L’analyse *a priori* dans les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin

Florence Falguères

Au niveau international, plus de 6 500 classes (hors situation de crise sanitaire) participent chaque année au Rallye Mathématique Transalpin. Pour constituer les épreuves, les membres de l’association élaborent les problèmes, en rédigent les énoncés mais également une analyse appelée analyse *a priori*. Florence Falguères, en se basant sur son expérience d’enseignante et de membre de l’Association Rallye Mathématique Transalpin, présente cette analyse. Elle montre comment cette dernière pourrait être utile, voire indispensable, à l’enseignant au moment de l’élaboration des séances d’apprentissage.

Sommaire

Introduction

Depuis 2007, le Rallye Mathématique Transalpin (RMT) est proposé aux classes de Sixième, Cinquième et Quatrième de Franche-Comté. L'Association du Rallye Mathématique Transalpin (ARMT [1]) est l'association internationale qui l'organise. Ces joutes mathématiques consistent pour chaque classe inscrite à la compétition à résoudre collectivement sept problèmes en 50 minutes. Depuis que l'ARMT dispose d'une section en Franche-Comté, chaque année j'inscris des classes à ce rallye et je participe aux séances d'évaluation des copies à l'IREM de Franche-Comté. Au fil des années, je fus charmée par la volonté des membres de l'association de faire évoluer l'apprentissage des mathématiques, je me suis de plus en plus investie dans la section RMT de Franche-Comté, puis au sein de l'ARMT. Cette implication dans l'association a beaucoup enrichi mon enseignement.

Les programmes officiels placent la résolution de problèmes au cœur des apprentissages. Mais ce terme « problème » peut être sujet à de multiples représentations. Dans les programmes officiels successifs ou dans les écrits didactiques nous pouvons rencontrer les expressions : *problème ouvert, tâche complexe, problème simple, problème complexe, problème atypique, tâche riche.* Les problèmes de ce rallye sont des problèmes ouverts dont la résolution peut être obtenue selon plusieurs procédures. Les élèves sur leurs copies doivent obligatoirement donner une explication complète de leur raisonnement.

Comme pour toute compétition, il y a dans ce Rallye un classement et des critères d'attribution des points qui, avec une analyse de la tâche de l'élève, constituent l'analyse *a priori* du problème. Cette dernière est fournie aux binômes de professeurs chargés de l'évaluation des copies. Jusqu'à la création de la *Banque de problèmes* [2] du RMT, accessible sur internet, je gardais précieusement les problèmes accompagnés de leurs analyses et je prenais soin d'annoter les productions des élèves pendant ma lecture. Je disposais ainsi d'une petite ressource pour organiser dans mes classes des séances de résolution de problèmes à tout moment de l'année.

1. Il est possible de consulter le site de l'ARMT pour découvrir plus en détail l'association, ses membres et ses activités (entrer *ARMT Association Rallye Mathématique Transalpin* dans un moteur de recherche).

2. Plus de 1 200 fiches constituées chacune d'un problème et d'une analyse sont disponibles sur cette banque [1].

Dans cet article, à partir des regards de chercheurs ou formateurs sur ce que représente l'analyse *a priori*, nous verrons dans un premier temps comment cet outil peut intervenir en amont de la préparation d'une activité de résolution de problème de recherche mais aussi dans l'exploitation didactique de l'activité.

Dans un deuxième temps, après avoir fait un petit retour sur l'historique de l'analyse *a priori* dans le cadre de l'ARMT et en nous appuyant sur trois exemples de problèmes, nous verrons comment les problèmes sont analysés par les membres de l'association.

1. L'analyse *a priori* : approche théorique

L'analyse *a priori* est à l'origine un concept théorique issu de la recherche en didactique des mathématiques. Il est développé par Guy Brousseau (1998) dans la *Théorie des situations didactiques* [2].

Michel Henry [7] en 2002, lors d'une conférence tenue à l'occasion de la sixième rencontre internationale de l'ARMT, présente l'analyse *a priori* d'une situation didactique de la façon suivante :

> L'analyse *a priori* d'une situation didactique est l'ensemble des études qui concourent à :
>
> I – La connaissance du savoir en jeu (analyse épistémologique) ;
>
> II – La description de son fonctionnement dans l'évolution de la situation (analyse didactique) ;
>
> III – Les comportements possibles des élèves et leur gestion (analyse pédagogique).

Michel Henry précise que l'analyse *a priori* est une première analyse, **ensuite affinée à partir d'expériences menées auprès d'élèves qui révèlent souvent des insuffisances dans l'analyse première**.

Jean-Luc Dorier [5] s'intéresse à l'utilisation de l'analyse *a priori* pour la formation des enseignants, il défend l'idée que l'analyse *a priori* peut être un outil pour préparer les activités en classe : *« Avec tout ce que mes élèves savent et ce qu'ils ont à leur disposition* […] *comment la question que je leur pose ou le problème que je leur soumets peuvent-ils prendre du sens* […] *et que doivent-ils apprendre de nouveau pour arriver à le résoudre ? »*

