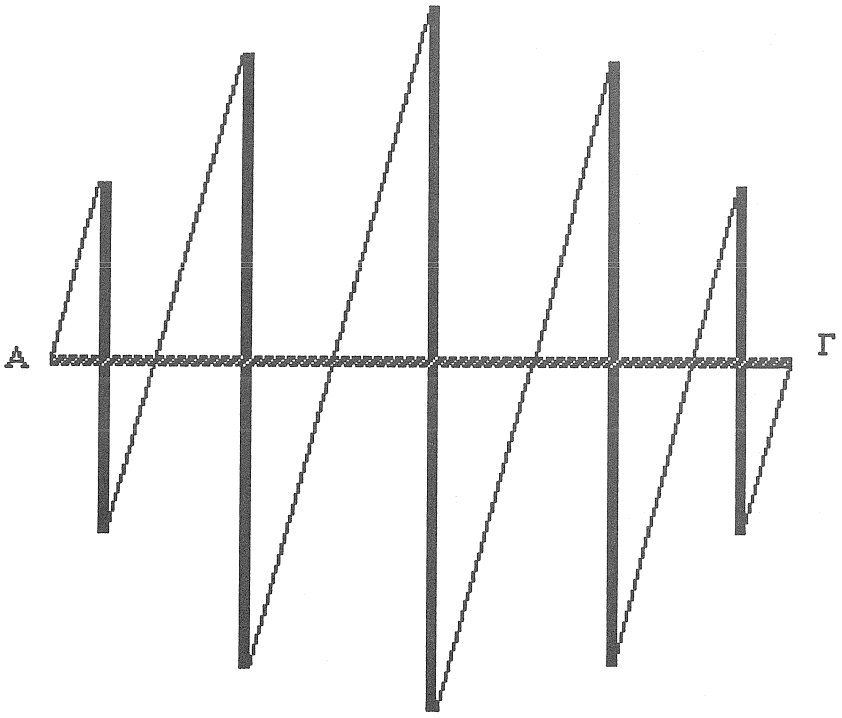

E
A
Γ



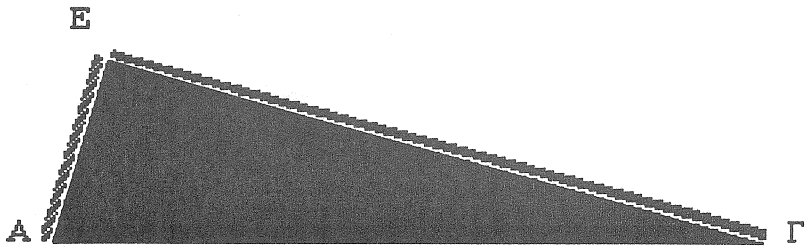


Les côtés correspondants des triangles semblables sont repérés en même trame. On peut aligner les rapports égaux :



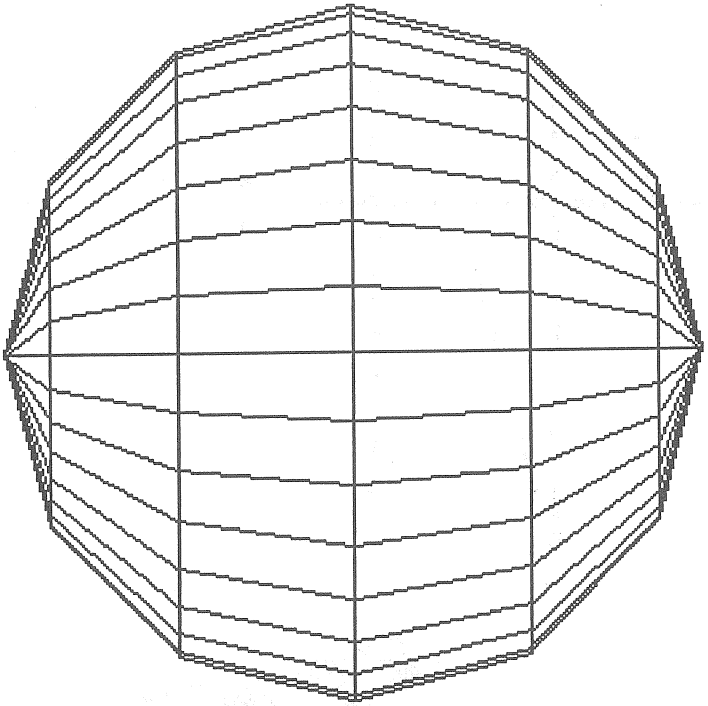


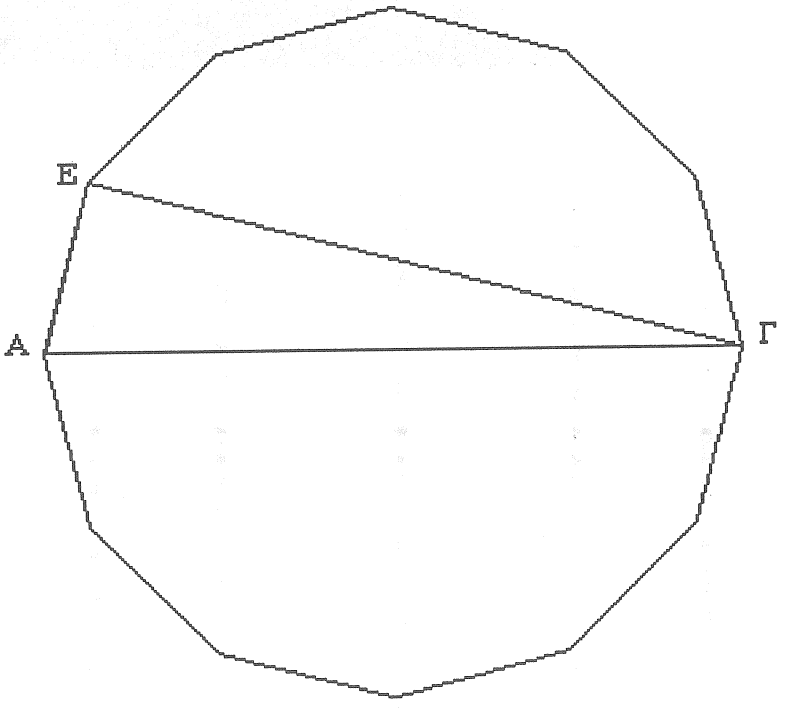
Et, par sommation des numérateurs et dénominateurs des rapports égaux :



$$\frac{E\Gamma}{AE} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\Sigma}{\Sigma}$$

EXPRESSION FINALE

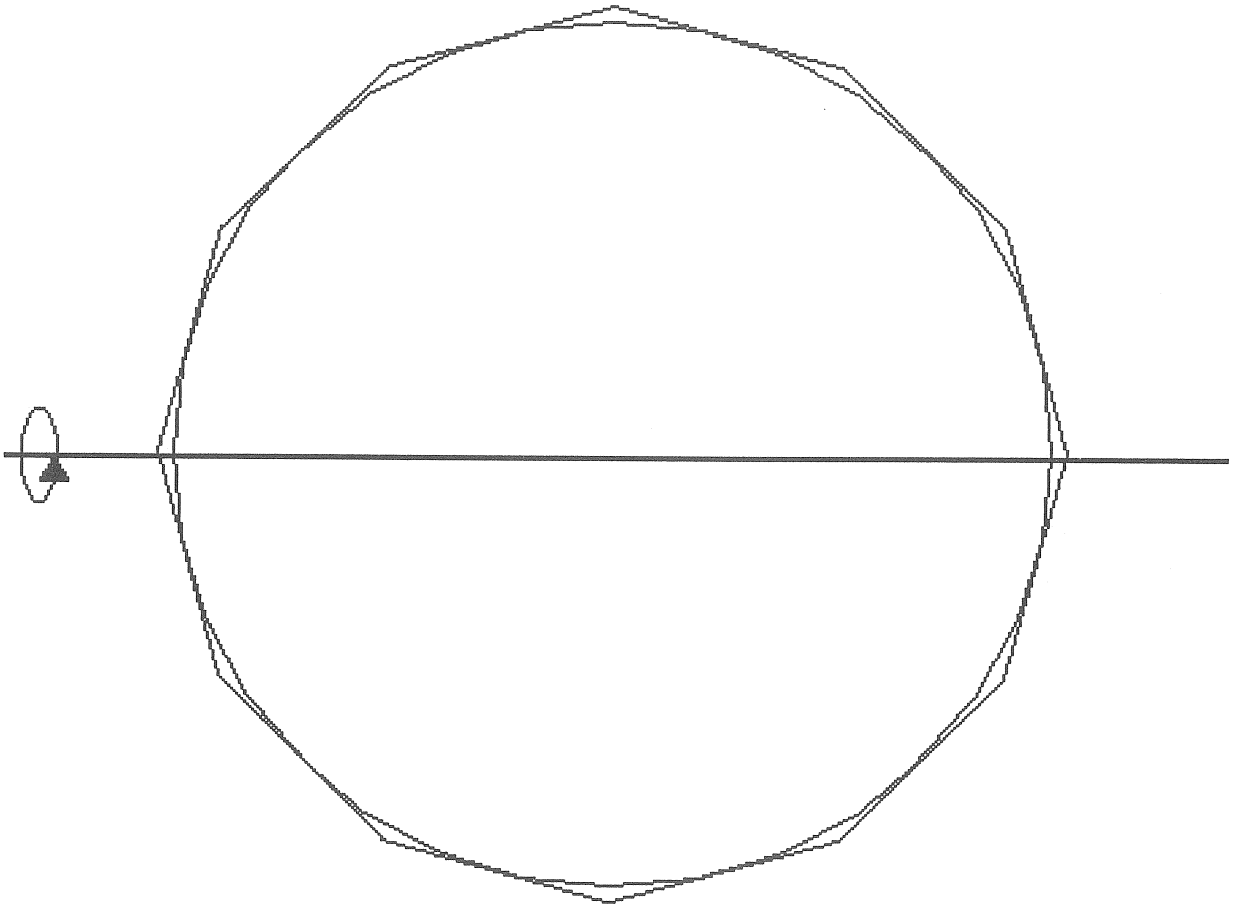




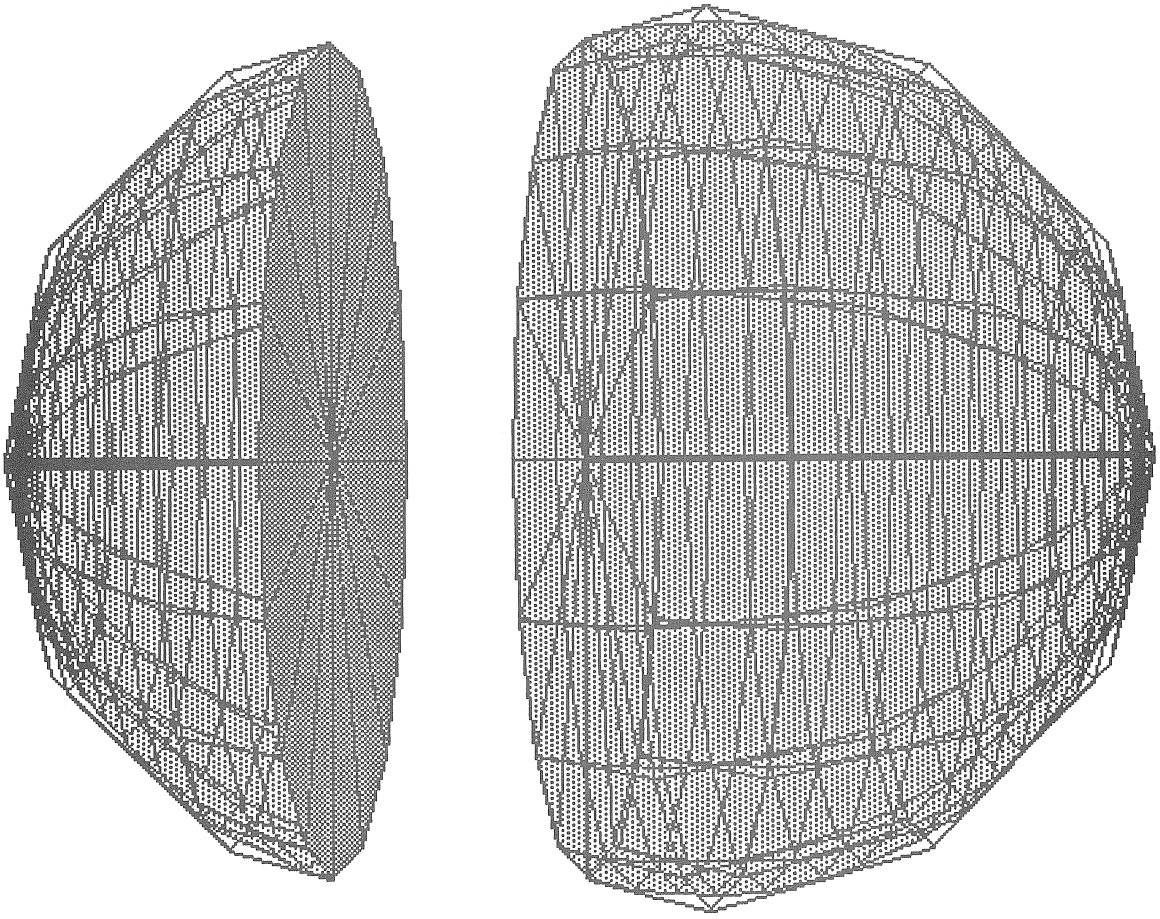
D'après la page précédente : $\Sigma \cdot c = \mathbb{D} \cdot E\Gamma$

$$A = \pi \cdot \mathbb{D} \cdot E\Gamma$$

LA FIGURE CIRCONSCRITE



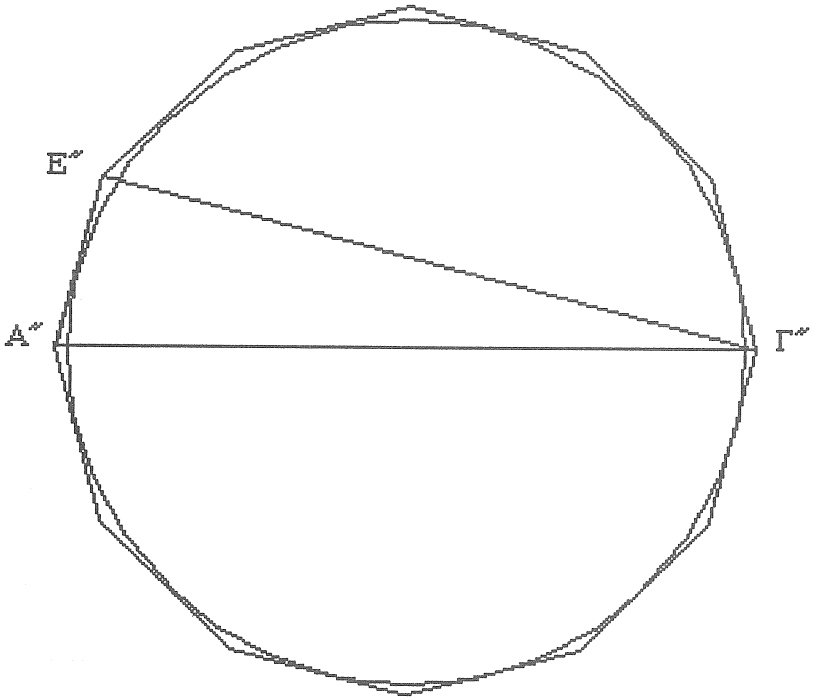
L'expression étonnamment simple de l'aire de la figure inscrite, nous engage à circonscrire de la même manière le cercle par un polygone régulier dont le nombre des côtés est multiple de 4, et de faire tourner l'ensemble autour d'un diamètre commun. Le cercle engendre la sphère, cependant que le polygone engendre une figure circonscrite, semblable à la figure inscrite, et d'autant plus proche que le nombre de ses côtés est grand.



Si on coupe l'ensemble en 2 parties égales, les surfaces n'ont pas même bord. Par contre, si on le coupe suivant un des cercles de contact de la sphère et de la figure circonscrite, les 2 parties inégales vérifient les conditions du quatrième postulat : même bord plan et convexité.

Pour chaque partie, ce postulat affirme que la calotte a une aire inférieure à la partie correspondante de la figure circonscrite.

En ajoutant ces 2 résultats, Archimède est sûr que l'aire de la sphère est inférieure à celle de la figure circonscrite.

