

Les mathématiques pour quoi faire ?

Mustapha MOKHTAR-KHARROUBI

Ce texte est une version légèrement remaniée d'une conférence donnée à des élèves de Terminale à l'occasion des journées « *découverte de la recherche en mathématiques* » organisées en novembre 2014 et novembre 2015 par le Laboratoire de mathématiques de Besançon. L'objet de cette conférence était d'illustrer la recherche mathématique par un rapide survol philosophique de l'histoire des mathématiques à travers leurs relations avec la physique moderne. Un des objectifs visés était aussi de sensibiliser les jeunes lycéens à la dimension culturelle des mathématiques, bien loin de la vision utilitaire largement dominante dans le grand public même cultivé. La forme du texte reflète bien entendu le caractère oral de l'exercice.

L'auteur remercie Naoum Daher pour ses commentaires sur une première version du texte. Il remercie particulièrement Stéphane Verjux d'une part pour ses nombreux commentaires et suggestions sur la dernière version du texte et d'autre part pour avoir sollicité les réactions de quelques lycéens ; cela a permis de mieux adapter le contenu. Ce texte a aussi profité des remarques de Martin Meyer et de Claude et Jean Merker que je remercie également.

Sommaire

1	À quoi servent les sciences ?	65
2	Mathématiques pures ou appliquées ?	69
3	Un peu d'histoire	71
4	Pourquoi apprendre des mathématiques ?	81

1. À quoi servent les sciences ?

Si vous êtes présents à cette journée « *découverte de la recherche en mathématiques* » organisée par l'université, c'est que vous n'êtes pas indifférents aux sciences en général et aux mathématiques en particulier. Je prendrai cela comme point de départ de notre rencontre. Je dois vous avouer qu'il n'est pas aisé de vous parler de manière profitable de la recherche qui se fait dans notre Laboratoire et cela pour deux raisons. D'une part, il existe plusieurs domaines des mathématiques sur lesquels travaillent nos différentes équipes de recherche et il est difficile pour un chercheur de vraiment comprendre les travaux d'une autre équipe que la sienne. D'autre part, chaque domaine mathématique est subdivisé en un nombre sans cesse croissant de sous-spécialités très pointues de sorte qu'à l'intérieur d'une même équipe de recherche il arrive très souvent que l'on ait une vue très superficielle de ce que fait un collègue de l'équipe. Cela est dû à l'hyper-spécialisation de la recherche scientifique en général qui la rend difficilement compréhensible même par les chercheurs. Vous parler de ma propre recherche ne serait pas plus utile car j'aurais du mal à vous l'expliquer de manière simple et profitable. De toute façon, cela ne vous donnera aucune idée des différentes recherches au sein de l'équipe « *Équations aux dérivées partielles* » dont je fais partie. Aussi ai-je opté pour un autre exercice plus général et probablement beaucoup plus utile. Je voudrais, si vous le voulez bien, vous parler un peu, de manière informelle et philosophique bien sûr ¹, de l'histoire des mathématiques que l'on enseigne à l'université et de leurs liens avec la physique. Cela me sera d'autant plus agréable à faire que le domaine des « *Équations aux dérivées partielles* » est précisément né des besoins mathématiques fondamentaux de la science moderne. J'espère que cela vous apportera quelques idées générales, vous donnera envie d'en savoir davantage et motivera mieux vos futurs choix d'études.

Vous savez certainement que les mathématiques sont « utilisées » dans de nombreuses autres sciences : la physique bien sûr de manière directe, depuis l'émergence de la science moderne au XVII^e siècle mais aussi, de manière différente, dans les sciences de l'ingénieur, l'informatique, l'économie, la biologie... On peut aussi dire

1. J'évoquerai de très nombreux points historiques mais de manière extrêmement allusive. Il s'agit donc d'un très rapide survol qui n'a pas du tout l'ambition d'entrer dans des détails (qui peuvent être trop longs ou trop compliqués) mais simplement de susciter, je l'espère, la curiosité de lycéens pour certains des points évoqués ici.