La préparation d'une séance de résolution de problème amène les enseignants à faire des choix qui s'appuient sur leur formation, leur propre expérience, sur ce qu'ils savent des connaissances de leurs élèves, mais aussi sur ce qu'ils savent du problème lui-même. **Résoudre le problème soi-même est une étape indispensable** et permet d'avoir un premier éclairage : est-ce un problème *basique, complexe, atypique* ([9]) ? Quelles sont les compétences et les connaissances que nous avons mobilisées pour le résoudre ? Etc. Les réponses à ces questions ne nous suffiront pas pour autant pour répondre à la question ci-dessus posée par Dorier, pour anticiper et donner sens à tout ce qui émergera pendant le déroulement de la séance en classe. Il semble intéressant de nous pencher sur ce que l'analyse *a priori* peut nous apprendre aussi du « potentiel didactique » du problème, c'est-à-dire les connaissances et les compétences auxquelles les élèves vont faire appel et qu'ils vont être amenés à développer. Cela dit, nous disposons rarement des analyses *a priori* des problèmes que nous envisageons de proposer à nos élèves. Depuis de nombreuses années, si les éditeurs multiplient les ressources à disposition des enseignants (manuels scolaires, cahiers d'exercices, cahiers d'activités, cahiers de compétences, …), les documents associés réservés aux enseignants ne présentent pas d'analyses *a priori* pour les problèmes proposés. Le terme *solution* s'impose, celle-ci montre une procédure de résolution (souvent experte) suivie de la réponse. L'essence même d'une « solution » semble alors bien loin de celle d'une analyse *a priori.* Quelques ressources pour disposer d'activités accompagnées d'analyses, pourtant existent : les sites des IREM, les revues Panoramath, la *Banque de problèmes* du RMT…

Pour Mercier et Salin, *« l'analyse* a priori *est un outil pour préparer l'observation »* [12, p. 1].

Ce qui est évoqué ci-dessus dans le cadre des recherches en didactique peut s'étendre d'une certaine façon à la gestion de la classe.

Pendant une séance de résolution de problèmes en classe, je pense que l'enseignant gagne à adopter une posture particulière : **ne pas intervenir**, observer l'activité des élèves au sein des groupes, tenter de mémoriser toute hésitation, tout « griffonnage » d'élèves, tout désaccord entre eux, accepter d'être surpris par leur ingéniosité, leur inventivité, mais aussi par leurs oublis (ce que l'enseignant pense qu'ils devraient connaître ou s'en souvenir…). Avant l'institutionnalisation, pendant le temps de mise en commun, mieux informé sur les procédures choisies ou écartées par les élèves, les difficultés rencontrées, l'enseignant pourra encourager ses élèves à s'exprimer dans un climat de confiance, à confronter leurs points de vue pour que les obstacles puissent être repérés et surmontés et qu'ainsi les élèves puissent avoir le sentiment d'avoir assumé jusqu'au bout la responsabilité de la résolution du problème. Cette étape de la séance est délicate, en particulier lorsque c'est la première fois que l'enseignant *met en scène le problème* ou même lorsqu'il décide d'organiser la séance à un moment inhabituel de la progression annuelle. Pour ces raisons, disposer d'une analyse du problème permet d'anticiper comment ce problème peut vivre dans la classe (accessibilité pour les élèves, intérêt en termes de réinvestissement de connaissances, procédures, …) et éventuellement quelles erreurs et quels obstacles ce problème peut générer : l'idée est de réduire la part d'incertitude pour utiliser au mieux le problème.

2. L'analyse *a priori* dans le cadre de l'ARMT

2.1 Présentation de l'analyse *a priori* des problèmes du RMT

L'ARMT a depuis longtemps accordé une place importante à l'analyse des problèmes qu'elle propose.

Depuis le 6e RMT en 1998, les sections [1] du RMT proposent des problèmes et réfléchissent à une analyse préalable de chacun d'eux, cette analyse est appelée aussi analyse *a priori* par les membres de l'association. L'ensemble est ensuite travaillé au sein d'un groupe spécifique de l'ARMT puis diffusé à l'ensemble des sections pour une dernière relecture.

Pour François Jaquet, créateur du rallye, *« dans le cadre du RMT, cette analyse* a priori *a des buts et destinataires spécifiques, différents des autres analyses* a priori *que fait un enseignant pour la conduite de la classe, que fait un étudiant en formation pour préparer une leçon, que fait un chercheur au moment de la conception d'une expérimentation… Une fois que les hypothèses de ces analyses* a priori *sont confirmées ou réfutées par les analyses* a posteriori*, leurs données devraient constituées une base pour l'élaboration de nouveaux problèmes [2] ».*

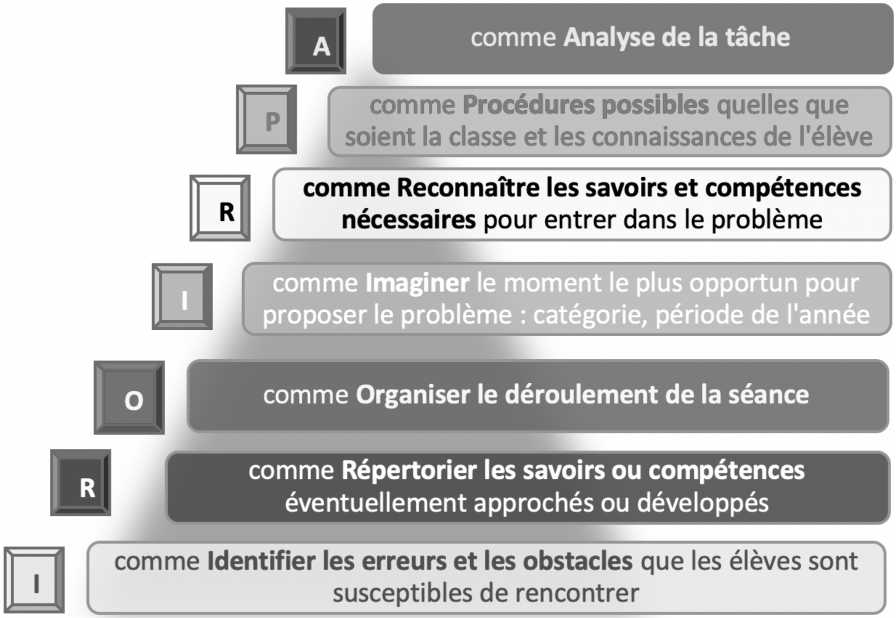
Les analyses *a priori*, comme les énoncés des problèmes, sont donc élaborés en concertation ; ce n'est pas une tâche facile et cela nécessite de nombreux allers-retours et discussions entre enseignants, chercheurs et formateurs.