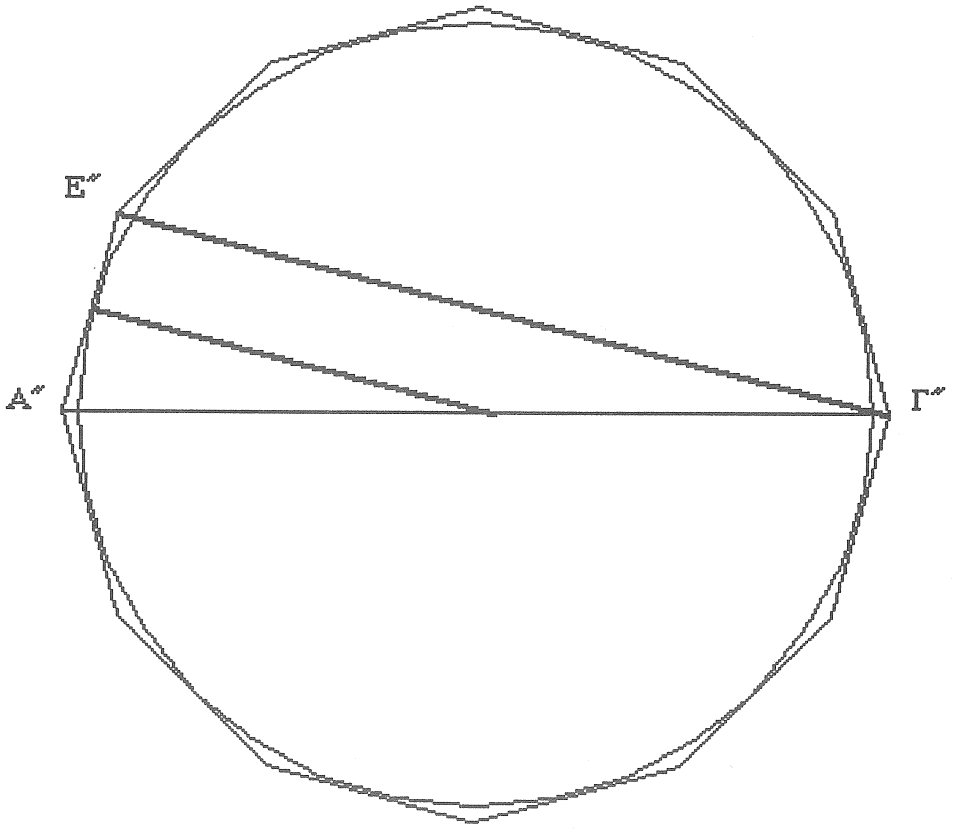


Il suffit de transposer le résultat de la page 96 (en repérant les éléments correspondants par le signe ″) :

$$\mathbb{A}'' = \pi \,.\, A''\Gamma'' \,.\, E''\Gamma''$$

Le dessin du bas montre que :

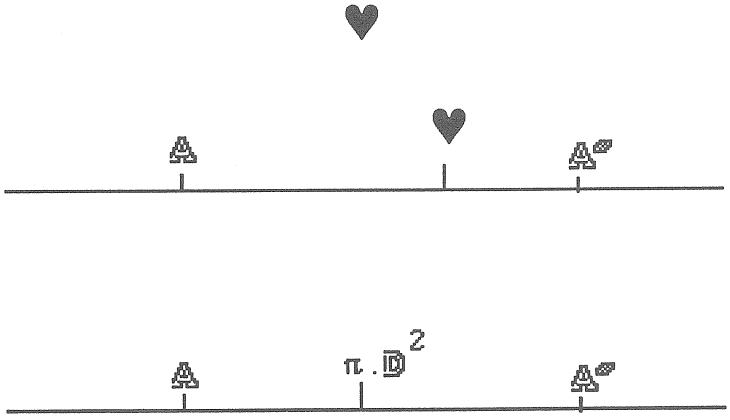
$$E''\Gamma'' = \mathbb{D}$$



$$\mathbb{A}'' = \pi \,.\, A''\Gamma'' \,.\, \mathbb{D}$$

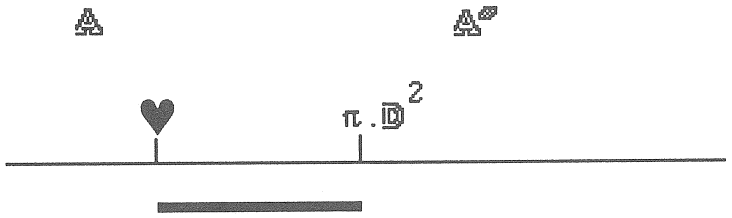
L'AIRE DE LA SPHERE

Nous pouvons maintenant parler de l'aire de la sphère, et même lui inventer un nom :



Entre les aires A et A'', on trouve deux nombres : l'aire de la sphère ♥, et l'aire d'un disque dont le rayon est le diamètre de la boule $\pi . D^2$.

Le but poursuivi, est de montrer que ces 2 nombres n'en sont qu'un. Et pour celà, nous avons aujourd'hui beaucoup de moyens de le prouver facilement, basés sur le concept de limite. Je le propose en exercice.



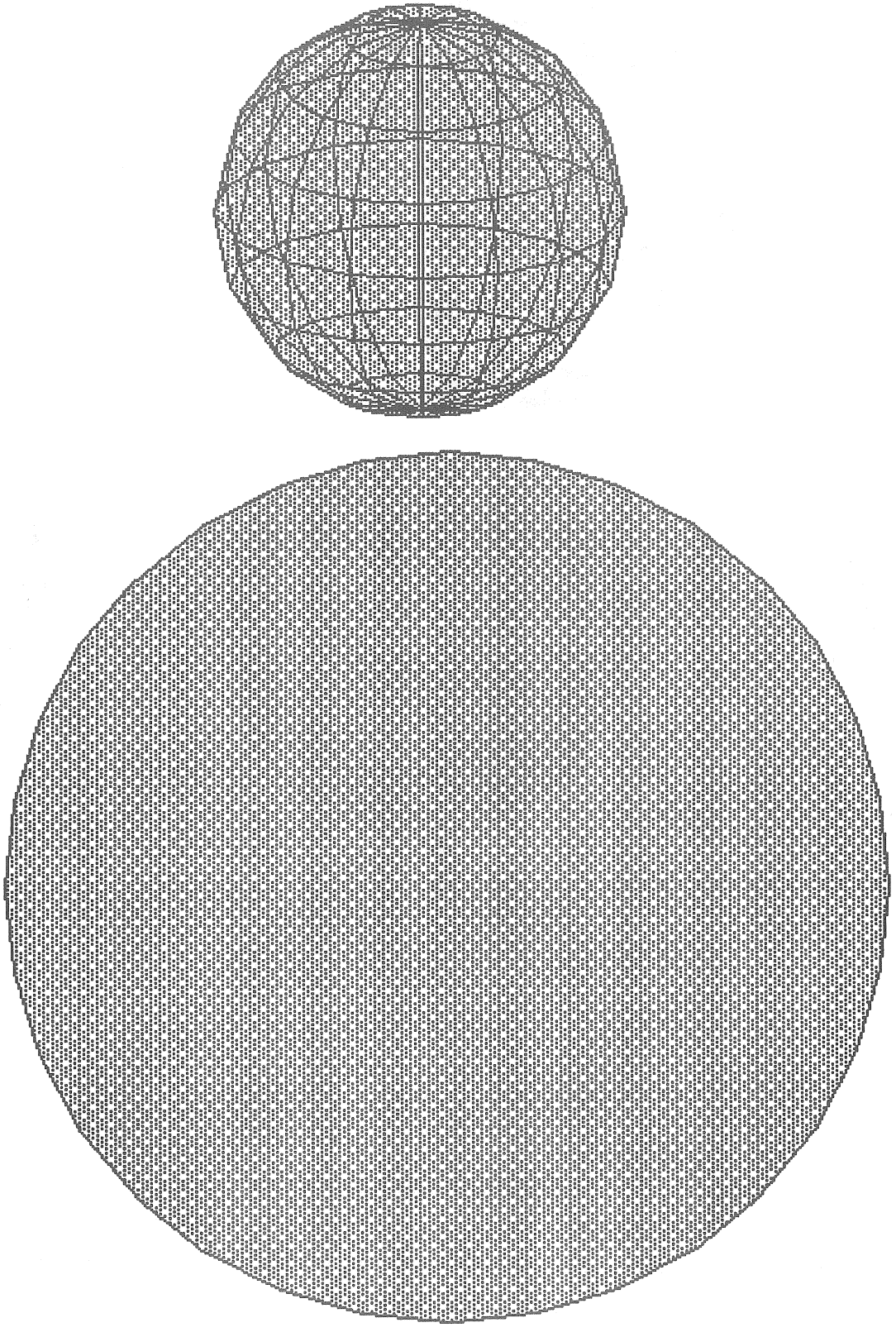
Pour Archimède, la méthode consiste à supposer qu'ils puissent être différents, et à construire effectivement 2 figures, l'une inscrite, l'autre circonscrite à la sphère, dont les aires soient plus proches que les 2 nombres. Comme ces aires encadrent les 2 nombres simultanément, il y a contradiction, et l'hypothèse était fausse.

Sous réserve de cette construction (qu'on peut admettre en première lecture et qui est proposée en note), nous sommes en mesure d'affirmer le résultat fondamental :

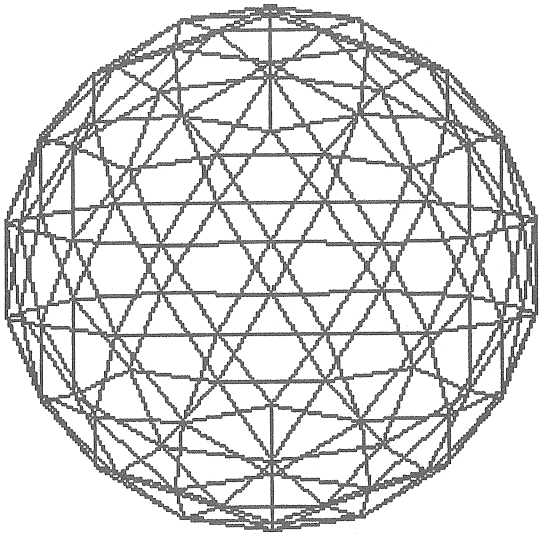
L'aire de la sphère est égale à celle d'un disque de rayon le diamètre de la sphère.

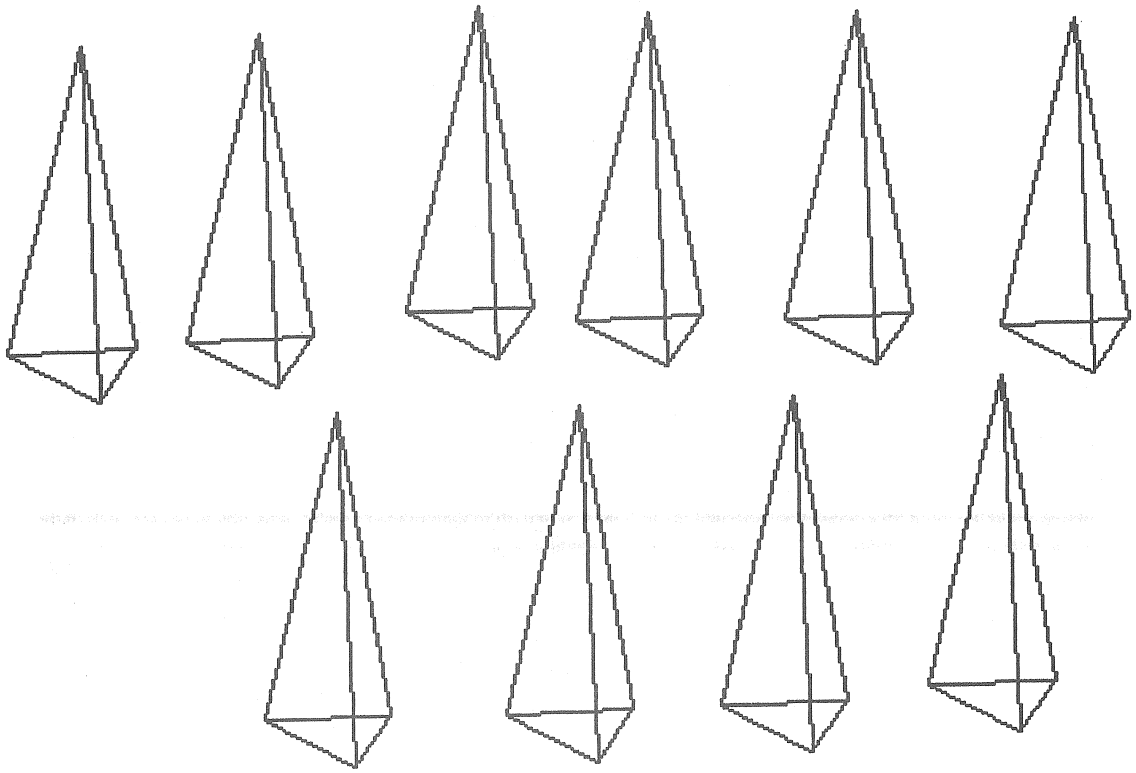
$$\heartsuit = \pi . D^2$$

$$\heartsuit = \pi \cdot \mathbb{D}^2$$



LE VOLUME DE LA BOULE

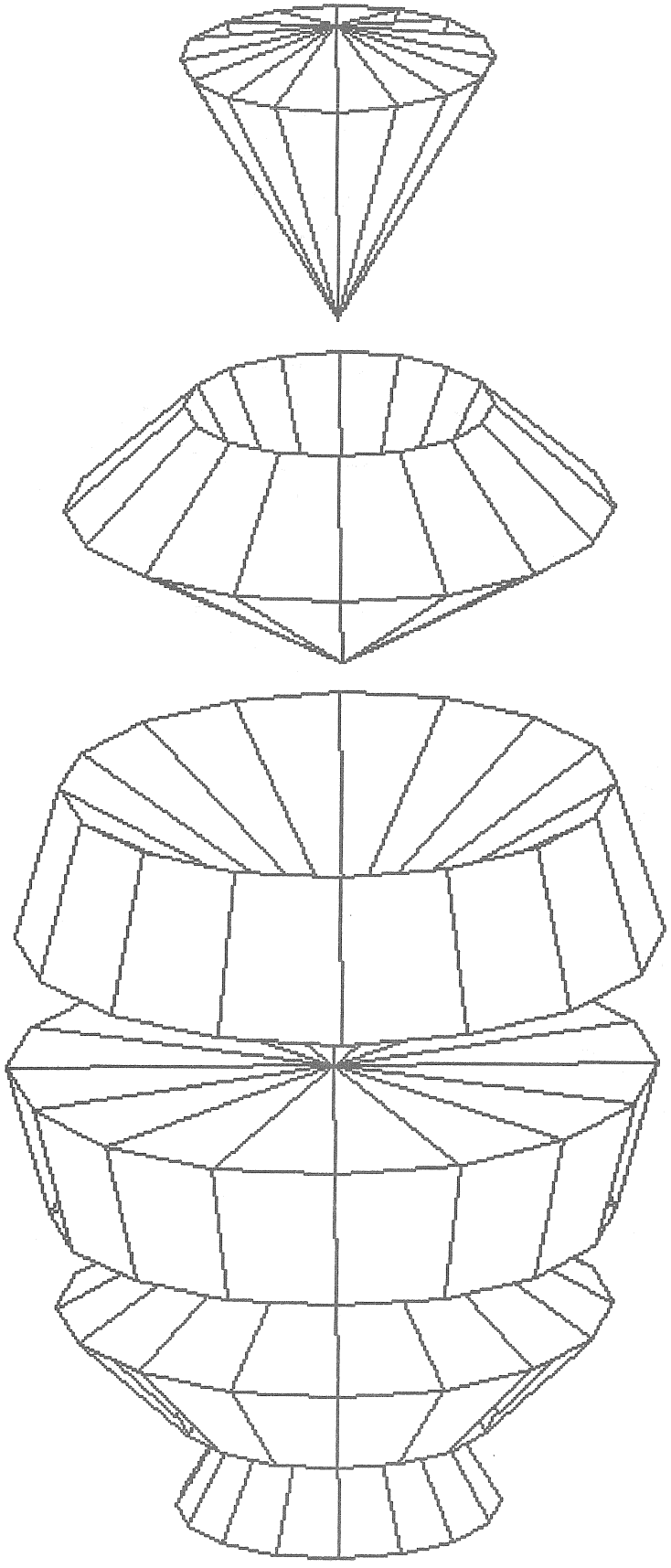




Si on imagine une sphère à facettes, on peut la décomposer en une multitude de petites pyramides de hauteur le rayon ; chacune ayant pour base une facette. Le volume de la boule est la somme des volumes des pyramides ; et, comme la hauteur est commune, l'ensemble équivaut à une pyramide de base : la surface de la sphère, et de hauteur : le rayon.

Archimède va copier ce résultat pour une "vraie" sphère !

DECOMPOSITION DE LA FIGURE INSCRITE



Dans un premier temps, Archimède va calculer l'aire de la figure inscrite définie page 85. La décomposition en troncs de cônes de la page 87, qui avait été très efficace pour le calcul de l'aire de la figure, ne va pas lui rendre le même service ici.

En effet, pour la surface, les aires des troncs de cône avaient permis de mettre en commun le côté du polygone générateur ; par contre, leur volume ne produit aucun élément commun.

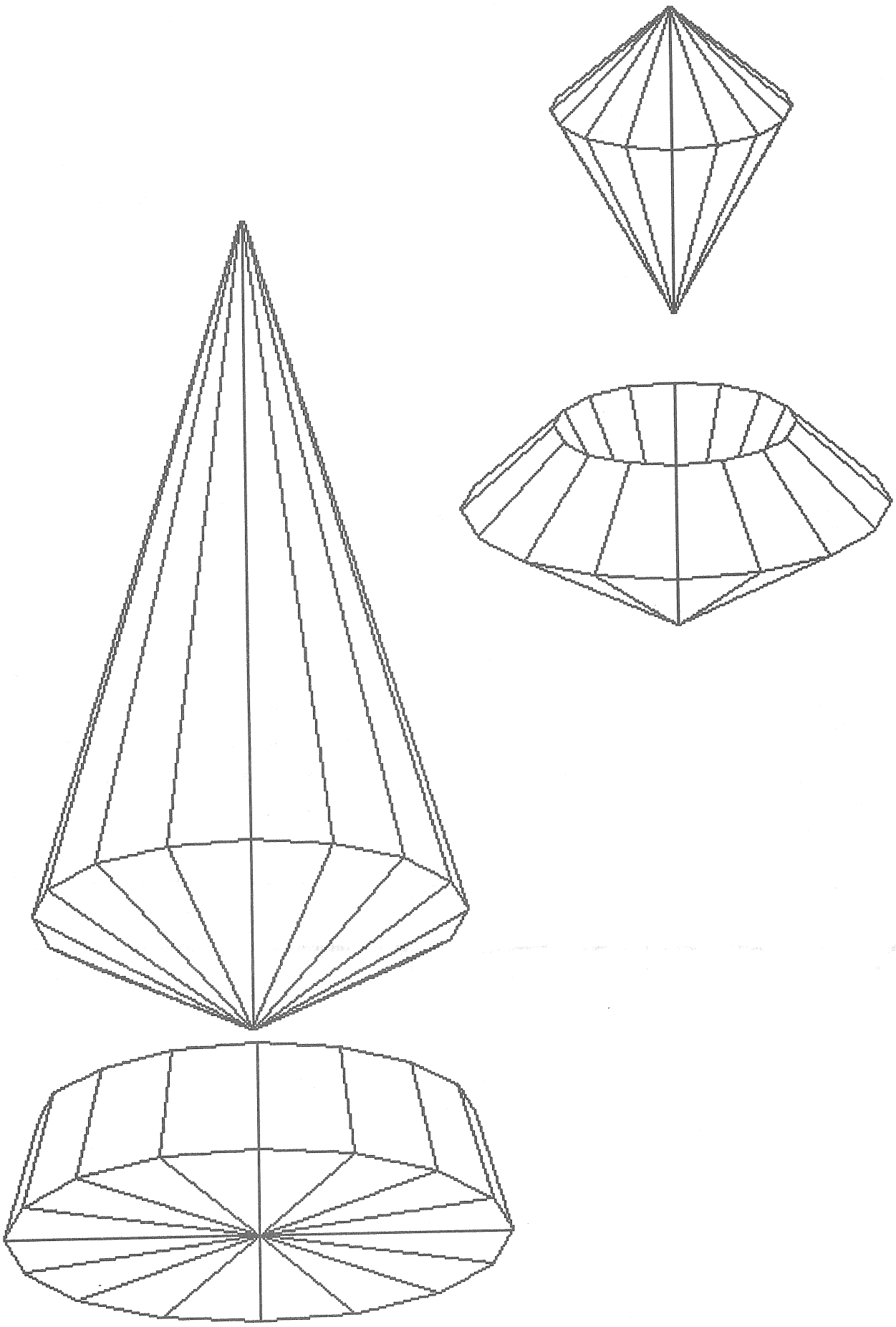
L'intuition de la page précédente conduit à penser que le terme qu'on peut espérer commun est le rayon de la boule, ou quelque chose de proche. Archimède va décomposer sa figure en reliant au centre les bords des surfaces latérales, créant ainsi un emboitement de sortes d'entonnoirs fermés ayant tous leur fond au centre de la figure (le dessin a été tourné d'un quart de tour pour entrer dans la page).

