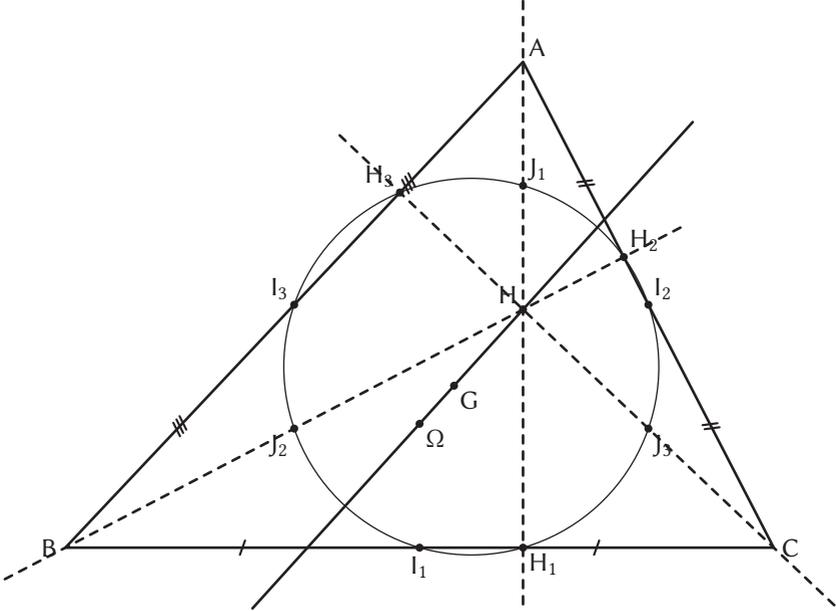


# Cercle d'Euler et de Feuerbach

François NETILLARD



# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Rappels</b>	<b>13</b>
1.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle . . . . .	13
1.2 Inversion plane . . . . .	16
1.3 Cercles orthogonaux . . . . .	17
1.4 Division harmonique . . . . .	18
1.5 Droites antiparallèles . . . . .	21
<b>2 La droite et le cercle d'Euler</b>	<b>25</b>
2.1 La droite d'Euler . . . . .	25
2.2 Le cercle d'Euler ou cercle des « neuf points » . . . . .	27
2.3 Le théorème de Feuerbach . . . . .	28
2.3.1 Première démonstration du théorème de Feuerbach . . . . .	30
2.3.2 Deuxième démonstration du théorème de Feuerbach . . . . .	33
<b>3 Aspect historique</b>	<b>39</b>
3.1 Aperçu historique du document à l'origine de la droite d'Euler . . . . .	39
3.2 Le cercle des neuf points en 1821 . . . . .	46
3.2.1 Démonstration historique de Brianchon et Poncelet . . . . .	46
3.2.2 Démonstration de Brianchon et Poncelet « actualisée » . . . . .	48
3.3 Karl Feuerbach et ses quatre nouveaux points (1822) . . . . .	50
3.4 Le cercle des neuf points en 1842 . . . . .	54
3.5 Autres contributions . . . . .	57
<b>Bibliographie</b>	<b>60</b>
<b>Liste des illustrations</b>	<b>61</b>

# Introduction

Le célèbre cercle des neuf points, plus connu en France sous le nom de cercle d'Euler, a fait l'objet de nombreuses recherches, démonstrations et découvertes. Le document que vous vous apprêtez à lire se veut accessible à un public d'élèves en fin de Lycée avec une spécialité Mathématiques, à des étudiants suivant un cursus scientifique ou à des enseignants qui veulent approfondir leurs connaissances en géométrie et plus particulièrement sur ce cercle.

L'histoire a retenu, semble-t-il à tort, le nom de cercle d'Euler car aucun document écrit par ce grand mathématicien ne permet de dire qu'on peut l'associer au cercle portant son nom. Cependant, le centre du cercle est sur une droite particulière qu'on associe également à Euler et qui, elle, est bien le fruit d'un de ses nombreux travaux ! Il semble donc indispensable de parler du cercle « et » de la droite d'Euler dans cet ouvrage.

Concernant le nom du cercle, on aurait très bien pu associer les noms des français C. Brianchon et J.-V. Poncelet ou le nom de l'allemand K. Feuerbach pour les résultats qu'ils ont obtenus concernant l'association entre le cercle et les neuf points remarquables qui lui sont associés. Nos voisins allemands n'ont d'ailleurs pas hésité à le nommer « cercle de Feuerbach ». Cette question concernant la paternité mathématique du cercle des neuf points, ainsi que l'intérêt porté au travers de l'histoire pour lui nous motivent à nous plonger dans des démonstrations historiques et modernes des mathématiciens nommés précédemment ainsi que d'autres plus ou moins connus.

Le premier chapitre est consacré à des rappels et notions, parfois nouvelles, peut-être, pour le lecteur qui se veut indispensable à la compréhension de démonstrations centrales de cet ouvrage.

Dans le second chapitre, nous verrons des démonstrations modernes des propriétés associées à la droite et surtout au cercle d'Euler. La dernière démonstration de ce chapitre, consacrée au théorème de Feuerbach, pourra éventuellement faire le bonheur des candidats aux concours de l'agrégation interne et de l'agrégation externe en quête d'un point de développement inédit, ou encore d'enseignants en quête de belles applications géométriques pour leur cours ou pour un devoir en temps libre.

Le troisième et dernier chapitre, quant à lui, traitera de nombreuses démonstrations et commentaires historiques liés au cercle d'Euler. Cette partie nous fera découvrir la façon dont ces joyaux du passé ont été abordés à leur origine.



# 1. Rappels

Ce chapitre aborde des définitions et propriétés nécessaires à la compréhension de certaines démonstrations modernes données dans le chapitre suivant, et plus particulièrement à celles relatives au théorème de Feuerbach.

On se place dans un plan affine euclidien noté  $\mathcal{E}_2$ , muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Le plan  $\mathcal{E}_2$  pourra être identifié au plan complexe  $\mathbb{C}$ .

On suppose connues les notions de mesure algébrique et de produit scalaire.

## 1.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle

On désigne par  $(\mathcal{C}_{\Omega,R})$  un cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R (\geq 0)$ .

**Propriété 1.1.** Soit  $M$  un point de  $\mathcal{E}_2$ . Si on note  $A$  et  $B$  les points d'intersection d'une droite passant par  $M$  (qui coupe  $(\mathcal{C}_{\Omega,R})$  en deux points distincts) et de  $(\mathcal{C}_{\Omega,R})$ , alors :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \Omega M^2 - R^2.$$

### Démonstration

On note  $A'$  le point de  $(\mathcal{C}_{\Omega,R})$  diamétralement opposé à  $A$ .

$$\begin{aligned} \overline{MA} \cdot \overline{MB} &= \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B}) \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} \\ &= (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} - \overrightarrow{\Omega A}). \end{aligned}$$

Donc  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \Omega M^2 - R^2$ .

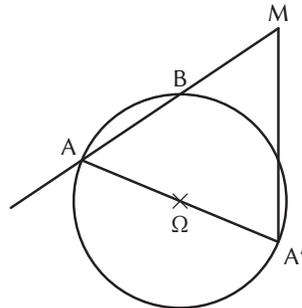


FIGURE 1.1 – Puissance d'un point par rapport à un cercle.

**Définition 1.2.** On appelle **puissance de  $M$ , point du plan  $\mathcal{E}_2$ , par rapport au cercle  $(\mathcal{C}_{\Omega,R})$**  le réel

$$\mathcal{P}(M) = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$$

où A et B sont deux points distincts de  $(\mathcal{C}_{\Omega,R})$  tels que  $M \in (AB)$ .

Ainsi :  $\mathcal{P}(M) = \Omega M^2 - R^2$ .

**Remarque**

On constate que  $\mathcal{P}(M) > 0$  lorsque M est extérieur au disque dont la frontière est  $(\mathcal{C}_{\Omega,R})$ .

**Propriété 1.3.**

Soit  $M \in \mathcal{E}_2$  extérieur au disque dont la frontière est  $(\mathcal{C}_{\Omega,R})$ , et T, T' les points de contact des tangentes à  $(\mathcal{C})$  issues de M.  
Alors  $\mathcal{P}(M) = MT^2 = MT'^2$ .

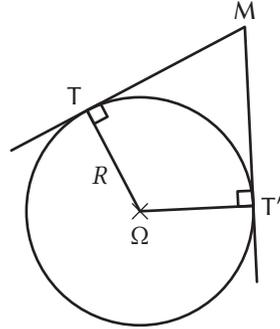


FIGURE 1.2 – Tangentes.

**Démonstration**

On applique le théorème de Pythagore aux triangles  $MT\Omega$  et  $MT'\Omega$  rectangles, respectivement, en T et en T'. Ainsi, on obtient :

$$\Omega M^2 = MT^2 + \Omega T^2 = MT'^2 + \Omega T'^2.$$

**Propriété 1.4.** Soit A, B, C, D  $\in \mathcal{E}_2$  quatre points, trois à trois non alignés et tels que  $(AB)$  ne soit pas parallèle à  $(CD)$ . On nomme M le point d'intersection de  $(AB)$  et  $(CD)$ .

A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ .

**Démonstration**

- Si A, B, C et D sont cocycliques, alors  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \mathcal{P}(M) = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ .
- Réciproquement, supposons  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ . Notons D' le point d'intersection de  $(MC)$  et du cercle circonscrit à ABC.  
Pour le cercle circonscrit à ABC :  $\overline{MC} \cdot \overline{MD} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \mathcal{P}(M) = \overline{MC} \cdot \overline{MD'}$ .  
Or  $M \neq C$ . Donc  $D' = D$ .

**Définition 1.5.** L'axe radical de deux cercles de centres distincts est l'ensemble des points ayant la même puissance par rapport à ces deux cercles.

**Propriété 1.6.** L'axe radical de deux cercles de centres distincts est une droite perpendiculaire à la droite passant par les centres des cercles.

### Démonstration

On note  $O$  et  $O'$  les centres des deux cercles, et  $R$  et  $R'$  leurs rayons respectifs.

L'ensemble des points  $M$  de même puissance par rapport aux deux cercles vérifie  $MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$  ou encore  $MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2$ .

Le second membre de l'égalité est constant. Notons-le  $k$ .

Ainsi :  $(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}) = k$ .

Soit  $I$  le milieu de  $[OO']$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(OO')$ .

On déduit de l'égalité précédente :

$$\overrightarrow{O'O} \cdot (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IO'}) = k.$$

Comme  $I$  est le milieu de  $[OO']$  et que les vecteurs  $\overrightarrow{O'O}$  et  $\overrightarrow{MH}$  sont orthogonaux, on obtient finalement, en sachant que les points  $O, I, H$  et  $O'$  sont alignés, l'égalité suivante :

$$2\overrightarrow{O'O} \cdot \overrightarrow{HI} = 2\overline{O'O} \cdot \overline{HI} = k.$$

Donc  $\overline{HI} = \frac{k}{2\overline{O'O}}$ , et on en déduit alors que  $H$  est fixe.

L'ensemble des points  $M$  ayant la même puissance par rapport aux deux cercles est donc une droite perpendiculaire à  $(OO')$ .

**Corollaire 1.7.** *Pour deux cercles sécants, l'axe radical est la droite passant par les points d'intersection des cercles.*

*Pour deux cercles tangents, l'axe radical est la tangente commune aux cercles.*

### Démonstration

Pour deux cercles sécants, les deux points d'intersection ont une puissance nulle par rapport à chacun des cercles et appartiennent donc à l'axe radical.

Pour deux cercles tangents, la tangente commune à ces cercles est perpendiculaire à la droite passant par les centres de ces cercles. Ainsi, cette tangente est parallèle à l'axe radical des cercles. Par ailleurs, le point de contact appartient à l'axe radical puisqu'il est de puissance nulle par rapport à chacun des cercles. On en déduit ainsi que l'axe radical de deux cercles tangents est la tangente commune aux deux cercles.

**Corollaire 1.8.** *Les axes radicaux de trois cercles, notés  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ , de centres respectifs  $O_1, O_2, O_3$  non alignés concourent en un point.*

### Démonstration

Soit  $(d_1)$  l'axe radical de  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ ,  $(d_2)$  l'axe radical de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_3$ , et  $(d_3)$  l'axe radical de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .

Comme les trois centres des cercles ne sont pas alignés, les axes radicaux  $(d_1)$  et  $(d_2)$  ne sont pas parallèles.

Soit  $l$  le point d'intersection de  $(d_1)$  et  $(d_2)$ .

$l$  appartient à  $(d_1)$ . Donc la puissance de  $l$  par rapport à  $\mathcal{C}_2$  et la puissance de  $l$  par rapport à  $\mathcal{C}_3$  sont égales.

$l$  appartient à  $(d_2)$ . Donc la puissance de  $l$  par rapport à  $\mathcal{C}_1$  et la puissance de  $l$  par rapport à  $\mathcal{C}_3$  sont égales.

On en déduit que la puissance de  $l$  par rapport à  $\mathcal{C}_1$  et la puissance de  $l$  par rapport à  $\mathcal{C}_2$  sont égales. Donc  $l$  appartient à  $(d_3)$ .

Ainsi, les trois axes  $(d_1)$ ,  $(d_2)$  et  $(d_3)$  sont concourants en  $l$ .

**Définition 1.9.** *Le point d'intersection des axes radicaux de trois cercles de centres non alignés est appelé centre radical des trois cercles.*

## 1.2 Inversion plane

**Définition 1.10.** *Soit  $O \in \mathcal{E}_2$  et  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . On appelle **inversion de pôle** (ou **centre**)  $O$  et **de rapport**  $k$ , l'application :*

$$I_{O,k} : \begin{cases} \mathcal{E}_2 \setminus \{O\} & \longrightarrow & \mathcal{E}_2 \setminus \{O\} \\ M & \longmapsto & M' \end{cases}$$

telle que  $\overrightarrow{OM'} = \frac{k}{OM^2} \overrightarrow{OM}$ .

**Propriété 1.11** (évidente).  $I_{O,k}$  est une involution de  $\mathcal{E}_2 \setminus \{O\}$ , c'est-à-dire que  $I_{O,k} \circ I_{O,k}$  est l'application identité.

**Propriété 1.12.** *On considère le centre  $O$  de l'inversion  $I_{O,k}$  comme origine du repère orthonormé.*

Pour tout  $M(x, y)$  de  $\mathcal{E}_2 \setminus \{O\}$ ,  $I_{O,k}(M)$  a pour coordonnées  $\left( \frac{kx}{x^2 + y^2}, \frac{ky}{x^2 + y^2} \right)$ .

### Démonstration

En notant  $M(x, y)$  et  $M'(x', y')$ , avec  $M' = I_{O,k}(M)$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $x' = \lambda x$ ,  $y' = \lambda y$ , et :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = k \iff \lambda x^2 + \lambda y^2 = k \iff \lambda = \frac{k}{x^2 + y^2}$$

d'où :  $x' = \frac{kx}{x^2 + y^2}$ ,  $y' = \frac{ky}{x^2 + y^2}$ .

