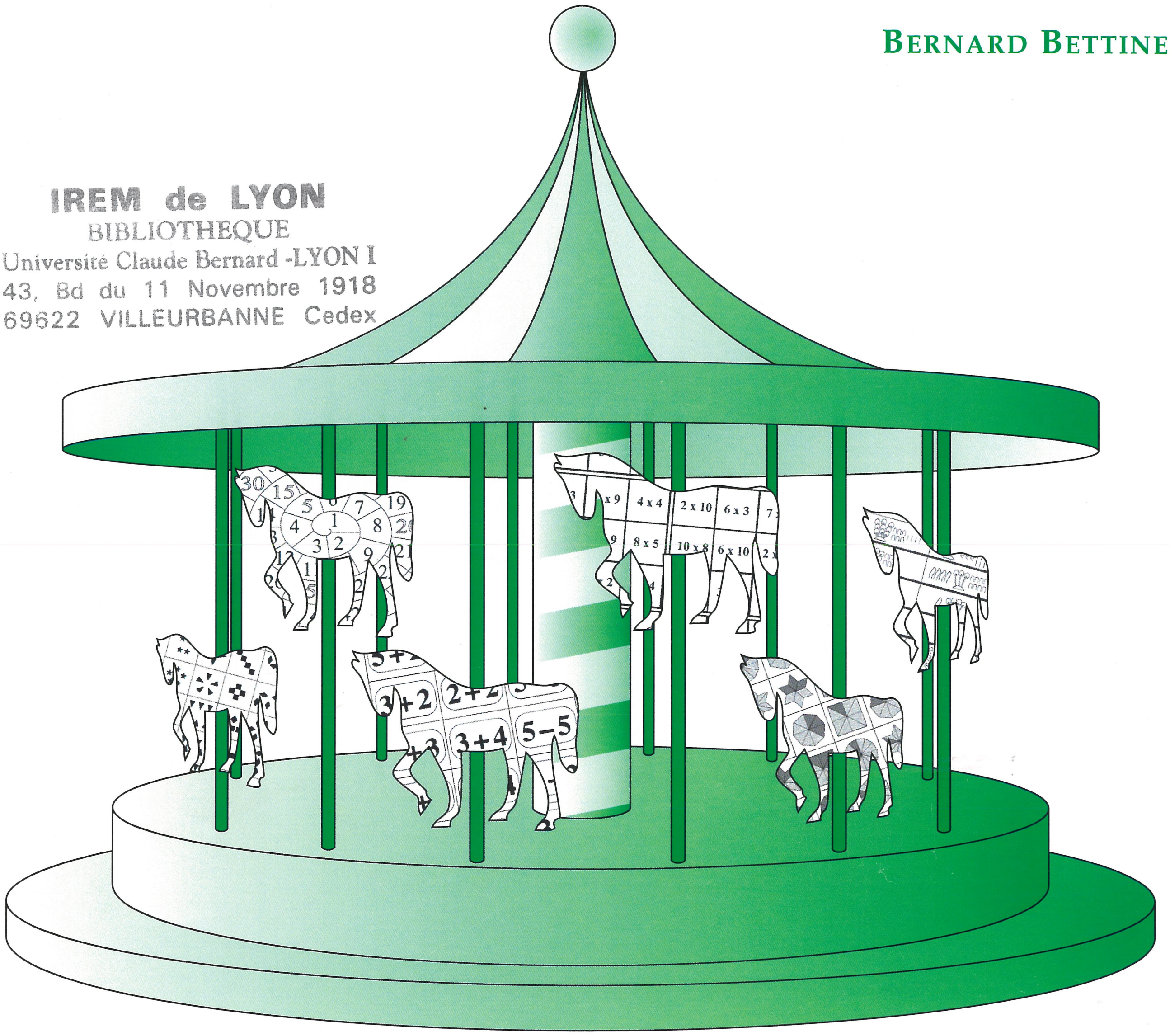
Les Publications de
l'IREM de BESANÇON

Le carrousel des nombres

Jeux numériques pour l'école primaire

BERNARD BETTINELLI



Presses universitaires de Franche-Comté

Le carrousel des nombres

*Les Publications de l'*IREM de BESANÇON

Directrice de collection Hombeline Languereau

Déjà publié pour l'école élémentaire

De la géométrie à l'école maternelle, pourquoi pas ?
(édition revue et augmentée de la version initialement publiée en 2 fascicules)
Groupe Élémentaire, ISBN 978-2-84867-162-8, 2007

Prends ton temps !
Groupe Élémentaire, ISBN 2-84867-137-8, 2006

La maternelle en jeux mathématiques,
Bernard Bettinelli, ISBN 2-84627-025-2, 2006

Instruments géométriques à l'école élémentaire. 1 : Au cycle II,
Groupe Élémentaire, ISBN 2-84627-074-0, 2002

Instruments géométriques à l'école élémentaire. 2 : Au cycle III,
Groupe Élémentaire, ISBN 2-909963-04-7, 1999

Parutions récentes dans la même collection

Lois continues, test d'adéquation. Une approche pour non spécialiste,
(deuxième édition)
Groupe Probabilités & Statistique, ISBN 2-84867-101-7, 2007

Rallye mathématique de Franche-Comté 2005,
Groupe Rallye, ISBN 2-84867-154-8, 2006

De la sphère au plan,
Groupes Lycée et Cartographie, ISBN 2-84867-098-3, 2005

Parution récente dans la collection Didactiques

Maths en formes,
Bernard Bettinelli, ISBN 2-84867-138-6, 2006

Les Presses universitaires de Franche-Comté bénéficient du soutien financier du Conseil régional de Franche-Comté et du ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche dans le cadre du contrat quadriennal.

ISBN 978-2-84867-181-9

IREM de Franche-Comté

Le carrousel des nombres

Jeux numériques pour l'école primaire

Bernard BETTINELLI

Presses universitaires de Franche-Comté, 2007
diffusé par l'IREM de Franche-Comté

Action de l'IREM de Franche-Comté

avec le soutien financier

de l'Université de Franche-Comté,
dans le cadre du plan quadriennal 2004-2007

avec les moyens horaires

du rectorat de l'académie de Besançon,

du ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche,
(DGESCO)

de l'Université de Franche-Comté

BERNARD BETTINELLI, professeur agrégé de mathématiques à l'IUFM de Franche-Comté, est animateur à l'IREM (Université de Franche-Comté) où il participe aux activités du groupe de travail sur les mathématiques à l'école élémentaire.

Sommaire

Dans un souci d'allégement du texte, les numéros de pages des planches ne sont indiqués que lorsqu'ils se réfèrent à un autre chapitre.

Pour retrouver une planche citée dans le texte, le lecteur pourra se reporter au sommaire ou à la liste alphabétique des planches donnée en index à la fin de l'ouvrage.

Introduction

L'objectif du pédagogue est de faire acquérir des connaissances utiles aux enfants. Celui de l'enfant du primaire est d'explorer le monde qui l'entoure par ses actions – réelles ou virtuelles – et par ses perceptions.

Les jeux de société que les hommes ont inventés, perpétués, transformés, transmis et qui constituent une partie intéressante de notre patrimoine, exploitent ces possibilités d'actions virtuelles à travers des ensembles de symboles adaptés. Parmi les plus courants, citons les jeux de dominos, de lotos, de cartes, le jeu de l'oie, le scrabble, ...

Les mathématiques font appel à un fonctionnement intellectuel qui nécessite la disponibilité d'images mentales, engrangées dans notre cerveau et qui peuvent être rappelées consciemment pour être associées. Dans ce but, la manipulation d'images physiques, regroupées en familles dynamiques, est essentielle à la création de ces images mentales. Les jeux de société sont une source d'images se répondant dans une dynamique fixée par les règles de ces jeux, règles éprouvées et ayant résisté au temps et qui font partie des intérêts des enfants du primaire. Les jeux font aussi souvent appel à la mémoire.

Mon but est de proposer des adaptations de jeux de société à des fins pédagogiques. La plus grande partie de la brochure est composée de planches A4 présentant des ensembles de pavés (carrés mobiles semblables à ceux du scrabble), dominos, spirales, tableaux..., obtenus en transformant les symboles initiaux, mais respectant les principes des jeux traditionnels.

Pendant trente ans, j'ai eu à participer à la formation des enseignants de l'éducation spéciale. La nécessité de créer des images porteuses de sens pour des enfants en difficulté scolaire s'est imposée à moi dans ce cadre et c'est ainsi que cet ouvrage a pris forme, petit à petit.

Les matériels présentés sont constitués soit de pièces à manipuler, comme les pavés du <u>scrabble</u> ou du <u>rummicub</u>, soit de rubans de nombres sur lesquels se déplacent des pions, comme au jeu de l'oie, soit de tableaux de symboles, rangés et organisés, où l'on forme mentalement des associations par pointage, permettant aux enfants de l'École primaire – maternelle et élémentaire – d'expérimenter les concepts essentiels sur lesquels se base la connaissance des nombres.

Chaque série peut, suivant les règles choisies par le maître, être utilisée seule ou en association avec d'autres. L'éventail proposé dans chaque série peut être réduit au gré de l'enseignant en fonction des connaissances de ses élèves. Par exemple, avec les pavés représentant toutes les composantes de notre monnaie, pièces et billets, on propose de former des prix jusqu'à 100 €. Si on laisse de côté les pavés 10 €, 20 € et 50 €, on fera de même jusqu'à 10 €.

Cet ouvrage est une refonte de l'ancien « Jeux de Pavés ». Il reprend une partie des jeux, parfois améliorés, et y ajoute de nombreux modèles complémentaires.

Chaque chapitre présente des suggestions d'utilisations pédagogiques de jeux présentés dans le cadre d'un thème mathématique du programme de l'école primaire (maternelle et élémentaire). Il est suivi de planches permettant de réaliser ces jeux, et de les expérimenter au niveau où ils nous semblent le mieux adapté. Mais de nombreuses références sont faites à des jeux des autres chapitres, adaptés a priori à d'autres fonctions mais qui peuvent être employés suivant les règles données dans le chapitre présent. Par exemple, le jeu de *l'Orchestre*, présenté au chapitre 2, est un jeu d'addition qui développe des jeux de nombres ; mais il est cité parmi les jeux de memory et dans les classements en tableaux logiques au chapitre 1.

Les planches, de format A4, peuvent être photocopiées[1] soit sur cartonnettes, soit sur papier et collées sur des cartons (2 mm) avec une colle en bombe, la seconde solution étant préférable en maternelle.

La difficulté de gestion due aux nombreuses petites pièces de ces jeux peut être résolue en partie par l'utilisation de cartons de couleurs différentes. On trouve en décoration des cartons ayant une face colorée. L'utilisation de petites boîtes est de toutes façons indispensable pour ne pas perdre de temps à trier les ensembles mélangés.