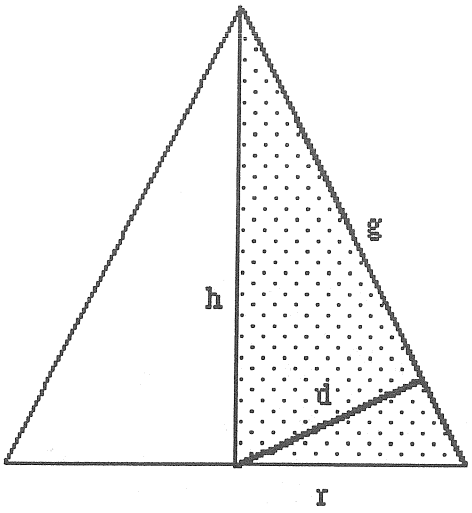
On peut remarquer 3 types de formes différentes :

type 1 : aux extrémités supérieure et inférieure, un double cône que j'appellerai bicône.

type 2 : en nombre variable, des entonnoirs qui sont des différences de bicônes.

type 3 : au centre, 2 entonnoirs à fond plat, différence d'un cône et d'un bicône.





Le volume d'un cône est le tiers de celui du cylindre circonscrit. En terme de formule, celà s'écrit :

$$V = \frac{1}{3}\ \pi . r^2 . h$$

$$V = \frac{1}{3}\ \pi . r . (r . h) = \frac{1}{3}\ \pi . r . (g . d)$$

Les expressions entre parenthèses étant égales car elles sont 2 formes du double de l'aire du triangle grisé.

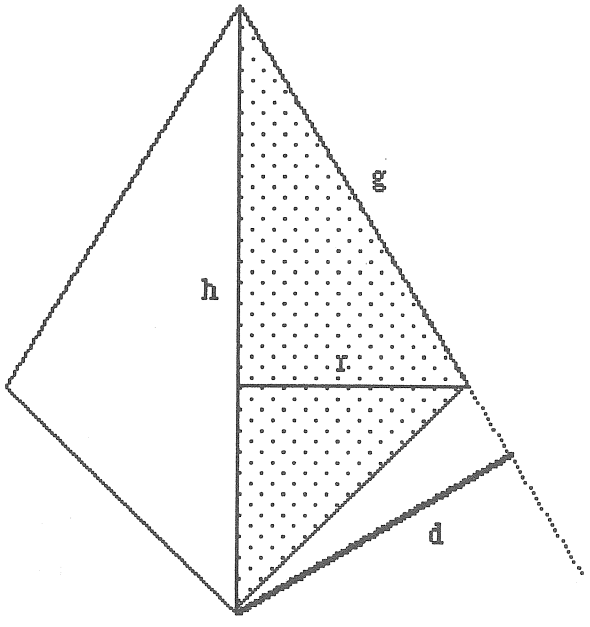
$$V = \frac{1}{3}\ (\pi . r . g) . d$$

La partie entre parenthèses est l'aire latérale du cône.

Le cône a même volume qu'un cône qui aurait pour base un disque de même aire que sa surface latérale, et comme hauteur, la distance de cette surface latérale au centre de sa base.

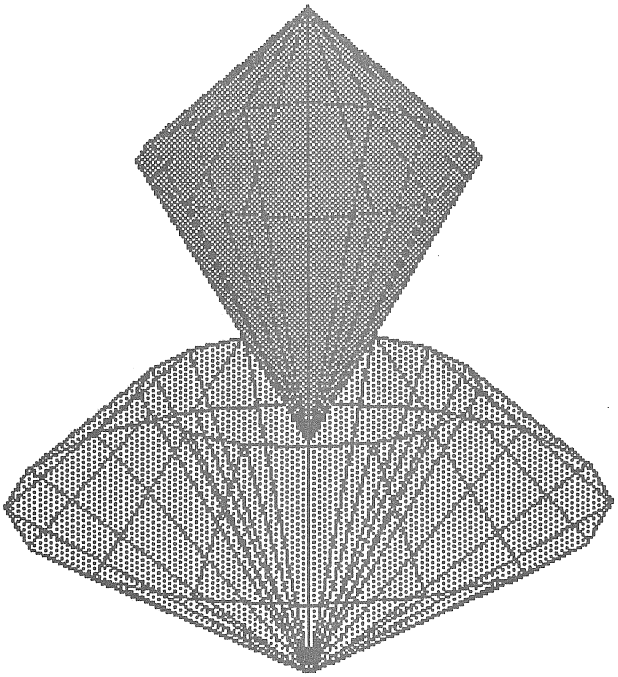
Il y dualité entre les 2 cônes avec échange de la base et de la surface latérale et, simultanément, du sommet et du centre de la base.

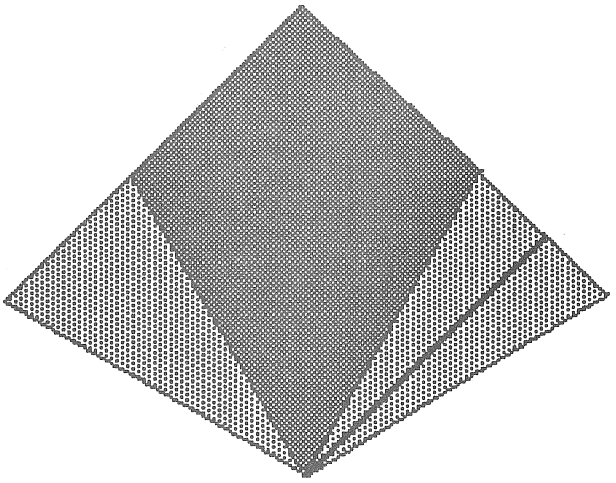
Si on analyse de même un bicône, on s'aperçoit que les formules ci-dessus fonctionnent de la même façon pour le bicône.



Le volume d'un bicône est égal à celui de chacun des 2 cônes dont la base est un disque de même aire que l'une des surfaces latérales, et dont la hauteur est la distance de cette surface au sommet opposé.

LE VOLUME DES "ENTONNOIRS"



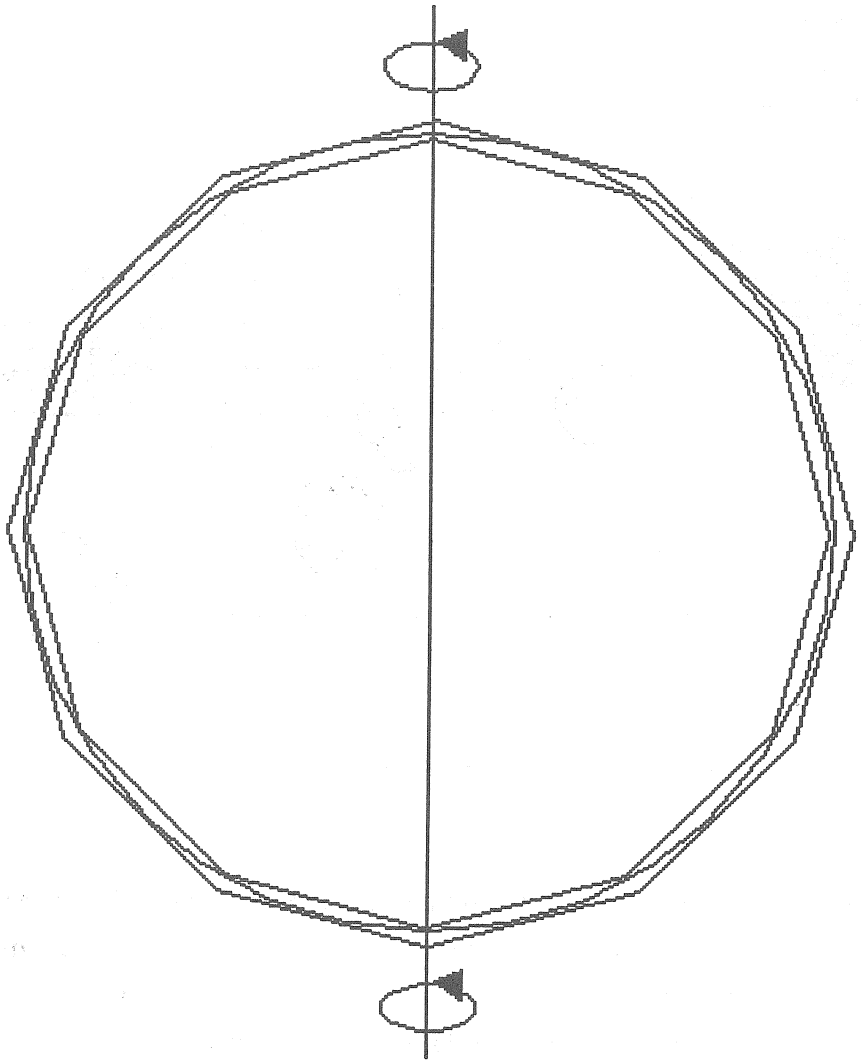


Un "entonnoir" est la différence de 2 bicônes, s'il est du type 2, ou la différence d'un cône et d'un bicône, s'il est du type 3.

Dans tous les cas, d'après les relations de la page précédente, son volume peut être calculé en remplaçant chaque bicône (ou cône) par un cône dont la base est équivalente à la surface latérale qui prolonge celle de l'"entonnoir". La hauteur commune des 2 cônes de remplacement est égale à la distance du centre à la surface latérale de l'"entonnoir".

Comme ces 2 cônes ont même hauteur, **le volume d'un "entonnoir" est égal à celui d'un cône dont la base aurait même aire que sa surface latérale et dont la hauteur serait la distance du centre à cette surface latérale.**

LE VOLUME DES FIGURES INSCRITE ET CIRCONSCRITE A LA SPHERE

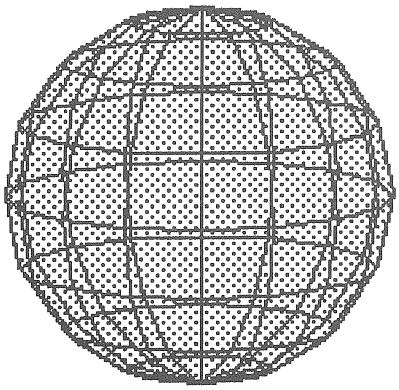


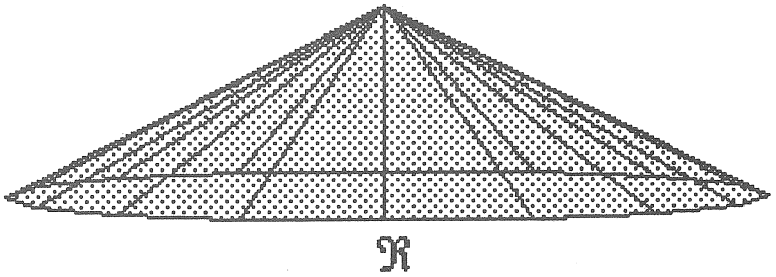
La hauteur du cône équivalent à un "entonnoir" est en fait la distance du côté du polygone générateur au centre du cercle. Comme le polygone est régulier, cette distance est la même pour tous les côtés (c'est ce que les Grecs appelaient **apothème**) ; et les cônes équivalents à tous les "entonnoirs" ont tous cette même distance comme hauteur.

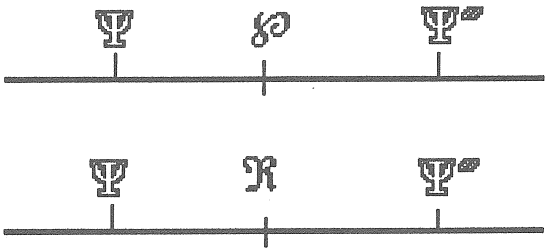
L'ensemble est équivalent à un seul cône dont la base est la somme des bases et dont la hauteur est la hauteur commune.

Le volume des figures inscrite (Ψ) et circonscrite (Ψ'') est le même que celui d'un cône qui aurait une base de même aire que la figure et une hauteur qui serait la distance commune des côtés du polygone générateur au centre.

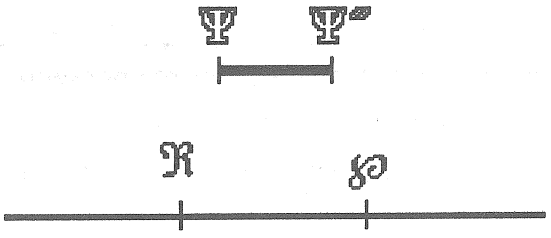
L'apothème de la figure inscrite est, bien sûr, inférieure au rayon de la boule, et celle de la figure circonscrite lui est égale d'après la page 99.





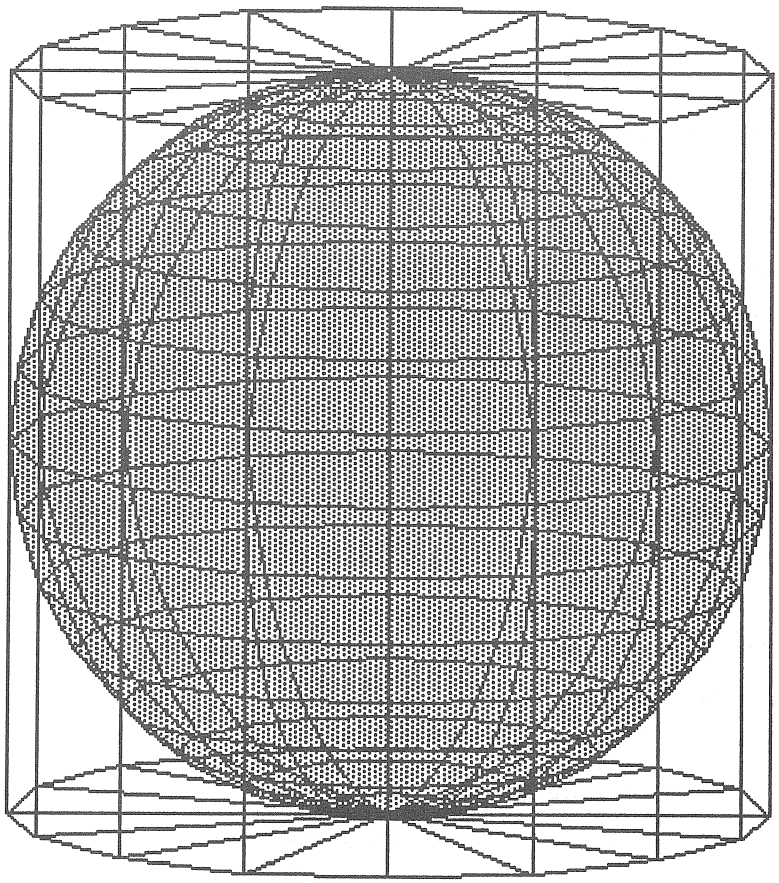


Il est clair que les volumes des figures inscrite et circonscrite encadrent celui de la boule ! Et il découle de la page précédente qu'ils encadrent aussi celui du cône qui a une base de même aire que la sphère comme base et le rayon comme hauteur. C'est-à-dire... qui a le diamètre de la boule comme rayon de base et le rayon de la boule comme hauteur.



La boule et le cône ont même volume

Car, sinon ils sont différents et il est possible de choisir le polygone générateur pour que les figures inscrite et circonscrite aient une différence moindre que la boule et le cône (voir la note pour la justification). Comment ces figures pourraient-elles encadrer simultanément les volumes de ces 2 solides en étant plus proches qu'eux ! Ce serait contradictoire.



La boule a même volume que le cône qui a son diamètre pour rayon de base et son rayon pour hauteur.