**Propriété 1.13.** *L'ensemble des points de  $\mathcal{E}_2 \setminus \{O\}$  invariants par  $I_{O,k}$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{k}$ , appelé **cercle d'inversion** de  $I_{O,k}$ .*

**Démonstration**

On a, pour tout  $M$  de  $\mathcal{E}_2 \setminus \{O\}$  :

$$I_{O,k}(M) = M \iff \overrightarrow{OM} = \frac{k}{OM^2} \overrightarrow{OM} \iff k = OM^2.$$

**Propriété 1.14.** *L'image par  $I_{O,k}$  d'un cercle passant par  $O$  (et privé de  $O$ ) est une droite ne passant pas par  $O$ , et celle d'un cercle ne passant pas par  $O$  est un cercle ne passant pas par  $O$ .*

**Démonstration**

$I_{O,k}$  est involutive donc est bijective.

On considère le centre  $O$  de l'inversion  $I_{O,k}$  comme origine du repère.

Soit  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ ,  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

Alors, pour  $M(x, y)$ , distinct de  $O$ , un point de  $I_{O,k}(\mathcal{C})$ ,  $I_{O,k}(M)$  a pour coordonnées  $\left( \frac{kx}{x^2 + y^2}, \frac{ky}{x^2 + y^2} \right)$  d'après la propriété 1.12 et appartient à  $\mathcal{C}$  ( $I_{O,k}$  est une involution).

On en déduit alors que le couple  $(x, y)$  vérifie :

$$\left( \frac{kx}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left( \frac{ky}{x^2 + y^2} \right)^2 + 2a \frac{kx}{x^2 + y^2} + 2b \frac{ky}{x^2 + y^2} + c = 0,$$

ce qui revient, après simplification par  $x^2 + y^2 (\neq 0)$  à :

$$c(x^2 + y^2) + 2akx + 2bky + k^2 = 0.$$

Si  $c = 0$  (c'est-à-dire si  $O \in \mathcal{C}$ ), alors  $I_{O,k}(\mathcal{C})$  est une droite ne passant pas par  $O$ .

Si  $c \neq 0$  (c'est-à-dire si  $O \notin \mathcal{C}$ ), alors  $I_{O,k}(\mathcal{C})$  est un cercle ne passant pas par  $O$ .

### 1.3 Cercles orthogonaux

**Définition 1.15.** *Deux cercles sécants dans un plan sont dits orthogonaux si et seulement si, en chacun des deux points d'intersection, les tangentes à l'un et à l'autre cercle sont orthogonales.*

*Remarque : par raison de symétrie, il suffit de vérifier qu'on a l'orthogonalité en un seul des points d'intersection.*

**Propriété 1.16.** Pour une inversion  $I_{O,k}$  de centre  $O$  et de rapport  $k$ , un cercle orthogonal au cercle d'inversion est globalement invariant.

### Démonstration

Soit  $M$  un point d'un cercle  $(\mathcal{C})$  orthogonal au cercle d'inversion. Si  $M$  n'est pas sur le cercle d'inversion, alors on note  $M'$  le second point d'intersection de la droite  $(OM)$  avec le cercle  $(\mathcal{C})$ . Donc, d'après la propriété 1.3 :

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \sqrt{k}^2 = k.$$

Et on en déduit que  $M'$  est l'image de  $M$  par l'inversion  $I_{O,k}$  considérée.

## 1.4 Division harmonique

La division harmonique, suite à l'avènement des mathématiques modernes au début des années 1970, fut supprimée des programmes de l'enseignement secondaire. On l'étudiait alors dès la Seconde en prévision de l'étude des sections coniques. Les sections coniques, étudiées analytiquement en Terminale C (puis S) en tant que courbes du second degré, ont également disparu des programmes actuels.

**Définition 1.17.** On dit que deux points  $C$  et  $D$  sont conjugués harmoniques par rapport aux points  $A$  et  $B$  si et seulement s'ils sont tous alignés et vérifient une des relations suivantes :

1.  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$  et l'un des points appartient au segment  $[AB]$ , tandis que l'autre lui est extérieur;
2.  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ ;
3.  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$ ;
4.  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -1$ .

On dit aussi que  $C$  et  $D$  divisent harmoniquement le segment  $[AB]$ .

**Propriété 1.18.** Soit  $a, b, c, d$  les abscisses des quatre points  $A, B, C, D$  d'une division harmonique d'un axe  $(Ox)$  gradué.

Alors  $(a + b)(c + d) = 2(ab + cd)$ .

De plus, si l'origine est en  $I$ , milieu de  $[AB]$ , alors

$$\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}.$$

**Démonstration**

La relation  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$  s'écrit :

$$(c - a)(d - b) + (d - a)(c - b) = 0,$$

ou :

$$2(ab + cd) = ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d).$$

Ainsi, on a

$$(*) \quad (a + b)(c + d) = 2(ab + cd).$$

Par ailleurs, si l'origine est en I, milieu de [AB], on a :

$$b = \overline{IB} = -\overline{IA} = -a; \quad c = \overline{IC} \text{ et } d = \overline{ID}.$$

La relation (\*) devient :

$$0 = 2(-a^2 + cd), \text{ soit } a^2 = b^2 = cd.$$

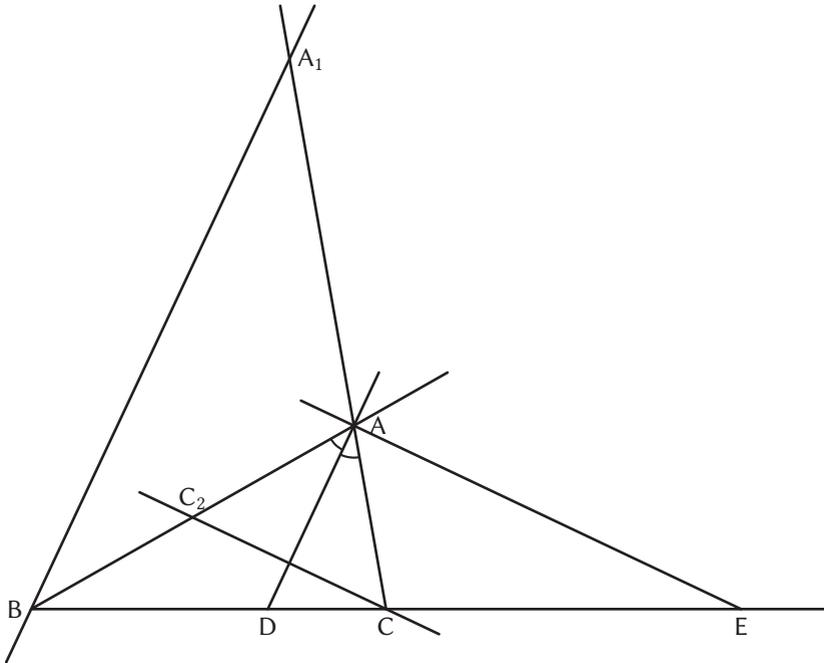
$$\text{Donc } \overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}.$$

**Propriété 1.19.** *Si les points C et D sont conjugués harmoniques par rapport à A et B, alors les points A et B sont conjugués harmoniques par rapport à C et D.*

**Démonstration**

La relation  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$  entraîne  $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ .

**Propriété 1.20** (voir la figure ci-dessous). *Les pieds des bissectrices intérieure et extérieure issues de A du triangle ABC sont conjugués harmoniques par rapport aux points B et C.*

FIGURE 1.3 – *Division harmonique.***Démonstration**

On pose  $AB = c$ ,  $AC = b$  et  $BC = a$ .

En comparant les angles  $\widehat{ABA_1}$  et  $\widehat{BA_1A}$  à  $\widehat{DAC}$ , puisque  $(AD) \parallel (BA_1)$ , on constate qu'ils sont égaux, de par les propriétés des angles alternes-internes et correspondants.

$ABA_1$  est donc isocèle en A, et  $AA_1 = AB = c$ .

En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle  $BCA_1$ , on trouve :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AA_1}{AC} = \frac{c}{b}.$$

De même,  $ACC_2$  est isocèle en A, et  $AC_2 = AC = b$ .

En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle  $BAE$ , on trouve :

$$\frac{AC_2}{AB} = \frac{EC}{EB} = \frac{b}{c}.$$

On conclut ainsi que  $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC}$ .

## 1.5 Droites antiparallèles

**Définition 1.21.** Deux couples de droites  $(D, D')$  et  $(\Delta, \Delta')$  sont antiparallèles si et seulement si les angles de droites  $\overline{(D, \Delta)}$  et  $\overline{(\Delta', D')}$  sont égaux mod  $\pi$ .

On dit aussi que  $D'$  est antiparallèle à  $D$  par rapport aux droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

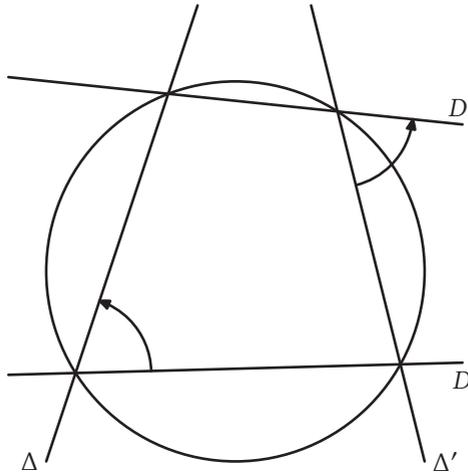


FIGURE 1.4 – Droites antiparallèles (1).

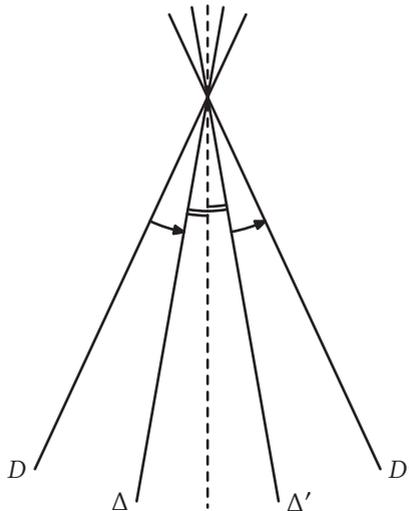


FIGURE 1.5 – Droites antiparallèles (2).

**Définition 1.22.** *Un quadrangle est la figure formée par quatre points A, B, C, D tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés : ce sont les sommets du quadrangle.*

*Les six droites joignant ces points deux à deux sont les côtés du quadrangle.*

**Définition 1.23.** *Un quadrangle est dit inscriptible si et seulement si ses quatre sommets sont sur un même cercle.*

On rappelle la propriété suivante qui est un corollaire du théorème de l'angle inscrit :

**Propriété 1.24.** *Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan.*

*Alors A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si on a l'égalité d'angles orientés :*

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi}.$$

**Corollaire 1.25.** *Pour que deux couples de côtés opposés d'un quadrangle ABCD soient antiparallèles, il faut et il suffit que ce quadrangle soit inscriptible.*

**Démonstration**

Pour que (AB) et (CD) soient antiparallèles par rapport à (AD) et (BC), il faut et il suffit que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \pmod{\pi}$ , c'est-à-dire que le quadrangle soit inscriptible, d'après la propriété précédente.

**Propriété 1.26.** *Pour que deux couples de droites sécantes (D, D') et (Δ, Δ') soient antiparallèles, il faut et il suffit que les bissectrices des angles  $(\overline{D, D'})$  et  $(\overline{\Delta, \Delta'})$  aient même direction, autrement dit qu'elles soient parallèles.*

**Démonstration**

Si (D, D') et (Δ, Δ') sont antiparallèles, alors on a la relation :

$$(1.1) \quad \widehat{(D, \Delta)} = \widehat{(\Delta', D')} \pmod{\pi}.$$

Et, si (Ou) est la direction d'une bissectrice de l'angle  $\widehat{(D, D')}$ , alors on a la relation :

$$(1.2) \quad \widehat{(D, (Ou))} = \widehat{((Ou), D')} \pmod{\pi}.$$

Par différence, cela entraîne :

$$(1.3) \quad \widehat{(D, (Ou))} = \widehat{((Ou), \Delta')} \pmod{\pi}.$$

Réciproquement, la relation (1.1) est conséquence des relations (1.2) et (1.3).

**Propriété 1.27.** *Soit un triangle ABC.*

*Alors, en notant (Ax) la tangente au cercle circonscrit à ABC en A, les couples de droites ((AB), (AC)) et ((BC), (Ax)) sont antiparallèles.*

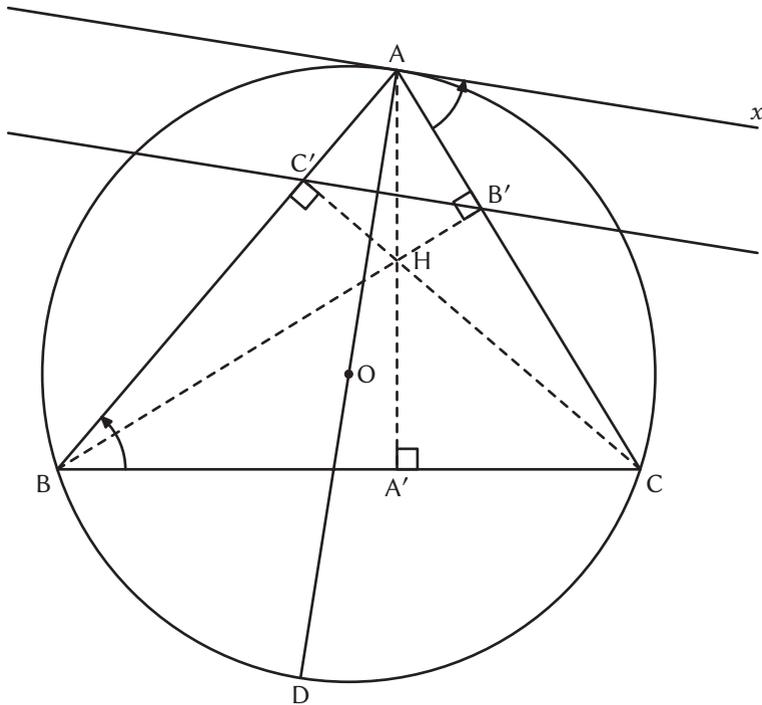


FIGURE 1.6 – Tangente au cercle circonscrit et droites antiparallèles.

**Démonstration**

On note  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

$$(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C}) = (\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{C'C}) \pmod{\pi} \left( = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \right).$$

Donc, d'après la propriété 1.24, le quadrangle  $BCB'C'$  est inscriptible.

Ainsi, d'après le corollaire 1.25, les couples de droites  $((AB), (AC))$ ,  $((BB'), (CC'))$  et  $((BC), (B'C'))$  sont deux à deux antiparallèles.