La méthode de travail s'apparente à la pratique des jeux de société. Elle peut être individuelle ou par groupes ou encore collective. Chaque enseignant peut choisir les matériels et les formes pédagogiques qui lui conviennent le mieux. Dans cet ouvrage, chaque nom d'un jeu vendu dans le commerce sera souligné ; et chaque jeu présenté dans les planches, mis en italique avec référence à la (aux) planche(s) correspondante(s).

À une époque où on reparle beaucoup de la place du calcul mental, le lecteur trouvera dans ces propositions de nombreuses occasions de le pratiquer sous forme de jeux, à tous niveaux.

Chapitre 1 : Jeux de symboles (maternelle)

Les jeux de ce chapitre ont pour but de faire associer des symboles très divers[1]. La plus simple de ces associations est l'identification comme dans les jeux de memory, loto, dominos. Ils deviennent associations de symboles différents du même objet : dessin et nom oral, somme et résultat, repérages horaires par aiguilles ou digital, ... Dans tous les cas, le principe utilisé est celui de l'équivalence, c'est-à-dire une relation entre des symboles représentant un même objet. Le dessin d'un cercle ou d'un carré et les mots « rond » ou « carré » portent l'image de la même réalité. Et c'est encore le cas quand on écrit : $8 = 5 + 3$. Cette écriture ne désigne pas trois nombres, mais un seul, le nombre huit sous deux formes le représentant de façon équivalente.

L'autre groupe d'activités de ce chapitre concerne les classements d'objets suivant différents caractères, leurs rangements en tableaux et la combinatoire qui classifie toutes les organisations différentes possibles d'un groupe de dessins.

Jeux d'association

1) Jeu de paires et memory (jeux de groupes pour la maternelle)

Avec une double série de dessins (qu'on pourra adapter au niveau des enfants), on peut créer des jeux de groupes dont le but est d'associer ces icônes par paires.

- Memory : les pavés sont posés, faces cachées, et chaque joueur, à son tour, retourne deux pavés, les prend s'ils sont identiques ou les remet à leur place, faces cachées, sinon. Le gagnant est celui qui a gagné le plus de pavés.
- Paires ou mariages : six pavés sont distribués à chaque joueur, les autres sont étalés, faces cachées sur la table, et constituent la pioche. À son tour, un joueur demande à un autre un pavé qu'il décrit. Si le joueur interpellé possède la pièce, il la donne au joueur qui conserve sa paire et rejoue ; sinon, il pioche. Si la pioche lui donne la pièce demandée (« bonne pioche »), il rejoue. Sinon, il passe.

  Pour les enfants de cycle 1, les pavés des joueurs peuvent être posés, visibles, sur la table. Chez les grands, chacun cache son jeu. Il est pratique de construire des petits présentoirs en pliant un carton. Ainsi, chacun voit ses pièces sans les montrer (comme au scrabble). Le gagnant est celui qui a le plus de pavés.

Ces deux familles de jeux sont fondées sur le principe de l'appariement des symboles. Elles ont, en outre, le double objectif d'exercer la mémorisation des dessins et, au niveau du langage pour les jeux de mariage, de favoriser l'expression correcte d'une demande.

Les matériels se prêtant à ces formes de jeux sont :

- les *pavés animaux, véhicules, instruments et nourriture*,

1 Pour plus de détails et pour d'autres propositions de jeux, voir « La maternelle en jeux mathématiques ».

- les *pavés noirs et blancs*,
- les *pavés formes-nombres*,
- les *pavés géométriques*,
- les *pavés orchestre* (p. 56-57).

De même, avec une seule série de pavés, il est possible de faire associer deux dessins non identiques ayant un caractère commun (même nombre ou même forme, par exemples). De cette manière, le joueur doit faire abstraction de caractères non significatifs et mettre l'accent sur celui qui a été choisi pour l'association.

Les matériels se prêtant à ces formes de jeux sont :

- les *pavés premiers nombres* (même nombre et mêmes symboles, mais dispositions différentes),
- les *pavés géométriques* (un gris avec un blanc),
- les *pavés doigts* (mains droite et gauche symétriques).

Chaque enseignant pourra, à son gré, créer des séries complémentaires (images en positif et en négatif, en deux tailles, images et écritures, images vues sous deux points de vue différents, objets et détails significatifs...)

On trouve dans le commerce une variante amusante du memory sous le nom de Quak-quak. Le jeu se compose de 30 cartes portant des dessins d'animaux au recto. Au verso, un gros point d'une de six couleurs associées aléatoirement aux animaux. Un gros dé porte les mêmes six couleurs. Les cartes sont retournées sur la table. A son tour le joueur lance le dé et retourne une carte de la couleur après avoir fait le cri d'un animal. Si le cri correspond à la carte, il gagne la carte ; sinon il la retourne et passe. L'amusement est provoqué par les associations incongrues d'un cri et d'un animal qui ne correspond pas. Il est facile de reproduire ce principe de jeu avec les *pavés animaux*, les *pavés géométriques* et les *écritures chiffrées 1* (p. 60). Dans les deux derniers cas, la carte est retournée après avoir dit le nom d'une forme ou d'un nombre. Si c'est le bon, la carte est gagnée.

Ces jeux forcent une comparaison entre un symbole visuel et son nom.

2) Lotos (jeux collectifs)

Les jeux de lotos sont une mine de jeux d'égalité puisqu'on dispose d'un ensemble de symboles sur une carte et d'une seconde série des mêmes symboles choisie au hasard dans un sac.

Les pages de pavés citées ci-dessus peuvent être reproduites en double exemplaire. L'un d'eux est découpé en rectangles de plusieurs carrés pour créer des cartons sur lesquelles des dessins variés sont imprimés. La taille de ces cartons est adaptable au niveau des enfants : 2 x 4 ; 3 x 2 ; 3 x 4. Le second, portant les mêmes dessins, est découpé en pavés (carrés) et mis dans le sac. Celui qui a le dessin tiré au sort le met en superposition sur sa carte ou place un jeton sur la case repérée.

Le jeu Œil de lynx propose une variante de ce jeu : tous les dessins (environ 300) sont imprimés sur un grand tapis placé au centre de la table. 300 jetons, dans une boîte, portent les mêmes dessins. A chaque tour, chaque joueur tire trois jetons du sac et, au signal du meneur de jeu, essaie de placer le plus vite possible ses trois jetons sur le tapis. Dès qu'un joueur annonce qu'il a terminé, chacun s'arrête et garde ses jetons non placés.

Les planches de pavés des jeux précités peuvent aussi être exploités de cette façon : les planches complètes sont étalées et exposées devant le groupe de trois à six joueurs. Une seconde série de planches, portant, soit les mêmes symboles, soit des symboles associés, est découpée en pavés et sert au tirage.

Dans le jeu Figurix, une grande planche présente à l'ensemble des joueurs des dessins combinant trois caractères : un dessin d'objet sur fond circulaire coloré entouré d'une couronne d'une autre couleur. Trois dés portant, l'un les six dessins, le deuxième les six couleurs de fond et le troisième les six couleurs de couronnes, sont lancés simultanément. Chacun essaie de trouver, le premier, le dessin combinant les trois caractères lus sur les dés.

De la même manière, les *pavés figurix* combinent trois caractères : trois desserts, quatre nombres et six formes géométriques. On étale les trois planches devant les joueurs et on fait tirer, avec trois séries de pavés retournés, une association de trois caractères qu'il faut retrouver combinée dans une case des planches.

3) Dominos (jeux de groupes)

Le jeu de dominos, très en vogue au début du XX^{e} siècle en Europe et encore aujourd'hui en Afrique, est, lui aussi, fondamentalement un jeu d'égalité. Tous les pavés cités ci-dessus se prêtent à ce jeu. Il suffit de constituer des doubles carrés avec les *grilles vides* sur lesquels les symboles seront collés.

La série des *dominos 1-9* est une variante du jeu classique. Les nombres utilisés sont les nombres de 1 à 9, dans différentes dispositions. En maternelle, en restreignant éventuellement l'ensemble des nombres pour les plus jeunes, ce jeu a l'avantage de présenter chacun des nombres qui sont le fondement de notre numération sous différentes concrétisations. Les enfants doivent compter les points ou les organiser mentalement en petits groupes, contrairement aux figures du dé qui sont fixes et qui sont reconnues globalement par leur organisation géométrique standard, appelées constellations.

Une variante intéressante de ce jeu met en jeu les pavés portant deux caractères complémentaires : *premiers nombres*, *noirs et blancs*, *formes-nombres*, *orchestre* (p. 56-57), *pavés figurix* (en faisant abstraction d'un caractère). Dans ce cas, chaque pièce de domino est un carré simple et l'accolement se fait en prenant en compte un seul caractère (par exemple, pour les formes-nombres, on accole deux pièces portant, soit la même forme, soit le même nombre). Contrairement aux dominos classiques, on a le choix du caractère pour compléter la ligne de dominos par la gauche et par la droite.

Enfin, l'identité des symboles peut être remplacée par une relation de contraste : en particulier, les *dominos 1-9* pourront imposer un accolement par complémentarité à 10 et les *pavés noirs et blancs,* le même nombre dans la couleur opposée.

4) Lotos et dominos à l'école élémentaire

Aux cycles 2 et 3, ces jeux se diversifient, car on peut associer des séries différentes correspondant au même nombre (par exemple, un problème et sa représentation ou un problème et sa solution) : les *pavés dispositions arithmétiques, écritures arithmétiques et problèmes* (p. 66 à 70), les *pavés équations* (p. 71) et leurs nombres solutions, les *pavés montres à aiguilles et montres digitales 1 et 2 (p. 96-97),* les *pavés rectangles* (p. 112-113) et certains *pavés écritures chiffrées* (p. 60-61), ainsi que les *pavés fractions* (p. 128 à 130) sous les formes imagées et écrites.

Organisation

1) Classements et rangements

Chaque planche des *pavés animaux, véhicules, instruments et nourriture* est découpée en pavés dont les symboles peuvent être classés selon différents critères. Par exemple : animaux domestiques ou sauvages, véhicules roulant, volant ou flottant, instruments de musique à vent, à cordes ou à percussion, entrées, boissons, desserts, ... L'action de l'enfant consiste à regrouper les pavés en fonction d'un critère précis. Parfois, il est nécessaire d'envisager un groupe supplémentaire contenant tous les pavés qu'on ne peut placer.

Certains symboles se rangent naturellement par ordre - en particulier les nombres et constellations - et leur alignement constitue une bande.