Par deux fois, cette thématique de l'analyse *a priori* a été choisie pour être travaillée lors de rencontres internationales annuelles de l'association.
En 2013 à Luxembourg : *Analyse* a priori*, analyse* a posteriori*, un parcours circulaire.*

1. En 2019, l'association comptait 21 sections dans 5 pays (Italie, France, Luxembourg, Belgique et Suisse).
2. Extrait de la description du thème de la rencontre d'Alghero en 2019.

En 2019 à Alghero (Sardaigne) : *L'élève face à un problème, l'analyse* a priori *de sa tâche : réfléchir sur son point de vue.*

Le poster réalisé par le groupe IREM-RMT[3] de Franche-Comté et exposé lors de la rencontre internationale en 2019 a été l'occasion d'illustrer l'expression *a priori* par un acrostiche dont les composantes développent les analyses proposées par l'ARMT.



Extrait de l'affiche d'Alghero.

Mais cette analyse *a priori* est construite par des adultes « experts en mathématiques », qui tentent de prévoir le comportement des élèves face à un problème, elle demande à être approfondie.

C'est après la compétition que les productions des élèves sont collectées et l'analyse *a priori* est *enfin* confrontée à ce qui est observé dans les copies : *« c'est à ce moment-là qu'on passe des hypothèses à leur vérification, de l'espace virtuel imaginé par l'adulte au terrain que l'élève lui restitue »* (document de discussion du thème de la rencontre de Luxembourg).

François Jaquet rappelle l'histoire de ce recueil de données : *« Depuis ses débuts, le RMT a construit ses problèmes pour mieux connaître l'état des connaissances de l'élève.*

3. Le groupe IREM de la section RMT de Franche-Comté est constitué de 13 membres enseignants, formateurs ou chercheurs ; il est responsable de l'élaboration d'une des trois épreuves annuelles de cette compétition mathématique internationale. Il est aussi toujours prompt à agir dans le cadre de la formation en organisant des stages ou ateliers destinés aux enseignants ou des interventions auprès des étudiants.

À cet effet, on élabore collectivement un énoncé avec une première analyse de la tâche de l’élève établie a priori *par l’adulte, puis on le propose à des centaines. voire des milliers de classe en demandant à chaque fois aux élèves de décrire leur démarche de résolution puis, après l’attribution de points pour les besoins du “concours” (classement), on analyse* a posteriori, *les copies rendues afin de déterminer les procédures mises en œuvre et obstacles rencontrés.* […] *Ce n’est qu’à ce moment-là qu’on peut tirer profit des observations relevées sur la* valeur didactique du problème.
Toutes ces constructions, énoncés et données recueillies sur environ 1 300 problèmes proposés en une trentaine d’années, sont regroupées dans la Banque de problèmes *du RMT. Cette “banque de données” est un projet ambitieux, en voie d’élaboration depuis une dizaine d’années. On y trouve actuellement tous les énoncés, comme dans un simple répertoire. Les statistiques des points attribués sont disponibles pour la moitié des problèmes environ, avec les analyses* a priori *qui les accompagnent en attente de leur validation. Les analyses* a posteriori *qui permettront de juger de la valeur didactique d’un problème ne sont encore proposés que pour 10 % seulement des énoncés.*
Tout enseignant intéressé par les apprentissages au travers de la résolution de problèmes peut cependant déjà tirer profit des données recueillies mais surtout, contribuer à enrichir la Banque de problèmes *du RMT. Il lui suffira de choisir un problème qu’il juge bien adapté aux besoins de ses élèves et de communiquer quelques observations sur les procédures, erreurs et obstacles relevés. »*

Par les trois exemples ci-dessous, nous nous limitons à présenter ce qui constitue une analyse *a priori* dans le cadre du RMT.

2.2 Trois exemples

2.2.1 Présentation des problèmes

Premier problème : ***Arthur, son chien et son chat***

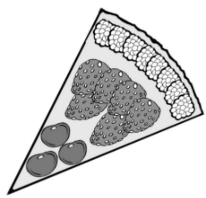
C’est un problème *atypique* de catégories 5, 6 et 7 de la nomenclature internationale (niveaux CM2, 6^{e} et 5^{e} en France) : les élèves de ces niveaux ne disposent pas de procédures expertes pour le résoudre. *« La notion de procédures expertes dépend de ce qui peut être visé à un niveau donné, compte tenu des connaissances travaillées au niveau considéré »* [4].

ARTHUR, SON CHAT ET SON CHIEN (Cat. 5, 6, 7) © ARMT 2017
Arthur se pèse avec son chien dans les bras. La balance affiche 43 kg.
Puis, il pose le chien à terre et il se pèse avec son chat dans les bras. La balance affiche 39 kg. Il met ensuite son chien et son chat ensemble sur la balance. Celle-ci affiche alors 10 kg.
Pour finir, Arthur se pèse tout seul.
Qu'affiche la balance quand Arthur se pèse tout seul ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Deuxième problème : ***La tarte aux fruits***

C'est un problème *atypique* pour les élèves qui n'ont pas encore travaillé sur la notion d'angle, mais un *problème complexe* pour ceux qui ont les connaissances. En effet l'élève devra convoquer [4] la connaissance *angle* qui n'est pas citée dans l'énoncé [3].