sans exagération qu'elles sont omniprésentes, d'une manière ou d'une autre, dans de nombreux objets techniques de la vie courante. D'autre part, un nombre croissant de métiers, scientifiques ou pas, requièrent, à des degrés divers, des connaissances mathématiques et il convient bien sûr que les étudiants soient au courant des débouchés potentiels des formations mathématiques de l'Université même si ce n'est pas mon propos ici. Mais paradoxalement, cette omniprésence des mathématiques dans les sciences comme dans la technologie en occulte la nature et n'aide pas à s'en faire *une idée intéressante*. Il faut dire que la technologie et ses innovations, ces maîtres-mots du discours économique contemporain, occupent l'espace médiatique et offrent des sciences en général, et c'est encore plus vrai des mathématiques, une fausse image essentiellement utilitaire et d'une pauvreté inouïe. Il n'est donc pas inutile de dissiper quelques idées reçues sur « l'utilité » de la science. Tout d'abord, la technique est aussi vieille que l'humanité et l'a accompagnée depuis toujours. La domestication du feu, par exemple, remonte à plus de 350 000 ans voire beaucoup plus, et la domestication des animaux ainsi que la naissance de l'agriculture remontent à plus de 10 000 ans, alors que les balbutiements de l'aventure scientifique sont très probablement postérieurs à l'invention de l'écriture soit à peine 4 000 ans avant notre ère. Le lien entre la science et la technique est en fait extrêmement récent et remonte à peine à la fin du XIX^e siècle ou début du XX^e siècle. Par exemple, le savoir-faire technique des Grecs était le fait d'artisans esclaves et ne devait rien au savoir mathématique extrêmement sophistiqué de l'époque qui n'avait aucune utilité pratique sinon comme activité philosophique réservée à une petite aristocratie de philosophes qui d'ailleurs, comme Platon, méprisaient les « logisticiens », ceux qui ne savent manipuler que les nombres concrets et étaient incapables de s'élever au niveau des abstractions arithmétiques ! De même, à Babylone, l'astronomie était très développée mais n'avait d'autre fonction que religieuse et divinatoire : lire le destin des hommes dans les configurations astrales, c'est-à-dire les positions des astres, planètes, étoiles et constellations dans le ciel. Ce n'est qu'à la Renaissance, en Europe, que naquit le projet moderne de se rendre « maîtres et possesseurs de la nature » où la vision contemplative de la science s'efface progressivement au profit d'une science perçue surtout comme un *pouvoir* d'action sur la nature². Ce projet scientifique est d'ailleurs resté très théorique en dépit du développement de la science moderne. En effet, des découvertes techniques majeures sont restées largement indépendantes de la science. Ainsi, la machine à vapeur, à l'origine de la révolution industrielle anglaise puis européenne, est née bien avant la connaissance des lois de la science thermodynamique³ qu'elle a d'ailleurs suscitée après coup ! La deuxième moitié du XIX^e siècle en revanche a été une transition majeure dans les rapports entre science et technique (ou technologie comme on dit maintenant), notamment dans l'industrie chimique ou électrique. Cette tendance s'est renforcée depuis ce moment-là et la technologie de pointe, comme par exemple l'industrie nucléaire civile ou militaire,

2. C'est aussi l'époque des grandes explorations du monde et... de sa conquête !

3. La science de la chaleur et des machines thermiques.

l'industrie aéronautique, l'électronique. ..., ne pouvait plus se développer sans lien étroit avec la recherche fondamentale. Pour plus d'information, je vous renvoie à une conférence très intéressante de Jean-Marc Lévy-Leblond (*À quoi sert la science ?*, Bayard, 2008).

Pour en revenir aux mathématiques, il est important d'avoir un peu de recul par rapport à leurs « *applications* » auxquelles on les réduit d'ordinaire et d'essayer d'avoir de cette science une vue plus *interne* beaucoup plus profonde et riche. Cela ne signifie pas bien sûr qu'il faille ignorer les interactions fécondes avec les autres sciences ou le monde industriel. Il faut juste *ne pas confondre le savoir et le savoir-faire*⁴ que l'on a tendance à identifier comme si, par exemple, on devait apprécier la théorie de la relativité d'Einstein à son rôle dans la mise au point du GPS⁵, ou apprécier la biologie à l'aune des médicaments que l'on peut en attendre⁶. Cette tendance pernicieuse, et probablement irréversible, à mettre en avant les applications vient parfois des scientifiques eux-mêmes pour justifier, aux yeux des pouvoirs publics, les crédits de recherche dont ils ont besoin. Elle tient aussi au fait que la recherche scientifique est devenue tellement spécialisée que les scientifiques eux-mêmes peinent à en saisir les grandes lignes ; il est donc plus aisé d'en donner une vue caricaturale à travers des « applications » accessibles au grand public.

4. Même s'il peut exister parfois des interactions entre elles, on ne doit pas confondre la science et la technologie ; il s'agit de *deux mondes* différents.

5. Le fonctionnement du GPS repose sur la géolocalisation très précise par satellites qui nécessite une compréhension extrêmement fine du temps fournie par la théorie de la relativité.

6. C'est là toute la question de la place sans cesse plus large de la technoscience (c'est-à-dire la science au service d'impératifs technologiques dont on attend des retombées économiques) qui risque, à terme, de marginaliser la science comme production de savoirs, mue par des intérêts intellectuels non marchands. Bien au delà de ce petit texte, je conseille de consulter autant que possible le très beau *Dictionnaire culturel des sciences*, Éditions du Seuil, Regard, 2001 (sous la direction de N. Witkowski).

2. Mathématiques pures ou appliquées ?

Il est courant de séparer les mathématiques en mathématiques pures, c'est-à-dire la production de connaissances théoriques, et mathématiques appliquées, soit l'application de ces connaissances aux autres sciences par exemple. Cette séparation est largement artificielle car les mathématiques appliquées ne sont pas une simple application de résultats théoriques connus à des questions issues des autres sciences (physique, informatique, ...). Très souvent, on doit construire des outils mathématiques adaptés à ces questions pour pouvoir les résoudre. Et c'est là de la recherche mathématique à part entière. En ce sens, les autres sciences contribuent souvent au développement des mathématiques en leur posant des questions théoriques (et parfois pratiques) inédites. En fait, la distinction, si l'on y tient vraiment, relève plutôt d'un état d'esprit : le mathématicien pur développe les mathématiques pour elles-mêmes en résolvant des questions « internes » qui viennent de la théorie existante tandis que le mathématicien appliqué développe aussi les mathématiques mais à travers des problèmes provenant d'autres sciences. Une fois le problème issu d'une autre science formulé en langage mathématique, sa résolution n'est pas pour autant facile et enrichit tout aussi bien les mathématiques. Les problèmes faciles, on dit *triviaux* dans notre jargon, sont généralement évités par les chercheurs. Les deux états d'esprit sont complémentaires et se retrouvent parfois chez la même personne : il faut répondre aux problèmes « internes » posés par la théorie mathématique existante mais aussi renouveler les mathématiques par des problèmes nouveaux venant par exemple des autres sciences sous peine de sclérose de la théorie qui se met à « tourner à vide ¹ ». L'histoire des sciences contient des exemples de domaines mathématiques qui se sont « éteints » faute de problèmes significatifs à étudier.