Soit  $D$  le point diamétralement opposé à  $A$  sur le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . Alors  $ADC$  est rectangle en  $C$ , et donc

$$\frac{\pi}{2} - \widehat{DAC} = \widehat{CDA} \pmod{\pi}.$$

Par ailleurs, d'après le théorème de l'angle inscrit :

$$\widehat{CDA} = \widehat{CBA} \pmod{\pi}.$$

On déduit alors du fait que  $(Ax)$  et  $(AD)$  sont perpendiculaires la relation suivante :

$$\widehat{CAx} = \frac{\pi}{2} - \widehat{DAC} \text{ mod } \pi = \widehat{CDA} \text{ mod } \pi = \widehat{CBA} \text{ mod } \pi.$$

Cette dernière égalité ainsi que le fait que les couples de droites  $((AB), (AC))$  et  $((BC), (B'C'))$  sont antiparallèles nous permettent de conclure que  $((AB), (AC))$  et  $(BC), (Ax)$  sont antiparallèles.

## 2. La droite et le cercle d'Euler

On se place dans  $\mathcal{E}_2$ . A, B et C sont trois points non alignés.

Nous adopterons les notations habituelles : dans le triangle ABC, les milieux des côtés [BC], [CA], [AB] sont respectivement A', B', C', les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement I, J, K, le centre de gravité est G, l'orthocentre H et le centre du cercle circonscrit O.

### 2.1 La droite d'Euler

Soit ABC un triangle.

**Propriété 2.1.** L'orthocentre H du triangle ABC vérifie :

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

Le barycentre G du triangle ABC vérifie :

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

La démonstration qui suit est issue de [2].

#### Démonstration

Cherchons le point S tel que  $\vec{OS} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ .

Il est unique de par sa définition qui permet d'écrire :

$$\vec{OS} - \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC} \text{ ou encore } \vec{AS} = 2\vec{OA}'.$$

C'est-à-dire que (AS) est perpendiculaire à (BC) : c'est donc la hauteur issue de A. De même, (BS) et (CS) sont les hauteurs issues l'une de B, l'autre de C et le point S n'est autre que ... l'orthocentre H du triangle!

H est donc l'unique point vérifiant :

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

De plus, en tant qu'isobarycentre des sommets, G vérifie en particulier :

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

**Propriété 2.2** (corollaire de 2.1). *Le centre du cercle circonscrit à ABC, le centre de gravité de ABC et l'orthocentre de ABC sont alignés.*

**Définition 2.3.** *Soit ABC un triangle non équilatéral. Dans ce cas, le centre O du cercle circonscrit à ABC, son centre de gravité G et son orthocentre sont distincts, et on appelle **droite d'Euler** la droite passant par ces trois points.*

**Remarque**

Il existe d'autres démonstrations permettant de justifier l'existence de cette droite. En particulier, vous trouverez dans plusieurs ouvrages ou sites internet l'utilisation de l'homothétie de centre G et de rapport  $-2$  qui transforme les médiatrices de ABC en les hauteurs de ABC, et donc qui transforme O en H.

Attardons-nous plutôt sur une démonstration accessible au collège.

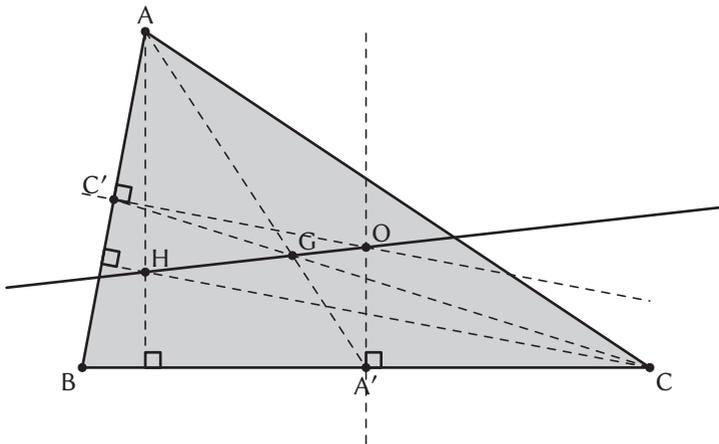


FIGURE 2.1 – Droite d'Euler.

Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à ABC, noté  $\mathcal{C}$ . (AB) et (BD) sont perpendiculaires, puisque le triangle ABD est inscrit dans  $\mathcal{C}$  et [AD] est un diamètre de ce cercle.

(AB) et (CH) sont perpendiculaires, puisque (CH) est une hauteur de ABC.

On en déduit ainsi que les droites (BH) et (CD) sont parallèles, étant toutes deux perpendiculaires à une même droite.

De façon similaire, on montre que (BH) et (DC) sont toutes deux perpendiculaires à (AC), et donc parallèles entre elles.

On peut ainsi conclure que BHCD, en tant que quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme. On en déduit alors que  $(AA')$  est une médiane de ADH, et G est donc aussi le centre de gravité de ADH. Enfin, comme  $(HO)$  est une autre médiane de ADH, G appartient à cette droite.

## 2.2 Le cercle d'Euler ou cercle des « neuf points »

Soit ABC un triangle.

**Propriété 2.4.** *Les pieds des hauteurs, les milieux des côtés et les milieux des segments [AH], [BH] et [CH] sont cocycliques; et le centre du cercle passant par ces points est le milieu de [OH].*

Pour la démonstration qui suit, nous nous sommes inspirés de [3].

### Démonstration

Utilisons une homothétie pour démontrer la cocyclicité des neuf points.

Intéressons-nous tout d'abord aux milieux des côtés du triangle ABC.

Le centre de gravité G du triangle ABC étant situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet, l'homothétie  $h_{G, \frac{-1}{2}}$  de centre G et de rapport  $\frac{-1}{2}$  transforme chaque sommet en le milieu du côté opposé, donc le cercle  $(\mathcal{C})$  circonscrit au triangle ABC en le cercle médian,  $(\mathcal{C}')$ , passant par les milieux des côtés et de rayon la moitié de celui de  $(\mathcal{C})$ .

Précisons le centre de  $(\mathcal{C}')$  : l'homothétie  $h_{G, \frac{-1}{2}}$  transforme, en effet, les hauteurs du triangle ABC en ses médiatrices; donc l'orthocentre H en le centre O du cercle circonscrit  $(\mathcal{C})$ . Le point O, lui, est transformé en  $O'$ , milieu de [OH] puisque  $\overrightarrow{GO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OG}$ , et  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$  entraînent

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}.$$

Donc  $O'$  est le centre du cercle  $(\mathcal{C}')$ , c'est-à-dire que le milieu de [OH] est le centre de  $(\mathcal{C}')$ .

Cela permet de dire que le centre de  $(\mathcal{C}')$  appartient à la « droite d'Euler » !

Intéressons-nous maintenant aux pieds des hauteurs.

La projection orthogonale sur (BC) transforme H en I, pied de la hauteur issue de A, O en  $A'$  milieu de [BC] et  $O'$  en  $I'$  milieu de [IA'].  $O'$  appartient donc à la médiatrice de [IA'] et  $O'I = O'A'$ . Les pieds des trois hauteurs sont donc, eux aussi, sur le cercle médian  $(\mathcal{C}')$ .

Intéressons-nous enfin aux milieux des segments [AH], [BH] et [CH].

Il existe une deuxième homothétie  $h'$ , de rapport positif cette fois, qui transforme  $(\mathcal{C})$  en  $(\mathcal{C}')$  : comme  $\overrightarrow{HO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$ ,  $h'$  a pour centre H. Elle transforme les sommets A, B et C du triangle en les milieux respectifs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  des segments  $[AH]$ ,  $[BH]$  et  $[CH]$ , qui sont donc eux aussi sur le cercle  $(\mathcal{C}')$ .

Ainsi le cercle  $(\mathcal{C}')$  contient les neuf points :  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , I, J, K,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

**Définition 2.5.** On appelle **cercle d'Euler** le cercle passant par ces neuf points : les pieds des hauteurs, les milieux des côtés et les milieux des segments d'extrémités un sommet et l'orthocentre du triangle.

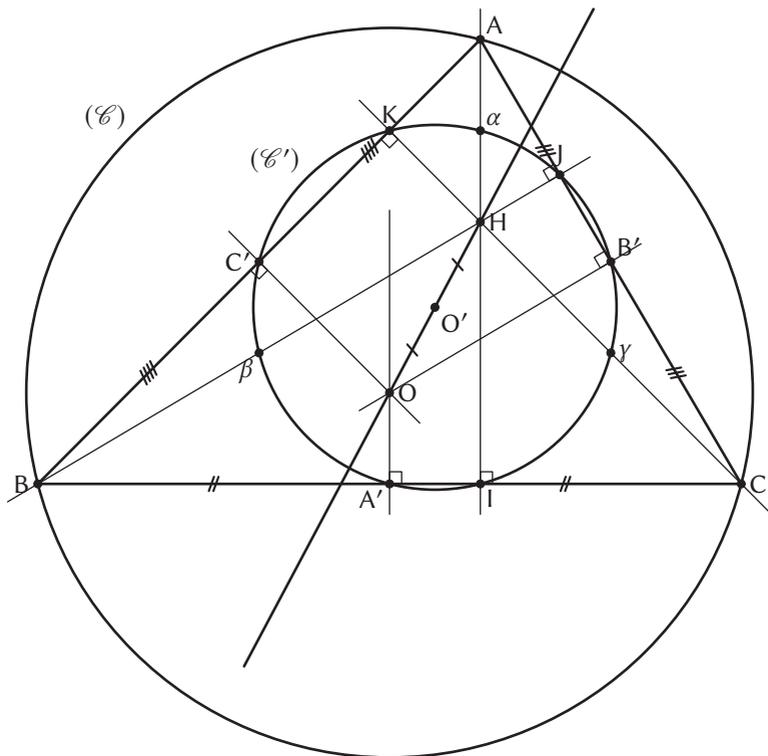


FIGURE 2.2 – Cercle d'Euler.

## 2.3 Le théorème de Feuerbach

Le théorème de Feuerbach nous permet de découvrir quatre nouveaux points remarquables appartenant au cercle d'Euler.

**Définition 2.6.** Un cercle exinscrit d'un triangle est un cercle qui est tangent aux droites supportant les côtés du triangle, mais qui n'est pas le cercle inscrit.

**Théorème 2.7 (de Feuerbach).** Le cercle d'Euler d'un triangle  $ABC$  est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits du triangle  $ABC$ .

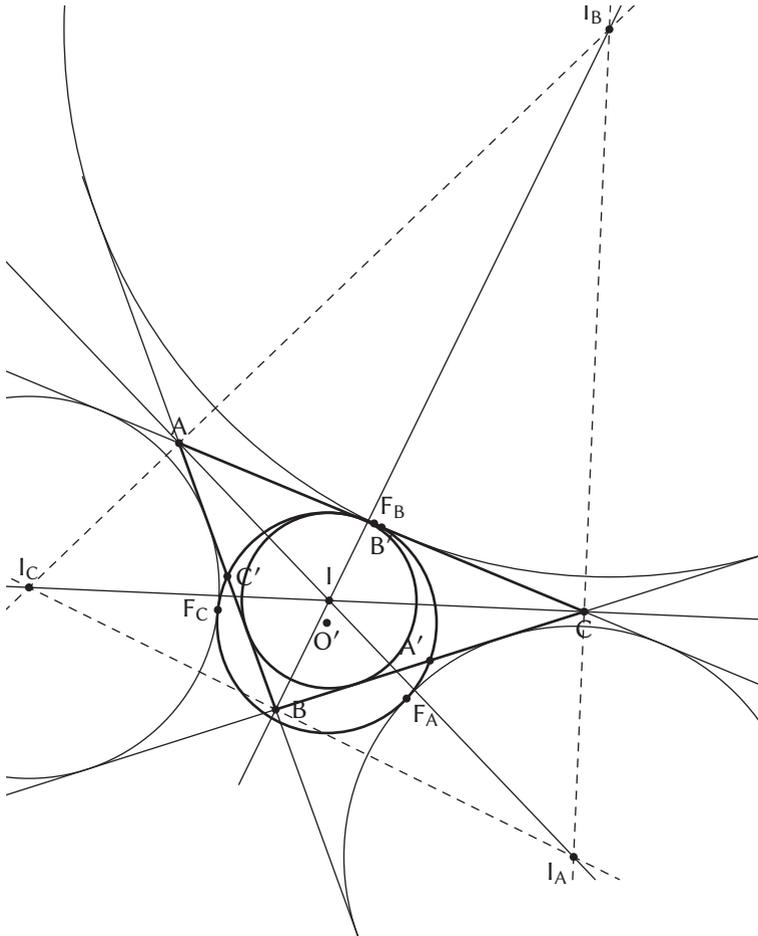


FIGURE 2.3 – Théorème de Feuerbach.

Nous donnons deux démonstrations faisant intervenir une inversion. Chacune d'elles est élégante et rapide et il nous a semblé important pour le lecteur d'être confronté à ces deux preuves. En effet, nous trouvons peu ou pas d'ouvrages récents dans la littérature mathématique qui font appel à une inversion pour prouver ce théorème, et les outils utilisés ne sont pas bien connus et peu abordés aujourd'hui dans l'enseignement secondaire ou supérieur.

Pour la première démonstration, nous nous sommes inspirés de [5]. La deuxième démonstration, quant à elle, est issue de [8].

### 2.3.1 Première démonstration du théorème de Feuerbach

- Supposons tout d'abord que :  $AC = AB$ .

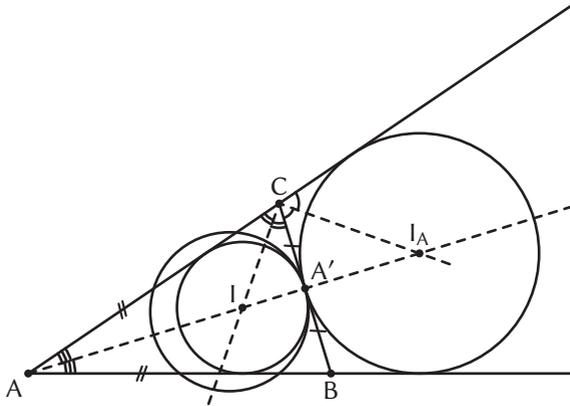


FIGURE 2.4 – Première démonstration du théorème de Feuerbach (cas  $AC = AB$ ).

Dans ce cas, le cercle d'Euler, le cercle inscrit et le cercle exinscrit  $\mathcal{C}_A$  sont tangents à  $(BC)$  en  $A'$ , milieu de  $[BC]$ .

- Supposons maintenant que :  $AC > AB$ .