LA TARTE AUX FRUITS (Cat. 4, 5, 6, 7) © ARMT 2016
Pauline a invité ses amis pour fêter son anniversaire.
Son papa a confectionné une excellente tarte aux fruits et, pour contenter tout le monde, il l'a découpée en parts de mêmes dimensions et avec le même nombre de fruits sur chaque part de tarte.
La fête est finie, Pauline constate qu'il reste une seule part de tarte. Sur cette part elle compte 17 fruits et elle s'exclame : *« Tu as vraiment utilisé beaucoup de fruits pour faire la tarte, papa ! »*
Ce dessin représente la part de tarte posée sur la table, vue du dessus :



Combien de fruits le papa de Pauline a-t-il utilisés en tout pour décorer la tarte entière ?
Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

4. Dans ce problème c'est « le résolveur » qui doit « convoquer » la connaissance, ce n'est pas le problème ni le contexte (utilisation d'une connaissance qui vient d'être travaillée en classe) qui amène l'élève à faire appel à cette connaissance.

Troisième problème : ***Le collage***

Il a été donné à des étudiants dans le cadre de la formation initiale de professeurs de mathématiques.

> **LE COLLAGE** (Cat. 7, 8, 9, 10) © ARMT 2019
> André et Béatrice doivent réaliser ensemble un collage. Pour cela, les deux enfants achètent des feuilles de couleur.
> André en achète le double de Béatrice. Mais, avant que les deux enfants se mettent au travail, Béatrice s'aperçoit que pour terminer sa partie du collage elle n'aura pas assez de feuilles. André lui en donne alors 7 des siennes. Béatrice se met au travail, mais abîme une feuille qu'elle décide de jeter. À ce moment, les deux enfants ont le même nombre de feuilles.
> **Combien de feuilles ont acheté en tout André et Béatrice pour réaliser le collage ?**
> **Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

2.2.2 Description

Les énoncés des problèmes sont rédigés en même temps que leur analyse *a priori*. Cette dernière comporte les deux éléments suivants :

La tâche mathématique, dans le cadre des analyses *a priori* rédigées par les membres de l'ARMT, est souvent très concise. Elle se limite presque toujours à une phrase (annexes 2, 3 et 4) et décrit les procédures mathématiques attendues pour produire le résultat demandé.

L'analyse de la tâche de l'élève quant à elle est partagée en deux parties, une tâche d'appropriation et une tâche de résolution (annexe 2).

La tâche d'appropriation décrit de quelle façon l'élève peut aborder le problème. Sa rédaction invite le(s) rédacteur(s) de l'énoncé du problème à prendre du recul : imaginer comment l'élève peut comprendre le problème à partir de l'énoncé (l'histoire qui se joue), sa partie narrative et ce qui peut l'accompagner, dessin, schéma ou image, comment l'élève va s'engager dans le processus de modélisation, élaborer des inférences pour construire son raisonnement.

La tâche de résolution regroupe les procédures possibles pour résoudre le problème mais sa rédaction dans le cadre du RMT ne fait apparaître que des procédures susceptibles d'être appelées par les élèves engagés dans la compétition. Dans le cas du problème *Arthur, son chien et son chat* (annexe 1), aucune mise en équation n'est proposée, car cette procédure de résolution du problème n'est pas disponible pour des élèves de ces catégories 5, 6, 7. Toutefois il arrive que l'analyse des productions (analyse *a posteriori*) permette d'enrichir l'analyse *a priori* par de nouvelles procédures inattendues. Pour deux problèmes comportant des similitudes, on peut s'appuyer pour l'un sur l'analyse *a posteriori* de l'autre. Prudemment, l'analyse *a priori* de ce problème précise : *« il y a bien évidemment de nombreuses autres façons de trouver la réponse »*. Par exemple, une procédure parfois choisie par les élèves qui pourrait être ajoutée à cette analyse *a priori* est celle qui associe le fait que la somme des masses *Arthur-Chien* et *Arthur-Chat* est égale à la somme des masses 2*Arthur* et *Chat-Chien*.

Les tâches d'*appropriation*, de *résolution* et nous pourrions même ajouter de *rédaction*, n'incombent pas à un élève isolé puisque la résolution des problèmes du RMT nécessite une mise en commun du travail des élèves.

Jusqu'à maintenant les obstacles et les erreurs n'apparaissaient pas dans l'analyse *a priori* transmise au moment de la diffusion des épreuves, toutefois de nombreux problèmes font l'objet d'études complémentaires basées sur les productions des élèves (suite à l'épreuve officielle ou lors d'expériences complémentaires) et ces obstacles et erreurs sont alors explicités dans des articles ou des fiches disponibles dans la *Banque de problèmes*.

Grâce à la fiche RMT du problème *Arthur, son chien et son chat* (annexe 2), on peut remplir ce tableau qui reprend les éléments de l'acrostiche de l'analyse *a priori* présenté dans la première partie de cet article.

A	comme **Analyse de la tâche mathématique**	Elle est citée dans l'analyse *a priori* proposée en annexe.
P	comme **Procédures possibles** quelles que soient la classe et les connaissances des élèves	Si le niveau de la classe correspond à la catégorie dans laquelle le problème est proposé, les procédures sont *a priori* celles citées en annexe, une analyse *a posteriori* permettra de réajuster.
R	comme **Reconnaître les savoirs et compétences nécessaires** pour entrer dans le problème.	Les quatre opérations et la maîtrise de la lecture.
I	comme **Imaginer** le moment le plus opportun pour proposer le problème : catégorie, période de l'année	Éventuellement en début d'année pour des élèves de Sixième : ce serait l'occasion de ré-expliciter les six compétences mathématiques, réactiver le travail en commun et réinvestir les savoirs et les connaissances nécessaires.