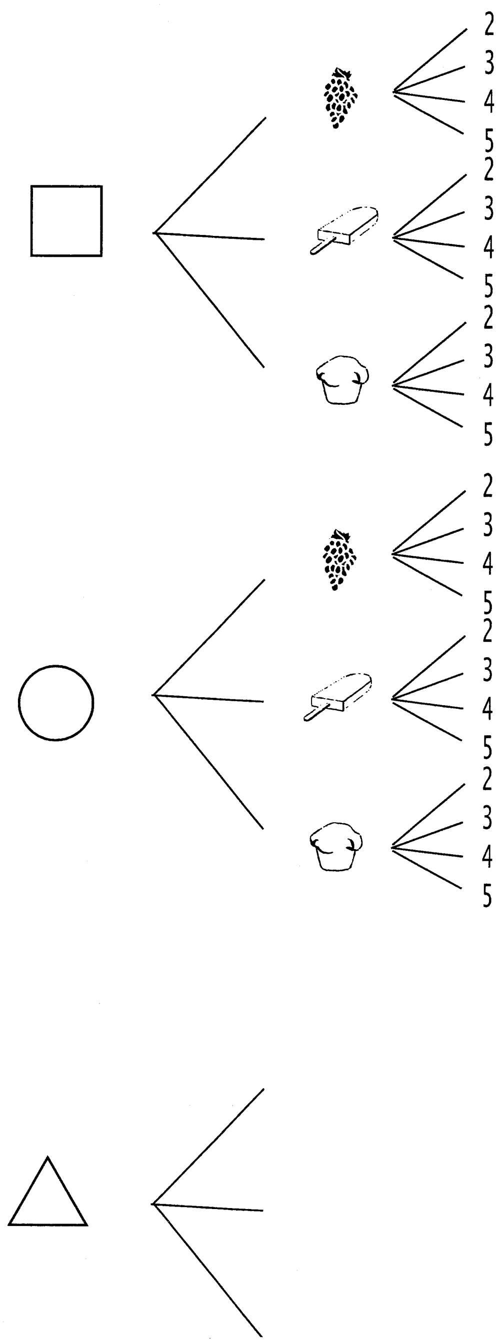
Les séries les plus riches sont celles qui font intervenir plusieurs critères pour les mêmes pavés. C'est le cas des *pavés figurix*, *premiers nombres, noirs et blancs*, *formes-nombres,* et *orchestre* (p. 56-57). On peut alors changer de critère de classement et, ainsi changer l'organisation des mêmes pavés (par exemple *formes-nombres* classés soit par formes, soit par nombres). Cette liberté qui permet à l'esprit d'un enfant de grande section de focaliser son attention sur un critère en ignorant consciemment l'autre pour réaliser son classement, et de reprendre l'ensemble pour le classer selon le second critère en ignorant le premier est l'abstraction qui sera le mode de fonctionnement de ses activités mathématiques.

2) Tableaux

À la suite de l'action précédente, on peut chercher à construire un double classement, dans deux directions différentes (par exemple, les formes ou les instruments en colonnes et, dans chaque colonne, les pavés rangés suivant leur nombre). On découvre ainsi le principe des tableaux à double entrée.

Les *grilles vides* serviront de support à des rangements doubles. C'est d'ailleurs ainsi que sont organisées les planches des *pavés formes-nombres et orchestre* (p. 56-57).

Lorsque le classement peut se faire selon trois caractères, comme dans *Figurix*, un arbre de choix devient une représentation pertinente. Dans l'exemple cité, six départs permettent de distinguer les formes des cadres. A chaque extrémité une bifurcation en trois chemins distingue les desserts. Enfin, une troisième bifurcation en quatre chemins sépare les nombres. Ainsi, chaque pavé trouve sa place à l'extrémité d'une route.



3) Master mind

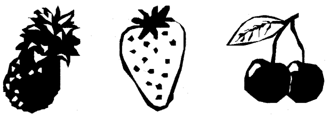
Les symboles qui ne sont pas liés aux nombres ne possèdent pas un ordre naturel ; la reproduction d'un groupe ou d'un alignement est un exercice de mémoire, du type « jeu de Kim ».

- Le maître peut demander à des enfants de petite section de reproduire une disposition visible.
- Avec des enfants plus grands, il peut la faire observer pendant un temps limité puis la recouvrir ensuite d'un cache,
- ou encore la faire observer en demandant d'aller chercher sur une autre table les pavés nécessaires pour recomposer la disposition.

On peut créer un jeu à deux de type « Master mind » simplifié avec les symboles figuratifs des pages 17 à 20. Chacun compose un groupe avec des signes (3 au départ, puis 4 et 5) qu'il choisit parmi un ensemble restreint (6 à 8). Les joueurs essaient alternativement de trouver le groupe de l'autre, sans le voir, par essais successifs : pour chaque ensemble proposé, le partenaire dit combien de bons signes sont présents. Le gagnant est celui qui a trouvé, le premier, le groupe de l'autre.

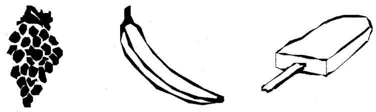
La difficulté pratique vient du fait qu'il faudrait disposer d'un grand nombre de symboles de chaque type pour composer les lignes successives et les conserver. La comparaison des résultats obtenus permet de cerner rapidement et logiquement la solution. Par exemple, un groupe de 3 symboles parmi 6 qui ne contient aucun bon signe, assure le joueur que le groupe de son partenaire est formé des 3 autres.

C'est l'occasion de chercher à représenter les objets par un dessin simplifié (pictogramme), puis, lorsque les lettres sont connues, par la lettre initiale de leur nom.



B F C 1

A F C 0



G C F 2

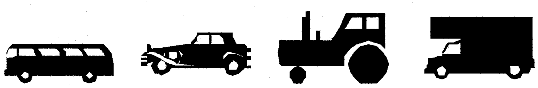
Dans le jeu de master mind, on part de séries ordonnées et chacun informe son partenaire des éléments bien placés (en noir) et des éléments exacts mais mal placés (en blanc). C'est trop difficile à gérer pour un enfant de cinq ans ; mais on peut imaginer, après avoir maîtrisé la version donnée ci-dessus, qu'il puisse essayer une variante où les symboles sont ordonnés et où on l'informe seulement de ceux qui sont justes et bien placés (comme dans le jeu de lettres : « jabiru »).

Combinatoire

1) Les différentes organisations possibles

Chaque fois qu'on fait le choix d'une composition, on peut se demander combien d'autres compositions de même type on peut obtenir. Voici quelques exemples :

- Parmi cinq animaux de la ferme, tu en rassembles trois dans un pré.
- Tu fais un dessin avec deux instruments de musique alignés.
- Quatre véhicules choisis se suivent sur la route. Comment les aligner ?



- Pour mon repas, j'ai le choix entre un sandwich, un hot dog et un croissant puis je choisis un dessert choisi parmi une glace, un gâteau et une grappe de raisin.

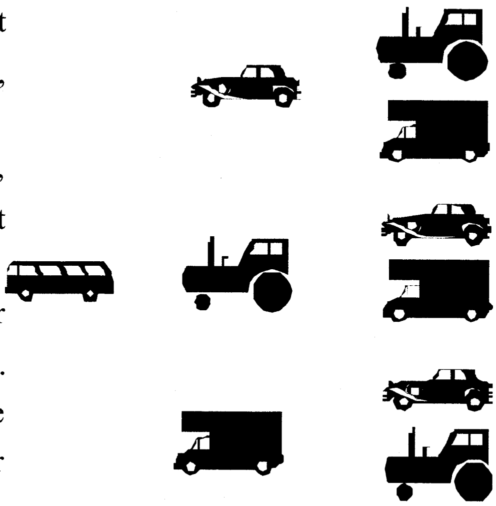
Dans ces exemples, on part d'un ensemble (4 objets au maximum). Les enfants font en général une première recherche par tâtonnement et comparent leur solution à celles que le groupe a déjà trouvées. Si leur réalisation est nouvelle, ils l'ajoutent à l'ensemble des solutions.

Lorsque le nombre des solutions augmente, il devient nécessaire de les ranger suivant une logique, pour qu'on sache plus vite et plus facilement si un nouvel essai est une solution réellement nouvelle (comme le dictionnaire qui range les mots par ordre alphabétique).

Dans ce but, les enfants devront décomposer leur recherche et éventuellement utiliser les modèles de tableaux et arbres cités ci-dessus. Les raisonnements pourront être du type suivant :

- Si je choisis la vache, je peux mettre avec elle, soit le mouton et le cheval, soit le mouton et le cochon, ... sinon, je choisis parmi les quatre autres animaux.
- Si je mets la guitare à gauche, je peux mettre le cor, le tambour, l'accordéon ou la trompette à droite. Et de même pour les autres instruments.
- Le bus peut être en premier. Il est suivi soit par l'auto, soit par le tracteur, soit par le camping car. Cela me fournit trois choix pour le deuxième véhicule, et je n'ai plus que deux façon de terminer ma file de voitures.

  Si je mets, cette fois, en premier ...



- J'ai trois choix de plats. À partir de chacun, je peux associer un dessert de trois façons. Une représentation en arbre montre les neuf choix de repas.

2) Composition des jeux

Beaucoup de jeux de société sont ainsi composés de tous les possibles à partir d'un ensemble de symboles. Un jeu de 32 ou de 52 cartes, par exemple, combine toutes les combinaisons possibles des quatre couleurs et d'une série de valeurs. Il peut être rangé dans un tableau à double entrée combinant les couleurs et les valeurs.

De même, ranger les pièces de *domino 1-9* ou *forme-nombre*, ou *figurix* dans un tableau, permet éventuellement de vérifier que le jeu est complet.

3) Tirages

Beaucoup de jeux sont liés à un tirage au sort (comme *Figurix* ou *Orchestre*). Une solution universelle consiste à créer des pavés de tirage en séries séparées (de couleurs différentes) et posés à l'envers.

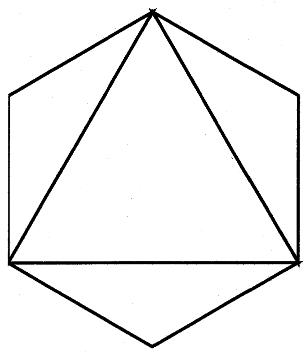
Mais chacun sait la commodité de nos instruments de tirage classique que sont la pièce de monnaie (pile ou face) et le dé cubique. Lorsque le choix se fait entre deux éventualités, le jeton rond marqué d'un symbole sur chacune de ses faces contrefait agréablement la pièce. Pour un choix entre six éventualités, le dé est incontournable et on trouve dans le commerce (boutiques de jeux) des dés blancs sur lesquels chacun peut coller ou dessiner ses symboles. Pour disposer de trois éventualités, le même dé s'adapte en marquant les faces opposées du même symbole.