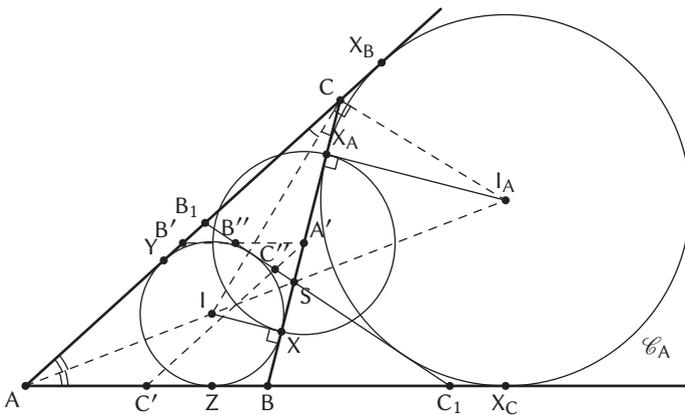


FIGURE 2.5 – Première démonstration du théorème de Feuerbach (cas  $AC > AB$ ).

$A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont les milieux respectifs de  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$ .

Le cercle inscrit dans  $ABC$  touche  $[BC]$  en  $X$ ,  $[AC]$  en  $Y$  et  $[AB]$  en  $Z$ .

Le premier cercle exinscrit, noté  $\mathcal{C}_A$  de centre  $I_A$  touche  $[BC]$  en  $X_A$ ,  $[AC]$  en  $X_B$  et  $[AB]$  en  $X_C$ .

La tangente commune au cercle inscrit et au cercle exinscrit  $\mathcal{C}_A$ , qui est distincte de  $(BC)$ , est une droite qui intersecte  $(AC)$ ,  $(BC)$  et  $(AB)$  respectivement en  $B_1$ ,  $S$  et  $C_1$ . Nous voyons également sur le dessin le cercle  $\omega$  de diamètre  $[XX_A]$  et les points  $S$ ,  $B''$  et  $C''$  qui sont respectivement les points d'intersection de  $(B_1C_1)$  avec  $(BC)$ ,  $(A'B')$  et  $(A'C')$ .

Posons  $s = \frac{a+b+c}{2}$ , où :  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ .

**Fait n° 1 :** l'inversion  $I_{A', (\frac{b-c}{2})^2}$  de centre  $A'$  et de rapport  $\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$  est telle que l'image du cercle d'Euler est une droite ne passant pas par  $A'$ .

Les triangles  $IXB$  et  $IBZ$  étant rectangles d'hypoténuse  $[IB]$ , et vérifiant  $IX = IZ$ , on en déduit (théorème de Pythagore) :

$$BZ = BX.$$

Par un raisonnement similaire, on trouve :

$$CX = CY \text{ et } AY = AZ.$$

Ainsi, on en déduit :  $BX + CY + AY = s$ . D'où  $BX = s - b$ .

Puisque  $I_A X_A C$  et  $I_A X_B C$  sont deux triangles rectangles d'hypoténuse  $[I_A C]$ , et :  $I_A X_A = I_A X_B$ , on en déduit (théorème de Pythagore) :

$$X_A C = X_B C.$$

Par un raisonnement similaire, on trouve :

$$X_C B = X_A B \text{ et } X_B A = X_C A.$$

Or :  $BC + AC + AB = 2s$ .

On a ainsi :  $(X_A B + X_A C) + (AX_B - X_B C) + (AX_C - X_C B) = 2s$ .

Donc, grâce aux égalités de longueurs établies précédemment, on obtient :

$$2AX_B = 2s.$$

Puis :  $X_A C = CX_B = AX_B - AC = s - b$ .

On a alors montré que :  $BX = X_A C = s - b$ .

Le centre de  $\omega$  est donc  $A'$  (le milieu de  $[BC]$ ) et le diamètre de  $\omega$  est :

$$XX_A = a - 2(s - b) = b - c.$$

Ainsi, on en déduit que l'image du cercle d'Euler par l'inversion  $I_{A', (\frac{b-c}{2})^2}$  est une droite ne passant pas par  $A'$ .

**Fait n° 2. La droite image du cercle d'Euler par  $I_{A', (\frac{b-c}{2})^2}$  contient les points  $B''$  et  $C''$ , et passe donc par les points  $B_1$  et  $C_1$ .**

Pour justifier ce fait, on va montrer que  $B''$  et  $C''$  sont les images de  $B'$  et  $C'$  par  $I_{A', (\frac{b-c}{2})^2}$ .

$S$  appartient à la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{BAC}$ . Pour la suite, nous allons nous aider du dessin suivant :

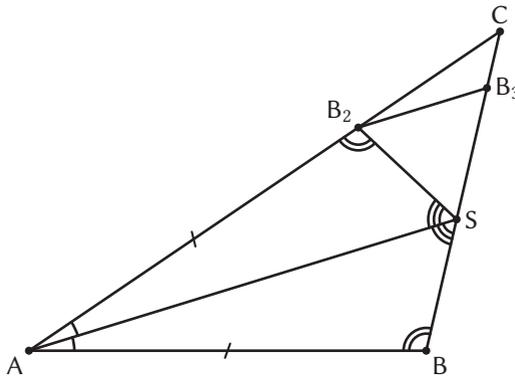


FIGURE 2.6 – Première démonstration du théorème de Feuerbach (suite).

Soit  $B_2$  le point de  $[AC]$  tel que  $AB_2 = AB$  (remarque :  $B_2 = B_1$ ) et  $B_3$  le symétrique de  $B$  par rapport à  $S$ .

Puisque  $AC > AB$ , on a :  $B_3 \in [BC]$ .

$$\widehat{B_3SB_2} = \pi - (\widehat{ASB} + \widehat{B_2SA}).$$

Or :  $AB_2 = AB$  et  $\widehat{BAS} = \widehat{SAB_2}$ .

Donc les triangles  $ASB$  et  $AB_2S$  sont isométriques, puis :

$$\widehat{B_3SB_2} = \pi - 2\widehat{ASB}, \text{ et : } SB_2 = SB (= SB_3).$$

Ainsi  $SB_2B_3$  est isocèle en  $S$ , et :

$$\widehat{B_2B_3S} = \widehat{SB_2B_3} = \frac{\pi - \widehat{B_3SB_2}}{2} = \widehat{ASB}.$$

Donc :

$$\widehat{B_3B_2C} = \pi - (\widehat{AB_2S} + \widehat{SB_2B_3}) = \pi - (\widehat{SBA} + \widehat{ASB}) = \widehat{BAS} = \widehat{SAC}.$$

On rappelle, pour la deuxième égalité, que  $ASB$  et  $AB_2S$  sont isométriques.

Cela nous permet de dire que  $(B_2B_3) \parallel (AS)$ . D'où, à l'aide du théorème de

Thalès, on trouve :  $\frac{AB_2}{AC} = \frac{SB_3}{SC}$ , puis :  $\frac{SB}{SC} = \frac{c}{b}$ .

Et comme  $S \in [CB]$ , on a alors  $CS = \frac{ab}{b+c}$  et  $SB = \frac{ac}{b+c}$ .

Aussi,  $CS = CX_A + X_AS = XB + X_AS$  et  $SB = XB + SX$ .

Donc :

$$CS - SB = X_AS - SX = X_AA' + A'S - SX = A'X - SX + A'S = 2A'S.$$

On déduit de ce qu'on vient de montrer que  $SA' = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$ .

De plus,  $BC_1 = AC_1 - AB = b - c$  et  $CB_1 = b - c$ .

Ainsi, puisque les triangles  $SA'B''$  et  $SBC_1$  sont semblables et que les triangles  $SA'C''$  et  $SCB_1$  sont, eux aussi, semblables, nous avons les égalités suivantes :

$$\frac{A'B''}{b-c} = \frac{A'B''}{BC_1} = \frac{SA'}{SB} = \frac{b-c}{2c} \text{ et } \frac{A'C''}{b-c} = \frac{A'C''}{CB_1} = \frac{SA'}{SC} = \frac{b-c}{2b}.$$

$$\text{D'où : } A'B' \cdot A'B'' = \frac{c}{2} \cdot \frac{(b-c)^2}{2c} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$\text{et } A'C' \cdot A'C'' = \frac{b}{2} \cdot \frac{(b-c)^2}{2b} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

Les images respectives par  $I_{A', (\frac{b-c}{2})^2}$  de  $B'$  et  $C'$  sont donc  $B''$  et  $C''$ .

### Conclusion

On déduit du fait n° 2, à savoir que les images respectives par  $I_{A', (\frac{b-c}{2})^2}$  de  $B'$  et  $C'$  sont  $B''$  et  $C''$ , que l'image du cercle d'Euler est  $(B_1C_1)$ .

De plus, puisque  $\omega$  est le cercle d'inversion de  $I_{A', (\frac{b-c}{2})^2}$  et que  $\omega$  est orthogonal au cercle inscrit dans  $ABC$  et au premier cercle exinscrit  $\mathcal{C}_A$ , ces deux derniers cercles sont globalement invariants par  $I_{A', (\frac{b-c}{2})^2}$ .

Le cercle d'Euler est donc tangent à ces cercles.

## 2.3.2 Deuxième démonstration du théorème de Feuerbach

Pour cette deuxième démonstration, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.8.** *Dans un triangle  $ABC$ , le point d'intersection de la bissectrice intérieure issue de  $A$  et du cercle circonscrit à  $ABC$  (noté  $P_1$  dans la démonstration) est le milieu du segment  $[I_A]$ , où  $I$  est le centre du cercle inscrit et  $I_A$  est le centre du cercle exinscrit tangent à  $[BC]$ .*

Démonstration

– On s'intéresse d'abord au cas où ABC est non isocèle en A.

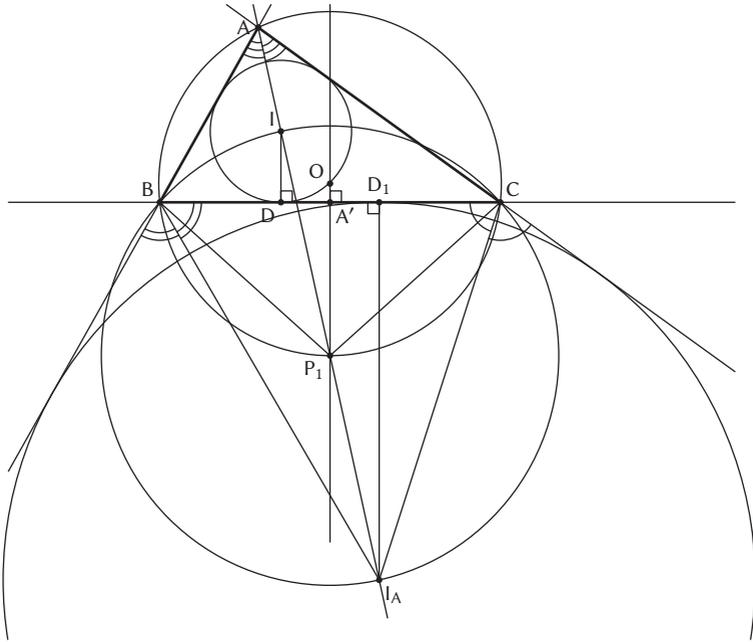


FIGURE 2.7 – Démonstration du lemme 2.8, cas non isocèle.

D'après le théorème de l'angle inscrit et le fait que  $(AP_1)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{BAC}$ , on a les égalités suivantes :

$$\widehat{P_1BC} = \widehat{P_1AC} = \widehat{BAP_1} = \widehat{BCP_1}.$$

$BP_1C$  est donc isocèle en  $P_1$ , et  $P_1$  appartient à la médiatrice de  $[BC]$ .

Par ailleurs,  $\Pi_A B$  et  $\Pi_A C$  sont deux triangles rectangles d'hypoténuse  $[\Pi_A]$ . Donc  $I, B, C$  et  $I_A$  sont cocycliques sur le cercle de diamètre  $[\Pi_A]$ .

Or le centre de ce cercle est à la fois sur la bissectrice  $(AI)$  et sur la médiatrice de  $[BC]$ .

Ainsi, comme  $ABC$  n'est pas isocèle, ces deux droites sont distinctes, et le centre du cercle est leur point d'intersection, c'est-à-dire  $P_1$ .

– Intéressons-nous maintenant au cas où ABC est isocèle en A.

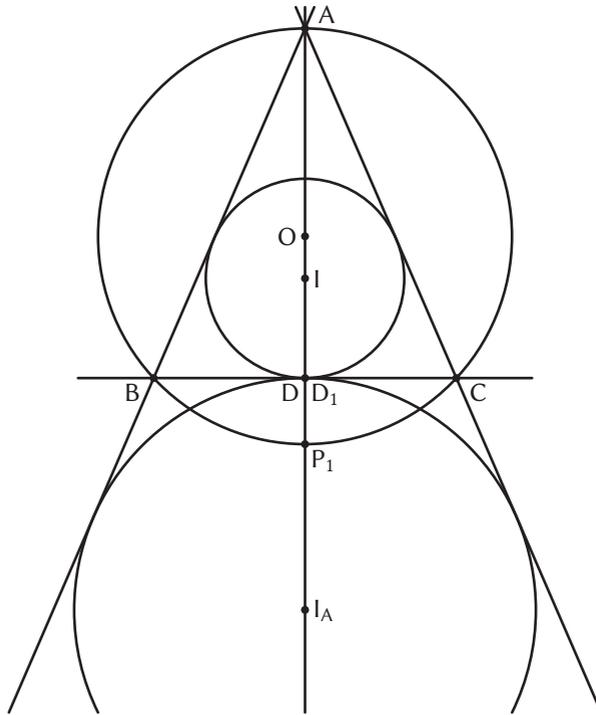


FIGURE 2.8 – Démonstration du lemme 2.8, cas isocèle.

Deux angles inscrits dans un cercle interceptant des arcs de cercles complémentaires sont supplémentaires.

Donc  $\widehat{BP_1C} = \pi - \widehat{BAC}$ .

De même :  $\widehat{BI_A C} = \pi - \widehat{BIC}$ .

On en déduit :

$$\widehat{BI_A C} = \pi - \left( \pi - \frac{1}{2} (\widehat{CBA} + \widehat{BCA}) \right) = \frac{1}{2} (\pi - \widehat{BAC}).$$

Finalement, on a donc l'égalité suivante :

$$\widehat{BI_A C} = \frac{1}{2} \widehat{BP_1 C}.$$

Ainsi,  $P_1$  est l'unique point de  $[I_A]$  tel que  $\widehat{BI_A C} = \frac{1}{2} \widehat{BP_1 C}$ .

Les triangles  $\Pi_A B$  et  $\Pi_A C$  sont deux triangles rectangles d'hypoténuse  $[\Pi_A]$ . On en déduit que les points  $I, I_A, B$  et  $C$  sont cocycliques. Et, d'après le théorème de l'angle inscrit, le centre  $P$  du cercle de diamètre  $[\Pi_A]$  vérifie l'égalité  $\widehat{B I_A C} = \frac{1}{2} \widehat{B P C}$ . Donc  $P = P_1$ .