O	comme **Organiser le déroulement de la séance**	Après un temps de recherche individuelle, prévoir des temps d’échanges entre élèves pour valoriser et encourager l’engagement de chacun. Une mise en commun gérée par l’enseignant conduit à l’institutionnalisation des savoirs.
R	comme **Répertorier les savoirs ou compétences** éventuellement approchés ou développés	Les six compétences : *Chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.*
I	comme **Identifier les erreurs et les obstacles** que les élèves sont susceptibles de rencontrer.	Les élèves pensent parfois à tort qu’une réponse s’obtient à partir d’une procédure apprise par cœur ; d’autres erreurs et obstacles peuvent être rencontrés par les élèves dans ce problème, l’analyse *a posteriori* des copies éclairera cet aspect.

Même si l’enseignant qui souhaite proposer ce problème ne pourra pas faire l’économie de le résoudre et de se questionner sur ce que ses élèves seront en mesure de proposer, les éléments cités ici permettent de mieux organiser, anticiper, observer, exploiter la séance.

Les autres problèmes dont les énoncés sont donnés, peuvent aussi permettre aux enseignants d’évaluer le niveau d’acquisition et de compréhension d’un concept.

Le problème *La tarte aux fruits* (RMT-24.II.06 Cat. 4, 5, 6, 7) [5] peut être proposé pour vérifier la solidité du concept d’angle ou le problème *Le collage* (RMT-27.I.14 cat 7, 8, 9, 10) [6] le degré d’approche pré-algébrique.

Christine Le Moal, co-responsable du groupe IREM-RMT de Franche-Comté s’est intéressée au problème *La tarte aux fruits*. En s’appuyant sur sa propre expérience et l’analyse *a priori* donnée au moment de l’épreuve, elle a su ensuite exploiter ce problème en dehors du cadre de la compétition. Elle partage son expérience dans un article publié dans la revue de l’APMEP *Au fil des maths* n° 535, dont le titre est : *Le Rallye Mathématique Transalpin* [11].

Si un enseignant s’attend à ce que ses élèves se dirigent naturellement vers la dernière procédure citée (360° ÷ 40° (annexe 3), l’observation des élèves nous montre que les

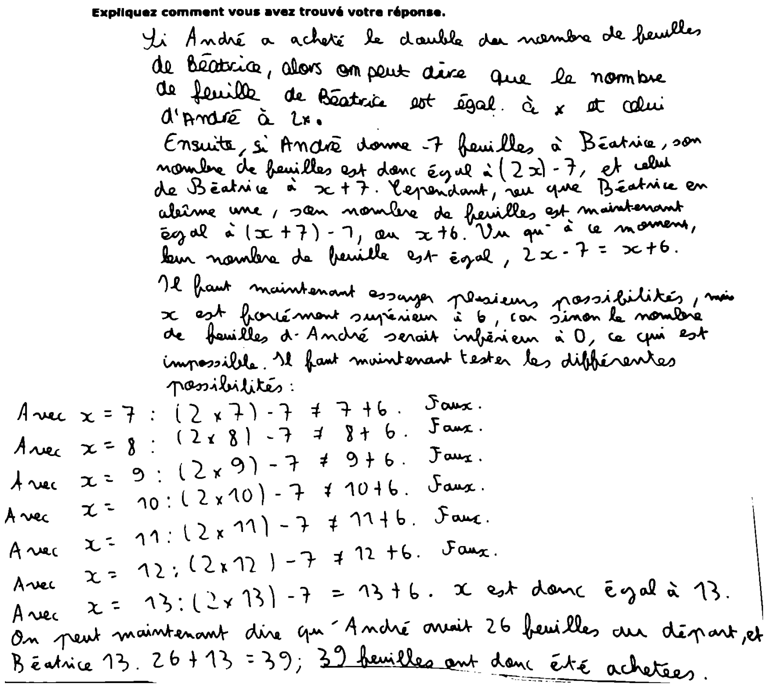
5. Ce qui signifie : problème du 24e RMT, portant le numéro 6 de la deuxième épreuve, pour les catégories 4 à 7.

6. Problème du 27e RMT, numéro 14 de la première épreuve, pour les catégories 7 à 10.

autres procédures (reports ou reproductions plus ou moins précises de l'angle) sont largement privilégiées même souvent encore en catégorie 7 (classe de Cinquième).

Ces observations questionnent sur la compréhension du concept d'angle, sur l'aisance à diviser une grandeur continue ou encore à modéliser une situation. C'est l'occasion pour l'enseignant de retravailler ces points sensibles des programmes.

Dans le cadre de la formation initiale des enseignants, le problème *Le collage* a été travaillé par un groupe d'étudiants de Master 1 qui se destinent au métier d'enseignant de mathématiques. Il leur a été demandé de préparer une analyse *a priori* de ce problème du rallye, sachant qu'en Franche-Comté il n'a été proposé qu'aux classes de Cinquième et Quatrième (catégories 7 et 8) dans le cadre de la compétition. Sans expérience, les étudiants ont présupposé que les élèves suivraient une procédure avec mise en équation puis résolution d'un système de deux équations à deux inconnues. Cette procédure n'est absolument pas accessible pour des élèves de ces niveaux. La lecture de l'analyse *a priori* rédigée par l'ARMT a amené les futurs enseignants à reconsidérer leur approche. L'étude de l'ensemble des productions des élèves de Franche-Comté qui ont participé au RMT a montré aux étudiants qu'en effet les élèves ne privilégient pas la procédure algébrique pour obtenir la solution même s'ils s'engagent parfois partiellement sur cette voie avec réussite (photo 1) ou sans réussite (photo 2).


Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Si André a acheté le double du nombre de feuilles de Béatrice, alors on peut dire que le nombre de feuille de Béatrice est égal à x et celui d'André à 2x.

Ensuite, si André donne 7 feuilles à Béatrice, son nombre de feuilles est donc égal à (2x) - 7, et celui de Béatrice à x + 7. Cependant, vu que Béatrice en abîme une, son nombre de feuilles est maintenant égal à (x + 7) - 1, ou x + 6. Vu qu'à ce moment, leur nombre de feuille est égal, 2x - 7 = x + 6.