Le cas de quatre ou huit éventualités se réalise à l'aide d'un dé octaédrique soit acheté, soit confectionné avec un des matériels de composition dans l'espace comme Jovo, clixi, Polydron, Lokon[2]. Il a la forme d'une double pyramide à base carrée et ses faces sont formées de huit

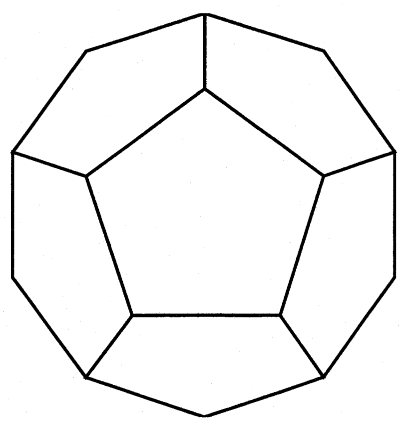
2 Pour une exploitation détaillée de ces matériels, voir « De la géométrie à la maternelle, pourquoi pas ? » IREM de Franche-Comté

triangles équilatéraux. On peut même aller jusqu'à douze éventualités avec un dé dodécaédrique formé de douze pentagones réguliers, obtenu par les mêmes moyens.

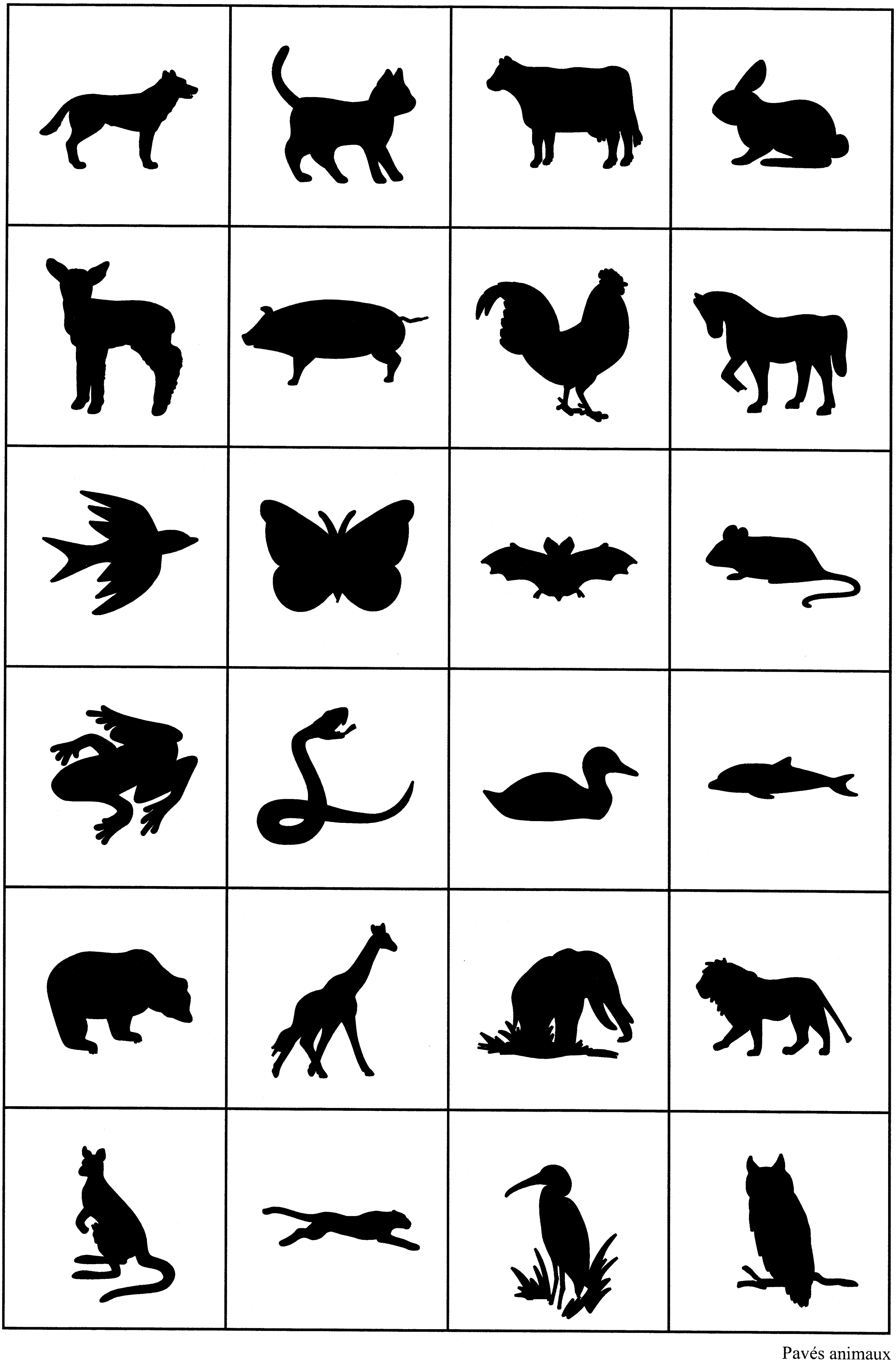
Si on veut avoir cinq éventualités avec un dé, le plus simple est de prendre un dé classique avec une face soit joker, soit blanche qui fait rejouer ou passer un tour.