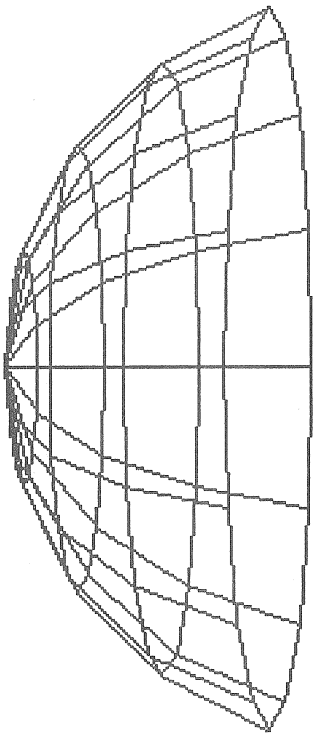
Il est un autre solide auquel Archimède a voulu se référer pour donner le volume de la boule : le cylindre dans lequel elle s'inscrit. Et comme les comparaisons de volume d'un cône et d'un cylindre, la conclusion est aisée... Mais en même temps, il compare l'aire de la sphère qu'il connait comme étant celle du disque qui a le diamètre de la sphère pour rayon, à la surface totale du cylindre (surface latérale et bases). Et il fait cette découverte étonnante par sa simplicité, qui peut constituer la seule chose à retenir de la sphère :

La sphère a une aire qui est les 2/3 de celle du cylindre circonscrit, en même temps que la boule a un volume qui est aussi les 2/3 du même cylindre.

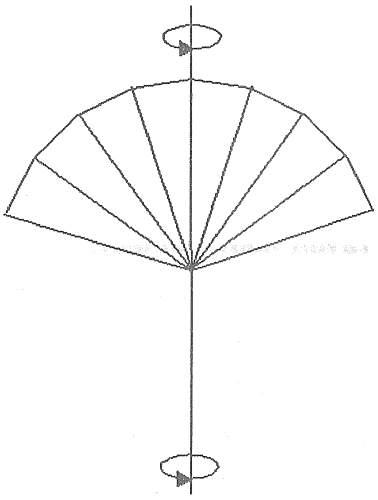
Il y a des coïncidences curieuses !

EXERCICES

1) Utiliser les postulats (pages 82-83) pour montrer que :
   - si un polygone est inscrit dans un cercle, sa longueur est inférieure à celle du cercle
   - si un polygone est circonscrit à un cercle, sa longueur est supérieure à celle du cercle
   - si un cylindre est circonscrit à une sphère, son aire est supérieure à celle de la sphère
   - si une sphère est inscrite dans un cube, son aire est inférieure à celle du cube (utiliser le résultat précédent)



2) Montrer que le cinquième postulat (page 84) est équivalent au suivant, dont les hypothèses sont les mêmes et la conclusion : il existe un partage équitable du troisième tel qu'une de ses parties soit inférieure à la différence des 2 premiers. (Pour concevoir une grandeur infiniment petite, Archimède recourt à la différence de 2 grandeurs infiniment proches)
3) Un cône étant donné, construire aux instruments un disque de même aire que son aire latérale.
   Un tronc de cône étant donné, construire aux instruments un disque de même aire que son aire latérale.
4) Montrer qu'on peut inscrire, de la même façon que pour la sphère, (comme en page 85), une figure formée de troncs de cône dans une calotte sphérique ; et que la démarche d'Archimède permet (et lui a permis) d'en calculer l'aire.
   En déduire, par passage à la limite, que l'aire d'une calotte sphérique est égale à celle d'un disque dont le rayon est la distance du sommet de la calotte à sa base.



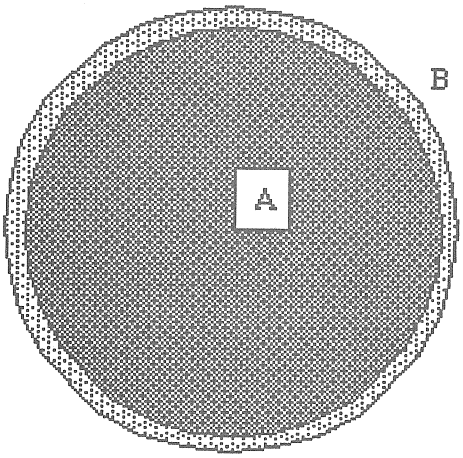
5) Utiliser le résultat de l'exercice 4, pour trouver où couper une sphère pour qu'une calotte ait une aire double de l'autre.
6) L'intersection d'une boule, et d'un cône de révolution dont le sommet est son centre, s'appelle secteur sphérique.
   Montrer que le rapport pressenti page 101, et établi page 108, entre le volume de la boule et l'aire de la sphère, est identique au rapport entre le volume d'un secteur sphérique et l'aire interceptée sur la sphère.
   En déduire le volume d'un secteur sphérique et celui d'une calotte sphérique.

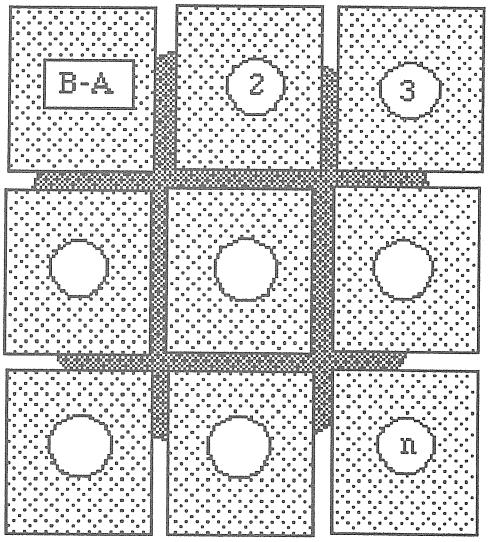
NOTE

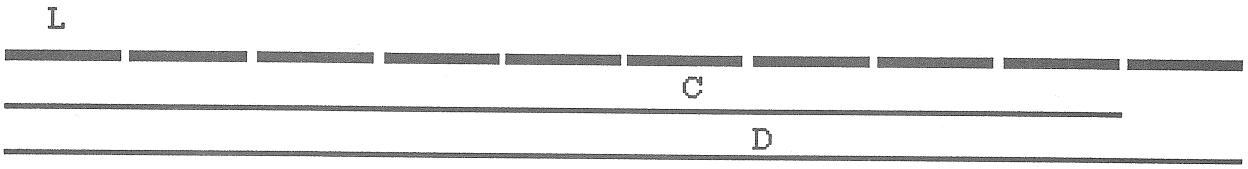
PREMIERE CONSTRUCTION

Deux surfaces inégales A et B étant données, construire deux segments C et D **plus proches l'un de l'autre** que ne le sont A et B ; ce qui signifie :

$$1 < \frac{D}{C} < \frac{B}{A}$$







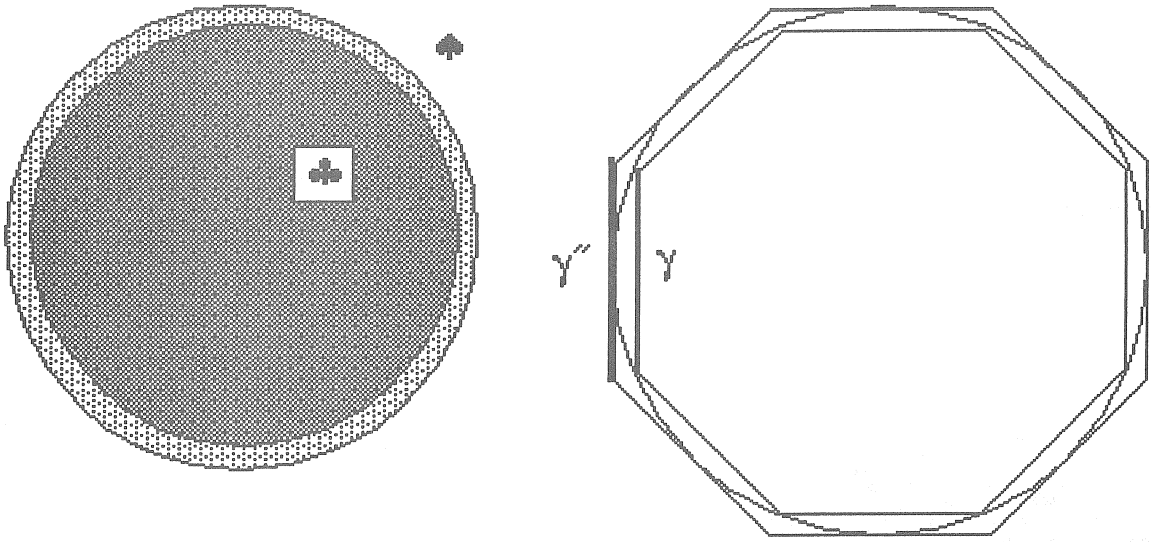
Le nombre d'exemplaires de B-A nécéssaires pour recouvrir A, d'après le cinquième postulat, est appelé n ; L est une longueur choisie ; C = n . L ; D = C + L

$$\frac{L}{C} = \frac{B\text{-}A}{n\,.\,(B\text{-}A)} < \frac{B\text{-}A}{A}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{L+C}{C} < \frac{(B\text{-}A)+A}{A} = \frac{B}{A}$$

$$\frac{D}{C} < \frac{B}{A}$$

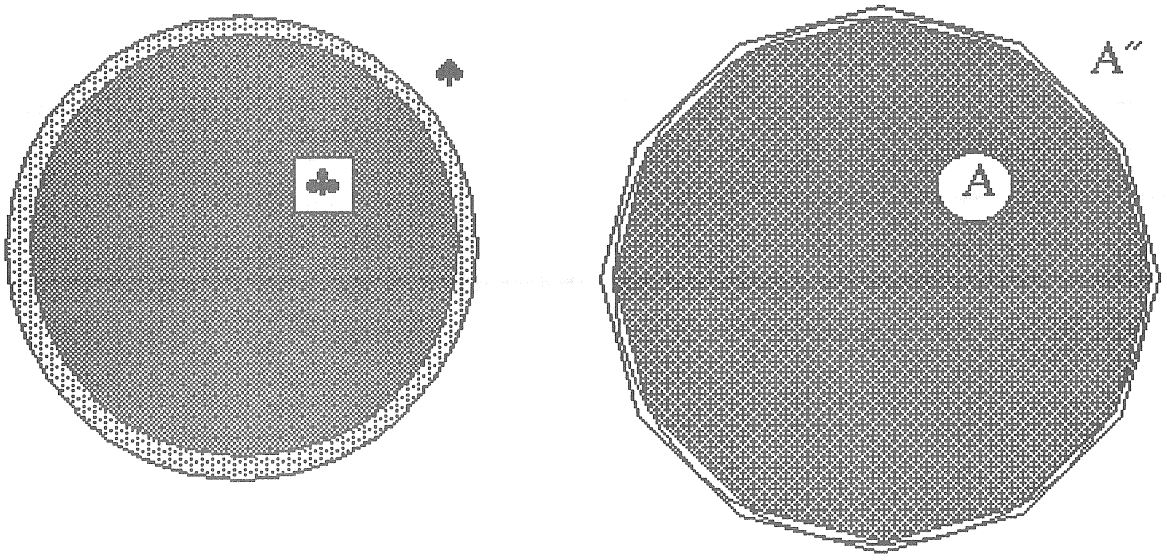
DEUXIEME CONSTRUCTION



$$1 < \frac{\gamma''}{\gamma} < \frac{\spadesuit}{\clubsuit}$$

Construire, sur un cercle donné, 2 polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit, de côtés plus proches l'un de l'autre que 2 aires données.

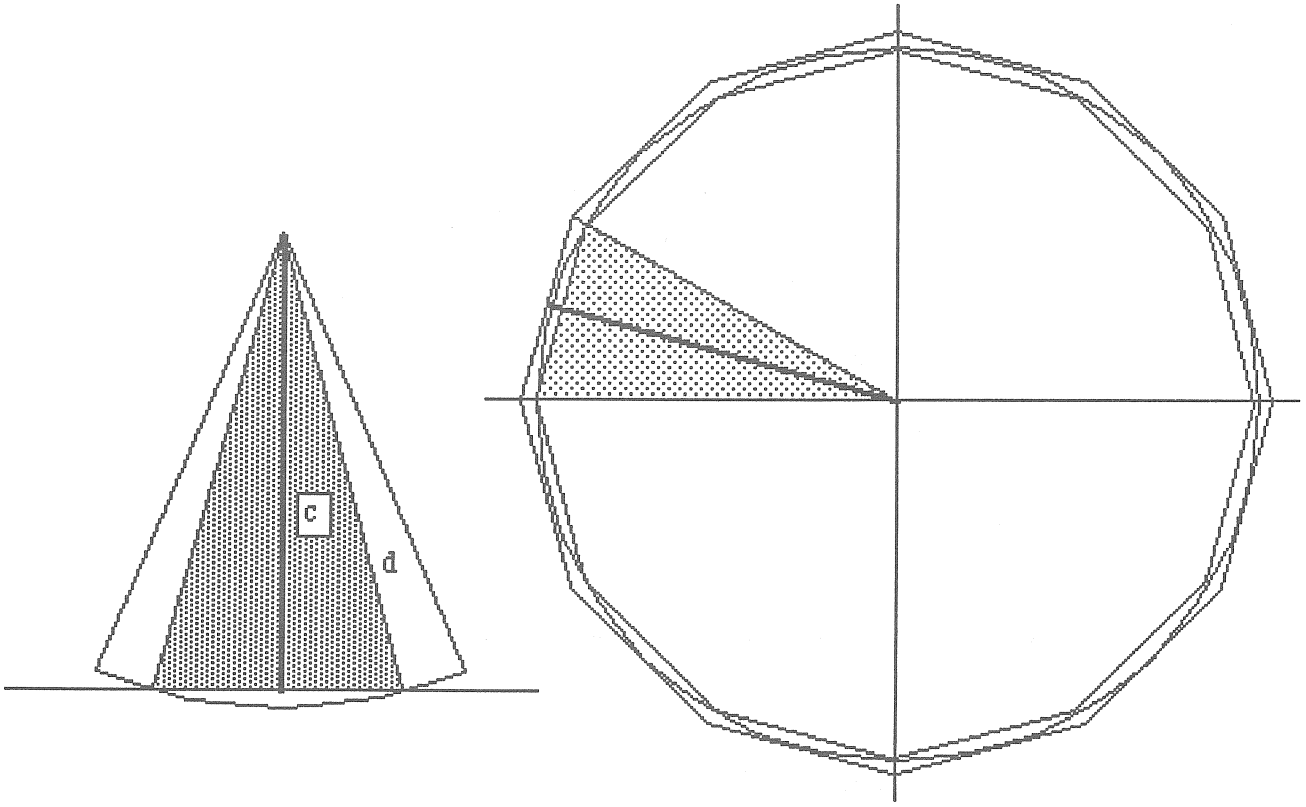
TROISIEME CONSTRUCTION



$$1 < \frac{A''}{A} < \frac{\spadesuit}{\clubsuit}$$

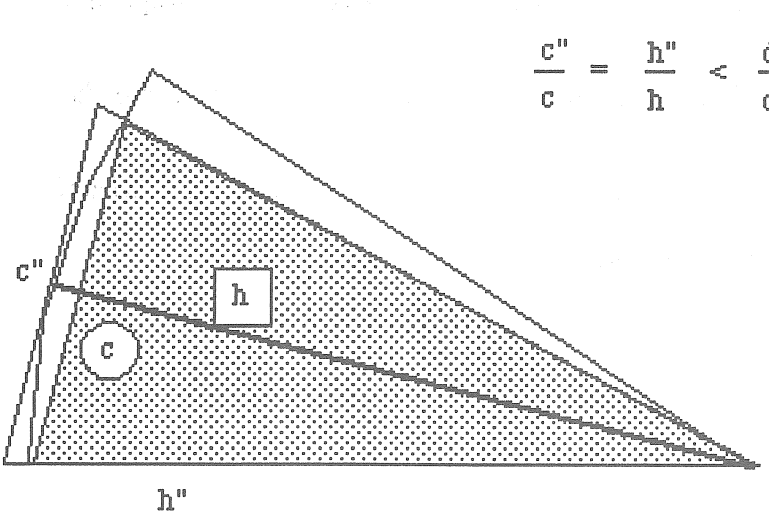
Construire, sur un cercle donné, 2 polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit, d'aires plus proches l'une de l'autre que 2 aires données.

SOLUTION DE LA DEUXIEME CONSTRUCTION



c et d sont les 2 longueurs plus proches l'une de l'autre que ♣ et ♠, construites grâce à la première construction. Un triangle isocèle de hauteur c, de côtés inclinés d, est construit ; et l'angle droit d'un quart du cercle est partagé jusqu'à ce que l'angle au centre soit inférieur à l'angle au sommet du triangle.

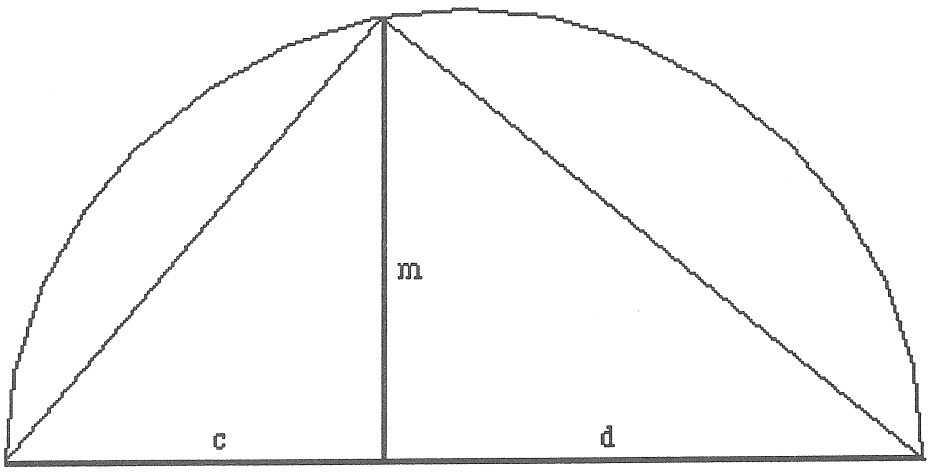
Les polygones réguliers construits sur cet angle conviennent comme le montre l'agrandissement suivant :



$$\frac{c''}{c} = \frac{h''}{h} < \frac{d}{c} < \frac{\spadesuit}{\clubsuit}$$

(La hauteur h" du triangle circonscrit est aussi le rayon du cercle, donc le côté du triangle inscrit; et comme l'angle est plus petit que ci-dessus, h et h" sont plus proches l'un de l'autre que c et d)

SOLUTION DE LA TROISIEME CONSTRUCTION



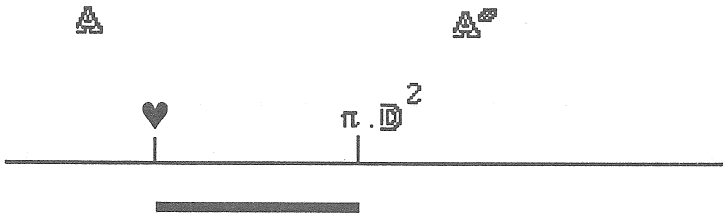
$$\frac{d}{m} = \frac{m}{c}$$

$$\frac{d}{m} \times \frac{d}{m} = \frac{d}{m} \times \frac{m}{c} = \frac{d}{c} < \frac{\spadesuit}{\clubsuit}$$

c et d étant construits d'après la première construction, la moyenne géométrique m est construite grâce à un demi-cercle de diamètre (c+d).