Il faut maintenant essayer plusieurs possibilités, mais x est forcément supérieur à 6, car sinon le nombre de feuilles d'André serait inférieur à 0, ce qui est impossible. Il faut maintenant tester les différentes possibilités :

Avec x = 7 : (2 × 7) - 7 ≠ 7 + 6. Faux.
Avec x = 8 : (2 × 8) - 7 ≠ 8 + 6. Faux.
Avec x = 9 : (2 × 9) - 7 ≠ 9 + 6. Faux.
Avec x = 10 : (2 × 10) - 7 ≠ 10 + 6. Faux.
Avec x = 11 : (2 × 11) - 7 ≠ 11 + 6. Faux.
Avec x = 12 : (2 × 12) - 7 ≠ 12 + 6. Faux.
Avec x = 13 : (2 × 13) - 7 = 13 + 6. x est donc égal à 13.

On peut maintenant dire qu'André avait 26 feuilles au départ, et Béatrice 13. 26 + 13 = 39 ; 39 feuilles ont donc été achetées.

Photo 1.

André et Béatrice ont achetés 29 feuilles en tout car : On va faire un calcule litterale :

$x + 7 - 1$ et $z - 7$

Si l'on remplace x par 8 et z par 21 ca fait

. $8+7-1=14$ et $21-7=14$

Au finale ils ont le même nombre de feuilles.
Si on additionne le 8 et le 21 on obtient 29.

Photo 2.

2.3 Conclusion

Faire entrer dans ma pratique la résolution de problèmes de recherche pour tenter d'améliorer les apprentissages des élèves qui m'étaient confiés a profondément fait évoluer mes conceptions de l'enseignement. J'accepte davantage que les tâtonnements de mes élèves et leurs ébauches de pistes de recherche soient les points de départ du chemin vers la construction de leurs savoirs. Ce changement de posture nécessite des préparations spécifiques.

Dans l'article ci-dessus, c'est l'analyse *a priori* qui a été présentée comme outil, car d'un point de vue historique c'est en s'appuyant sur les analyses réalisées *a priori* et en les confrontant aux productions des élèves que l'ARMT a voulu aller plus loin et mettre à disposition des enseignants des fiches pour chaque problème dans sa *Banque de problèmes.*

Cependant, beaucoup d'autres questions se posent : comment orchestrer une mise en commun des procédures suivies par les élèves après leur recherche d'un problème ? Comment institutionnaliser les savoirs construits pendant ces séances ? Comment organiser un parcours d'apprentissage à partir de problèmes ? Et bien d'autres encore… Même si l'ARMT travaille aussi sur ces questions — en témoignent les nombreux articles publiés dans sa revue *La gazette de Transalpie*[7] — il semblerait que ce soit par le biais de la formation initiale et continue que les enseignants seront plus largement sensibilisés à cette approche. L'IREM de Besançon propose chaque année de telles formations.

7. Les onze numéros de *La Gazette de Transalpie* sont consultables sur le site de l'ARMT [6].

Bibliographie

[1] *La* Banque de problèmes *de l'ARMT* (cf. p. 85).

[2] G. Brousseau. *Théorie des situations didactiques (1970-1990).* Grenoble : La pensée sauvage, 1998 (cf. p. 87).

[3] C. Castela. « Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement ». In : *Recherches en didactique des mathématiques* Vol. 28/2 (2008), p. 135-182 (cf. p. 92).

[4] R. Charnay. « L'analyse *a priori*, un outil pour l'enseignant ». In : *Math-École* nº 209 (2003), p. 19-25 (cf. p. 91).

[5] J.-L. Dorier. « L'analyse *a priori* : un outil pour la formation d'enseignants (exemple d'un jeu issu des manuels suisses romands de première année primaire) ». In : *L'enseignement des mathématiques à l'école : où est le problème – Actes du XXXVI^e colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques (COPIRELEM)* (2010) (cf. p. 87).

[6] *La Gazette de Transalpie* (cf. p. 97).

[7] M. Henry. « Remarques sur l'analyse *a priori* ». In : *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin* Vol. 3 (2002) (cf. p. 87).

[8] C. Houdement. « Résolution de problèmes arithmétiques à l'école ». In : *Grand* $\mathbb{N}$ nº 100 (2017), p. 59-78.

[9] C. Houdement. « Le RMT, médiation entre enseignants et résolution de problèmes ». In : *Gazette de Transalpie* nº 4 (2015), p. 7-17 (cf. p. 87).

[10] F. Jaquet et L. Grugnetti. « Les problèmes du RMT : l'élargissement progressif de leurs finalités ». In : *Gazette de Transalpie* nº 4 (2015), p. 59-62.

[11] C. Le Moal. « Le Rallye Mathématique Transalpin ». In : *Au fil des maths* nº 535 (2020), p. 28-34 (cf. p. 95).

[12] A. Mercier et M.H. Salin. « L'analyse *a priori*, outil pour l'observation ». In : *Actes de l'Université d'été de didactique des mathématiques* (1988), p. 203-236 (cf. p. 88).

Liste des illustrations

Annexes

Annexe 1 : quelques précisions sur l'Association du Rallye Mathématique Transalpin

Extrait de la présentation du RMT sur le site de l'ARMT

Les buts

Le Rallye mathématique transalpin (RMT) est une confrontation entre classes, des degrés 3 à 10 de la scolarité obligatoire (élèves de 8 à 15 ans) dans le domaine de la résolution de problèmes de mathématiques. Il est organisé par « l'Association Rallye Mathématique Transalpin » (ARMT, constituée au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse) dont les statuts précisent :

« L'ARMT est une association culturelle dont le but est de promouvoir la résolution de problèmes pour améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques par une confrontation entre classes et de contribuer à la formation des enseignants et à la recherche en didactique des mathématiques, par ses analyses et ses données recueillies dans le domaine de la résolution de problèmes. »

L'association ne poursuit pas de but lucratif.