1. Les progrès mathématiques, qu'ils soient modestes ou importants, consistent souvent en des « *inflexions* » de la recherche liées aux interactions d'un domaine mathématique avec un domaine voisin ou à l'étude de nouveaux problèmes issus des autres sciences.

C'est pourquoi le bon mathématicien est toujours à la recherche de problèmes « *intéressants*² ». En 1900, dans une très célèbre conférence à Paris, Hilbert, l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, disait : « *Un nouveau problème, lorsqu'il tire son origine du monde extérieur, est comme un sauvageon qui ne se développe et ne porte des fruits que lorsqu'il a été greffé avec tous les soins de l'art du jardinier sur la souche mère, c'est-à-dire sur les connaissances mathématiques que nous possédons complètement.* »

2. Un problème est considéré comme intéressant quand sa résolution n'est pas élémentaire et fait progresser les mathématiques par exemple en introduisant de nouvelles notions et une nouvelle méthode permettant de résoudre d'autres problèmes ou permettant une « *compréhension plus profonde* » de problèmes déjà résolus par d'autres méthodes.

3. Un peu d'histoire

Je voudrais maintenant rappeler, de manière très succincte bien sûr, quelques grandes étapes de l'évolution des mathématiques et leurs remarquables interactions avec la physique. Si toutes les civilisations antiques (Égypte, Mésopotamie, Chine, ...) ont dû, pour leurs besoins pratiques (architecture, arpentage, etc.) développer des procédés de calcul arithmétique et de mesure des grandeurs, seuls les Grecs¹, à partir du VI^e siècle avant notre ère, ont su créer un mode de pensée *systématique et non utilitaire* inédit basé sur l'idée de *démonstration*. Bien entendu, les Grecs n'ont pas inventé les mathématiques ; mais partant des savoirs antérieurs, notamment ceux des Égyptiens et des Babyloniens, ils ont porté les mathématiques à une perfection unique dans l'Antiquité qui a perduré quasiment jusqu'au XIX^e siècle². Les *Éléments* d'Euclide³ résument le savoir mathématique (géométrie et arithmétique) accumulé durant plusieurs siècles et présenté de manière déductive et axiomatique⁴. Les Grecs ne manipulaient pas des nombres à proprement parler comme nous le faisons aujourd'hui mais plutôt des *rapports de grandeurs homogènes*, longueurs, aires planes, volumes, poids, etc. et étaient convaincus que deux grandeurs homogènes étaient *commensurables*, c'est-à-dire qu'il existait une grandeur de même type dont elles étaient des multiples entiers, ce qui signifie que leur rapport est rationnel $\frac{p}{q}$. La découverte des irrationnels, par exemple le rapport de la diagonale du carré à son côté, ne les a pas perturbés pour autant et ils ont continué à manipuler rigoureuse-

1. Ce terme ne renvoie pas à la seule Grèce classique mais au *monde hellénistique*, du pourtour méditerranéen notamment, où les élites étaient de culture grecque ; Alexandrie, en Égypte, était alors le grand centre intellectuel du monde méditerranéen.

2. Voir l'article de Jean-François Dortier : *Y a-t-il eu un miracle grec ?* paru dans le Hors-série de la revue « Sciences humaines » intitulé *Histoire et philosophie des sciences*, n° 31, janvier-février 2001.

3. Euclide vivait à Alexandrie au début du III^e siècle avant notre ère. Ses *Éléments* consistent en treize livres sur la géométrie, l'arithmétique et l'algèbre géométrique (la résolution des problèmes algébriques par des constructions géométriques).

4. Cela veut dire que, mis à part quelques *notions primitives* (c'est-à-dire non définies) comme par exemple le point, la droite, le plan, « appartenir à », « être entre deux points », ... et des *axiomes* (ce qui est considéré comme évident) comme par exemple le fait qu'il existe une droite (et une seule) passant par deux points donnés, tous les énoncés mathématiques des *Éléments* d'Euclide (les théorèmes) sont déduits de manière logique les uns des autres.