Continuons maintenant avec la deuxième démonstration du théorème de Feuerbach

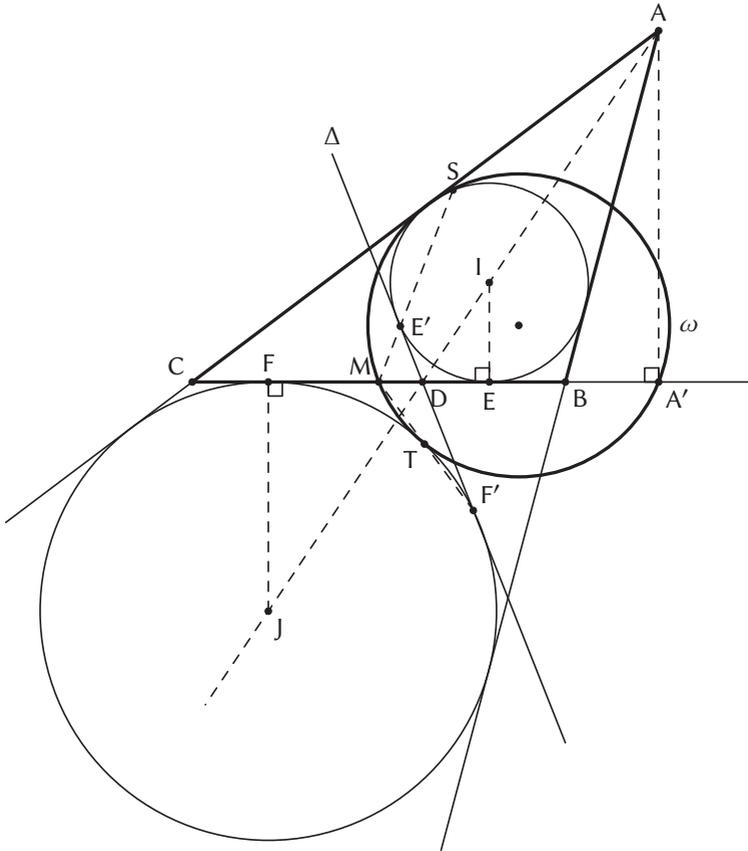


FIGURE 2.9 – Deuxième démonstration du théorème de Feuerbach (cas non isocèle).

Dans un triangle  $ABC$ , désignons par  $M, D$  et  $A'$  les pieds de la médiane, de la bissectrice intérieure et de la hauteur issues de  $A$ , par  $G$  le centre de gravité, par  $I$  le centre du cercle inscrit, par  $J$  le centre du cercle exinscrit tangent à  $[BC]$  (noté  $I_A$  précédemment) et enfin par  $E$  et  $F$  les points de contact des cercles inscrit et exinscrit de centre  $J$  avec le côté  $[BC]$ .

D'après la propriété 1.20,  $I$  et  $J$  sont conjugués harmoniques par rapport aux points  $A$  et  $D$ . De plus, d'après le lemme 2.8, le milieu de  $[IJ]$  est sur la médiatrice de  $[BC]$ .

Ainsi, par projection orthogonale sur (BC), on en déduit que E et F sont conjugués harmoniques par rapport aux points A' et D, et que M est le milieu de [EF].

D'après la propriété 1.18, on en déduit :

$$\overline{ME}^2 = \overline{MF}^2 = \overline{MD} \cdot \overline{MA'}.$$

Pour l'inversion de pôle M et de rapport  $\overline{ME}^2$ , le cercle inscrit dans ABC et le cercle exinscrit à ABC de centre J sont des cercles orthogonaux au cercle d'inversion. D'après la propriété 1.16, l'inversion de pôle M et de rapport  $\overline{ME}^2$  laisse invariants ces cercles.

Le cercle d'Euler  $\omega$  du triangle ABC, passant par M et A', est transformé en une droite  $\Delta$  passant par D et parallèle à la tangente en M au cercle  $\omega$ .

Or, l'homothétie de centre G de rapport  $\frac{-1}{2}$  transforme A en M, et le cercle circonscrit au triangle ABC en  $\omega$ , le cercle d'Euler au triangle ABC.

La tangente en M au cercle  $\omega$  est donc parallèle à la tangente en A au cercle circonscrit à ABC et, par suite, antiparallèle à (BC) par rapport aux droites (AB) et (AC), d'après la propriété 1.27. Il en est de même de la droite  $\Delta$  qui est par conséquent symétrique de (BC) par rapport à la bissectrice (AD). La droite  $\Delta$  est donc la deuxième tangente commune intérieure (E'F') aux cercles inscrit dans ABC et exinscrit à ABC de centre I<sub>A</sub>.

Il en résulte que le cercle  $\omega$  est tangent à ces deux cercles aux points S et T, distincts respectivement de E' et F', où (ME') et (MF') les intersectent.

**Définition 2.9.** *On appelle point de Feuerbach chacun des points de contact du cercle d'Euler avec les quatre cercles, inscrit et exinscrits.*

### Remarque

Le cercle des « neuf points » en contient maintenant treize avec les points de Feuerbach. À travers ce chapitre, nous avons mis en avant les définitions et propriétés de base relatives à la droite d'Euler et surtout au cercle d'Euler. Nous pouvons d'ailleurs rappeler que ce cercle est aussi appelé cercle de Feuerbach en Allemagne et il était donc naturel d'aborder le théorème de Feuerbach en fin de chapitre, d'autant plus que, comme cela a été signalé précédemment, quatre nouveaux points remarquables ont alors été repérés sur le cercle, en plus des neuf points connus.

Les différents points commentés auparavant sont des prérequis indispensables pour aborder l'aspect historique de ces figures géométriques.



## 3. Aspect historique

À la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, la géométrie du triangle était vue comme l'une des plus grandes réussites mathématiques, et la droite d'Euler, tout comme le cercle d'Euler, était l'un de ses joyaux. Les mathématiciens qui délaissaient la géométrie du triangle pour étudier de nouveaux domaines comme la logique, l'algèbre abstraite ou la topologie prenaient alors de vrais risques pour leur carrière professionnelle.

### 3.1 Aperçu historique du document à l'origine de la droite d'Euler

Ce paragraphe est essentiellement une traduction de l'article [10]. Comme cela a été signalé en introduction de ce document, rien ne permet d'associer L. Euler au cercle qui porte son nom. L'unique lien qu'on peut faire entre cet illustre mathématicien et ce cercle est la droite qui, elle, porte son nom à juste titre. Nous rappelons d'abord ici le contexte historique dans lequel il a publié l'article relatif à la droite d'Euler, puis nous donnerons les grandes lignes de ce travail.

En 1767, dans le journal de l'académie de Saint-Pétersbourg, L. Euler a publié *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficiliorum* (traduisez : « Solutions faciles de problèmes difficiles en géométrie »). Il a écrit son texte en 1763 alors qu'il vivait à Berlin et travaillait à l'académie de Frédéric II de Prusse, dit Frédéric le Grand.

Les sept années de guerre (de 1756 à 1763) venaient juste de se terminer. Durant les dernières années de guerre, Berlin était occupée par des troupes étrangères. Euler et les autres académiciens vivaient ces années dans la peur concernant leur propre sécurité et celle de leur famille. Cependant, suite à des événements dramatiques, Frédéric le Grand évita la défaite et il remporta cette guerre. Quand il retourna à Berlin, il essaya de diriger l'académie des sciences de la même façon qu'il avait dirigé ses troupes. En seulement trois ans, Euler et lui étaient en discorde. Euler partit alors à Saint-Pétersbourg, en Russie, où il travailla à l'académie de l'impératrice Catherine II, dite Catherine la Grande. C'est pour cette raison que le travail d'Euler auquel nous nous intéressons a été publié dans cette ville.

Nous l'étudions maintenant. Pour faciliter la lecture, nous gardons ses notations, ainsi que les intitulés des figures de son document. Les figures ne sont pas modifiées par rapport au document original.

Euler commence en nous rappelant que le triangle a quatre points particuliers importants.

1. Le point d'intersection des hauteurs qui, depuis 1870, grâce à E. Since, est appelé orthocentre après avoir été appelé le point d'Archimède. Euler n'a pas utilisé cette dernière appellation. Il a noté ce point E.
2. Le point d'intersection des médianes. Euler l'appelle, comme nous, le centre de gravité. Il l'a noté F.
3. Le point d'intersection des bissectrices. Euler l'a noté G et, comme c'est le cas aujourd'hui, l'a appelé le centre du cercle inscrit.
4. Le point d'intersection des médiatrices. Euler l'a noté H et, comme c'est le cas aujourd'hui, l'a appelé le centre du cercle circonscrit.

Dans son document, Euler énonce ce qu'il considère comme étant le résultat principal de cet ouvrage :

*Si les quatre points sont distincts, alors le triangle est déterminé. Si deux points sont confondus, alors les quatre sont confondus et le triangle est équilatéral, mais il peut avoir n'importe quelle taille.*

Pour préparer son analyse, Euler donne quelques notations. Il appelle son triangle ABC, il note  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les longueurs des côtés opposés respectivement aux sommets A, B et C. De plus, il note  $A$  l'aire du triangle et se fie au lecteur pour faire la distinction entre « le point A » et « l'aire A ».

Il connaît la formule de Héron, sans la nommer. Cela peut être dû à l'époque ou au fait que Euler ne connaissait tout simplement pas ce nom. Ici, tout comme dans un document qu'il a écrit en 1747-1748 intitulé *Variae demonstrationes geometriae*, c'est juste une formule qu'Euler suppose connue. Il la donne sous deux formes :

$$AA = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$

$$AA = \frac{1}{16}(2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4),$$

où  $AA$  désigne le carré de l'aire du triangle ABC, conformément aux habitudes de l'époque où l'on notait en général  $AA$  à la place de  $A^2$ .

Avec les notations établies, Euler souhaite donner les positions de chacun des centres E, F, G et H en fonction des longueurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  relativement au point A en tant qu'origine et le côté AB en tant qu'axe (des abscisses).

Il commence avec l'orthocentre E.

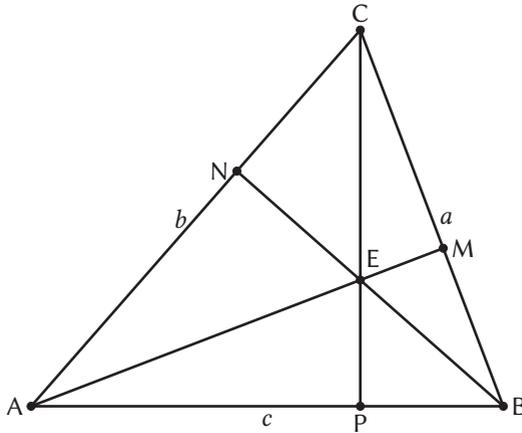


FIGURE 3.1 – Orthocentre.

Soit P le point d'intersection de la droite issue de C perpendiculaire à AB intersectant AB (cf. figure 3.1). Alors AP sert d'abscisse et EP d'ordonnée du point E.

De même, Euler prend MA perpendiculaire à BC et NB perpendiculaire à AC.

Aussi, il nous dit que :  $AP = \frac{cc + bb - aa}{2c}$ .

Il ne nous donne pas de raison, mais cela se justifie simplement à l'aide de la formule d'Al-Kashi :  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A)$ , et de l'égalité :  $\cos(A) = \frac{AP}{b}$ .

Ainsi, on a l'abscisse du point E.

De même :  $BM = \frac{aa + cc - bb}{2a}$ .

La formule d'aire du triangle nous donne :  $A = \frac{1}{2}AM \cdot BC$ .

Ainsi :  $AM = \frac{2A}{a}$ .

Les triangles ABM et AEP sont semblables (car ils sont rectangles tous les deux et ils ont un angle  $\widehat{A}$  commun). D'où :  $\frac{AM}{BM} = \frac{AP}{EP}$ .

Cela nous amène aisément à l'ordonnée du point E :

$$EP = \frac{(cc + bb - aa)(aa + cc - bb)}{8cA}.$$

Euler répète une étude similaire pour chacun des autres centres.

Il introduit les points Q, R et S, points de AB associés aux abscisses des centres F, G et H respectivement (autrement dit, ce sont les projections orthogonales de F, G et H sur la droite AB).

Pour les coordonnées du centre de gravité F, il trouve :

$$AQ = \frac{3cc + bb - aa}{6c} \text{ et } QF = \frac{2A}{3c}.$$

Pour les coordonnées de G, le centre du cercle inscrit, il obtient :

$$AR = \frac{c + b - a}{2} \text{ et } RG = \frac{2A}{a + b + c}.$$

Finalement, pour H, le centre du cercle circonscrit, il trouve :

$$AS = \frac{1}{2}c \text{ et } SH = \frac{c(aa + bb - cc)}{8A}.$$

Cela conclut la première partie du document d'Euler.

Il a ainsi repéré « ses » quatre centres en fonction des longueurs des trois côtés du triangle. La partie que nous venons d'étudier représente environ cinq pages sur un total de vingt-et-une pages.

Euler s'est ensuite intéressé aux distances entre les centres. Il a donné les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} EF^2 &= (AP - AQ)^2 + (PE + QF)^2, \\ EG^2 &= (AP - AR)^2 + (PE - RG)^2, \\ EH^2 &= (AP - AS)^2 + (PE - SH)^2, \\ FG^2 &= (AQ - AR)^2 + (QF - RG)^2, \\ FH^2 &= (AQ - AS)^2 + (QF - SH)^2, \\ GH^2 &= (AR - AS)^2 + (RG - SH)^2, \end{aligned}$$

où  $EF^2$  désigne le carré de la longueur du segment EF, etc.

Pour étudier ces distances, il a posé :

$$a + b + c = p, \quad ab + ac + bc = q \text{ et } abc = r.$$

Cette définition de  $p$ ,  $q$  et  $r$  nous donne les longueurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  égales aux solutions de l'équation :  $z^3 - pzz + qz - r = 0$ .

Par la suite, Euler donne les égalités utiles :

$$\begin{aligned} aa + bb + cc &= pp - 2q, \\ aabb + aacc + bbcc &= qq - 2pr, \\ a^4 + b^4 + c^4 &= p^4 - 4ppq + 2qq + 4pr. \end{aligned}$$

Ainsi, pour l'aire  $A$ , il obtient l'expression :

$$AA = \frac{1}{16}p(-p^3 + 4pq - 8r) = \frac{-p^4 + 4ppq - 8pr}{16}.$$

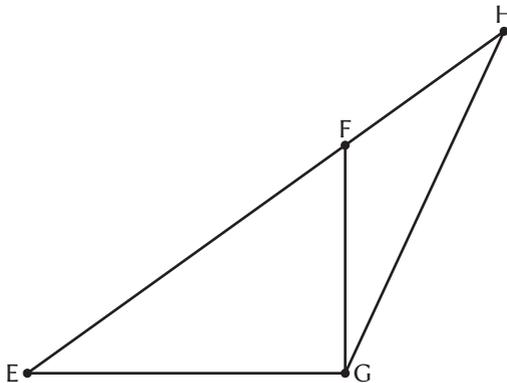


FIGURE 3.2 – Démonstration d'Euler (1).

Six pages de calculs plutôt pénibles amènent Euler aux six égalités numérotées qui suivent.