Les activités de l'association peuvent se déployer partout dans le monde.

Le RMT propose aux élèves :

- de faire des mathématiques en résolvant des problèmes ;
- d'apprendre les règles élémentaires du débat scientifique en discutant et défendant les diverses solutions proposées ;
- de développer leurs capacités, aujourd'hui essentielles, à travailler en équipe en prenant en charge l'entière responsabilité d'une épreuve ;
- de se confronter avec d'autres camarades, d'autres classes.

Pour les maîtres, associés à toutes les étapes dans la mesure de leurs disponibilités, le RMT permet :

- d'observer des élèves (les leurs lors de l'épreuve d'essai et ceux d'autres classes lors des épreuves suivantes) en activité de résolution de problèmes ;

— d'évaluer les productions de leurs propres élèves et leurs capacités d'organisation, de discuter des solutions et de les exploiter ultérieurement en classe ;
— d'introduire des éléments de renouvellement dans leur enseignement par des échanges avec d'autres collègues et par l'apport de problèmes stimulants ;
— de s'engager dans l'équipe des animateurs et de participer ainsi à la préparation, à la discussion et au choix des problèmes, à l'évaluation en commun des copies, à l'analyse des solutions.

Pour l'enseignement des mathématiques en général et la recherche en didactique, le RMT offre une source très riche de résultats, d'observations et d'analyses.

Ces finalités se sont définies au cours des années et font l'objet d'adaptations permanentes, lors des rencontres internationales ou régionales.

Les épreuves

Sans règles du jeu, il ne peut y avoir de comparaisons productives. Le rallye établit donc un contrat entre l'équipe d'animateurs, les maîtres et les classes participantes, dont voici les termes essentiels.

Le RMT propose des épreuves de résolution de problèmes par classes entières, réparties en huit catégories, des degrés 3 à 10 (8 à 15-16 ans). La décision de participer au concours est prise conjointement par la classe et le maître, après une épreuve d'essai au cours de laquelle les uns et les autres ont pu saisir les enjeux d'une résolution collective de problèmes, à la charge des élèves seulement.

Organisation pratique

Le *Rallye mathématique transalpin* s'organise selon quatre étapes :

— une **épreuve d'essai**, en novembre ou décembre. Cette étape est placée sous l'entière responsabilité des maîtres qui choisissent les problèmes, les proposent selon les principes du rallye, en discutent avec leurs élèves, s'occupent de l'inscription et de son financement.
— une **première épreuve**, en janvier ou février, selon le calendrier établi au niveau des sections et selon entente entre les maîtres concernés, titulaires et surveillants ;
— une **deuxième épreuve** en mars ou avril (avec les mêmes modalités que pour la première épreuve) ;
— une finale, en mai ou juin, regroupant les classes d'une même section (régionale ou nationale) ayant obtenu les meilleurs scores dans les deux épreuves (en général 3 par catégorie, mais ce nombre peut varier en fonction de l'effectif des classes participantes).

Annexe 2 : exemple n° 1

ARTHUR, SON CHAT ET SON CHIEN (Cat. 5, 6, 7) ©ARMT 2017
Arthur se pèse avec son chien dans les bras. La balance affiche 43 kg.
Puis, il pose le chien à terre et il se pèse avec son chat dans les bras. La balance affiche 39 kg. Il met ensuite son chien et son chat ensemble sur la balance. Celle-ci affiche alors 10 kg.
Pour finir, Arthur se pèse tout seul.
Qu'affiche la balance quand Arthur se pèse tout seul ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver un nombre parmi trois dont les sommes deux à deux sont 43, 39 et 10.

Analyse de la tâche

Tâche d'appropriation

- Faire le lien entre les trois masses des personnages et les trois nombres, « poids », que la balance afficherait pour chacun d'eux puis comprendre que les indications affichées sur la balance correspondent aux masses d'Arthur et son chien, 43 kg, d'Arthur et son chat 39 kg, de son chien et son chat 10 kg.
- De l'information apportée par les trois pesées connues, déduire qu'Arthur pèse moins de 39 kg et que chaque animal pèse moins de 10 kg et que le chien est plus lourd que le chat.
- Quitter le contexte des grandeurs physiques et passer aux relations entre les nombres.

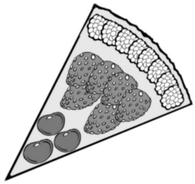
Tâche de résolution

- Procéder par essais : faire une hypothèse sur le poids de chacun des trois personnages, effectuer les sommes des poids (Arthur + le chien, Arthur + le chat, le chien + le chat) et examiner si elles vérifient les informations données. Si ce n'est pas le cas, faire d'autres hypothèses en prenant plus ou moins en compte les déductions possibles à partir des calculs précédemment effectués, jusqu'à trouver le poids d'Arthur qui est 36 kg.
- Ou, faire le choix d'une information et procéder par inventaire des possibles (en se limitant aux nombres entiers), par exemple pour les poids du chien et du chat : $(1;9)$, $(2;8)$, etc. Pour chaque possibilité trouvée, utiliser une seconde information pour déduire le poids du 3^e^ personnage, par exemple Arthur, et vérifier que les 3 poids ainsi déterminés vérifient la 3^e^ information ou, à partir de chacune des 2^e^ et 3^e^ informations, calculer le poids du 3^e^ personnage qui doit être le même.
- Ou, des deux premières pesées, déduire que le chien pèse 4 kg de plus que le chat. Sachant que le chien et le chat pèsent ensemble 10 kg et que la différence entre les deux masses est 4 kg, celles-ci ne peuvent pas être 5 et 5, 6 et 4… On trouve ainsi 7 et 3. En retirant la masse d'un animal de la pesée faite par Arthur avec cet animal dans les bras, on trouve qu'Arthur pèse $43 - 7$ ou $39 - 3$, soit 36 kg.