On construit 2 polygones de côtés plus proches l'un de l'autre que m et d, d'après la deuxième construction.

Le rapport des aires des 2 polygones étant le carré de celui des côtés,il est inférieur à $\frac{d}{c}$; et elles sont plus proches l'une de l'autre que ♣ et ♠.



Si ♥ et $\pi . \mathbb{D}^2$ étaient différents, ils pourraient être les ♣ et ♠ des constructions , et on saurait construire 2 polygones d'aires plus proches l'une de l'autre que ♥ et $\pi . \mathbb{D}^2$.

(Si ♥ $< \pi . \mathbb{D}^2$, alors ♥ = ♣ et $\pi . \mathbb{D}^2$ = ♠ , sinon ♥ = ♠ et $\pi . \mathbb{D}^2$ = ♣)

Les figures inscrites et circonscrites ont des aires dont le rapport est le carré de celui des côtés des polygones générateurs. Elles sont donc dans le même rapport que les aires des polygones.

$$1 < \frac{\mathbb{A}^{\prime}}{\mathbb{A}} < \frac{♠}{♣} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathbb{A}^{\prime}-\mathbb{A}}{\mathbb{A}} < \frac{♠-♣}{♣}$$

mais comme $\mathbb{A} < ♣$

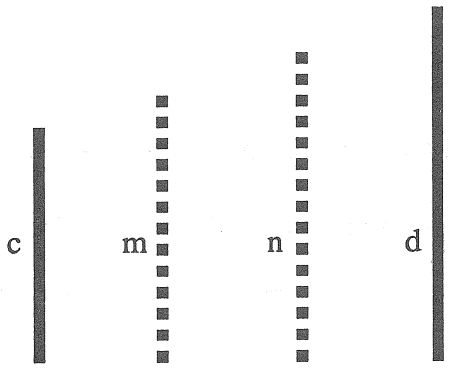
$$\mathbb{A}^{\prime}-\mathbb{A} < ♠-♣$$

Ce qui signifie qu'il serait possible de construire une figure circonscrite et une figure inscrite dont la différence est inférieure à celle de ♥ et $\pi . \mathbb{D}^2$, bien qu'elles les encadrent tous deux.

Ce qui est contradictoire !



Si la boule et le cône de la page 108 étaient différents (par exemple $\mathfrak{R} < \mathfrak{P}$), la première construction nous permettrait de construire 2 longueurs c et d plus proches l'une de l'autre que $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{P}$.



m et n sont 2 intermédiaires en progression arithmétique entre c et d.

$$\frac{m}{c} > \frac{n}{m} > \frac{d}{n}$$

car, en ajoutant le même terme au numérateur et au dénominateur d'un rapport, on obtient un nouveau rapport plus proche de 1.

On peut construire des polygones réguliers semblables dont les côtés sont plus proches l'un de l'autre que n et d, d'après la deuxième construction. Le volume des figures engendrées par rotation étant dans un rapport cube de celui des côtés,

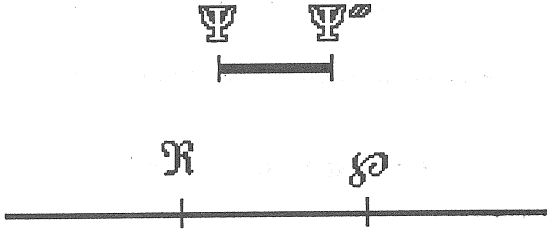
$$1 < \frac{\Psi'''}{\Psi} < \frac{d^3}{n^3} < \frac{d}{n} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{c} = \frac{d}{c} < \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{R}}$$

$$\frac{\Psi'''}{\Psi} < \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{R}} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\Psi''' - \Psi}{\Psi} < \frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}$$

et comme $\Psi < \mathfrak{R}$

$$\Psi''' - \Psi < \mathfrak{P} - \mathfrak{R}$$

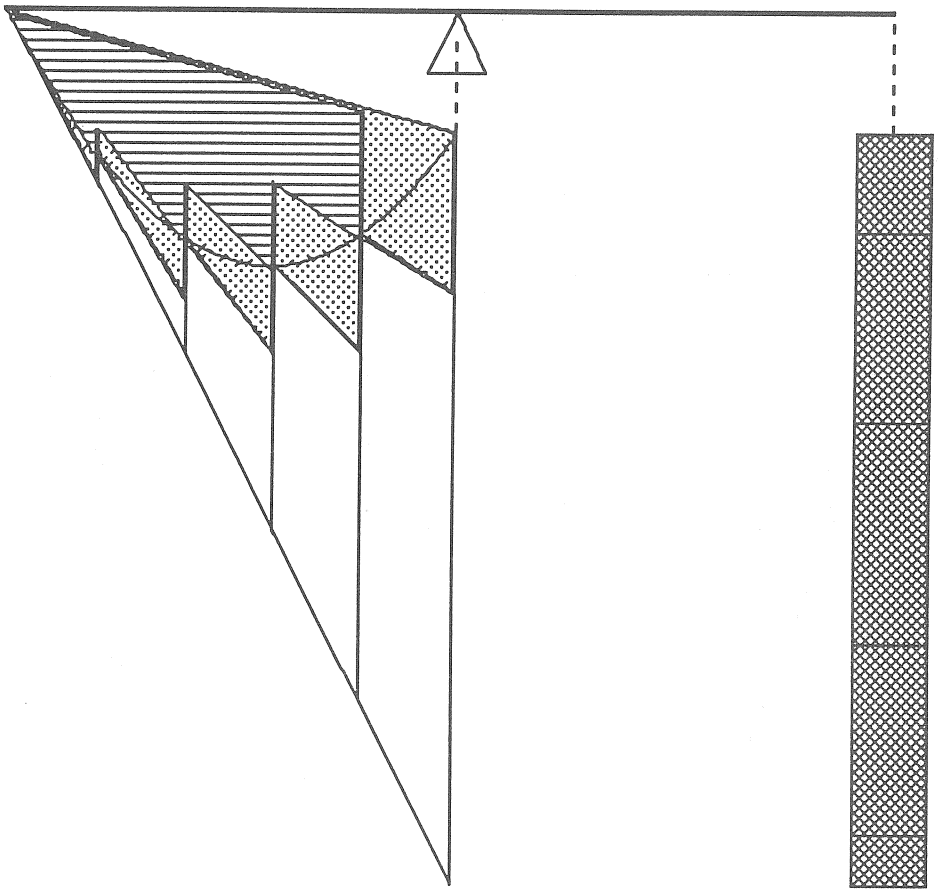
Ce qui serait une fois de plus contradictoire !



Chapitre 5

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

(méthode mécanique)

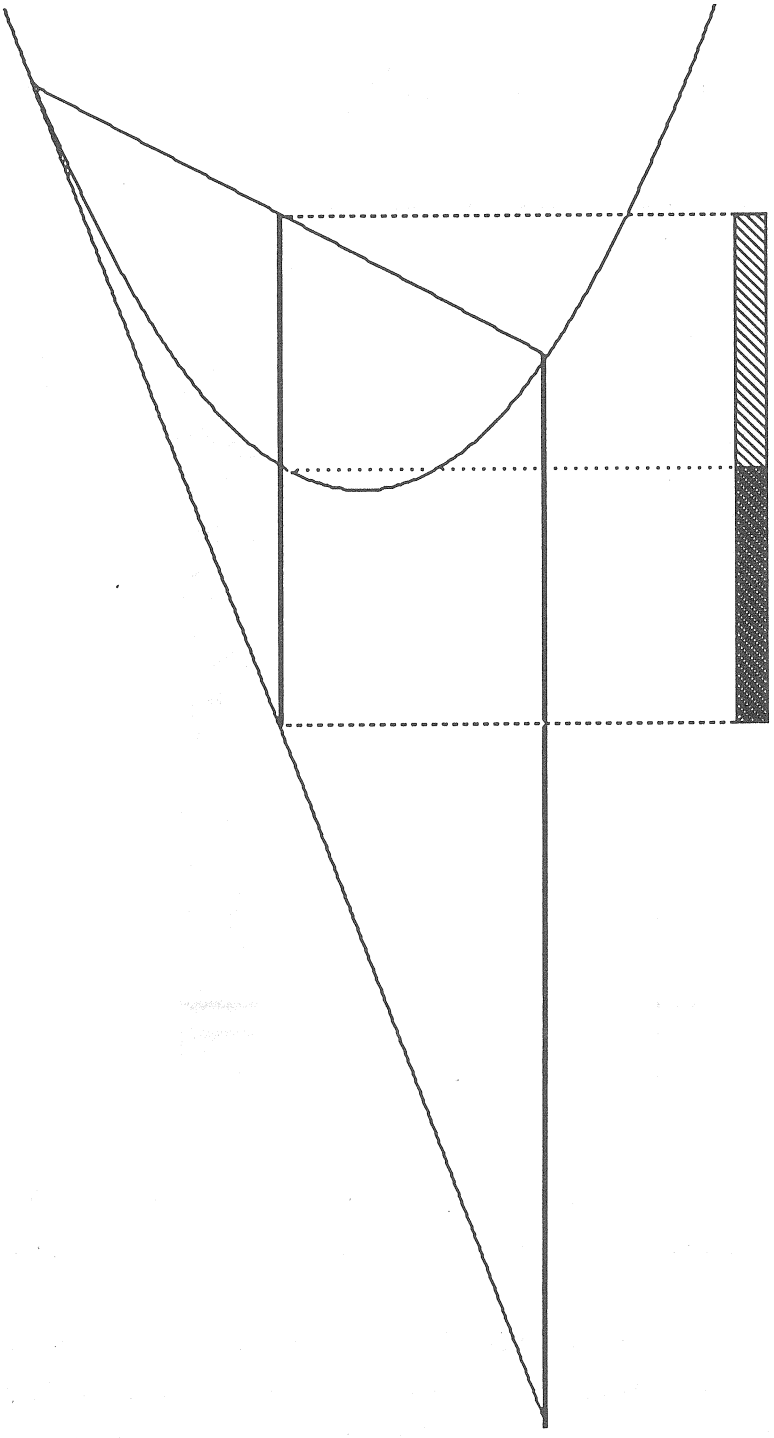


Ce dernier chapitre reprend le même problème que le premier : la quadrature d'un segment de parabole. Il est issu du même livre, et offre une alternative singulière, typique d'Archimède.

Ici, il va plus loin que dans "La méthode mécanique", et sur le cas du segment de parabole, il fait une étonnante démonstration basée sur les leviers, mais avec encadrement de la figure à n'importe quel degré de précision, et avec la même rigueur qu'il a employée pour les spirales ou la sphère.

RELATION FONDAMENTALE

TANGENTE EN UNE EXTREMITE ET DIAMETRE

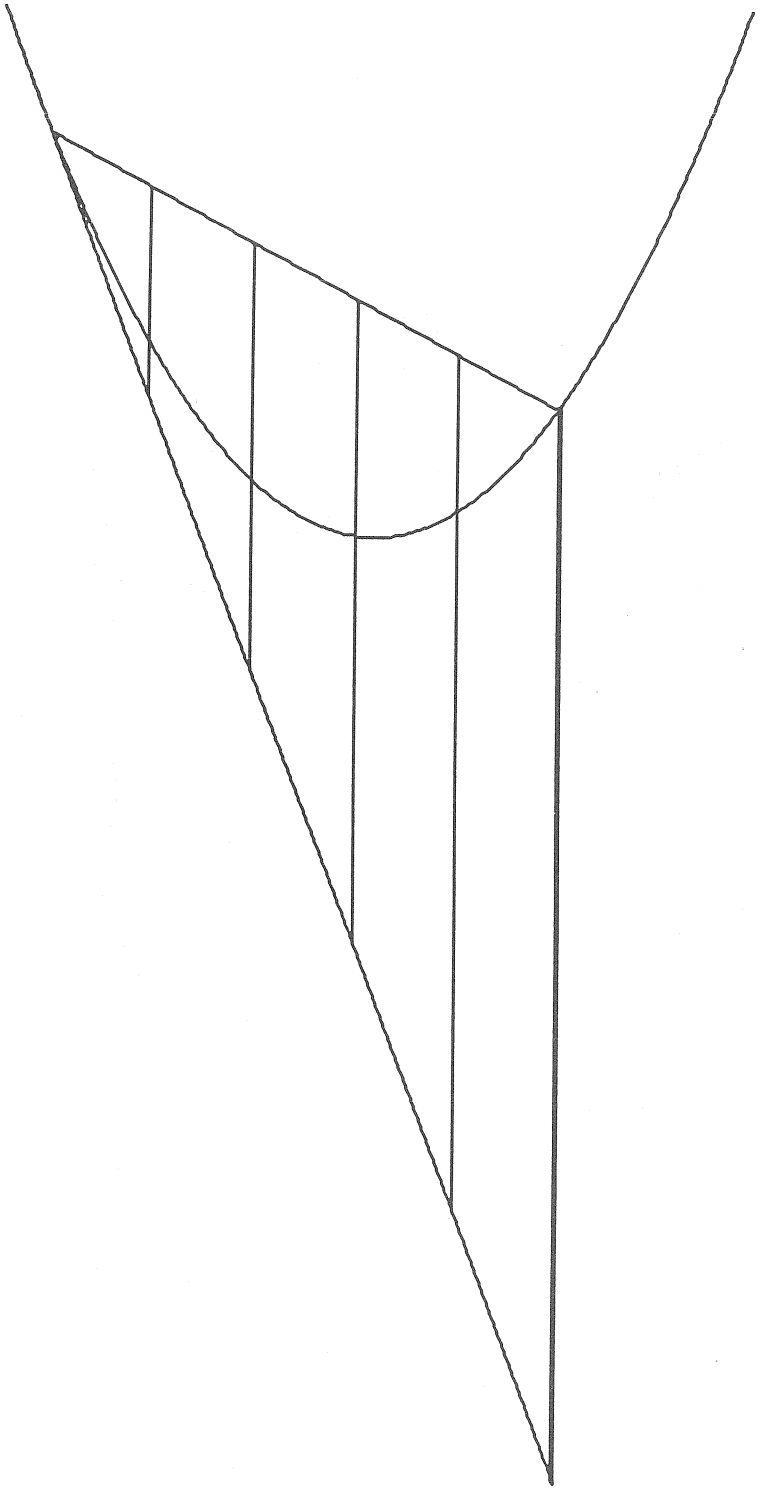


Une sécante à la parabole est donnée. On trace la tangente en une extrémité de cette sécante, et la parallèle à l'axe au milieu de la sécante (**diamètre du segment de parabole**).

Le segment de parallèle à l'axe compris entre la sécante et la tangente est partagé en son milieu par la parabole.

(Propriété non démontrée).