ment ces rapports « comme si » c'étaient des nombres (rationnels). Ils savaient, par des constructions géométriques, faire des calculs sur ces grandeurs : additionner, multiplier, diviser, etc. Grâce à des génies comme Eudoxe ou Archimède, ils savaient aussi calculer des aires, des volumes par une technique ingénieuse, la méthode d'exhaustion, qui préfigure notre calcul intégral moderne. Ils savaient résoudre des équations (elles n'étaient pas formulées comme nous le faisons actuellement) par des procédés géométriques... En dépit de ce savoir prodigieux, la notion de *fonction*, qui est incontournable aujourd'hui, était étrangère aux Grecs comme d'ailleurs notre numération de position actuelle et son zéro ! À la suite de la chute de l'empire romain d'Occident, on a assisté à une éclipse du savoir mathématique grec qui a alors péniblement perduré dans l'empire byzantin⁵. C'est à partir du VIII^e siècle, avec l'éclosion de la civilisation arabo-musulmane, au contact notamment des civilisations byzantine, perse et indienne, que le savoir mathématique a repris son essor pendant plusieurs siècles avant d'être transmis à son tour aux Latins à partir du XII^e siècle⁶. L'essor tardif de l'algèbre est dû notamment à l'absence de notations (abréviations) commodes. L'usage de lettres, à partir de la Renaissance, pour désigner des inconnues a été une véritable *libération* et a permis un progrès inouï : la notion de fonction (polynomiale) émerge lentement ; on apprend accidentellement à manipuler les nombres dits *imaginaires* « comme s'ils existaient » pour résoudre des équations polynomiales du troisième et quatrième degrés. Les mathématiciens de cette époque ne se doutaient pas que de tels nombres existent bel et bien, au même titre que les nombres entiers, et allaient jouer un rôle considérable en mathématiques et en physique. Ces nombres, appelés nombres complexes depuis, forment un ensemble noté $\mathbb{C}$, plus grand que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, où des équations qui n'ont pas de solutions réelles (dans $\mathbb{R}$) peuvent avoir des solutions complexes (dans $\mathbb{C}$). Ainsi l'équation $x^2 + 1 = 0$ sans solution dans $\mathbb{R}$ (il n'existe pas de nombre réel dont le carré est égal à -1) en a deux dans $\mathbb{C}$ notées i et $-i$.

La méthode des coordonnées qui apparaît au XVII^e siècle avec Descartes (mais aussi Fermat) consiste à représenter un point du plan par un couple de nombres, ses coordonnées. Elle a permis de transformer les problèmes de géométrie en « problèmes d'algèbre » en travaillant avec « les équations des figures » ; par exemple une droite du plan a pour équation (avec a ou b non nul)

$$ax + by + c = 0$$

un cercle a pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

etc. L'idée d'une grandeur dépendant d'une autre et que l'on représente par un

5. Curieusement, la grande civilisation romaine n'a pas participé au développement des sciences en général et des mathématiques en particulier.

6. Voir le chapitre 5 du livre de l'historien A. Djebbar *Une histoire de la science arabe* (Éditions du Seuil, 2001) sur l'apport arabe aux mathématiques. Rappelons que dans l'empire arabo-musulman, la langue arabe (« l'anglais » de l'époque !) était la langue savante des musulmans, juifs ou chrétiens de l'empire.

graphique apparaît déjà au xiv^e siècle chez Oresme et sa conjonction avec la méthode des coordonnées a fini par familiariser avec l'idée de fonction

$$x \mapsto y = f(x)$$

que l'on peut représenter par une courbe ou graphique.

Le concept de fonction est à la base de la plus grande invention mathématique : *le calcul infinitésimal*. Ce calcul provient de deux préoccupations apparemment assez différentes :

1. Déjà Euclide, en enserrant un cercle entre deux suites de polygones réguliers *inscrits* et *circonsrits*⁷ d'aires respectives p_n et q_n , a pu montrer que

$$(q_{n+1} - p_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(q_n - p_n)$$

en exhibant ainsi une suite d'intervalles emboîtés $([p_{n+1}, q_{n+1}]$ inclus dans $[p_n, q_n]$) dont la longueur se rapproche de zéro à mesure que n augmente, ce qui lui a permis de calculer l'aire du disque comme étant l'unique valeur comprise dans tous ces intervalles. Il s'agit de la méthode dite d'exhaustion, due probablement à Eudoxe, qui a permis à ce dernier de montrer par exemple que le volume d'un cône de révolution est égal au tiers de celui du cylindre de mêmes base et hauteur. Cette méthode est reprise au $xvii^e$ siècle, notamment par Fermat, pour calculer l'aire comprise sous le graphe des fonctions puissances $x \mapsto y = x^n$.

2. À cette même époque, on s'intéressait aussi, notamment avec Fermat, à la détermination des *tangentes* à une courbe représentant une fonction $f(x)$; ce type de calcul a partie liée avec ce que l'on appelle depuis la *dérivée*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

définie comme une *limite* de quotients où le numérateur *et* le dénominateur tendent simultanément vers zéro. C'est la maîtrise de calculs liés à ces *passages à la limite* qui a ouvert une nouvelle ère des mathématiques. Les notations habituelles de cette dérivée de f par rapport à x sont

$$f'(x) \text{ ou } \frac{df}{dx}(x).$$

Ce sont Newton et Leibniz, indépendamment l'un de l'autre, qui ont formalisé la notion de dérivée, inventant ainsi *le calcul infinitésimal*. Ce calcul permet alors de

7. Euclide inscrit dans un cercle un carré P_1 puis, en prenant successivement les milieux des arcs sous-tendus, des polygones $P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ à 8, 16, $\dots, 2^{n+1}, \dots$ côtés. Il considère aussi les polygones circonscrits $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ dont les côtés sont tangents au cercle aux sommets des polygones inscrits.