En se référant à la figure 3.2, il finit par obtenir :

$$(I) \quad EF^2 = \frac{rr}{4AA} - \frac{4}{9}(pp - 2q),$$

$$(II) \quad EG^2 = \frac{rr}{4AA} - pp + 3q - \frac{4r}{p},$$

$$(III) \quad EH^2 = \frac{9rr}{16AA} - pp + 2q,$$

$$(IV) \quad FG^2 = -\frac{1}{9}pp + \frac{5}{9}q - \frac{2r}{p},$$

$$(V) \quad FH^2 = \frac{rr}{16AA} - \frac{1}{9}(pp - 2q),$$

$$(VI) \quad GH^2 = \frac{rr}{16AA} - \frac{r}{p}.$$

Bien que cela ne semble être qu'une nouvelle liste de formules, il y a un joyau caché ici. En effet, Euler voit que  $EH = \frac{3}{2}EF$  et  $FH = \frac{1}{2}EF$  (douzième page de son document) et il remarque que cela implique que, si les points E et F sont connus, alors le point H peut être trouvé sur la droite passant par E et F. Il ne mentionne pas spécifiquement que l'égalité  $EF + FH = EH$  entraîne l'alignement des trois points.

Rien dans la présentation d'Euler ne suggère qu'il pensait que c'était très important ou même très intéressant. Il précise simplement qu'il peut trouver H à partir de E et F, mais pas que E et F peuvent être déterminés en connaissant les deux autres points. De façon plus moderne, nous donnons ce résultat en disant que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont alignés. De plus, EH est égale

à  $\frac{3}{2}$ EF. La droite associée est appelée droite d'Euler.

Par la suite, dans son document, Euler semble s'intéresser à une conséquence des égalités données plus difficile à montrer et certainement moins importante que le résultat énoncé ci-dessus, qui est l'égalité suivante :

$$4GH^2 + 2EG^2 = 3EF^2 + 6FG^2.$$

Mais Euler n'en reste pas là ! Son problème n'est pas de découvrir les propriétés des « centres » du triangle, mais d'essayer de reconstruire le triangle à partir des centres. Dans ce but, il introduit trois nouvelles valeurs  $P$ ,  $Q$  et  $R$  définies à l'aide de  $p$ ,  $q$  et  $r$  par :

$$\frac{rr}{ps} = R, \quad \frac{r}{p} = Q \text{ et } pp = P \text{ (où : } 4s = 4pq - p^3 - 8r, \text{ donc : } 4AA = ps).$$

Puis il réécrit les relations données dans les formules I à VI en fonction de  $P$ ,  $Q$  et  $R$ . Par la suite, il utilise seulement les trois formules :

- (I)  $GH^2 = \frac{1}{4}R - Q,$
- (II)  $FH^2 = \frac{1}{4}R - \frac{1}{18}P + \frac{4}{9}Q + \frac{2QQ}{9R},$
- (III)  $FG^2 = \frac{1}{36}P - \frac{8}{9}Q + \frac{5QQ}{9R}.$

Finalement, Euler est prêt à établir et résoudre le problème suivant qui est la raison de l'écriture de son document :

**PROBLÈME** : étant donné quatre points relatifs au triangle, construire le triangle.

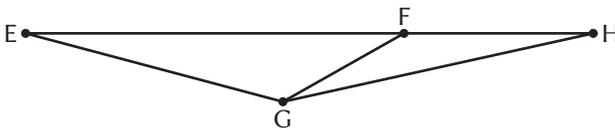


FIGURE 3.3 – Démonstration d'Euler (2).

Euler ne résout pas le problème très clairement.

Il sépare le problème en deux cas.

Le premier cas est celui où le point  $G$  n'appartient pas à la droite d'Euler ou, comme Euler le dit, le cas où les points  $F$ ,  $G$  et  $H$  forment un triangle.

Dans le second cas, les quatre droites sont confondues (voir la figure 3.3 pour deviner de quelles droites il s'agit).

Euler commence son raisonnement en posant :

$$GH = f, \quad FH = g \text{ et } FG = h.$$

Alors, à l'aide du théorème établi de la droite d'Euler et de ce qui suit ce théorème, on obtient :

$$\begin{aligned} EF &= 2g \text{ car } FH = \frac{1}{2}EF, \\ EH &= 3g \text{ car } EH = \frac{3}{2}EF, \\ \text{et } EG &= \sqrt{6gg + 3hh - 2ff}. \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue à partir de l'égalité

$$4GH^2 + 2EG^2 = 3EF^2 + 6FG^2.$$

Alors les formules I, II et III se réécrivent ainsi :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad ff &= \frac{1}{4}R - Q, \\ \text{(II)} \quad gg &= \frac{1}{4}R - \frac{1}{18}P + \frac{4}{9}Q + \frac{2QQ}{9R}, \\ \text{(III)} \quad hh &= \frac{1}{36}P - \frac{8}{9}Q + \frac{5QQ}{9R}. \end{aligned}$$

Euler trouve ensuite :

$$\begin{aligned} R &= \frac{4f^4}{3gg + 6hh - 2ff}, \\ Q &= \frac{3ff(ff - gg - 2hh)}{3gg + 6hh - 2ff}, \\ P &= \frac{27f^4}{3gg + 6hh - 2ff} - 12ff - 15gg + 6hh. \end{aligned}$$

Ainsi :  $\frac{QQ}{R} = \frac{9(ff - gg - 2hh)^2}{4(3gg + 6hh - 2ff)}.$

Puis il écrit  $p, q, r$  en fonction de  $P, Q$  et  $R$  (ce qui sous-entend que les expressions de ces nombres en fonction de  $f, g$  et  $h$  sont connues) et il obtient :

$$p = \sqrt{P}, \quad q = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{QQ}{R} \text{ et } r = Q\sqrt{P}.$$

Finalement, il nous rappelle que les trois longueurs des côtés du triangle sont les trois solutions de l'équation :  $z^3 - pzz + qz - r = 0.$

Dans le cas où nous n'avons pas l'assurance que la solution d'Euler résout le problème, il donne un exemple.

Il considère un triangle de côtés  $a = 5, b = 6$  et  $c = 7$ . Il utilise la première version de ses formules I à VI pour trouver :  $ff = \frac{35}{32}, gg = \frac{155}{288}$  et  $hh = \frac{1}{9}.$

Puis il prétend ne pas connaître  $a$ ,  $b$  et  $c$  et qu'il a juste les valeurs de  $ff$ ,  $gg$  et  $hh$ . Les formules données pour  $P$ ,  $Q$  et  $R$  en fonction de  $f$ ,  $g$  et  $h$  permettent d'obtenir :

$$R = \frac{1225}{24}, \quad Q = \frac{35}{3}, \quad P = 324 \quad \text{et} \quad \frac{QQ}{R} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

Cela donne ensuite :  $p = \sqrt{P} = 18$ ,  $q = 107$ , et  $r = \frac{35}{3} \times 18 = 5 \times 7 \times 6 = 210$ .

L'équation devient alors :  $z^3 - 18zz + 107z - 210 = 0$ .

Comme prévu, les trois solutions de cette équation sont 5, 6 et 7.

Ensuite, Euler considère séparément le cas où les quatre centres appartiennent à une même droite. Il trouve que l'équation a une racine double et que cela donne un triangle isocèle. Il ne donne pas de détails concernant le fait que le triangle est équilatéral si les quatre centres sont confondus.

En fait, Euler a fait sa découverte en cherchant autre chose. Il a essayé de trouver une manière de reconstruire un triangle à partir des positions de ses « centres ». Il n'a pas nommé sa découverte et ne l'a jamais donc appelée « droite d'Euler ». Euler n'était même pas conscient de l'importance de celle-ci. Par la suite, avec sa formule des polyèdres et son problème des ponts de Königsberg, il passa à autre chose et n'étudia plus cette fameuse droite.

## 3.2 Le cercle des neuf points en 1821

En 1821, les mathématiciens français Charles Brianchon (1785-1864) et Jean-Victor Poncelet (1788-1867) ont donné une première démonstration pour justifier l'existence du cercle des « neuf points ».

Nous nous permettons, dans un premier temps, de recopier cette démonstration puis, dans un deuxième temps, nous la traduirons sous une forme plus « moderne ».

### 3.2.1 Démonstration historique de Brianchon et Poncelet

Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, de 1810 à 1832, le mathématicien nîmois Joseph-Diaz Gergonne (1771-1859) publie un journal intitulé *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, premier grand périodique consacré aux mathématiques tant de recherches qu'à visée didactique. Il fut aidé, dans les deux premières années, par un autre mathématicien de la même ville, Joseph Esprit Thomas-Lavernède.

Puis Gergonne gère seul l'édition de son périodique, y compris après sa nomination à la faculté de Montpellier en 1816.

Ce journal est plus connu sous le nom d'*Annales de Gergonne*<sup>1</sup>.

1. Les *Annales de Gergonne* sont numérisées et visibles sur le site <http://www.numdam.org>.

C'est dans le volume XI de ce journal qu'on trouve la démonstration de nos deux mathématiciens (cf. [1]).

**THÉORÈME IX.** *Le cercle qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle quelconque sur les côtés qui leur sont opposés, passe aussi par les milieux de ces trois côtés, ainsi que par les milieux des distances qui séparent les sommets du point de croisement des perpendiculaires.*

*Démonstration.* Soient P, Q, R les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle ABC sur les côtés opposés; et soient K, I, L les points milieux de ces côtés.

Les triangles rectangles CBQ et ABR étant semblables, on aura

$$BC : BQ :: AB : BR ;$$

d'où, à cause que K et L sont les points milieux de BC et AB,

$$BK \cdot BR = BL \cdot BQ ;$$

c'est-à-dire que les quatre points K, R, L, Q appartiennent à une même circonférence.

On prouverait semblablement que les quatre points K, R, I, P sont sur un cercle, aussi bien que les quatre points P, I, Q, L.

Cela posé, s'il était possible que les trois cercles en question ne fussent pas un seul et même cercle, il faudrait que les directions des cordes qui leur sont deux à deux communes concourussent en un point unique; or, ces cordes sont précisément les côtés du triangle ABC, lesquels ne sauraient concourir en un même point; donc il est également impossible de supposer que les trois cercles diffèrent entre eux; donc ils se confondent en un seul et même cercle.

Soient maintenant C', A', B' les points milieux des distances DC, DA, DB qui séparent le point de croisement D des hauteurs du triangle ABC de chacun de ses sommets respectifs. Les triangles rectangles CDR et CQB étant semblables, on aura

$$CD : CR :: CB : CQ ;$$

d'où, à cause que les points C' et K sont les milieux des distances CD et CB,

$$CC' \cdot CQ = CR \cdot CK ;$$

c'est-à-dire que le cercle qui passe par  $K, R, Q$  passe aussi par  $C'$ .

On prouverait de la même manière que ce cercle passe par les deux autres points  $A', B'$ ; donc il passe à la fois par les neuf points  $P, Q, R, I, K, L, A', B', C'$ ; ce qu'il fallait démontrer.

Voici une figure qui aurait pu accompagner cette démonstration parue dans les *Annales de Gergonne* en 1821 :

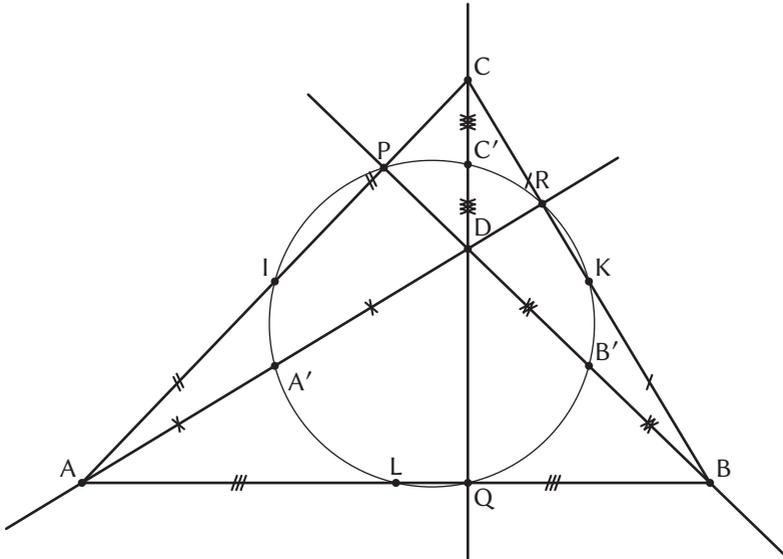


FIGURE 3.4 – Démonstration de Brianchon et Poncelet.

### 3.2.2 Démonstration de Brianchon et Poncelet « actualisée »

Nous nous permettons maintenant de reprendre la démonstration évoquée précédemment en la rédigeant en termes modernes. Nous utiliserons ici les notions de vecteur, de produit scalaire, de mesure algébrique, ainsi qu'une propriété relative à la puissance d'un point par rapport à un cercle et à la cocyclicité de quatre points (voir le chapitre 1). Ce choix de démonstration actualisée est dû au fait que l'on parle davantage de produit scalaire que de triangle semblable aujourd'hui et aussi au fait que l'expression « puissance d'un point par rapport à un cercle », qui ne pouvait pas apparaître en 1821 car la notion de mesure algébrique n'existait alors pas, doit être citée pour bien comprendre comment est justifiée la cocyclicité des points.

**Théorème 3.1.** *Dans un triangle quelconque, les pieds des hauteurs, les milieux des côtés et les milieux des segments d'extrémités un sommet et l'orthocentre du triangle sont cocycliques.*

Pour la démonstration, on se réfère à la figure 3.4.

**Démonstration**

Soit ABC un triangle quelconque. On nomme P, Q et R les pieds des hauteurs respectivement issues des sommets B, C et A. Alors :

$$(3.1) \quad \overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC},$$

$$(3.2) \quad \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

Soit K, L et I les milieux respectifs des côtés [BC], [AB] et [CA].

$$\text{On a : } \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BL};$$

$$\text{et : } \overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{BK}.$$

$$\text{Ainsi, on déduit de (3.1) et (3.2) : } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BL} \cdot \overrightarrow{BQ}.$$

Puis on peut conclure, d'après la propriété 1.4, que K, R, L et Q sont cocycliques.

De même, on a : K, R, I et P sont cocycliques ; et P, I, Q et L sont cocycliques.

Raisonnons alors par l'absurde en supposant que les trois cercles en question ne sont pas confondus.

Dans ce cas, les cordes qui leur sont deux à deux communes, étant les médiatrices des segments dont les extrémités sont les centres des cercles, sont :

- soit parallèles, si les centres sont alignés, d'après la propriété 1.6 ;
- soit concourantes en le centre radical des trois cercles (voir le corollaire 1.8 et la définition 1.9).

Or, ces cordes sont les côtés du triangle ABC, ce qui contredit les deux possibilités données.

On en conclut alors que les trois cercles sont confondus.