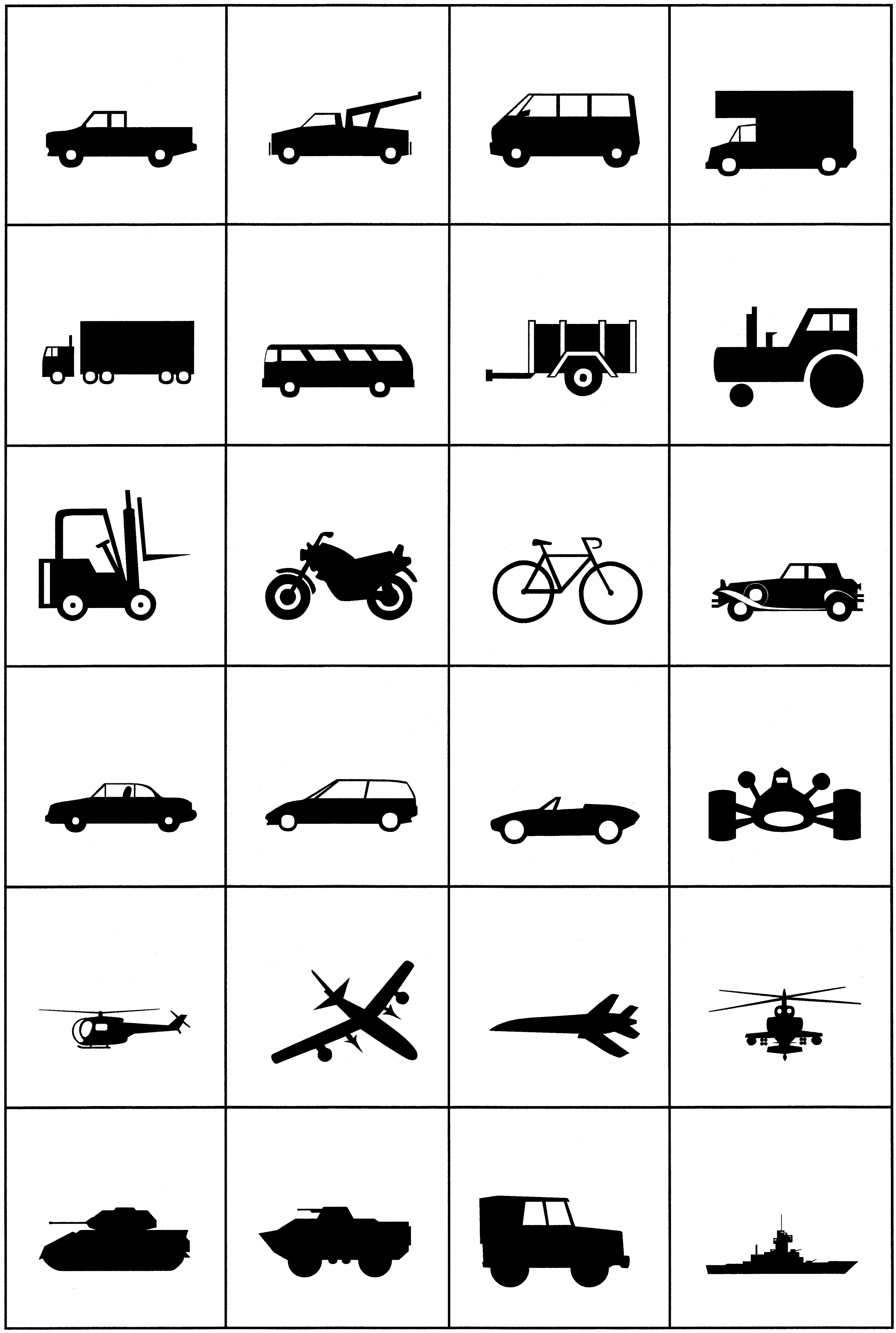
Dé octaédrique



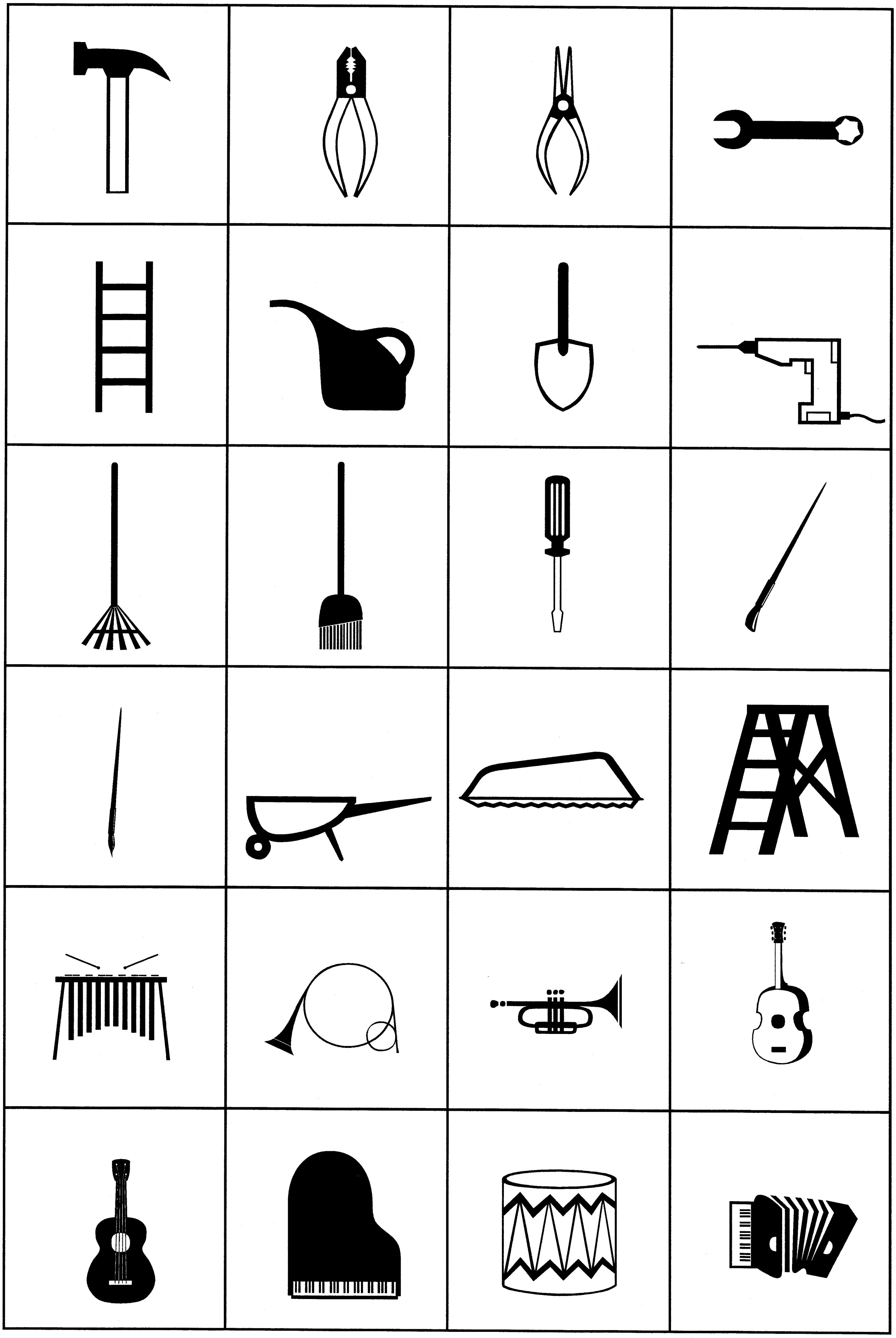
Dé dodécaédrique



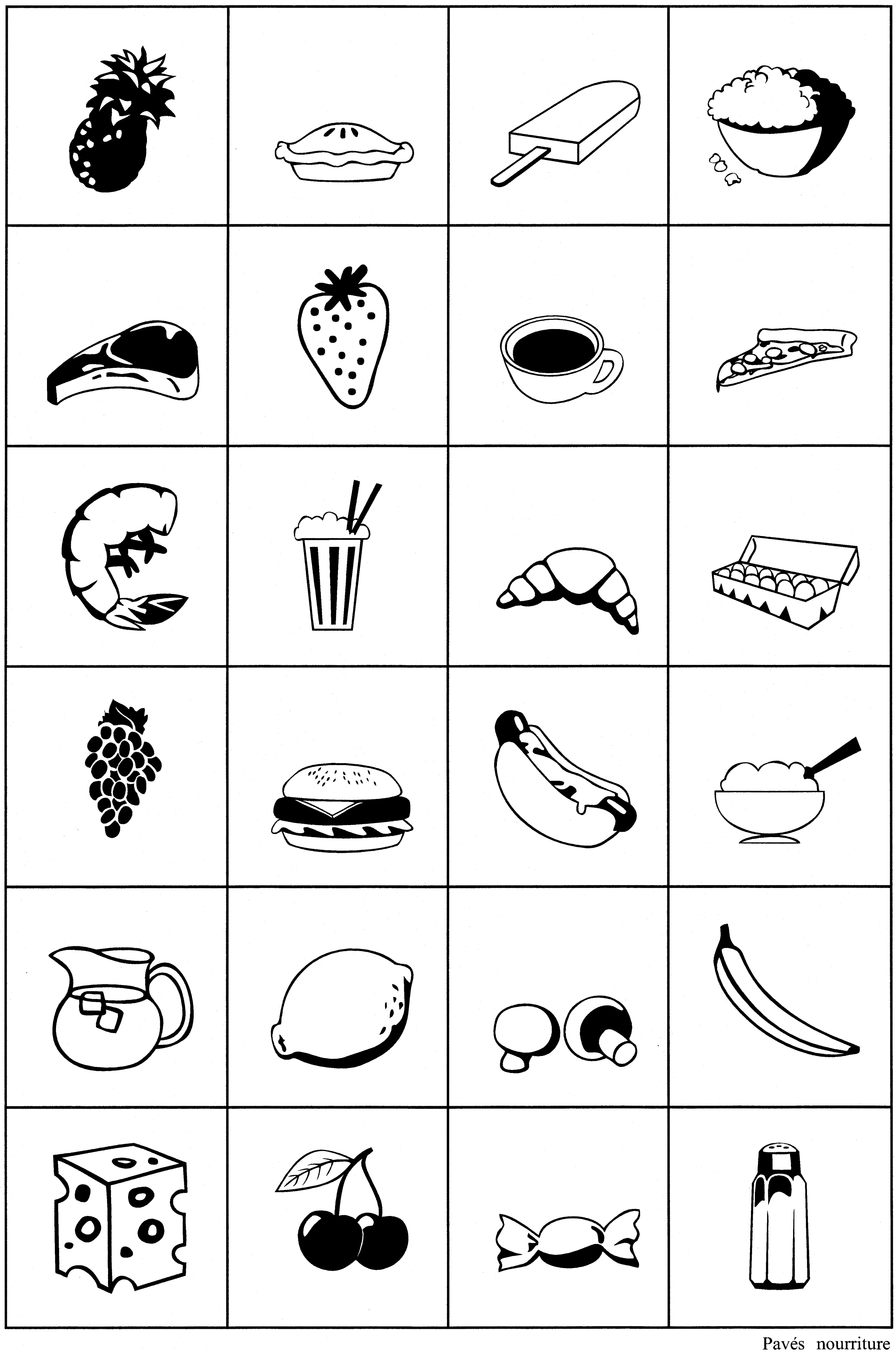
Pavés animaux