définir correctement la notion clé de vitesse *instantanée* $v(t) = \frac{dy}{dt}(t)$ (la dérivée de la fonction position $t \mapsto y(t)$ par rapport au temps t) et d'accélération *instantanée* $a(t) = \frac{dv}{dt}(t)$ (la dérivée de la fonction vitesse $t \mapsto v(t)$ par rapport au temps t) à la base de la mécanique newtonienne qui prenait alors le relais des travaux de Kepler et Galilée. Ainsi l'accélération est la dérivée *seconde* de la fonction position $t \mapsto y(t)$ par rapport au temps t (on dérive deux fois) que l'on note aussi $a(t) = \frac{d^2y}{dt^2}(t)$. La loi fondamentale de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

qui relie la force $\vec{F}$ agissant sur un point matériel (de masse m) et son accélération $\vec{a}$ a permis alors de retrouver les lois de Kepler sur les trajectoires elliptiques des planètes du système solaire et de faire d'innombrables autres découvertes. C'est ce prodigieux outil qui a manqué aux Grecs pour édifier *une théorie du mouvement* alors qu'ils avaient une remarquable compréhension des *équilibres statiques*⁸.

Le lien entre les calculs d'aire sous des courbes et celui de tangentes à des courbes devint clair quand on a réalisé que si l'on note $F(x)$ l'aire située sous la courbe représentative de f entre, disons, les abscisses 0 et x , alors la dérivée de cette nouvelle fonction $x \mapsto F(x)$ n'est autre que la fonction $f(x)$. On dira alors que F est une primitive de la fonction f . Ainsi, l'aire située sous la courbe représentative de f entre les abscisses a et b sera donnée par $F(b) - F(a)$ et sera notée plus tard comme *intégrale*

$$\int_a^b f(t) dt.$$

Cela a constitué une étape majeure dans l'évolution des mathématiques et de leurs applications. La notion de limite et avec elle la notion d'intégrale (*intégrale de Riemann*), sous-jacente à tout cela, ne seront quant à elles correctement comprises qu'au XIX^e siècle. La mécanique newtonienne, basée alors sur le calcul infinitésimal (on dit aussi le calcul différentiel), prit son essor tandis que sa *mathématisation* de plus en plus poussée fut poursuivie par des générations de grands mathématiciens pour faire face aux nombreux problèmes issus de la mécanique céleste.

En particulier, l'étude des *équations différentielles* (où figurent une fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ d'une variable t et ses dérivées) du *premier* ordre comme par exemple

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

(où apparaît juste la dérivée première $\frac{dy}{dt}$) ou du *second* ordre comme par exemple la

8. Voir par exemple l'hydrostatique et la théorie des leviers d'Archimède.

loi fondamentale de Newton

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F(y)$$

(où apparaît la dérivée seconde $\frac{d^2 y}{dt^2}$) va alors se développer.

En physique apparaissent naturellement des fonctions de plusieurs variables. Par exemple, la température T à la surface de la Terre dépend du point x (l'endroit où on la mesure) mais aussi du temps t (le moment où on le mesure); c'est donc naturellement une fonction $(t, x) \mapsto T(t, x)$ de plusieurs variables. De même, la vitesse V d'un fluide (un océan ou l'atmosphère) dépend des coordonnées (x, y, z) du point où on la mesure mais aussi du temps t ; c'est donc naturellement une fonction $(t, x, y, z) \mapsto V(t, x, y, z)$ de plusieurs variables. Très vite, l'idée de dériver des fonctions de plusieurs variables, par exemple de deux variables

$$(x, y) \mapsto f(x, y),$$

par rapport à *chacune* des variables (on fixe une variable et on dérive par rapport à l'autre) notées

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

(et appelées les *dérivées partielles* de f), fit son chemin, en particulier pour les besoins de la mécanique des « milieux continus », comme les fluides, introduisant ainsi des *équations aux dérivées partielles*, c'est-à-dire des équations où figurent une fonction inconnue de plusieurs variables et ses dérivées partielles. Parmi ces équations figurent notamment les équations de Navier-Stokes et les équations d'Euler qui jouent un rôle central dans la compréhension du mouvement des océans ou de l'atmosphère terrestre et donc finalement dans la compréhension de la météorologie et du climat. Le XIX^e siècle a vu la compréhension des phénomènes électriques et magnétiques et leur synthèse, par Maxwell, sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles qui porte son nom⁹. Au même moment naquit la théorie cinétique des gaz¹⁰, avec Maxwell et surtout Boltzmann, en vue de donner un nouveau fondement à la thermodynamique basé sur l'analyse statistique des particules, créant ainsi une *mécanique statistique*. Contrairement aux équations différentielles, les équations aux dérivées partielles sont beaucoup plus compliquées à résoudre et n'ont commencé à être comprises qu'au début du XX^e siècle avec l'invention d'un nouveau domaine des mathématiques, *l'analyse fonctionnelle*¹¹. Mais n'allons pas trop vite ! Les fonctions

9. Les phénomènes électromagnétiques à la base des télécommunications sont régis par les équations de Maxwell.

10. Cette théorie propose un modèle physique permettant de comprendre les propriétés *macroscopiques* d'un gaz (par exemple sa pression, sa température, etc.) à partir de l'analyse des mouvements *microscopiques* des molécules de ce gaz.