RELATION FONDAMENTALE

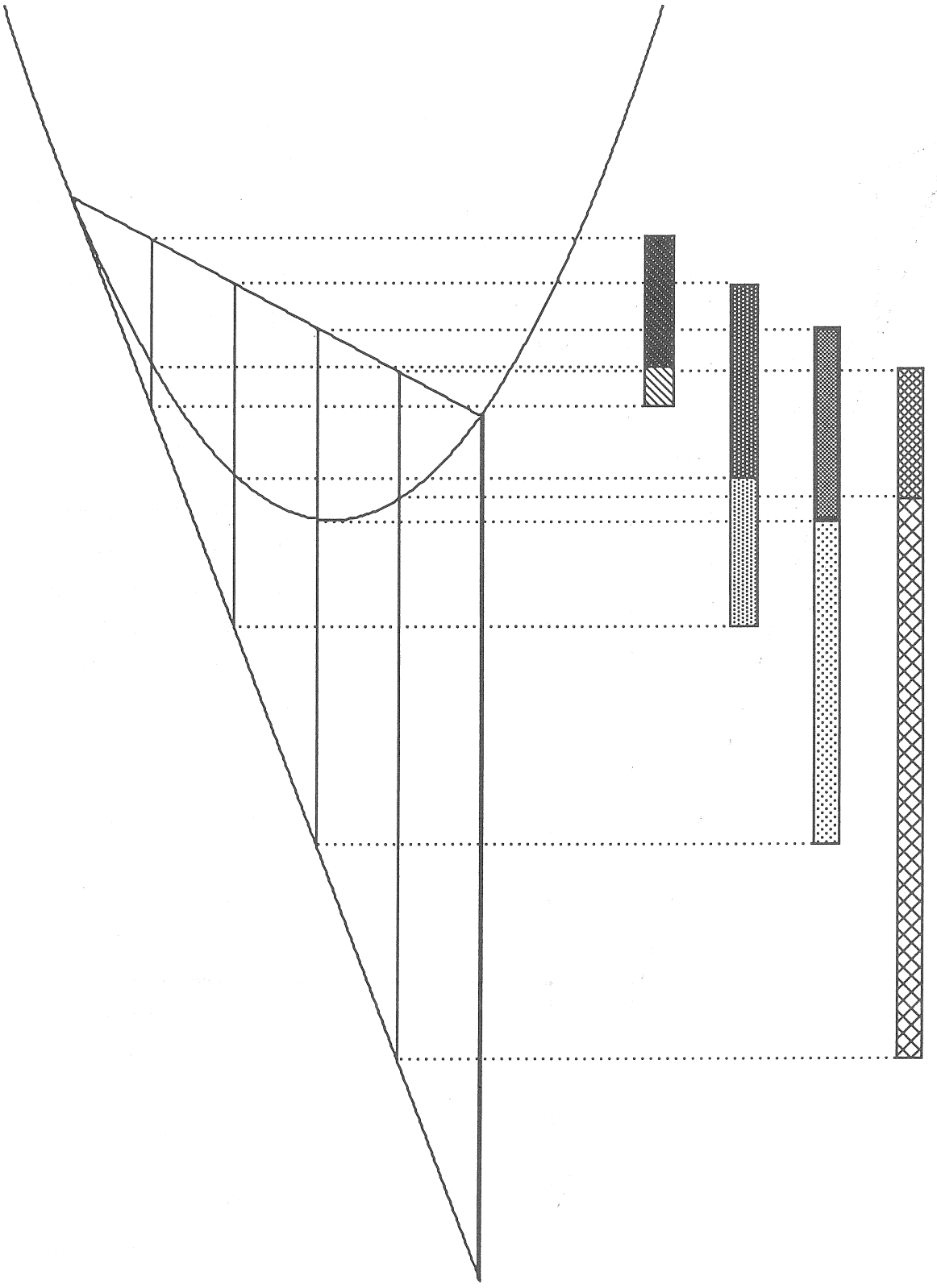


De la même manière, si des parallèles à l'axe, équidistantes, partagent la sécante en un nombre quelconque de parties égales, alors la parabole coupe chacun des segments parallèles compris entre sécante et tangente

et, comme le suggère le dessin de la page 120, **chaque segment parallèle est partagé par la parabole dans le même rapport que son pied partage la sécante.**

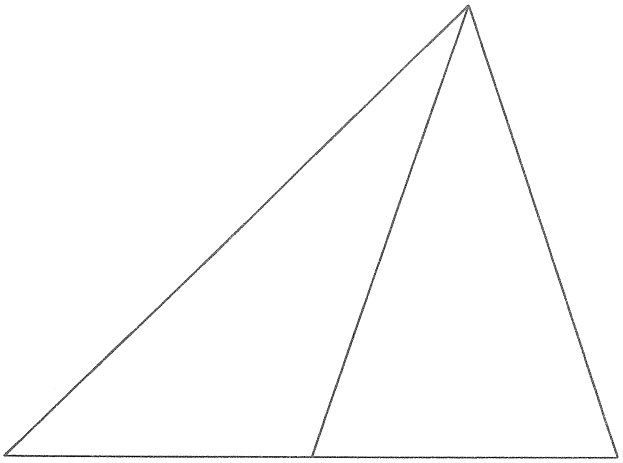
Cette relation étonnante et non classique est une découverte d'Archimède, et c'est la seule de cette partie qu'il prend la peine de démontrer.

La démonstration de cette relation est un peu technique ; j'admets ce résultat (qui sera proposé en exercice) pour passer à la suite qui est entièrement construite sur cette relation.



LE CENTRE DE GRAVITE DES TRIANGLES

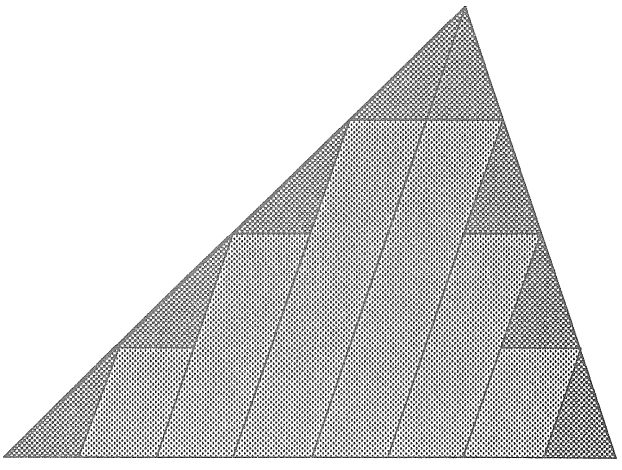
La notion de centre de gravité d'une figure a été introduite page 62, à la suite des postulats concernant le levier. Archimède sait en particulier qu'une figure à centre de symétrie comme un parallèlogramme a son centre comme centre de gravité.



La médiane partage l'aire du triangle en 2 parties égales. Elle peut avoir une relation avec l'équilibre du triangle.

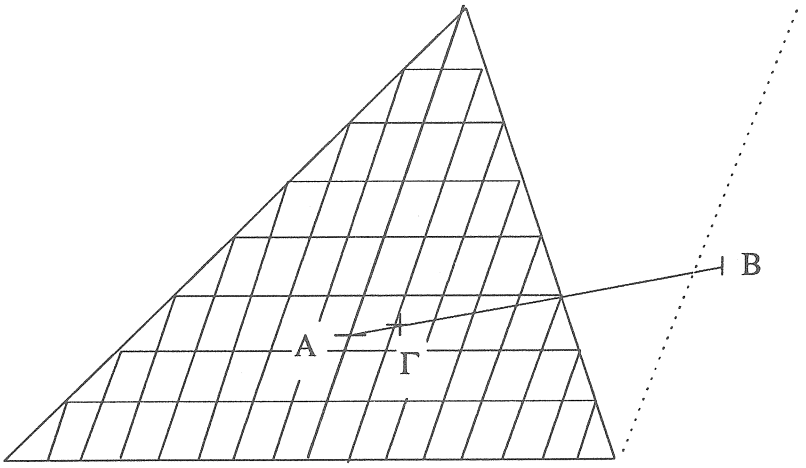
Archimède inscrit dans le triangle, une pyramide de parallèlogrammes, en partageant en n, chaque moitié de la base. Chaque parallèlogramme a son centre de gravité porté par la médiane, donc la pyramide complète aussi.

Le complément est formé de 2.n triangles, qui regroupés 2 par 2, forment n triangles semblables au triangle de départ.



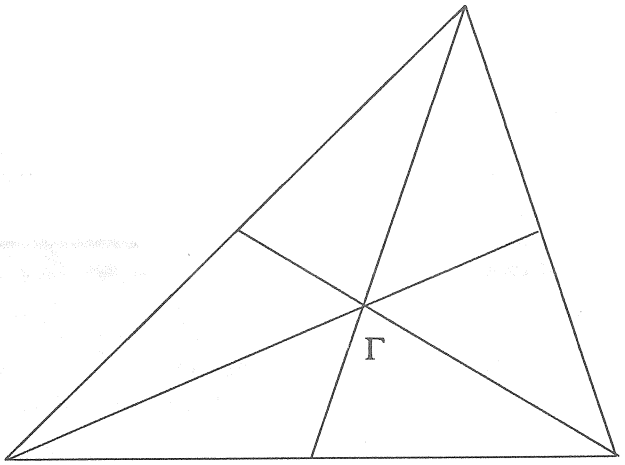
Chacun a une aire qui en est $\frac{1}{n^2}$, donc l'ensemble a une aire qui est $\frac{1}{n}$ de celle du triangle de départ.

Le centre de gravité du triangle appartient à la médiane.



Sinon, il est en dehors, et il est possible de construire une pyramide dans le triangle telle que la première parallèle à la médiane passe entre la médiane et le centre de gravité Γ du triangle.

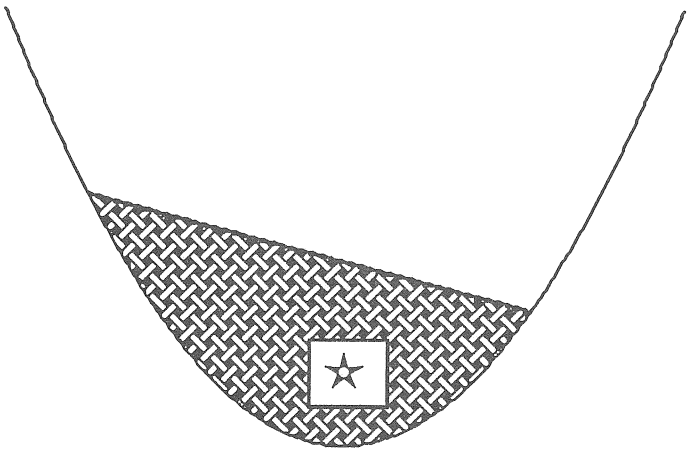
A est le centre de gravité de la pyramide, B, celui des triangles restants.D'après le théorème des leviers, puisque la pyramide représente les $\frac{n-1}{n}$,et les triangles restants les $\frac{1}{n}$ du triangle de départ, le centre de gravité de l'ensemble des triangles restants serait au-delà de la parallèle à la médiane passant par l'extrémité de la base, donc hors du triangle, ce qui est contradictoire.



Puisqu'il appartient à une médiane, il appartient aussi aux 2 autres, et ce ne peut être que **le point de concours des 3 médianes. Ce point est situé au tiers de chaque médiane à partir de la base**, car les 6 triangles découpés dans le triangle de départ ont la même aire (exercice 2).

LA METHODE MECANIQUE

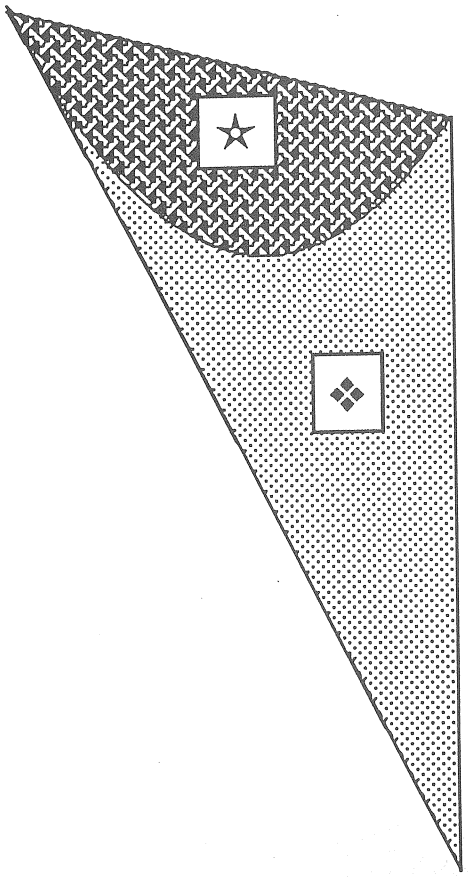
LE DEFI



Le but de ce chapitre est de déterminer exactement l'aire de la surface comprise entre une parabole et une sécante (qu'Archimède appelle **segment de parabole**).

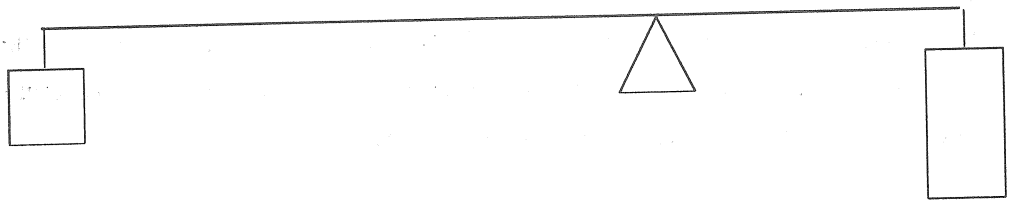
Les Grecs ont cherché à mesurer des surfaces non polygonales. La réussite la plus ancienne est celle d'Hippocrate avec ses lunules; et la défaite la plus cuisante restera la quadrature impossible du disque.

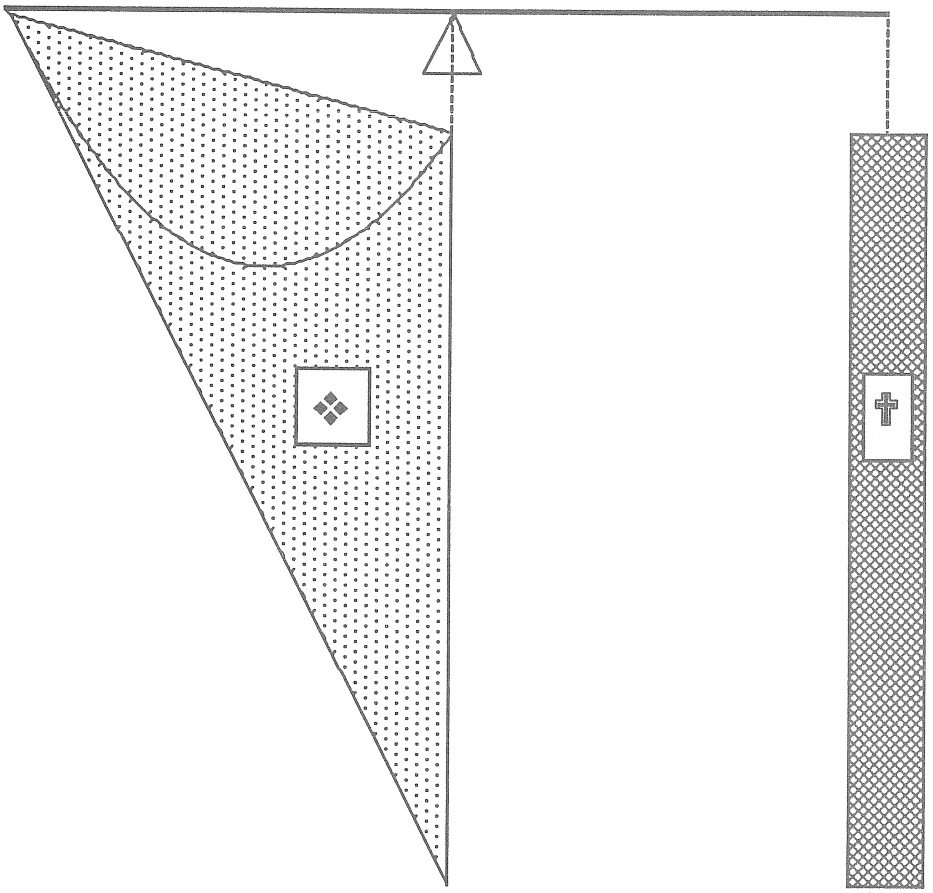
Archimède mesure un segment de parabole en exploitant son principe du levier et en suspendant des objets à une balance. Il est entendu que cette méthode est très originale et très particulière, et ne s'étend pas facilement à d'autres surfaces.



L'intuition pousse Archimède à comparer l'aire du segment de parabole au **triangle** bordé par la sécante, la tangente en une extrémité et la parallèle à l'axe en l'autre extrémité de la sécante (**triangle de référence**).

Le principe d'Archimède sur les bras de levier exprime que, lorsqu'on **suspend** 2 charges sur un fléau en équilibre, l'équilibre est réalisé lorsque le rapport des 2 poids est **inverse** du rapport des distances au point d'appui.

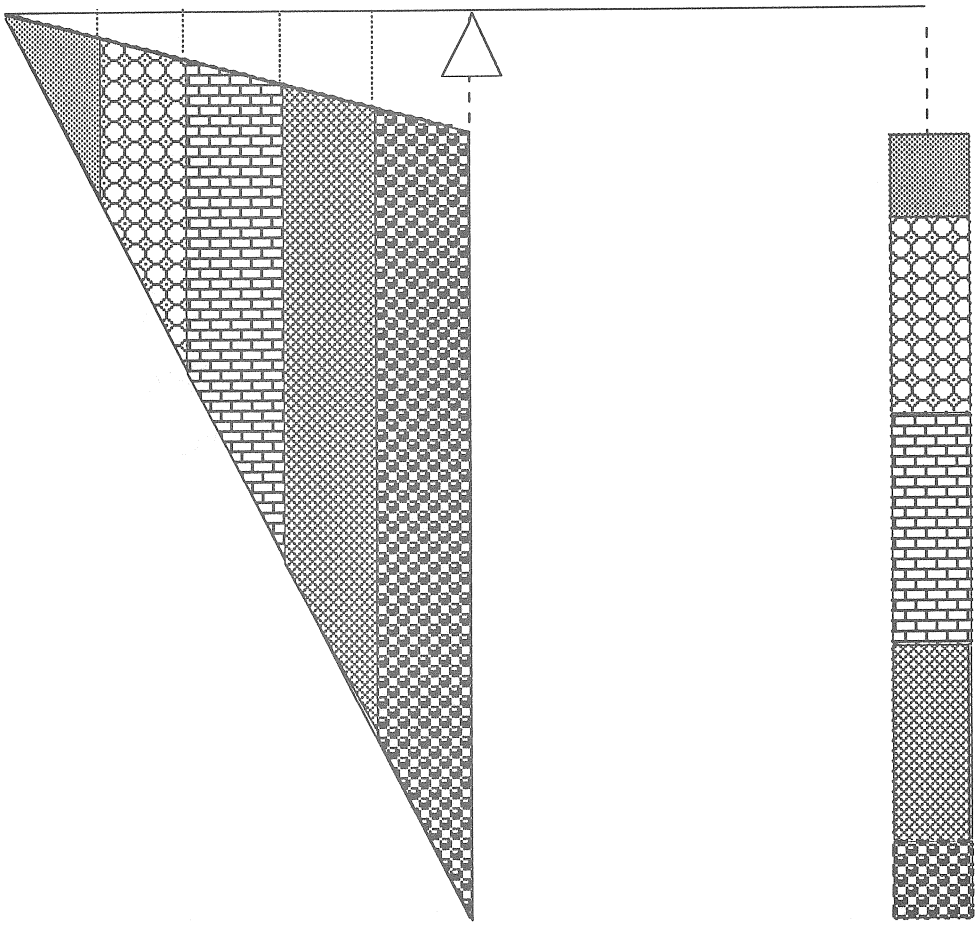




Le triangle de référence est supposé homogène et suspendu à une barre en équilibre (le point d'appui est au milieu de la barre), dans une position où l'axe de la parabole est vertical, où le point d'appui est à la verticale de l'extrémité de la sécante côté parallèle à l'axe, où l'autre extrémité de la sécante coïncide avec une extrémité de la barre, et où un contrepoids homogène et de même densité est suspendu à l'autre extrémité et équilibre le triangle.