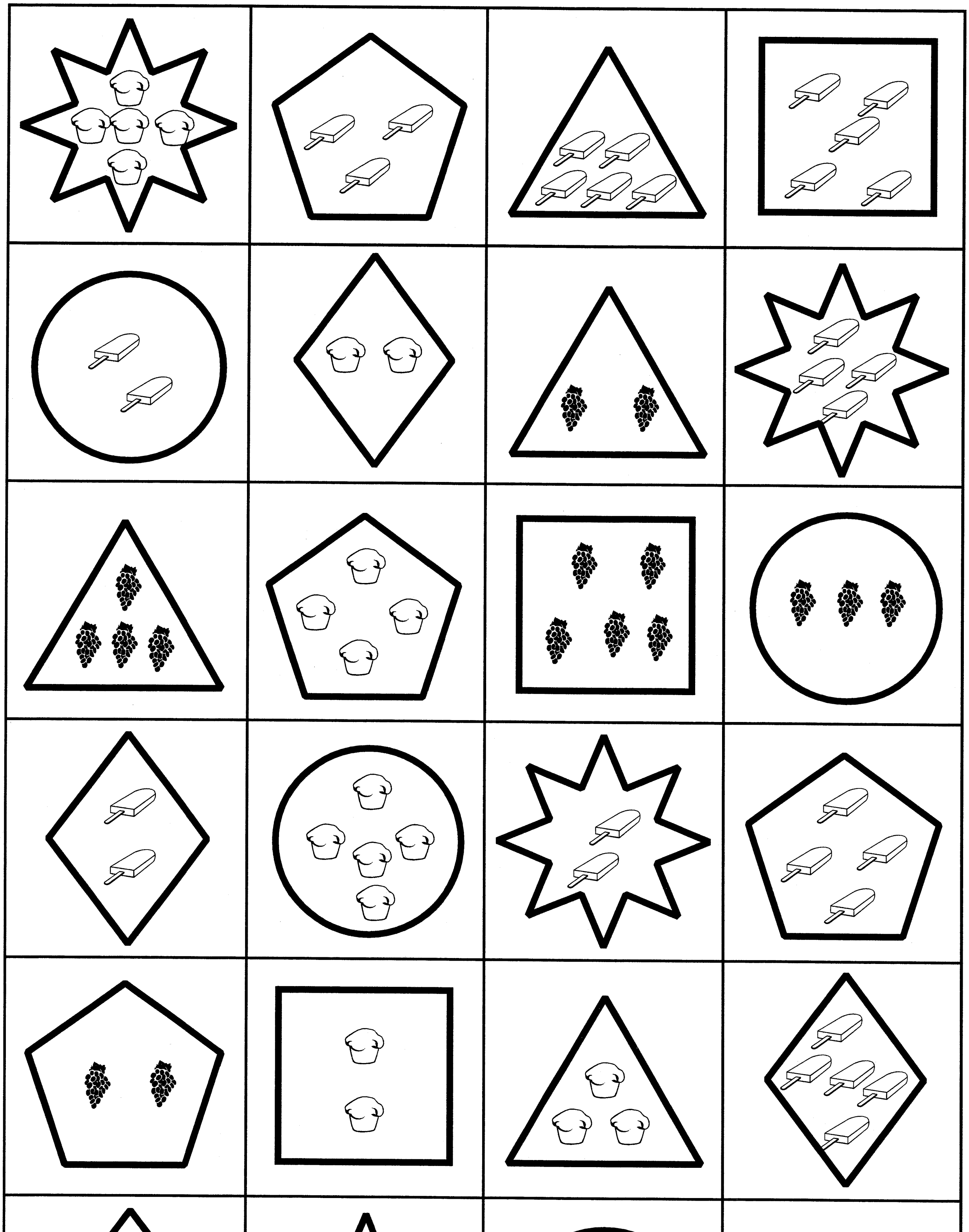
Pavés véhicules



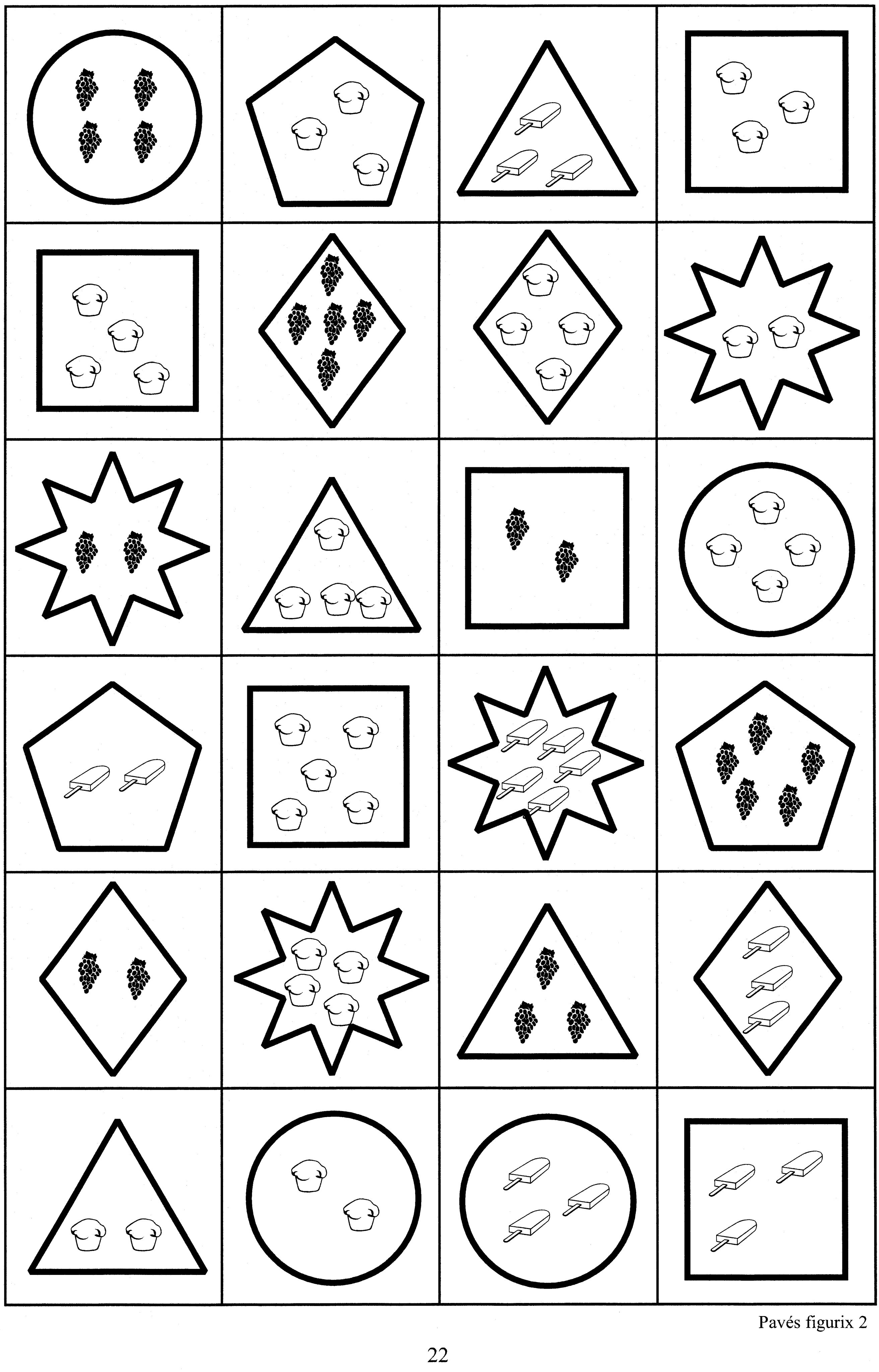
Pavés instruments

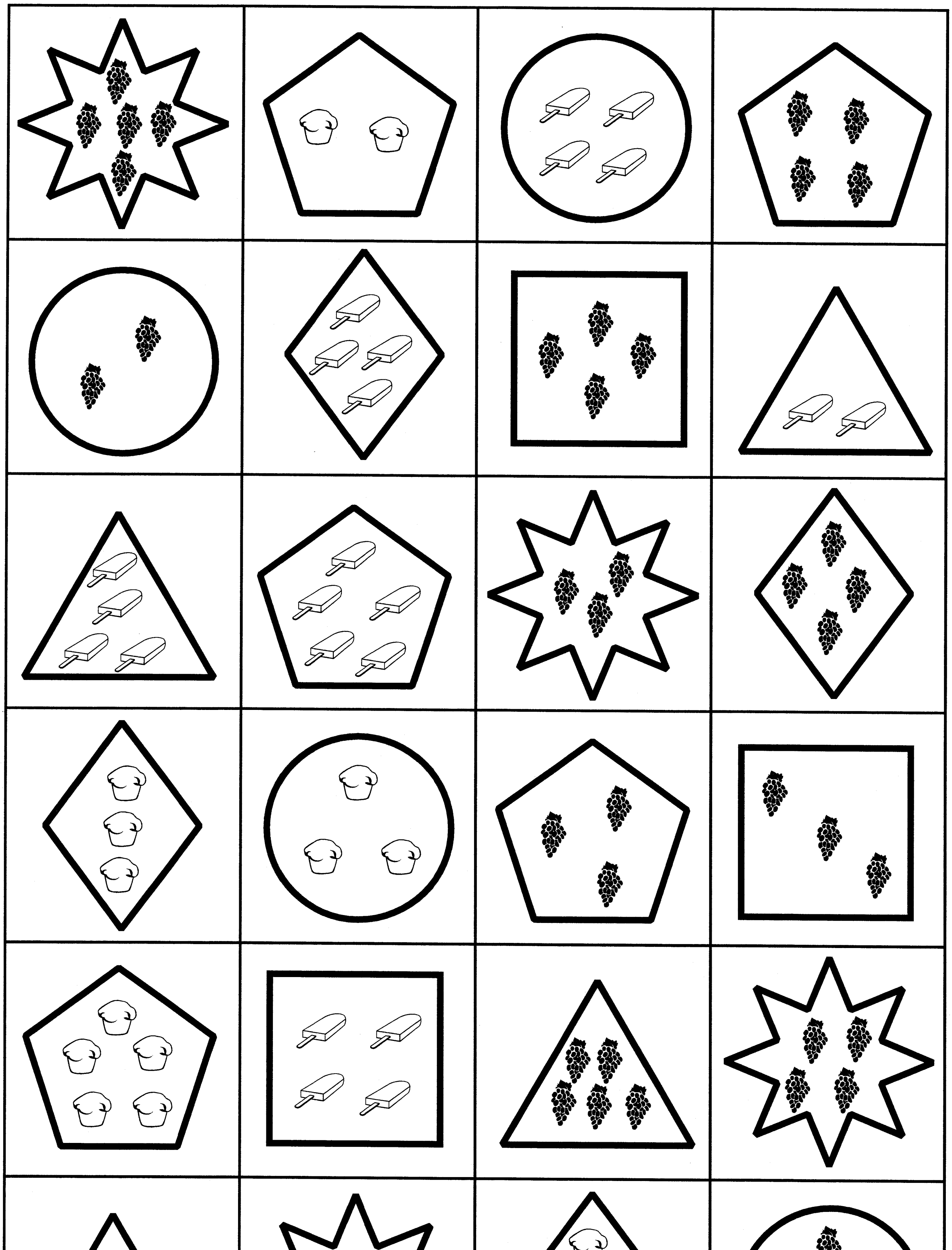