Soit R l'orthocentre du triangle ABC. On nomme C', A' et B' les milieux respectifs des segments [DC], [DA] et [DB].

Puisque les triangles CDR et CQB sont rectangles respectivement en R et en Q, on a :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CQ} &= \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= 2\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CK} \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{CR} \cdot \overrightarrow{CK} &= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CK} \\ &= 2\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CK} \end{aligned}$$

L'égalité (3.3) est due au fait que  $K$  est le milieu de  $[BC]$  et l'égalité (3.4) est due au fait que  $C'$  est le milieu de  $[CD]$ .

Ainsi, on peut conclure (puissance d'un point par rapport à un cercle) que  $K, R, Q$  et  $C'$  sont cocycliques.

De même, on a :  $K, R, Q$  et  $A'$  sont cocycliques ; et  $K, R, Q$  et  $B'$  sont cocycliques.

Donc  $P, Q, R, I, K, L, A', B', C'$  sont cocycliques.

### 3.3 Karl Feuerbach et ses quatre nouveaux points (1822)

Le mathématicien allemand Karl Feuerbach (1800-1834), d'abord étudiant brillant puis diplômé précoce, est considéré comme étant le géomètre découvreur du cercle des neuf points. Les coïncidences de recherches n'étant pas rares, il publia son résultat en 1822, un an après celui de Brianchon et Poncelet sur le même thème. Une de ses contributions particulières, celle qui lui valut la notoriété et qui nous intéresse ici, fut cependant d'adjoindre quatre points aux neuf que le cercle comptait déjà : le contact de ce cercle avec le cercle inscrit (point de Feuerbach) et avec les trois cercles exinscrits.

Alors qu'il était professeur au collège d'Erlangen, ses résultats sont publiés dans un ouvrage intitulé *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* (cf. [7]).

La figure qui accompagnait le texte étudié ici et qu'on trouvait à la fin de l'ouvrage, où apparaissent les points utiles pour la démonstration, est reproduite dans la page qui suit (remarque : les points de la figure ne font pas tous partie des égalités de longueurs que nous avons souhaité garder dans ce document).

Pour les égalités qui suivront, nous aurons besoin de connaître quelques notations utilisées par Feuerbach. Les voici :

$r$  : rayon du cercle inscrit dans le triangle  $ABC$  donné.

$R$  : rayon du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

*Remarque : Feuerbach a signalé dans son ouvrage que le rayon du cercle d'Euler, qui ne portait pas encore cette dénomination, était  $\frac{R}{2}$ .*

$\rho$  : rayon du cercle d'Euler.

$O$  : orthocentre ;  $K$  : centre du cercle circonscrit ;  $L$  : centre du cercle d'Euler ;  $S$  : centre du cercle inscrit ;  $S', S''$  et  $S'''$  : centres des cercles exinscrits.

$r', r''$  et  $r'''$  : rayons des cercles exinscrits.

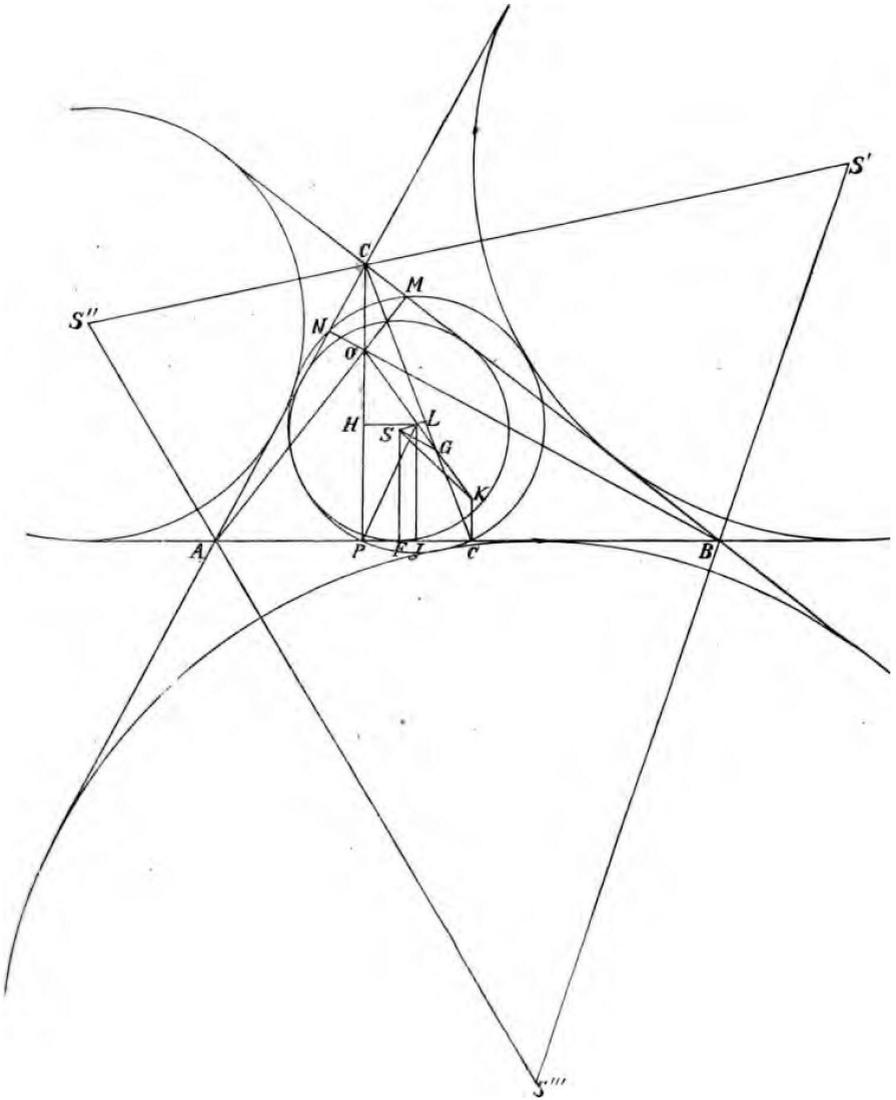


Fig .7.

FIGURE 3.5 – Points de Feuerbach (extrait de [7]).

Pour faciliter la lecture des lignes suivantes, le lecteur pourra se référer à la figure ci-dessous, inspirée de la figure extraite de [7], mais un peu plus lisible.

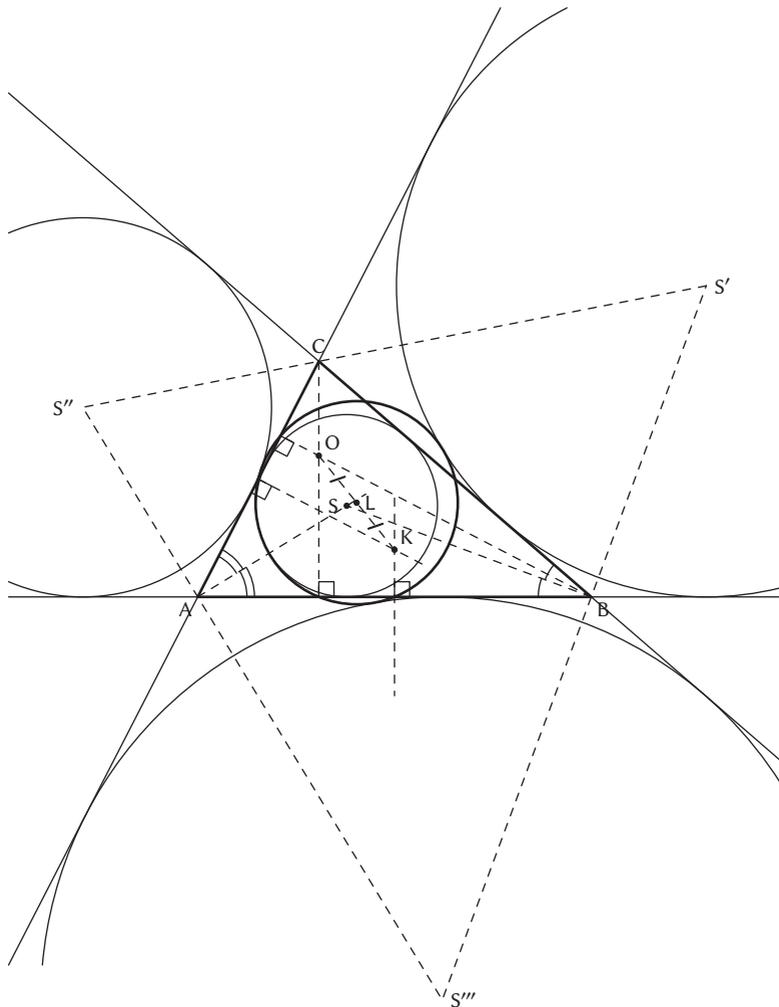


FIGURE 3.6 – Points de Feuerbach.

Feuerbach, pour prouver que le cercle d'Euler est tangent aux cercles inscrit et exinscrits, a dû justifier de nombreuses égalités de longueurs. Dans ce qui suit, nous présentons les résultats extraits de ses travaux qui permettent d'aboutir aux égalités associées à sa conclusion sur le fait qu'on ait des cercles tangents.

Auparavant, nous citons toutefois deux égalités rencontrées par la plupart des étudiants et qui ont été utilisées par Feuerbach dans sa démonstration :

$$r = \frac{2\Delta}{a + b + c} \text{ et } R = \frac{abc}{2\Delta}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les longueurs respectives des côtés [BC], [AC] et [AB] et  $\Delta$  est l'aire du triangle ABC.

Dans sa démonstration, on peut relever sept étapes :

1. Tout d'abord, Feuerbach prouve les égalités suivantes<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \overline{KS}^2 &= R^2 - 2rR, \\ \overline{KS'}^2 &= R^2 + 2r'R, \\ \overline{KS''}^2 &= R^2 + 2r''R, \\ \overline{KS'''}^2 &= R^2 + 2r'''R. \end{aligned}$$

2. À l'aide de l'égalité :  $r' + r'' + r''' = r + 4R$  établie plus tôt dans son ouvrage, il déduit du point précédent :

$$\overline{KS}^2 + \overline{KS'}^2 + \overline{KS''}^2 + \overline{KS'''}^2 = 12R^2.$$

3. Ensuite, il prouve les égalités :

$$\begin{aligned} \overline{OS}^2 &= 2r^2 - 2\rho R, \\ \overline{OS'}^2 &= 2r'^2 + 2\rho R, \\ \overline{OS''}^2 &= 2r''^2 + 2\rho R, \\ \overline{OS'''}^2 &= 2r'''^2 + 2\rho R. \end{aligned}$$

4. Puis, grâce à l'égalité :  $r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 = 4R(2R - \rho)$  établie, elle aussi, plus tôt dans le même ouvrage, il obtient :

$$\overline{OS}^2 + \overline{OS'}^2 + \overline{OS''}^2 + \overline{OS'''}^2 = 4R(4R - \rho).$$

5. Il prouve également que :  $\overline{KO}^2 = R^2 - 4\rho R$ .

6. Et, avec l'égalité  $\overline{OL}^2 = \frac{1}{4}R^2 - \rho R$ , justifiée plus tôt dans son ouvrage, il en déduit :  $\overline{KO}^2 = 4\overline{OL}^2$ , ou :  $KO = 2OL$ .

---

2. La notation  $\overline{KS}$  utilisée par Feuerbach signifie « longueur du segment [KS] ». Ce n'est pas une mesure algébrique!

7. Enfin, à l'aide des égalités précédentes et de l'égalité

$$2\overline{LS}^2 + 2\overline{OL}^2 = \overline{KS}^2 + 2\overline{OS}^2,$$

il établit que :

$$\overline{LS}^2 = \frac{1}{4}R^2 - rR + r^2 = \left(\frac{1}{2}R - r\right)^2 \text{ ou } LS = \frac{1}{2}R - r.$$

Il obtient de même :  $LS' = \frac{1}{2}R + r'$ ,  $LS'' = \frac{1}{2}R + r''$  et  $LS''' = \frac{1}{2}R + r'''$ .

Or dire que deux cercles sont tangents équivaut à dire que la somme ou la différence de leurs rayons est égale à la distance entre les centres de ces cercles.

Cela lui permet donc de conclure.

Nous vous donnons également la traduction de la phrase de conclusion de Feuerbach :

« *Le cercle qui passe par les pieds des hauteurs d'un triangle touche "tous" les quatre cercles qui sont tangents aux trois côtés du triangle; il est tangent "intérieurement" au cercle inscrit et tangent "extérieurement" à chacun des cercles qui touchent les côtés du triangle "extérieurement".* »

### 3.4 Le cercle des neuf points en 1842

Olry Terquem (1782-1862), ancien élève de l'école Polytechnique, crée en 1842, avec Camille-Christophe Gerono, les *Nouvelles annales de mathématiques*. Connue pour ses travaux de géométrie, c'est à lui que revient, en cette même année 1842, la dénomination « cercle des neuf points ».

Dans les lignes qui suivent, nous nous permettons de recopier la démonstration de ce mathématicien apparue dans les *Nouvelles annales de mathématiques* [11] dans laquelle apparaît à deux reprises la nouvelle dénomination pour la première fois.

Pour suivre la démonstration de Terquem, il faut savoir qu'il reprend des notations utilisées auparavant dans le même tome des *Nouvelles annales de mathématiques* [12].

Les voici :

ABC est un triangle donné.

$a, b, c$  sont les longueurs des côtés du triangle opposés respectivement aux sommets A, B, C.

E est le point d'intersection des trois hauteurs.

G est le centre du cercle inscrit. H est le centre du cercle circonscrit.

On pose :  $EG = e$  ;  $GH = f$  ;  $EH = k$  ;  $a + b + c = p$ .

R est le rayon du cercle circonscrit ;  $\rho$  est le rayon du cercle inscrit.

Il est également bon de savoir que Terquem reprend dans sa démonstration des résultats établis plus tôt dans les annales.

*Théorème*

Dans un triangle, les trois hauteurs se coupant en six segments; les milieux des segments qui partent des angles; les pieds des hauteurs; les milieux des côtés du triangle, donnent neuf points situés sur la même circonférence; le centre de cette circonférence est sur le milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de rencontre des trois hauteurs; le rayon de la circonférence est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit; et cette circonférence touche intérieurement le cercle inscrit et extérieurement les trois cercles exinscrits.