D'après la position du centre de gravité du triangle (voir page 122), le contrepoids a un poids qui est le tiers de celui du triangle. Et par homogénéité, une aire qui est le tiers de l'aire du triangle. (Dans ce chapitre, les poids seront toujours traduits en aires, de même qu'ils l'étaient en volumes dans le chapitre 3).

DECOUPAGE DU TRIANGLE



Le triangle de référence est supposé découpé en un certain nombre de bandes de même largeur, soit n. Chaque bande peut être suspendue par 2 fils sans modifier sa position. Le contrepoids est - bien sûr - inchangé.

Chaque bande peut aussi être suspendue seule, et un contrepoids lui faire équilibre. Dans le dessin chaque contrepoids a la même trame que la bande qu'il équilibre.

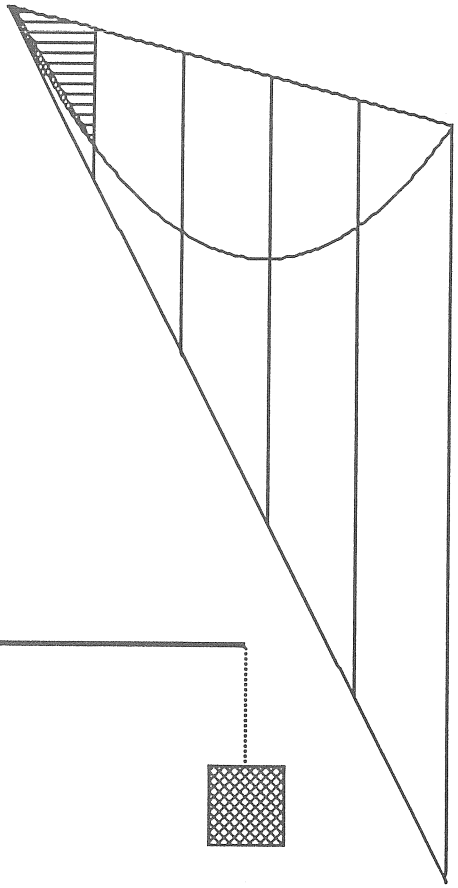
Si on remet toutes les parties du triangle ensemble, les n contrepoids reforment le contrepoids du triangle.

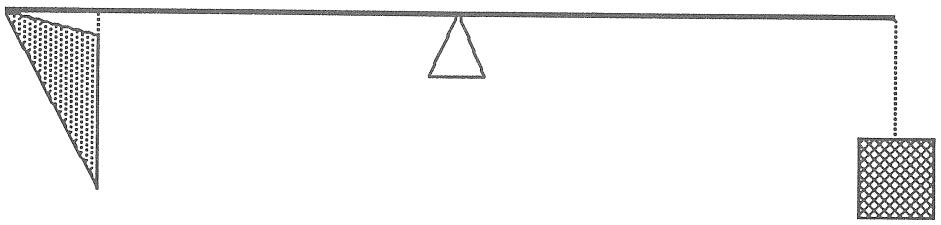
LA PREMIERE BANDE

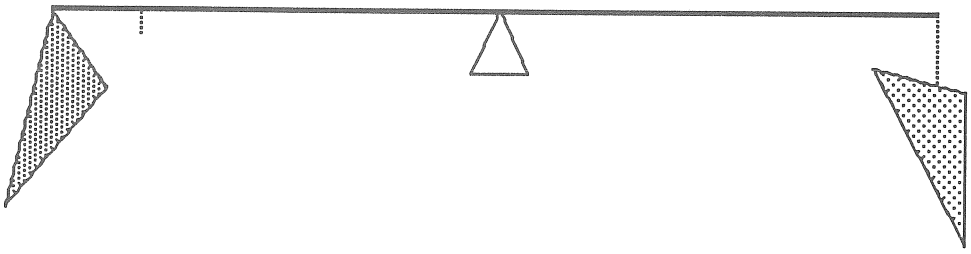
Pour la première bande - la seule qui soit triangulaire - en position normale, le contrepoids adapté fait équilibre.

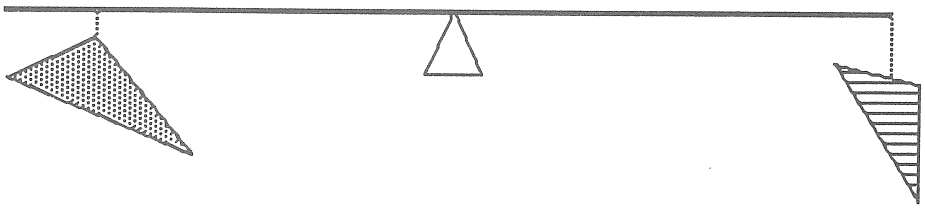
Si on détache le fil côté intérieur, il est suspendu à l'extrémité, et il faut suspendre un autre triangle superposable en contrepoids pour réaliser l'équilibre. Et si on détache le fil côté extérieur, il est suspendu à la distance $\frac{n-1}{n}$ et il faut un contrepoids qui ait une aire $\frac{n-1}{n}$ de la bande triangulaire.

C'est exactement le cas du triangle sous l'arc de parabole, d'après la relation fondamentale (page 119), puisqu'il a même hauteur, et une base qui est les $\frac{n-1}{n}$ de la base de la bande.







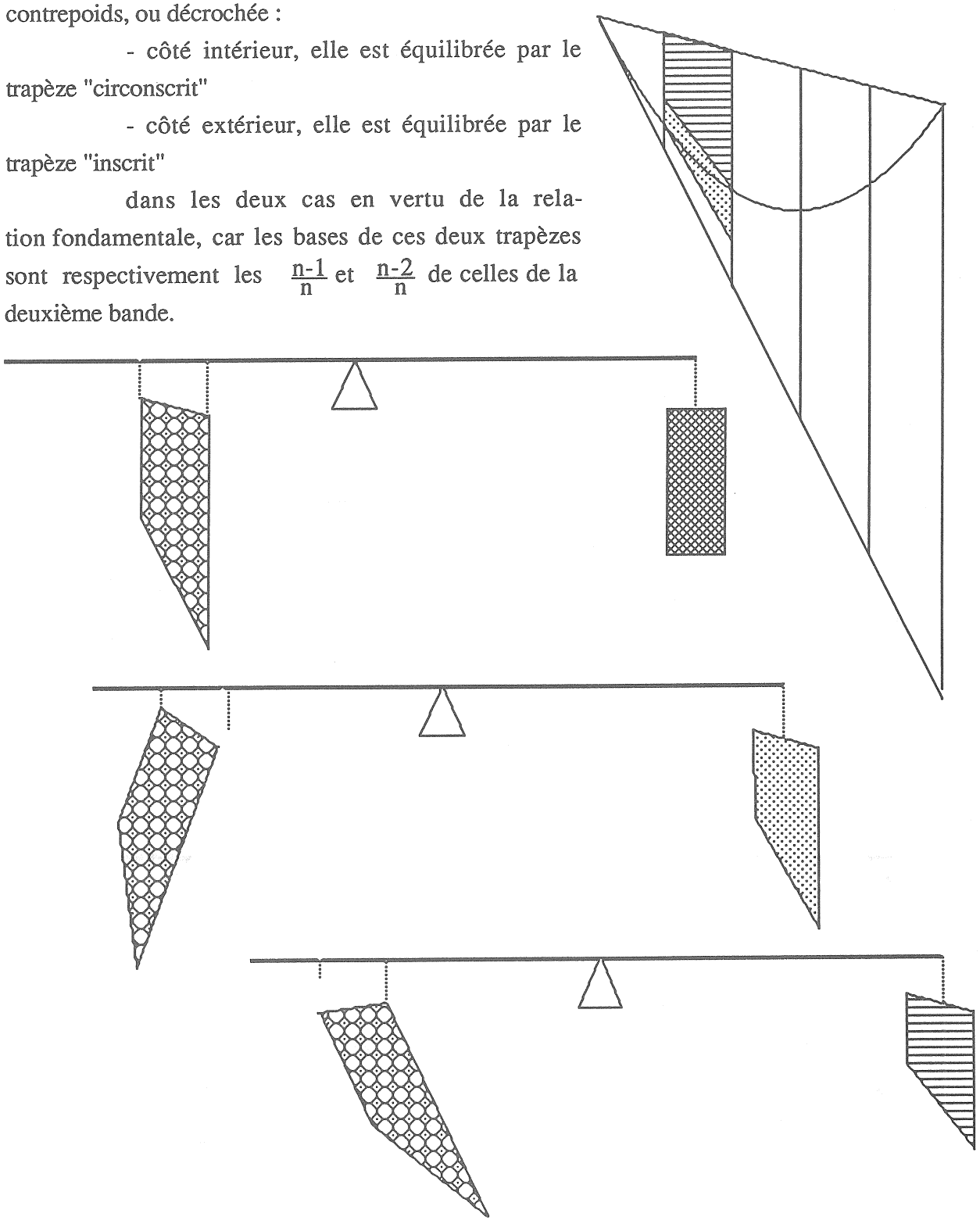


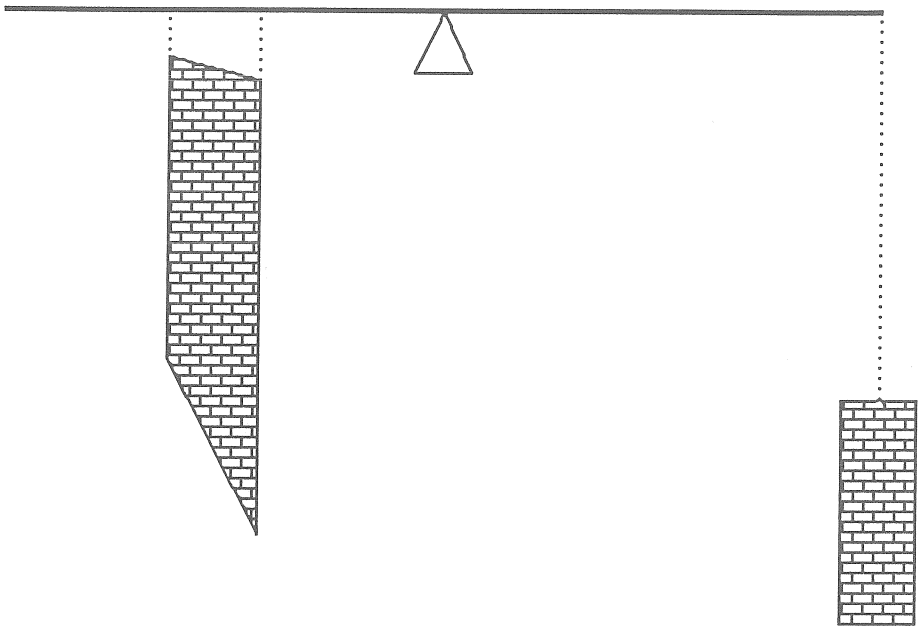
LA DEUXIEME BANDE

De la même manière, la deuxième bande peut être suspendue normalement et équilibrée par son contrepoids, ou décrochée :

- côté intérieur, elle est équilibrée par le trapèze "circonscrit"
- côté extérieur, elle est équilibrée par le trapèze "inscrit"

dans les deux cas en vertu de la relation fondamentale, car les bases de ces deux trapèzes sont respectivement les $\frac{n-1}{n}$ et $\frac{n-2}{n}$ de celles de la deuxième bande.

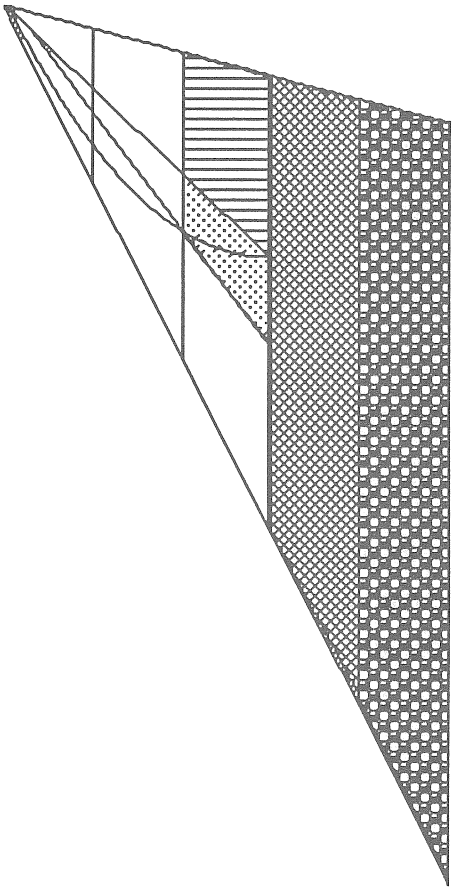




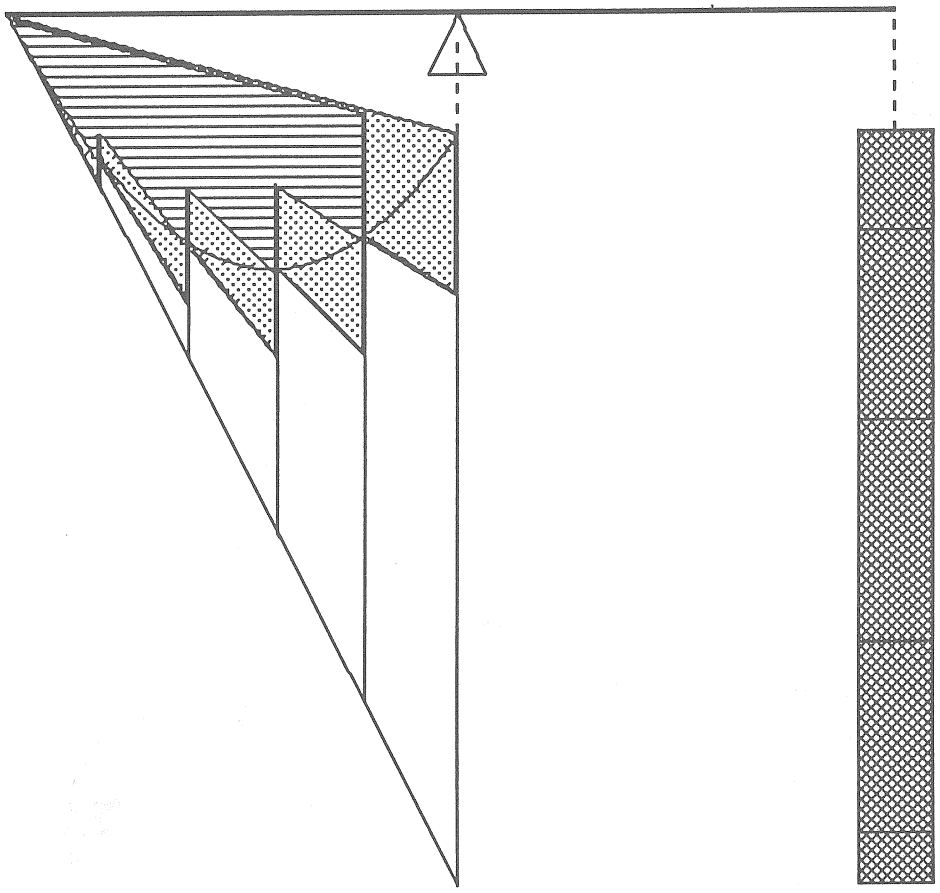
Et ainsi de suite pour chaque bande. Elle est successivement pendue normalement et équilibrée par son contrepoids, puis décrochée de chacun de ses deux fils de suspension.

C'est toujours le trapèze "inscrit" qui équilibre la bande pendue côté intérieur, et le trapèze "circonscrit" dans l'autre cas.

En position normale, le centre de gravité de la bande est entre les deux fils. Si bien que, par le principe du levier, le contrepoids de chaque bande a une aire comprise entre les aires des trapèzes "inscrit" et "circonscrit" de la bande (triangles pour la première bande).



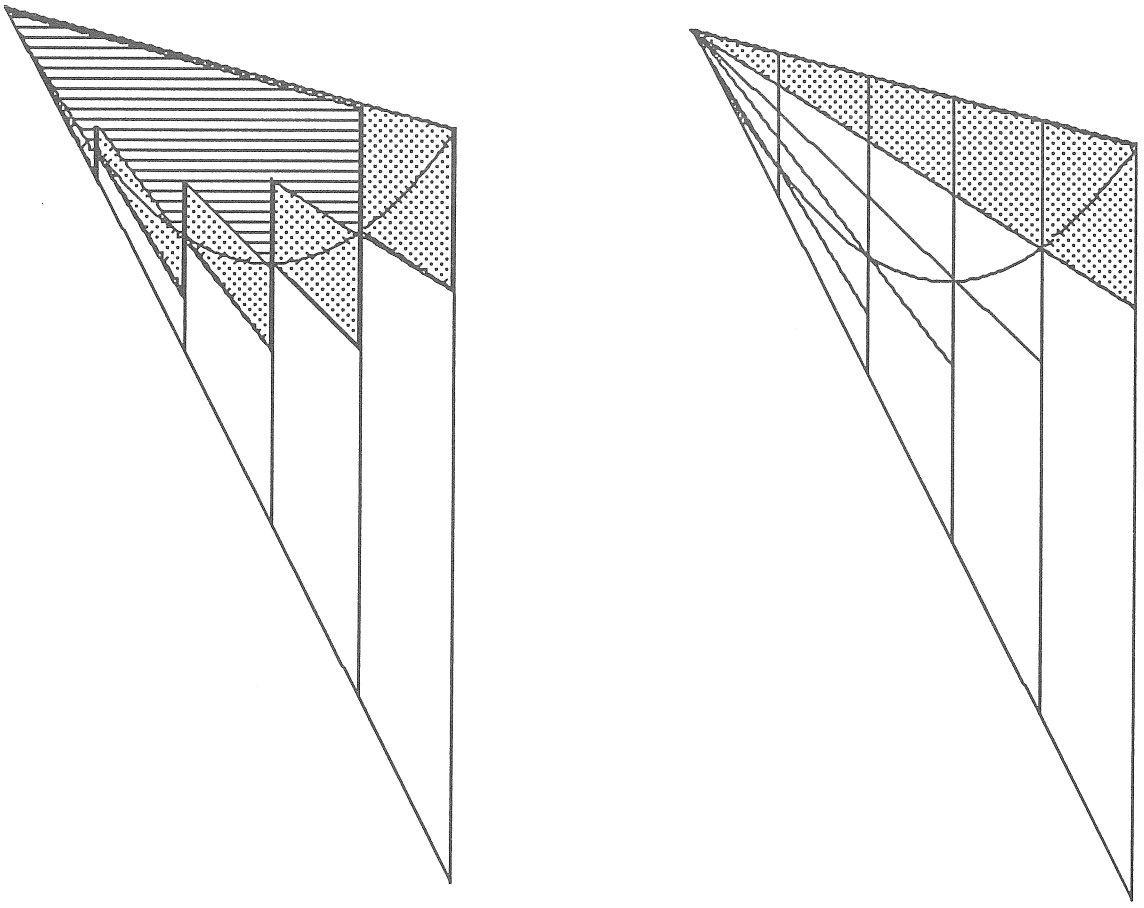
ENCADREMENT DU SEGMENT DE PARABOLE



En replaçant côte à côte les n bandes, on retrouve le contrepoids total dont chaque partie a une aire comprise entre les trapèzes "inscrit" et "circonscrit" correspondants.