11. Les équations différentielles ou aux dérivées partielles issues de la physique se sont enrichies au cours du XX^e siècle d'autres types d'équations issus notamment de la biologie mathématique qui, en plus des dérivées partielles, font intervenir des termes dits *intégraux* (rendant compte de phénomènes biologiques *non locaux*); on a là un exemple de *renouvellement* dans la recherche mathématique.

de la variable *complexe* $f(z)$ (où $z = x + iy$ est complexe, i vérifiant $i^2 = -1$) dérivables au sens complexe (on dit aussi holomorphes), c'est-à-dire telles que la limite

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe, étudiées au XIX^e siècle notamment par Cauchy, ont révélé des propriétés mathématiques inouïes qu'utilisent depuis tous les scientifiques. Après la naissance du calcul différentiel et l'usage généralisé des limites, on a commencé à manipuler des « sommes infinies » comme *limites* de sommes finies (on dit des séries) et des produits infinis (comme *limites* de produits finis) de nombres mais aussi de fonctions. Ainsi la merveilleuse formule d'Euler

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1^s}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2^s}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \cdots} = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$$

(où $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ est la suite des nombres premiers, c'est-à-dire ceux qui n'ont pas de diviseurs hormis eux-mêmes et 1) qui exprime, sous la forme d'un produit infini, la fonction zêta (ζ) de Riemann (définie pour $s > 1$)

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$$

La fonction zêta se prolonge à toutes les valeurs complexes $s \neq 1$ et joue un rôle important en *théorie des nombres* pour la compréhension de la *répartition* des nombres premiers. Une conjecture¹² (l'hypothèse de Riemann), concernant la localisation des racines complexes de cette fonction¹³ et qui remonte à plus de 150 ans, vaudrait probablement la médaille Fields, la plus haute distinction en mathématiques, à celui ou celle qui la résoudrait!

Les sommes infinies de fonctions trigonométriques $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$ appelées aussi *séries de Fourier*

$$(3.1) \quad \sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

jouèrent ainsi un rôle très important dans la résolution des équations aux dérivées partielles comme par exemple l'équation *des ondes*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = 0$$

ou celle de la *chaleur*

$$(3.2) \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = 0$$

12. Une conjecture est un énoncé dont on a de « bonnes raisons » de penser qu'il est juste mais dont on n'a pas encore la preuve mathématique.

13. Les racines de ζ sont les nombres complexes s tels que $\zeta(s) = 0$.

(écrites ici en une seule variable d'espace x). Le XIX^e siècle a aussi été une période d'introduction d'une *rigueur* accrue en mathématiques notamment en Analyse grâce à Cauchy et Weierstrass : clarification de la notion de limite, construction rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, clarification de la notion de fonction etc.¹⁴. Ainsi, à la fin du XIX^e siècle, Hilbert axiomatise la géométrie d'Euclide en la débarrassant définitivement du recours à l'intuition qui l'avait toujours accompagnée¹⁵. L'arithmétique de son côté est axiomatisée par Peano¹⁶. On assiste aussi à un renversement de perspective où c'est le concept de *nombre entier* qui va se retrouver au fondement des mathématiques et non plus la géométrie. L'étude des points x où une série de Fourier ne converge pas a conduit Cantor à la construction d'une *théorie des ensembles infinis* qui sera utilisée au XX^e siècle pour refonder la mathématique tout entière. Grâce à Cantor, l'*infini* (actuel) et ses paradoxes qui avaient tant tourmenté les philosophes (et les théologiens) depuis l'Antiquité est devenu objet de science ouvrant des perspectives inouïes en mathématiques, ce qui n'a pas échappé à Hilbert qui s'est alors exclamé : « *Nul ne doit nous exclure du Paradis que Cantor a créé* » ! Le XIX^e siècle a aussi connu l'émergence de géométries non-euclidiennes qui ne respectent pas le postulat (« évident ») d'Euclide qui veut qu'à partir d'un point extérieur à une droite donnée D il passe une droite et une seule parallèle à D . L'existence de telles géométries tout à fait cohérentes mais néanmoins très différentes de notre géométrie habituelle a fini par convaincre les mathématiciens que « la vérité » d'une théorie, une géométrie par exemple, ne réside pas dans le « monde physique », retirant ainsi à l'univers mathématique tout fondement physique ; l'axiomatisation de la géométrie d'Euclide par Hilbert va d'ailleurs pleinement dans ce sens (cela ne va pas sans poser de redoutables problèmes philosophiques sur la *signification d'une « vérité mathématique » et son rapport au réel* et a donné naissance à des courants philosophiques à l'intérieur même des mathématiques qu'il n'est pas possible d'évoquer ici). Au début du XX^e siècle, la relativité générale d'Einstein, basée sur des équations aux dérivées partielles, fournira une profonde explication de la gravitation par la géométrie (non euclidienne) de l'espace-temps¹⁷ dont les fondements mathématiques avaient été posés par Riemann quelques décennies auparavant.

L'étude des séries de Fourier (3.1) a révélé que les fonctions trigonométriques $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$ avaient des propriétés « d'orthogonalité » qui rappelaient tout à fait celles des vecteurs de notre espace usuel à trois dimensions.

14. Il faut dire que toutes ces notions, perçues très intuitivement, étaient entourées de beaucoup de vague conceptuel et par conséquent manipulées sans grande rigueur par les mathématiciens.