Pavés nourriture

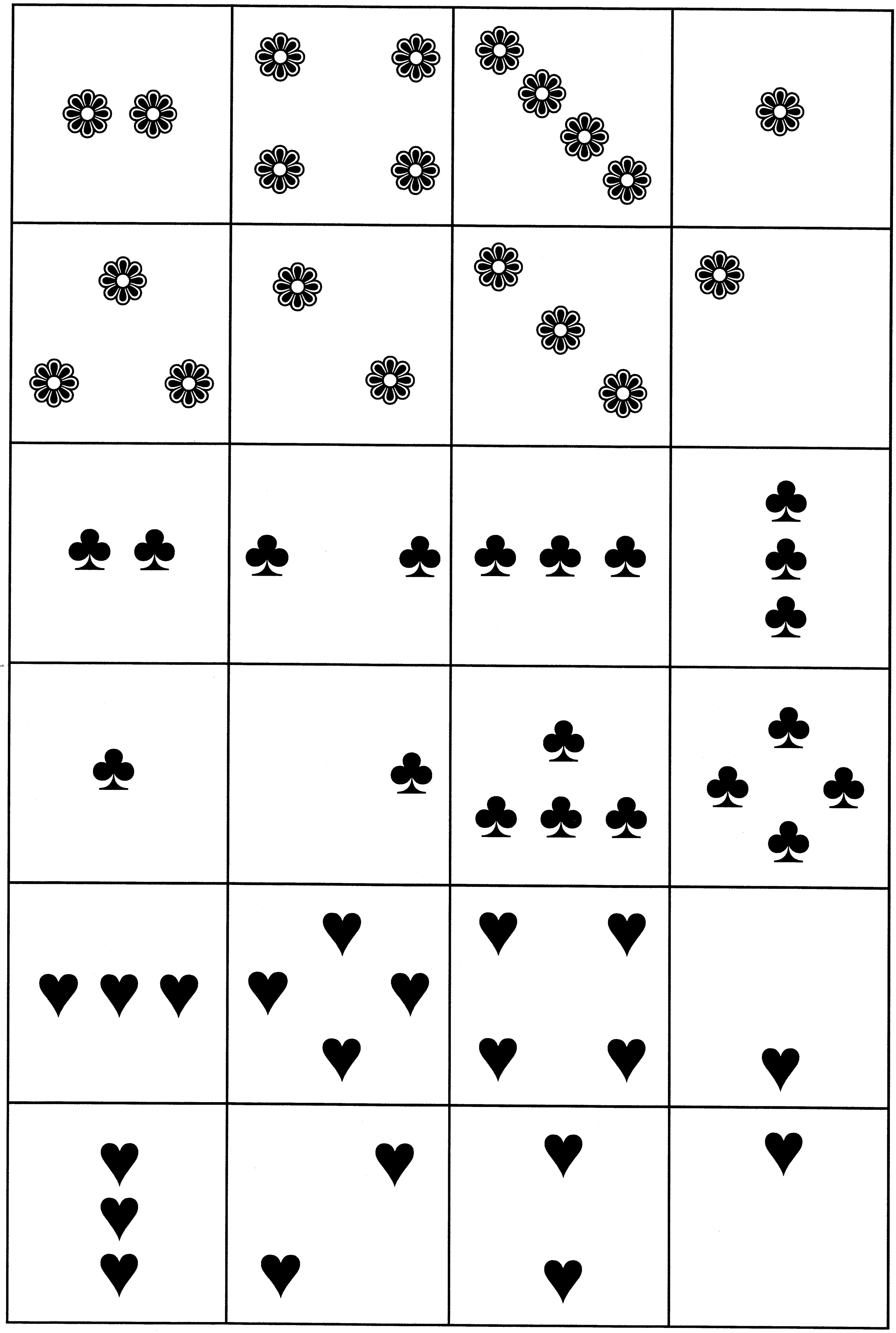


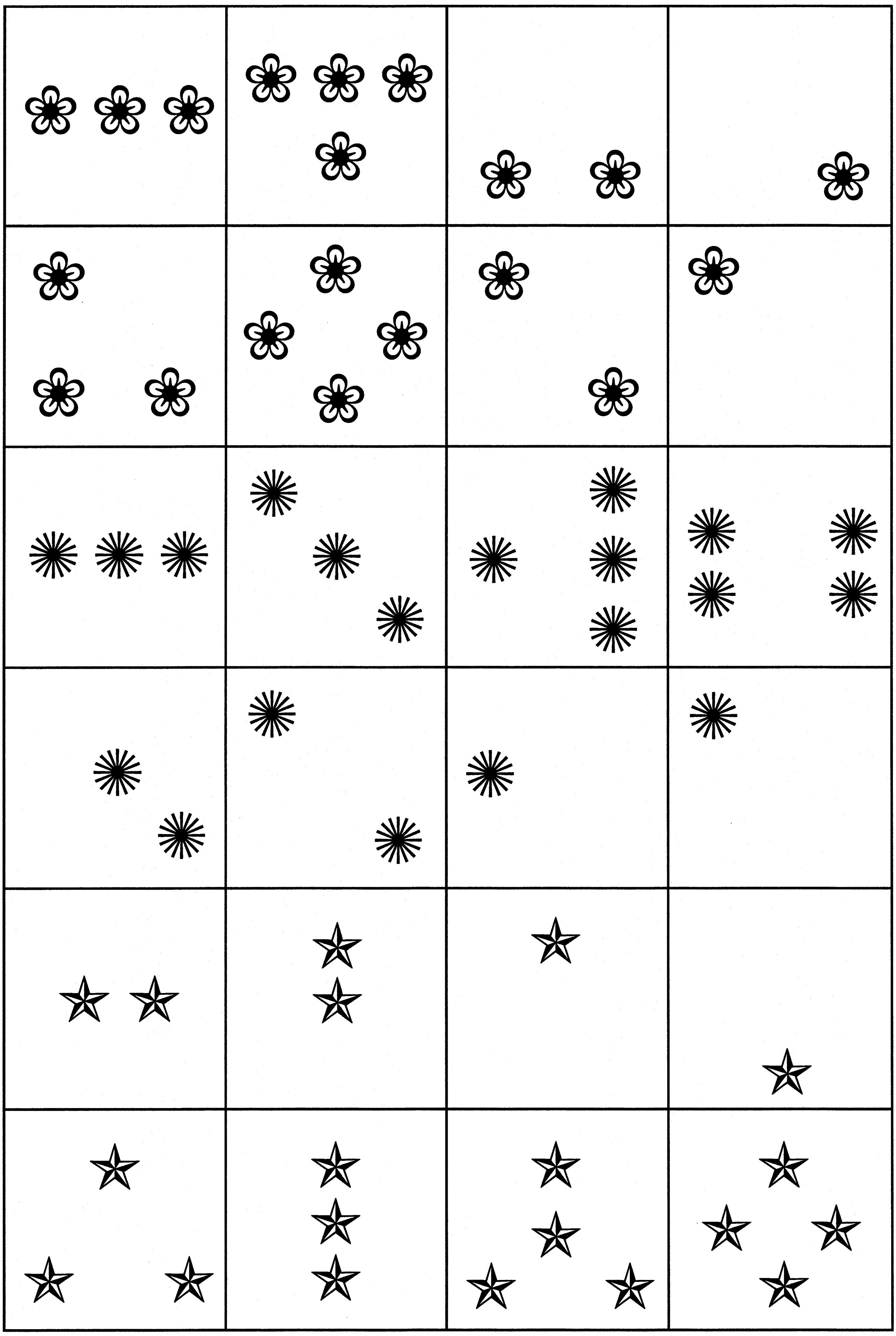
Pavés figurix 1

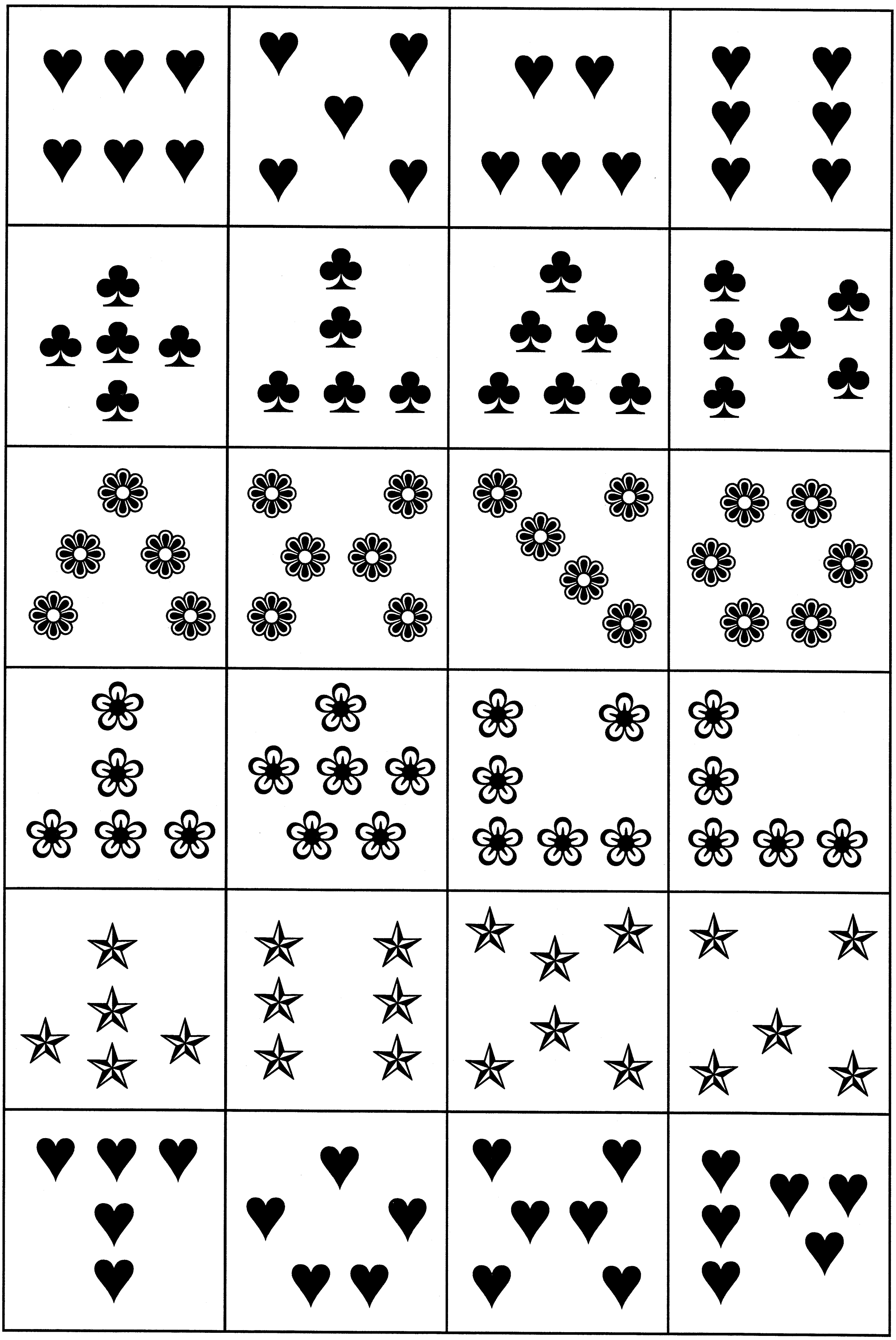