Ces trapèzes mis ensemble, constituent 2 polygones dentelés, l'un inscrit et l'autre circonscrit au segment de parabole - qui reparait enfin ! L'aire du contrepoids est comprise entre les aires de ces 2 polygones dentelés.

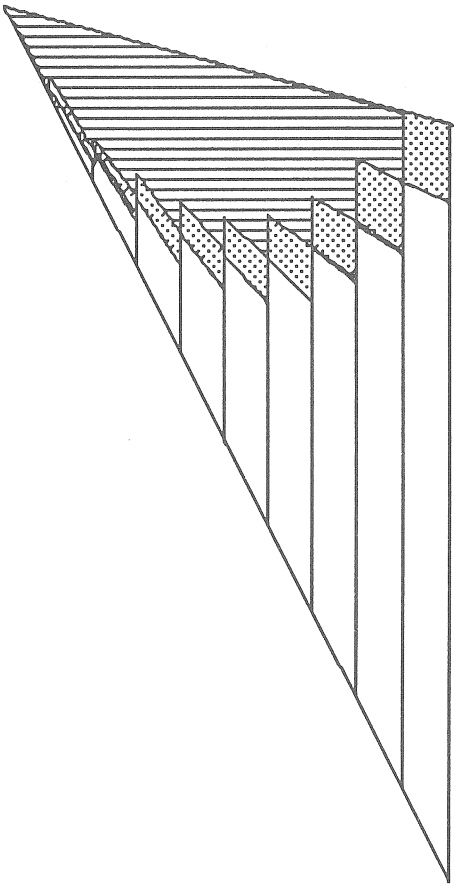
LA DIFFERENCE DES POLYGONES DENTELES

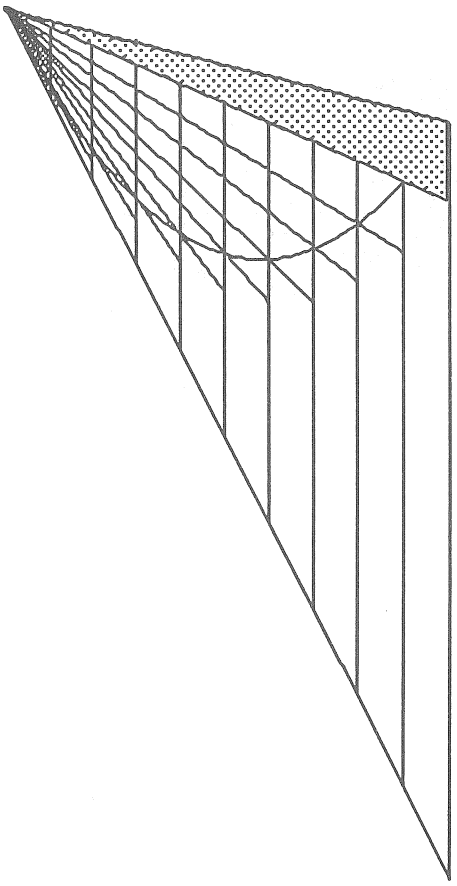


On voit sur le dessin la différence des aires des 2 polygones dentelés. Elle est formée d'un chapelet de trapèzes et d'un triangle.

En faisant apparaitre le triangle de hauteur $\frac{1}{n}$ dans le triangle de référence, la relation fondamentale permet à Archimède d'affirmer que chaque trapèze du chapelet-différence a la même aire que le trapèze intersection de la bande et du triangle de hauteur $\frac{1}{n}$.

Ce qui implique, bien sûr, que la différence entre les 2 polygones dentelés est exactement égale à l'aire du triangle de hauteur $\frac{1}{n}$, soit la $n^{ième}$ partie du triangle de référence.



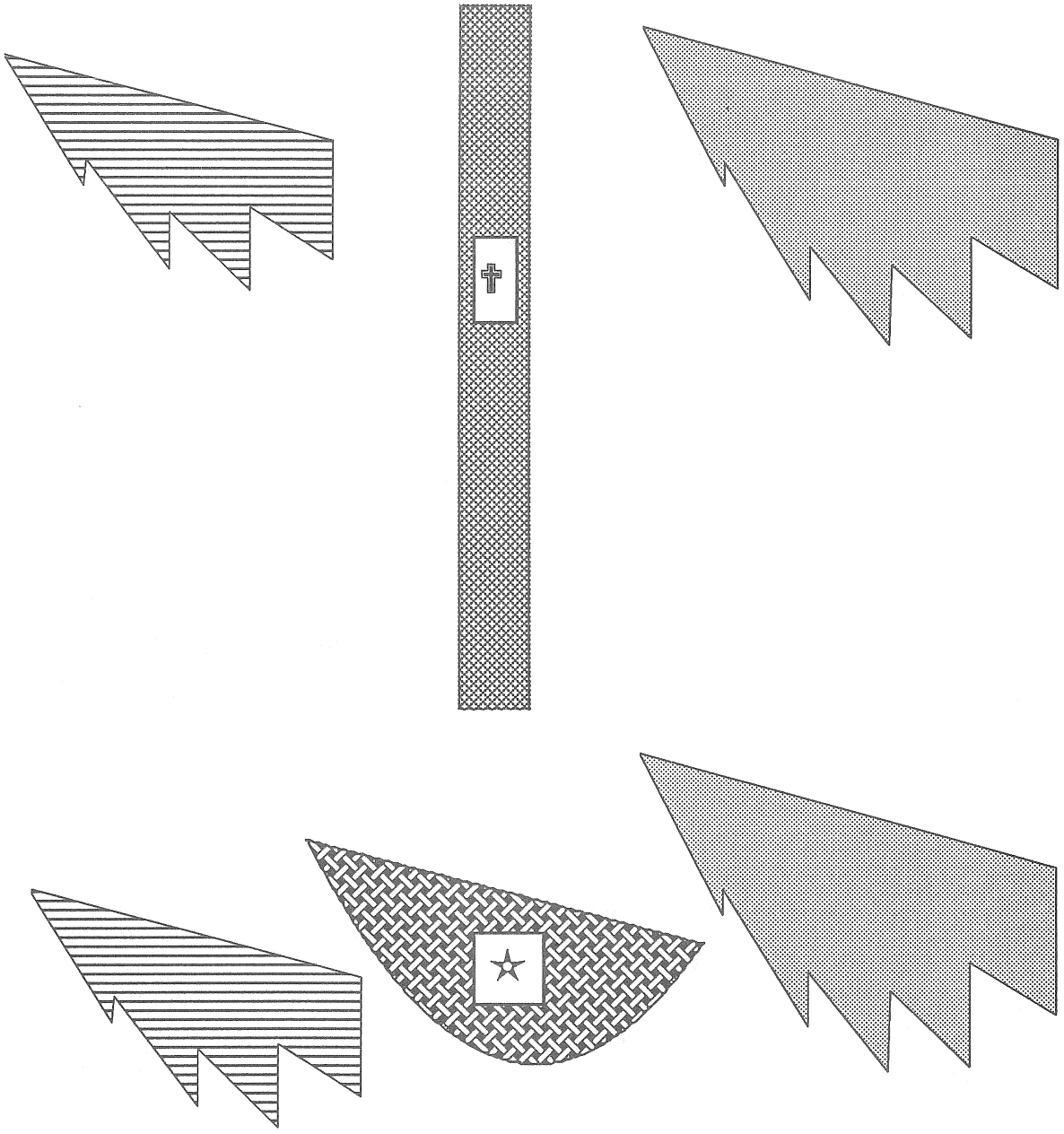


Lorsqu'on augmente le nombre de bandes dans le triangle de référence, les deux polygones dentelés sont de plus en plus voisins.

On voit même plus précisément sur le dessin, qu'en doublant le nombre des bandes la différence est divisée par 2. (relation fondamentale page 119, évidemment !)

Si bien que, si une aire quelconque est donnée, Archimède est sûr de pouvoir trouver un découpage du triangle de référence tel que la différence des 2 polygones dentelés soit inférieure à l'aire donnée.

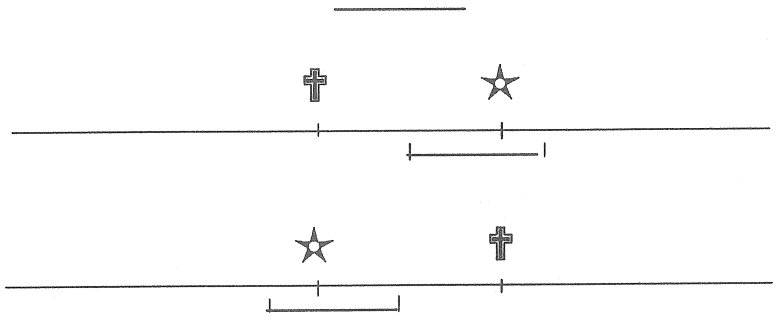
RECAPITULATION



Voici où Archimède est arrivé : il dispose d'un segment de parabole fixé, d'un triangle de comparaison fixé d'après le segment de parabole et d'un contrepoids fixé d'après le triangle. Ces 3 éléments ne dépendent pas des découpages en bandes.

Chaque découpage en bandes crée 2 polygones dentelés dont l'un est d'aire inférieure à celle du contrepoids et l'autre supérieure. En même temps, l'un est inscrit dans le segment de parabole et l'autre, circonscrit.

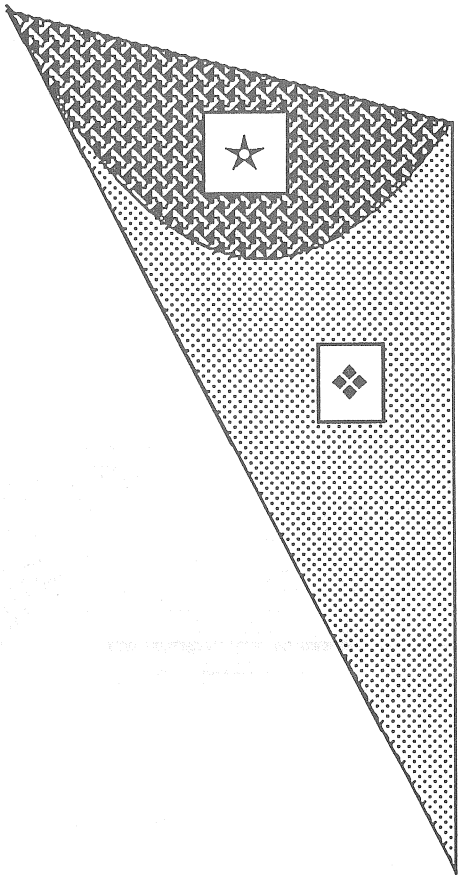
Enfin, par un découpage assez fin, la différence entre les 2 polygones dentelés peut être inférieure à toute aire donnée d'avance.



On sent à ce niveau, qu' Archimède tient son résultat fondamental :

l'aire du segment de parabole est égale à celle du contrepoids.

Pour le démontrer, il suppose que c'est faux ; que le segment ☆ et le contrepoids ✝ sont différents. 2 cas de figure suivant que ✝ < ☆ ou non. Dans les 2 cas, la différence de ✝ et ☆ existe et n'est pas nulle. De plus, elle est fixée. Archimède sait qu'un découpage assez fin lui permet de construire 2 polygones dentelés entourant ☆ et différents de moins que ☆ − ✝ (✝ − ☆). Il n'est possible dans aucun des 2 cas que ces polygones encadrent aussi ✝, ce qui est une contradiction. Il ne reste qu'une solution :



$$✝ = ☆$$

Ou encore, d'après la page 125 :

le segment de parabole a une aire qui est le tiers de celle du triangle de comparaison.

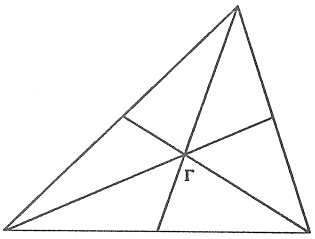
$$☆ = 1/3.❖$$

(Résultat équivalent à celui de la page 19)

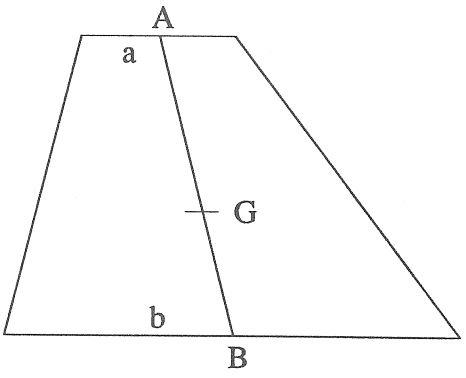
EXERCICES

1) Démontrer la relation fondamentale (page 119), en partant de l'équation d'une parabole en repère orthonormé.

2) Montrer qu'une médiane partage l'aire d'un triangle en 2 parties égales. En déduire que les 3 médianes ensemble, partagent l'aire d'un triangle en 6 parties égales. En déduire enfin que le point de concours des médianes se situe au tiers de chacune à partir de sa base.



3) Montrer que le centre de gravité G d'un trapèze est le point situé sur la médiane qui relie les 2 bases a et b, qui la partage dans le rapport : $\frac{GA}{GB} = \frac{2.b + a}{2.a + b}$



4) Un segment de parabole étant donné, montrer que la suite des polygones inscrits définis entre les pages 10 et 14 ont tous leur centre de gravité porté par l'axe du segment. En déduire, comme à la page 122, que le centre de gravité du segment complet est porté par l'axe du segment.

5) En admettant que le centre de gravité de tous les segments de parabole partage l'axe du segment dans le même rapport (Résultat démontré par Archimède dans "De l'équilibre des plans II"), utiliser le découpage de la page 10 reproduit ci-contre, pour calculer la valeur de ce rapport.

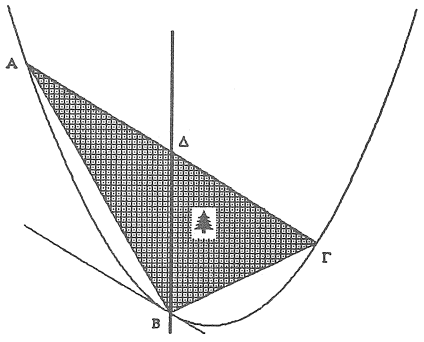


TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : LA QUADRATURE DE LA PARABOLE (Méthode géométrique)	2
Le problème	3
La relation fondamentale	5
La méthode géométrique	7
Exercices	20
CHAPITRE 2 : LES REVOLUTIONS DE SPIRALE	21
Définition des spirales	22
La première révolution	27
L'aire de la deuxième révolution	40
L'aire des révolutions successives	51
Exercices	54
CHAPITRE 3 : LA METHODE RELATIVE AUX THEOREMES MECANIQUES	55
Les objets étudiés	56
Le levier d'Archimède	58
Les centres de gravité	62
Le segment droit de paraboloïde de révolution	63
La boule	69
Exercices	78
Note : Le volume du paraboloïde	79
CHAPITRE 4 : L'AIRE DE LA SPHERE	81
Les postulats d'Archimède	82
La figure inscrite dans la sphère	85
La figure circonscrite	97
L'aire de la sphère	100
Le volume de la boule	102
Exercices	110
Note : Les constructions	111

CHAPITRE 5 : LA QUADRATURE DE LA PARABOLE 117
(Méthode mécanique)
La relation fondamentale 118
Le centre de gravité des triangles 121
La méthode mécanique 123
Exercices 135

BIBLIOGRAPHIE

LES ŒUVRES COMPLETES D'ARCHIMEDE
Traduction de Paul VER EECKE
Librairie scientifique A. BLANCHARD

Titre : LE TRESOR D'ARCHIMEDE

Auteur : Bernard BETTINELLI

Date : Janvier 88

Objectifs : Offrir une vision simple et intuitive des notions de limite et d'intégrale en gestation, à travers les situations historiques qui les ont conduites vers leur naissance.

Public : Les élèves des lycées et toutes personnes intéressées par l'évolution historique des mathématiques.

Résumé : Archimède fut homme d'avenir, et, à travers les moyens géométriques en usage à son époque, il fut le premier à mesurer l'aire d'un segment de parabole, d'un secteur de spirale et d'une sphère ou le volume d'une boule, d'un paraboloïde, d'un ellipsoïde et d'un hyperboloïde de révolution ou à déterminer le centre de gravité des mêmes objets. Cet ouvrage retrace ses plus importantes démarches vers la découverte, à travers une succession de dessins commentés.

Mots clés : postulats, triangles semblables, proportions, encadrement, progression, sommation, aire, volume, limite, équilibre, centre de gravité, intégration.

Réalisé sur Macintosh par B Bettinelli
Tiré sur Laserwriter par MicroAlphaService
Impression Stalactite Sucrée
4, rue Ronchaux 25000 Besançon
81 61 90 64