15. En géométrie classique, on raisonne sur des figures. De la sorte, on s'aide de ce que « l'on voit » sur la figure. Il arrivait parfois au Moyen Âge que, comme seule démonstration, on se contentait de dire « on voit que... ». Or une preuve rigoureuse se doit d'être menée *indépendamment des figures*. Hilbert a explicité toutes les *notions primitives* et tous les *axiomes* et a reconstruit toute la géométrie d'Euclide de manière rigoureuse et abstraite (sans figures!).

16. Peano a explicité des *objets primitifs* et des *axiomes* pour construire rigoureusement l'ensemble des entiers naturels à la base de l'arithmétique.

17. Ce n'est plus la mystérieuse force d'attraction newtonienne à distance !

L'analogie s'est révélée très féconde et a permis la construction d'espaces de *dimension infinie* (les fonctions deviennent alors des « vecteurs » ayant une infinité de coordonnées) munis d'un produit scalaire, les *espaces de Hilbert*. Grâce à von Neumann, la physique quantique¹⁸, née au début du xx^e siècle et pilier de la physique actuelle, a trouvé dans les espaces de Hilbert (et dans ce que l'on appelle les opérateurs auto-adjoints) son fondement mathématique.

Au delà de toute préoccupation utilitaire, les implications intellectuelles et philosophiques de telles avancées conceptuelles sont absolument considérables et ne sauraient être ignorées du grand public cultivé. On est là bien sûr très très loin de la vulgarisation des sciences et des mathématiques par les objets de la technologie qu'ils rendent possible !

Le xx^e siècle a poursuivi cette refondation des mathématiques ainsi que leur ramification en diverses théories de plus en plus puissantes, mais aussi de plus en plus abstraites, qui ont permis de résoudre de nombreux problèmes qui étaient hors de portée des outils mathématiques d'avant ; il semblerait même qu'il s'est fait plus de mathématiques depuis les années 1930 que pendant toute la période précédente depuis les Grecs ! Pour plus d'information, je vous renvoie au livre de G. Barthélemy *2 500 ans de mathématiques : l'évolution des idées* (Ellipses 1999) pour une très belle introduction aux grandes étapes de l'évolution des mathématiques. Plus tard, vous pourrez lire avec profit le livre de J. Dieudonné *Pour l'honneur de l'esprit humain* (Hachette, 1987) pour un autre grand voyage fascinant à l'intérieur des mathématiques¹⁹.

Je voudrais terminer ce petit historique par quelques informations complémentaires qui donnent une idée du vertigineux foisonnement intellectuel du début de xx^e siècle. L'équation de la chaleur (3.2), qui avait été introduite par Fourier au xix^e siècle pour comprendre la propagation de la chaleur dans les corps matériels, a fait une apparition inattendue dans l'étude du mouvement brownien²⁰ par Einstein en 1905 (il ne faut pas réduire l'apport d'Einstein à la relativité !) créant ainsi un pont entre la théorie des probabilités²¹ et les équations aux dérivées partielles. Notons aussi que Bachelier avait déjà introduit le mouvement brownien en mathématiques financières, dans sa thèse *Théorie de la spéculation* soutenue à Besançon en 1900. Ces

18. Les trois premières décennies du xx^e siècle ont vu la mise en place d'une nouvelle physique (la physique quantique) qui allait bouleverser toutes nos connaissances sur la matière.

19. Le titre de ce livre est tiré d'une lettre (citée en partie dans le livre) du mathématicien Jacobi à Legendre : « [...] M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde [...] ».

20. Le comportement erratique des particules de pollen dans un liquide observé par le botaniste R. Brown en 1827.

21. La théorie des probabilités montre que le hasard n'est pas synonyme de chaos mais obéit à des lois. Sa version moderne a été formalisée par Kolmogorov dans les années 1930 grâce à l'invention par Lebesgue, au tout début du xx^e siècle, d'une nouvelle théorie de l'intégrale qui généralise celle de Riemann.

études du mouvement brownien ont permis au physicien Perrin ²² de faire différentes expériences cruciales *validant l'hypothèse de l'existence des atomes* (très contestée durant le XIX^e siècle par les tenants de la thermodynamique, les « énergétistes »), en estimant le nombre d'Avogadro ²³, et permettant ainsi l'essor de la physique statistique inaugurée notamment par Boltzmann. Comme on le voit, il y a là beaucoup plus que de simples « interactions » entre les mathématiques et la physique !!

À vrai dire, les mathématiques sont très loin d'être un simple langage en physique théorique : elles se font « *outils de pensée* ». Einstein affirmait déjà : « *Ma conviction est que nous sommes en mesure, grâce à une construction purement mathématique, de trouver les concepts, ainsi que les lois qui les relient, propres à nous ouvrir les portes de la compréhension des phénomènes naturels* ». Ainsi, grâce à l'équation qui porte son nom, Dirac a prédit l'existence de l'antimatière ! On peut en dire autant du boson de Higgs, qui explique pourquoi les particules élémentaires ont une masse, découvert en 2012 au CERN ²⁴ mais qui avait déjà été prédit par des physiciens théoriciens en 1964 ! En 1959, Wigner, l'un des plus grands physiciens du siècle dernier avait prononcé une célèbre conférence intitulée « *la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature* » ! Le physicien et philosophe Étienne Klein ²⁵ parle des mathématiques comme d'un « *treuil ontologique* » permettant de prédire de nouvelles particules qui sont alors mises en évidence après coup de manière expérimentale.