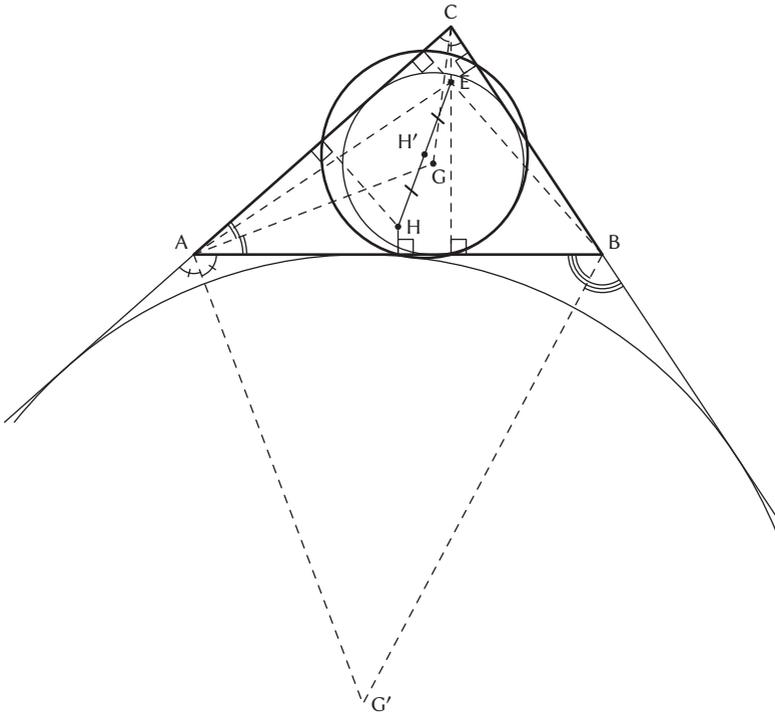


FIGURE 3.7 – Démonstration de Terquem.

*Démonstration*

Soit ABC le triangle : nous conservons les mêmes lettres et les mêmes notations qu'on trouve dans [12, p. 80] ;

$H'$ , centre du cercle passant par les neuf points ;

$G'$ , centre du cercle exinscrit touchant le côté AB et les deux côtés AC, BC prolongés ;

$\rho'$  rayon de ce cercle exinscrit ;

$G'E = e'$  ;

$G'H = f'$ .

Les trois points milieux des côtés, le pied d'une hauteur, sont évidemment les quatre sommets d'un trapèze ayant deux diagonales égales. Ce trapèze est donc inscriptible. Donc, les trois pieds des hauteurs et les trois points milieux sont sur une même circonférence : ces derniers trois points et un point milieu d'un segment des hauteurs adjacent à un angle forment un quadrilatère ayant deux angles opposés droits ; il est donc inscriptible : d'où l'on conclut que les neuf points mentionnés sont sur une même circonférence, ayant pour rayon  $\frac{R}{2}$  et on voit facilement que son centre  $H'$  est situé au milieu de EH.

Menons les trois droites GE,  $GH'$ , GH ; on a

$$2GH'^2 = GE^2 + GH^2 - \frac{HE^2}{2} \text{ (Legendre, livre III, prop. XIV [9])}$$

$$\text{ou } 2GH'^2 = e^2 + f^2 - \frac{k^2}{2} ;$$

remplaçant  $e, f, k$  par leurs valeurs ([12, p. 81, 82]), on trouve

$$2GH'^2 = \frac{R^2}{2} - 2R\rho + 2\rho^2, \text{ d'où } GH' = \frac{R}{2} - \rho ;$$

ainsi, la distance  $GH'$  des deux centres est égale à la différence des rayons ; donc **le cercle des neuf points** touche intérieurement le cercle inscrit au triangle ABC.

Menons les droites  $G'H, G'H', G'E$ , on a, par la proposition citée,

$$2G'H'^2 = G'E^2 + G'H^2 - \frac{HG^2}{2} \text{ ou } 2G'H'^2 = e'^2 + f'^2 - \frac{k^2}{2}.$$

On peut calculer  $e', f'$  directement, mais on peut déduire ces valeurs de celles de  $e$  et  $f$  en changeant  $\rho$  en  $-\rho'$ , et remplaçant  $p$  par  $a + b - c$  ; car

$$\rho' = \frac{2\rho}{a + b - c} ;$$

ainsi, on obtient :

$$e'^2 = 4R^2 - 4R\rho' + 3\rho'^2 - \frac{(a+b-c)^2}{4},$$

$$f'^2 = R^2 + 2R\rho',$$

$$k^2 = 9R^2 - 8R\rho' + 2\rho'^2 - \frac{(a+b-c)^2}{2};$$

d'où :

$$2G'H'^2 = \frac{R^2}{2} + 2R\rho' + 2\rho'^2, \text{ et } G'H' = \frac{R}{2} + \rho';$$

ainsi, la distance  $G'H'$  des deux centres est égale à la somme des rayons ; donc **le cercle des neuf points** touche extérieurement le centre du cercle exinscrit, tangent au côté AB ; il en est de même pour les deux autres cercles exinscrits, etc.

**C.Q.F.D.**

Notons que Terquem redémontre le théorème de Feuerbach concernant le fait que le cercle d'Euler est tangent au cercle inscrit et aux cercles exinscrits. Cette démonstration est la deuxième démonstration « historique » de ce beau théorème.

### 3.5 Autres contributions

Nous avons précédemment cité Euler, Brianchon, Poncelet, Feuerbach et Terquem pour leurs contributions au cercle des neuf points. On peut nommer également cinq autres érudits, férus de géométrie, qui se sont distingués dans l'histoire de ce cercle. Pour les trois premiers cités, il semblerait qu'ils avaient déjà conjecturé l'existence du cercle d'Euler avant même les travaux de Brianchon et Poncelet ou de Feuerbach. Concernant les deux derniers, c'est leur contribution à l'intitulé du cercle qui nous a interpellé.

Nous reprenons ici essentiellement les commentaires donnés dans [3].

**Benjamin Bevan**, ingénieur civil anglais, spécialiste de la construction de canaux, posa en 1804 la question : « Montrer que le centre  $O$  du cercle circonscrit à un triangle  $ABC$  est le milieu du segment joignant le centre  $I$  du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit du triangle excentral et que le rayon de ce cercle est le double du cercle circonscrivant  $ABC$  ». Il laissa son nom au « point de Bevan » d'un triangle, centre du triangle des centres des cercles exinscrits (triangle excentral). On pense qu'il connaissait déjà la cocyclicité des neuf points.

**John Butterworth** posa en 1807 une question relative au cercle des neuf points dans la revue *Gentleman's Mathematical Companion*. Il donna en 1808, dans cette même revue, une réponse à sa question. Une autre réponse fut donnée par John Whitley.

**John Whitley** fut l'un des pionniers de la publication d'un résultat sur les propriétés caractéristiques du cercle des neuf points dans la revue *Gentleman's Mathematical Companion* de 1808.

**John Casey** (1820-1891), mathématicien et professeur irlandais, fut le premier à donner un nom à ce cercle dont tout le monde parlait sans le nommer. Il l'appela tout simplement... « cercle des six points ».

**Henri Brocard** (1845-1922). Ce géomètre français, qui eut une vision moderne de la géométrie du triangle, donna sans doute le nom de « cercle d'Euler » au « cercle des six points » initial. Il écrivait en 1898 : « *Le cercle des neuf points pourrait s'appeler cercle des trente-et-un points, peut-être même des quarante-trois points* ».

Revenons aux trois premiers mathématiciens nommés.

Nous nommerons ABC le triangle donné au départ; I le centre du cercle inscrit dans ce triangle;  $I_1, I_2, I_3$  les centres des cercles exinscrits et O le centre du cercle circonscrit au triangle.

Dans un périodique intitulé *Leybourn's Mathematical Repository*, en 1804, Benjamin Bevan proposa, sous forme d'une question (voir les lignes écrites sur ce mathématicien auparavant), la propriété suivante, pour laquelle on précise que le triangle orthique d'un triangle de référence est le triangle ayant pour sommets les pieds des hauteurs :

« *Dans le triangle ABC, si on appelle  $O_0$  le centre du cercle circonscrit à  $I_1I_2I_3$ , alors on a :  $OO_0 = OI$ ; et : O,  $O_0$  et I sont alignés. De plus :  $O_0I_1 = O_0I_2 = O_0I_3 = 2R$ , où R est le rayon du cercle circonscrit à ABC* ».

En se rappelant que le triangle  $I_1I_2I_3$  a pour orthocentre I et ABC comme triangle orthique, et que le cercle circonscrit à ABC est le cercle des neuf points de  $I_1I_2I_3$ , on peut déduire de cette propriété (théorème de Bevan) que :

1. le centre du cercle des neuf points est le milieu du segment joignant l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit;
2. le rayon du cercle des neuf points est la moitié du rayon du cercle circonscrit.

La preuve du théorème de Bevan a été donnée dans [4] par John Butterworth (voir page suivante). Ce dernier posa, dans la revue *Gentleman's Mathematical Companion* de l'année 1807 (publiée en 1806), une question relative au positionnement du centre du cercle circonscrit au triangle excentral. Deux réponses furent apportées en 1808 dans cette même revue : l'une par John Butterworth lui-même et l'autre par John Whitley. La solution de ce dernier montrait que le cercle circonscrit à ABC passe par les pieds des hauteurs de  $I_1I_2I_3$ , les milieux de deux côtés de  $I_1I_2I_3$  et les milieux de deux des segments joignant un sommet à l'orthocentre du triangle  $I_1I_2I_3$ . Il semble évident, au vu de sa preuve, que Whitley était conscient que le cercle circonscrit à ABC passe par les deux autres points qui lui octroient le nom de cercle des neuf points.

Puisque rien ne prouve qu'Euler soit associé au cercle qui porte aujourd'hui son nom, les trois mathématiciens dont nous venons de parler sont vraisemblablement des pionniers dans l'étude de ce fameux cercle.

( 143 )

## VII. QUESTION 67, by Mr. BENJAMIN BEVAN.

In a plane triangle, let  $w$  be the centre of a circle passing through  $x$ ,  $y$ , and  $z$ ; then will  $Cw = Cc$ , and be in the same right line; and  $wx = wy = wz = \frac{1}{2}R$ , or the diameter of the circumscribing circle; where  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , &c. represent the same points and lines as they denote in the Synopsis of Data, for the Construction of Triangles?

SOLUTION, by Mr. JOHN BUTTERWORTH, *Haggate*.

Let  $S$ ,  $H$  and  $G$  (fig. 114, pl. 6.) be the points where the lines  $xc$ ,  $yc$ , and  $zc$  meet the circumscribing circle, and draw the radii  $CS$ ,  $CH$ , and  $CG$ ; also draw  $xw$  parallel to  $CS$  meeting  $cC$  produced in  $w$ , and join  $yw$ ,  $zw$ ; then  $w$  is the centre of a circle passing through  $x$ ,  $y$  and  $z$ . For it is now well known that  $Sc = Sx$ , therefore  $Cc = Cw$  and  $CH = Hy$ , consequently  $yw$  is parallel to  $CH$ . But  $CH$  is  $= CS$ , therefore  $yw$  is  $= wx = \frac{1}{2}CS$ . In like manner it is proved that  $zw = xw = \frac{1}{2}CS$ ; therefore  $w$  is the centre of a circle passing through the points  $x$ ,  $y$  and  $z$ , and consequently the points  $c$ ,  $C$ ,  $w$ , are in a straight line, and  $Cc = Cw$ ; and  $yw = xw = zw = \frac{1}{2}CS = \frac{1}{2}R$ . *Q. E. D.*

*Thus nearly was the proposition demonstrated by Messrs. Boole, Dawes, and Johnson.*

FIGURE 3.8 – Preuve du théorème de Bevan, par John Butterworth (extrait de [4]).

# Bibliographie

- [1] C. BRIANCHON et J.-V. PONCELET. « Géométrie des courbes. Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données ». In : *Annales de mathématiques pures et appliquées* n° 11 (1820-1821), p. 215-216 (cf. p. 47).
- [2] É. BUSSEY. « Le fameux cercle des neuf points ». In : *Bibliothèque Tangente* n° 24 (2005), p. 58-60 (cf. p. 25).
- [3] É. BUSSEY. « Quand on ne peut plus dire "9 points, c'est tout" ». In : *Bibliothèque Tangente* n° 36 (2009), p. 32-34 (cf. p. 27, 57).
- [4] J. BUTTERWORTH. In : *New series of the mathematical repository* volume I, partie I (1806), p. 143 (cf. p. 58, 59).
- [5] H. S. M. COXETER et S. L. GREITZER. « Geometry revisited ». In : *MAA (Mathematical Association of America)* (1967), p. 117-119 (cf. p. 30).
- [6] L. EULER. « Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficiliorum ». In : *Novi commentarii Academiae scientiarum imperialis petropolitanae* n° 11 (1767), p. 103-123.
- [7] K. FEUERBACH. *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren*. Nürnberg : Riegel und Wießner, 1822, p. 33-38 (cf. p. 50-52).
- [8] C. LEBOSSEY et C. HÉMERY. *Géométrie : classe de Mathématiques*. Paris : Fernand Nathan, 1955, p. 37-39, 165-167, 256-257 (cf. p. 30).
- [9] A.-M. LEGENDRE. *Éléments de géométrie*. 12<sup>e</sup> édition. T. III. Paris : Firmin Didot, 1823, p. 73-75 (cf. p. 56).
- [10] E. SANDIFER. *How Euler did it – The Euler line*. MAA (Mathematical Association of America), 2009 (cf. p. 39).
- [11] O. TERQUEM. « Considérations sur le triangle rectiligne ». In : *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles Polytechnique et Normale* 1<sup>re</sup> série, tome 1 (1842), p. 196-200 (cf. p. 54).
- [12] O. TERQUEM. « Considérations sur le triangle rectiligne, d'après Euler ». In : *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles Polytechnique et Normale* 1<sup>re</sup> série, tome 1 (1842), p. 79-87 (cf. p. 54, 56).

# Liste des illustrations

1.1	Puissance d'un point par rapport à un cercle. . . . .	13
1.2	Tangentes. . . . .	14
1.3	Division harmonique. . . . .	20
1.4	Droites antiparallèles (1). . . . .	21
1.5	Droites antiparallèles (2). . . . .	21
1.6	Tangente au cercle circonscrit et droites antiparallèles. . . . .	23
2.1	Droite d'Euler. . . . .	26
2.2	Cercle d'Euler. . . . .	28
2.3	Théorème de Feuerbach. . . . .	29
2.4	Première démonstration du théorème de Feuerbach (cas $AC = AB$ ). . . . .	30
2.5	Première démonstration du théorème de Feuerbach (cas $AC > AB$ ). . . . .	30
2.6	Première démonstration du théorème de Feuerbach (suite). . . . .	32
2.7	Démonstration du lemme 2.8, cas non isocèle. . . . .	34
2.8	Démonstration du lemme 2.8, cas isocèle. . . . .	35
2.9	Deuxième démonstration du théorème de Feuerbach (cas non isocèle). . . . .	36
3.1	Orthocentre. . . . .	41
3.2	Démonstration d'Euler (1). . . . .	43
3.3	Démonstration d'Euler (2). . . . .	44
3.4	Démonstration de Brianchon et Poncelet. . . . .	48
3.5	Points de Feuerbach (extrait de [7]). . . . .	51
3.6	Points de Feuerbach. . . . .	52
3.7	Démonstration de Terquem. . . . .	55
3.8	Preuve du théorème de Bevan, par John Butterworth (extrait de [4]). . . . .	59