Il y a bien évidemment de nombreuses autres façons de trouver la réponse.

Annexe 3 : exemple n° 2

LA TARTE AUX FRUITS (Cat. 4, 5, 6, 7) ©ARMT 2016
Pauline a invité ses amis pour fêter son anniversaire.
Son papa a confectionné une excellente tarte aux fruits et, pour contenter tout le monde, il l'a découpée en parts de mêmes dimensions et avec le même nombre de fruits sur chaque part de tarte.
La fête est finie, Pauline constate qu'il reste une seule part de tarte. Sur cette part elle compte 17 fruits et elle s'exclame : *« Tu as vraiment utilisé beaucoup de fruits pour faire la tarte, papa ! »*
Ce dessin représente la part de tarte posée sur la table, vue du dessus :



Combien de fruits le papa de Pauline a-t-il utilisés en tout pour décorer la tarte entière ?
Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique
Déterminer le nombre de secteurs circulaires superposables en lesquels un disque a été partagé, à partir du dessin d'un des secteurs (dont l'angle mesure 40°), pour trouver le nombre total d'objets disposés sur le disque, sachant que sur chaque secteur il y en a 17.

Analyse de la tâche

- Se représenter la tarte et comprendre qu'elle a été partagée en parts égales, de la même forme, de mêmes dimensions, avec le même nombre de fruits. Comprendre que les parts étant l'une à côté de l'autre, deux parts voisines ont un « côté » en commun.
- Comprendre que pour trouver le nombre total de fruits utilisés, il faut reconstituer la tarte entière, de manière à connaître le nombre de parts en lesquelles la tarte a été découpée.
- Pour reconstruire la tarte, on peut procéder de différentes manières.
  - Découper une part égale à celle qui est dessinée (à partir d'une autre copie de l'énoncé ou en utilisant une feuille de papier calque), la poser à côté de la part donnée, en marquer le contour et continuer de même à reporter cette part sur le dessin de proche en proche, jusqu'à compléter toute la tarte. Compter le nombre des parts ainsi dessinées (9).
  - Ou bien, à partir du dessin d'une part, dessiner une autre part égale en pliant la feuille le long d'un côté de la première part et en traçant l'autre côté par transparence et continuer ainsi de suite.
  - Ou bien, tracer un cercle ayant pour centre la « pointe » de la part de tarte et pour rayon le « côté » de cette part, reporter l'arc ou la corde ou l'angle au centre, compter le nombre d'arcs, de cordes ou de secteurs angulaires.
  - Ou bien, mesurer au rapporteur l'angle de la part de tarte (40°) et déterminer le nombre de parts en calculant $360 \div 40 = 9$.
  - Il est aussi possible de dessiner les parts de tarte « à l'œil », mais cette procédure a peu de chances de donner le nombre exact de parts.
- Multiplier le nombre de fruits d'une part par le nombre de parts : $17 \times 9 = 153$.

Annexe 4 : exemple n° 3

LE COLLAGE (Cat. 7, 8, 9, 10) ©ARMT 2019
André et Béatrice doivent réaliser ensemble un collage. Pour cela, les deux enfants achètent des feuilles de couleur.
André en achète le double de Béatrice. Mais, avant que les deux enfants se mettent au travail, Béatrice s'aperçoit que pour terminer sa partie du collage elle n'aura pas assez de feuilles. André lui en donne alors 7 des siennes. Béatrice se met au travail, mais abîme une feuille qu'elle décide de jeter. À ce moment, les deux enfants ont le même nombre de feuilles.
Combien de feuilles ont acheté en tout André et Béatrice pour réaliser le collage ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique
Déterminer le triple d'un nombre qui, augmenté de 6, vaut 7 de moins que son double.

Analyse de la tâche

- Établir à partir de la lecture de l'énoncé les relations entre les nombres de feuilles d'André et de Béatrice avant et après l'échange : initialement André en a le double de Béatrice, puis le nombre de feuilles d'André diminué de 7 égale celui de Béatrice augmenté de 6 (une feuille a été détruite).
- Comprendre que le nombre de feuilles qu'a achetées André ne peut pas être inférieur à 8 (André en donne 7 à Béatrice) et que c'est un nombre pair (André a le double de feuilles de Béatrice).
- Se rendre compte que le nombre de feuilles achetées en tout est un de plus que le nombre de feuilles utilisées (Béatrice en a jeté une).
- Comprendre donc que les deux enfants ont le même nombre de feuilles depuis qu'André, qui initialement en avait le double de Béatrice, lui en a donnée 7 et qu'elle en a jeté une.
- Procéder par essais organisés, en faisant l'hypothèse qu'André a acheté 8 feuilles et donc Béatrice 4, augmenter de deux en deux (parce que le nombre de feuilles d'André est pair) et tester les nombres, pour finalement arriver à 26 pour André (en utilisant éventuellement un tableau ou un schéma ou un support graphique) et conclure que le nombre de feuilles achetées est 39 après être arrivé à l'égalité $26 - 7 = (13 + 7) - 1$.

Ou

- Procéder comme ci-dessus mais de façon inorganisée.

Ou

- Désigner par x le nombre de feuilles qu'a achetées Béatrice et écrire l'équation $2x - 7x + 6$ qui a pour solution 13. En déduire qu'André en a acheté 26 et donc qu'au total $13 + 26 = 39$ feuilles ont été achetées.

  Il est aussi possible de faire le choix de deux inconnues pour faciliter la mise en équation et éviter des essais non organisés.