On voit là l'importance considérable de pans entiers des mathématiques (pas toutes bien sûr) en physique. Bien entendu, le rôle des mathématiques dans les autres sciences est beaucoup moins spectaculaire mais néanmoins de plus en plus important, notamment en informatique, économie, biologie, écologie, etc. Enfin, l'émergence des premiers ordinateurs ²⁶ dans le monde scientifique pour faire de gros calculs ²⁷ depuis la seconde guerre mondiale, puis leur développement massif à la fin du siècle dernier ont propulsé un nouveau domaine des mathématiques, *le calcul scientifique*, à cheval entre les mathématiques et le calcul par ordinateur, qui intervient dans toutes les sciences.

22. Jean Perrin (1870-1942) est physicien et chimiste, prix Nobel de physique en 1926. Sous-secrétaire d'état à la Recherche dans les années 30, il a été à l'origine de la création en 1939 du Centre national de la recherche scientifique (le CNRS). Il est aussi un vulgarisateur de talent ; son livre *Les atomes*, paru en 1913, disponible actuellement chez Flammarion, est un classique qui évoque l'histoire puis le triomphe de la théorie atomique dans ses rapports avec la chimie.

23. Tout gaz (parfait), occupant environ 22 litres sous certaines pression et température, contient le même nombre (dit d'Avogadro) de molécules soit environ 6×10^{23} .

24. Le CERN est le laboratoire européen pour la physique des particules, situé près de Genève, qui abrite le plus grand accélérateur de particules au monde.

25. Voir son livre *Le monde selon Étienne Klein* (Équateurs Essais, 2014) qui reprend ses chroniques sur France Culture.

26. Le mathématicien von Neumann y a contribué.

27. Cela a commencé durant la seconde guerre mondiale à Los Alamos, aux États-Unis, avec le projet Manhattan pour fabriquer la première bombe atomique qui a fait d'innombrables victimes innocentes au Japon. C'est le premier grand projet technoscientifique de l'histoire qui montre que, pour le meilleur comme pour le pire, la science est désormais largement intégrée aux projets industriels et militaires de nos sociétés.

4. Pourquoi apprendre des mathématiques ?

Ces mathématiques « modernes ¹ » que j'ai esquissées très rapidement ne se voient pas bien sûr dans les programmes de mathématiques des lycées. D'un point de vue pédagogique, cela se comprend assez bien car il faut avoir une familiarité suffisante avec les mathématiques « traditionnelles » avant de pouvoir entrer utilement dans des théories plus puissantes mais aussi beaucoup plus abstraites. Déjà dans les années 60 et 70, l'introduction d'un usage inutilement abstrait de la théorie des ensembles a créé un malaise puis une réaction salutaire des parents et du corps enseignant. À l'université en revanche, pour ceux qui se destinent à des études de mathématiques, en vue de l'enseignement ou la recherche par exemple, les diverses théories mathématiques sont introduites progressivement et leur enseignement ne pose pas de problème particulier. À vrai dire, une théorie abstraite n'est pas difficile ; c'est plutôt le contraire qui est vrai car une théorie abstraite repose uniquement sur ses quelques axiomes constitutifs et l'on n'est donc pas perturbé par les nombreux détails périphériques qui peuvent encombrer une théorie plus concrète mais aussi plus riche. Le caractère *a priori* abstrait s'estompe progressivement puisque ces différentes théories s'étaient les unes les autres et se donnent mutuellement du sens, ce qui permet leur assimilation. Il y a une profonde unité des mathématiques qui relie ses diverses composantes et qui en fait toute la beauté, et cela n'a pu se vérifier qu'après leur profonde refonte entre les ^{xix}e et ^{xx}e siècles. Sachez que les idées sous-jacentes sont « simples » même si bien sûr, comme toujours, il faut un peu de temps pour s'exercer et se familiariser avec ces outils. Enfin, ces théories abstraites ne sont pas du tout gratuites ; elles ont été suscitées et motivées par des problèmes très concrets que l'on ne savait pas résoudre. Comme toujours, la résolution de problèmes en suscite souvent d'autres tout aussi excitants. L'état normal des mathématiques, comme des autres sciences d'ailleurs, est d'être perpétuellement en mouvement et réorganisation. Aussi les problèmes ouverts intéressants, qu'ils soient d'origine

1. En fait, elles ont presque un siècle mais n'ont été intégrées dans l'enseignement supérieur que beaucoup plus tard.

interne ou bien motivés par d'autres sciences ou par l'industrie, abondent dans tous les domaines des mathématiques ; il y a donc du pain sur la planche pour celles et ceux qui souhaitent se lancer dans l'excitante aventure de la recherche mathématique !

Je termine enfin en vous disant qu'au delà de la recherche, l'acquisition d'une vraie culture fondamentale, objectif de nos Licences et Masters, intégrant les composantes essentielles des mathématiques, vous évitera une spécialisation trop prématurée qui risque de vite devenir obsolète et vous aidera à mieux vous adapter à l'évolution de l'économie et des métiers. Que ce soit pour en faire votre métier comme chercheur, comme enseignant ou comme utilisateur dans d'autres sciences, ou même simplement comme utilisateur occasionnel dans d'autres métiers qui en font usage, vous ne pourrez pas ignorer la place des mathématiques comme un élément majeur de la culture de notre temps.