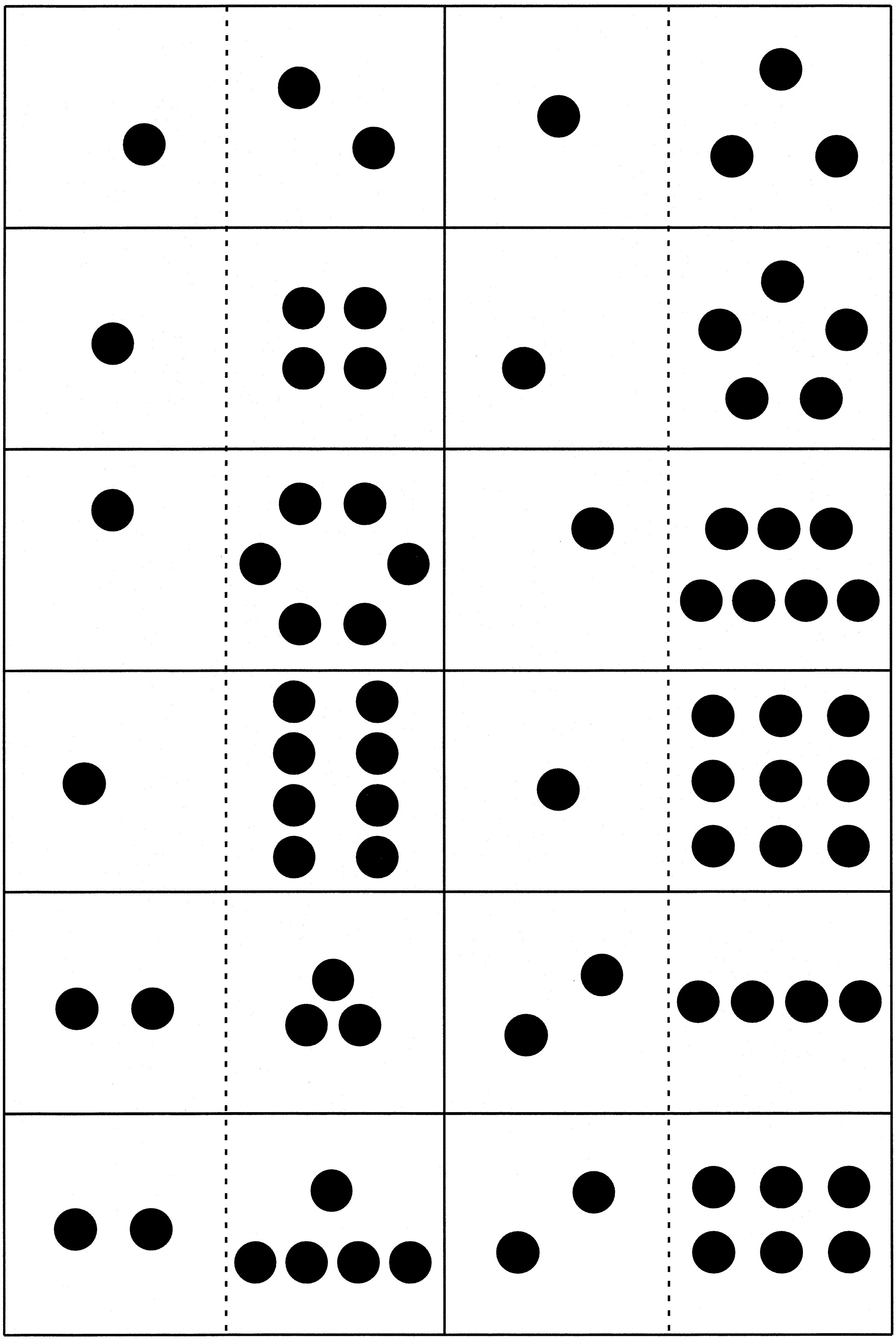


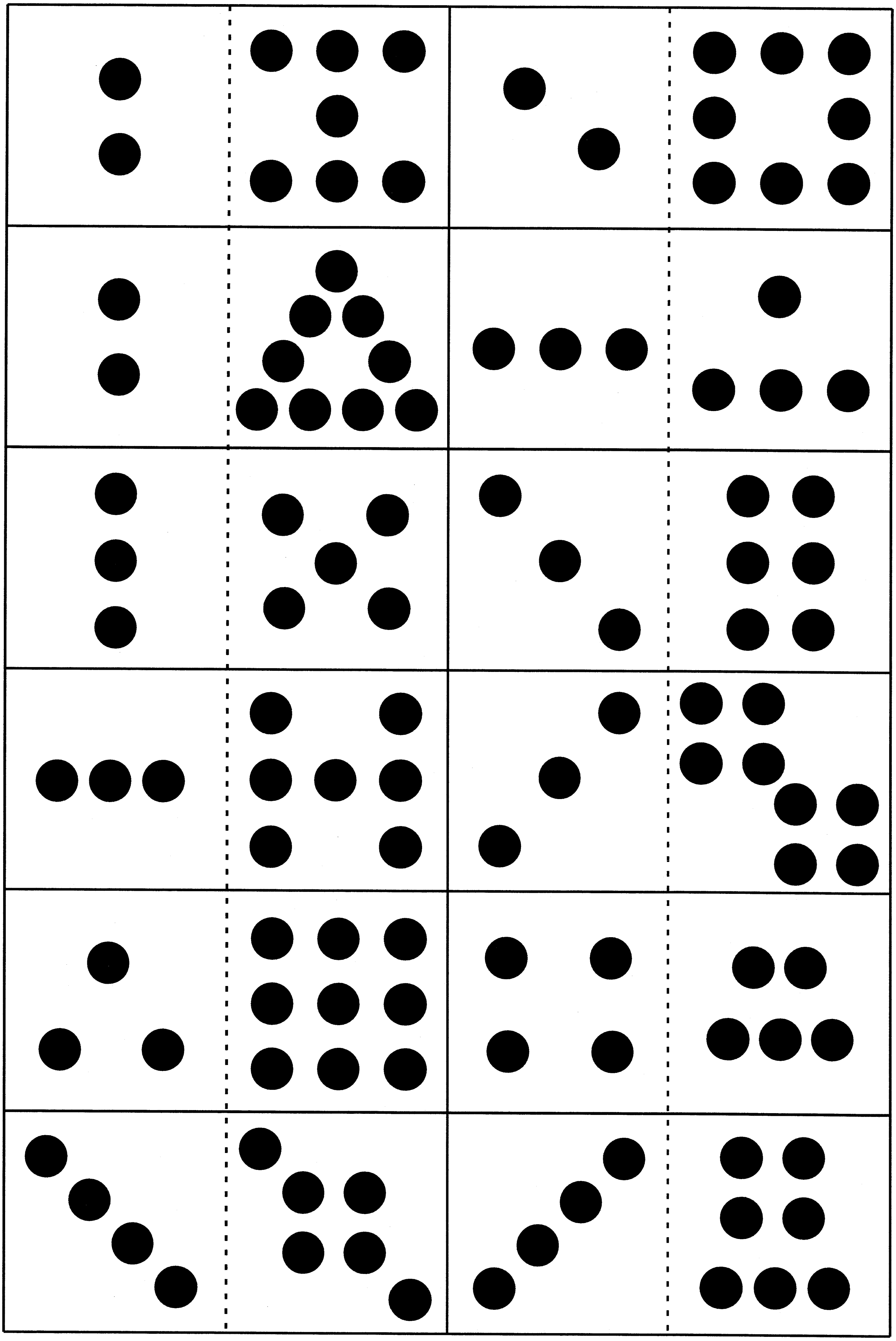
Grille vide



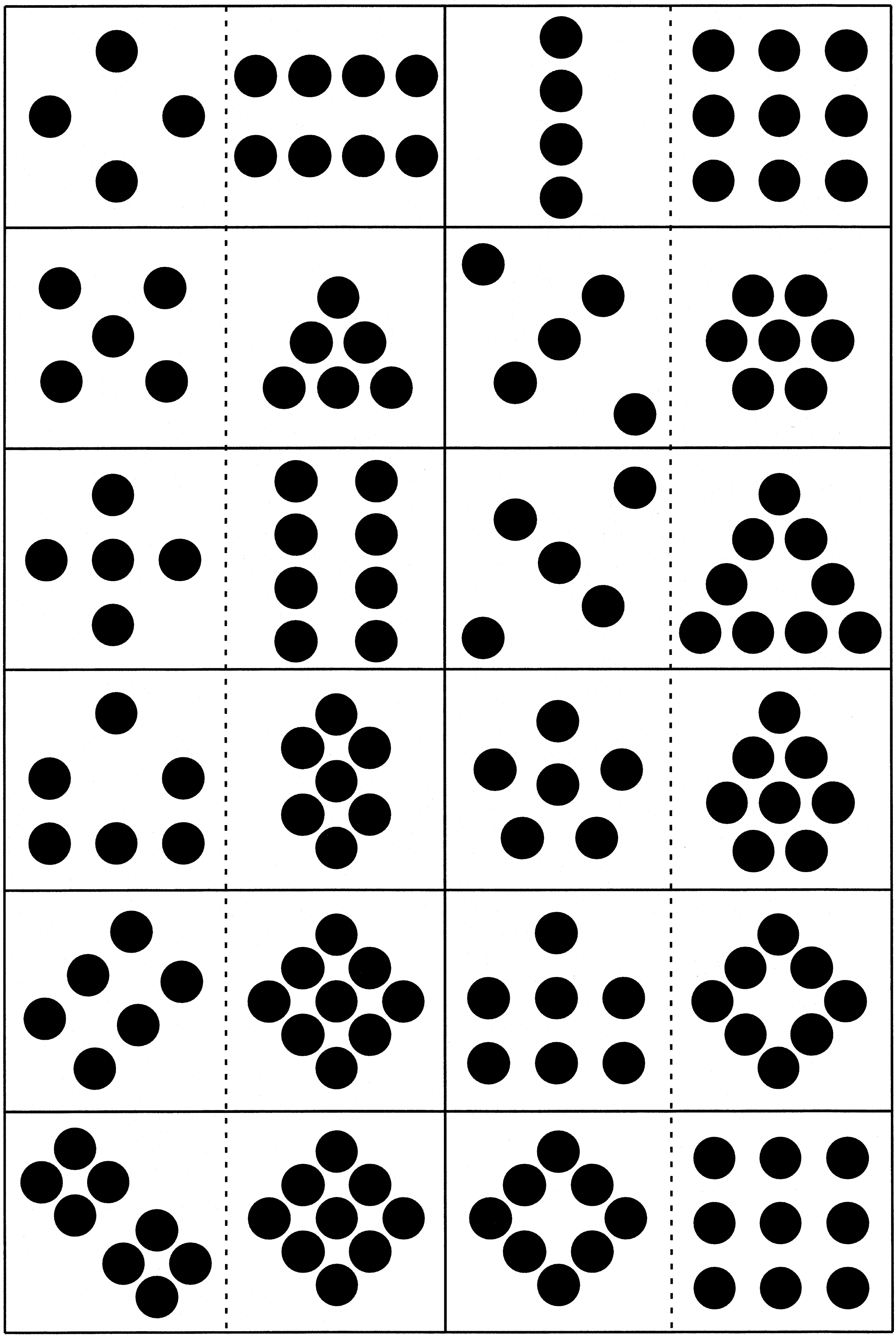


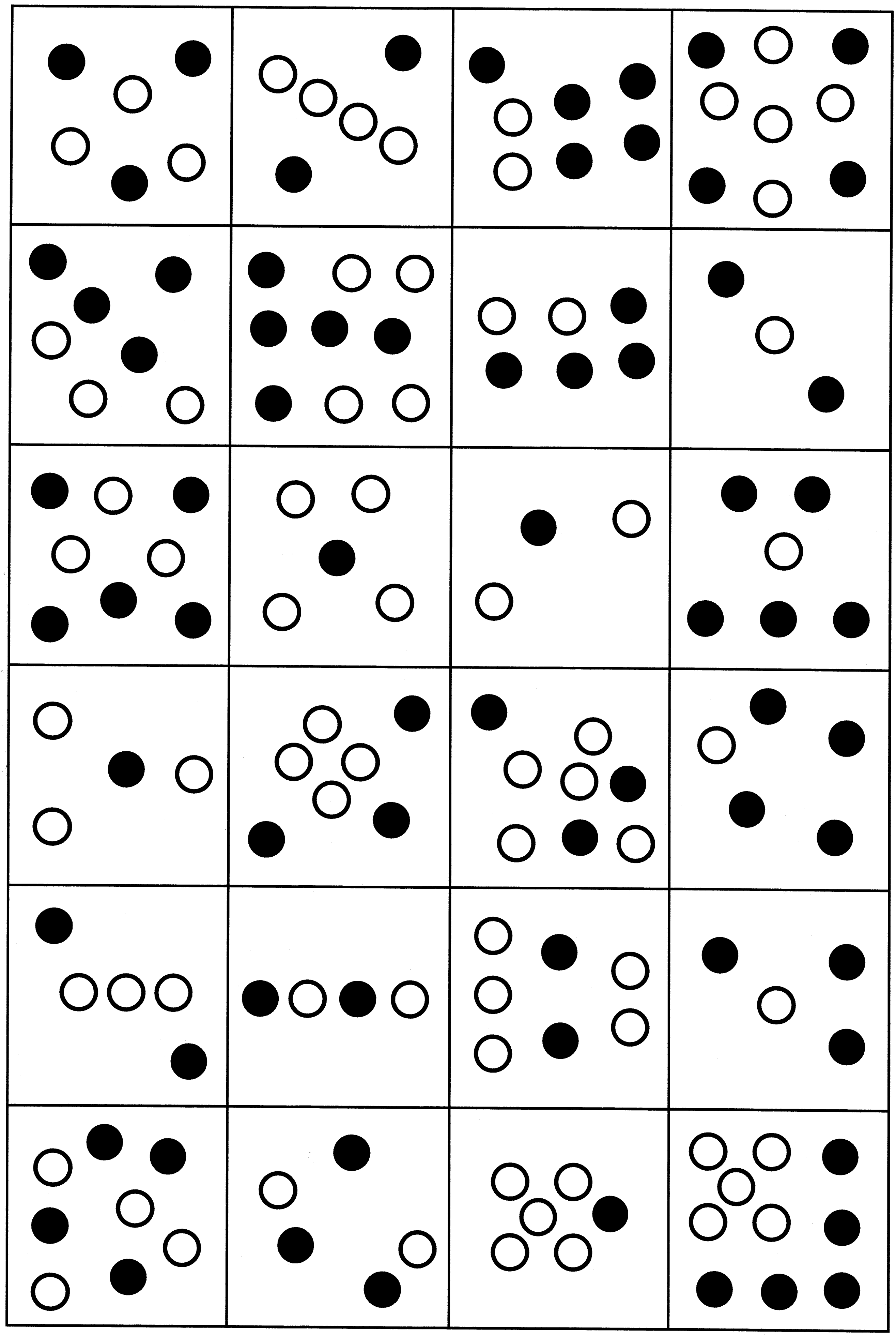


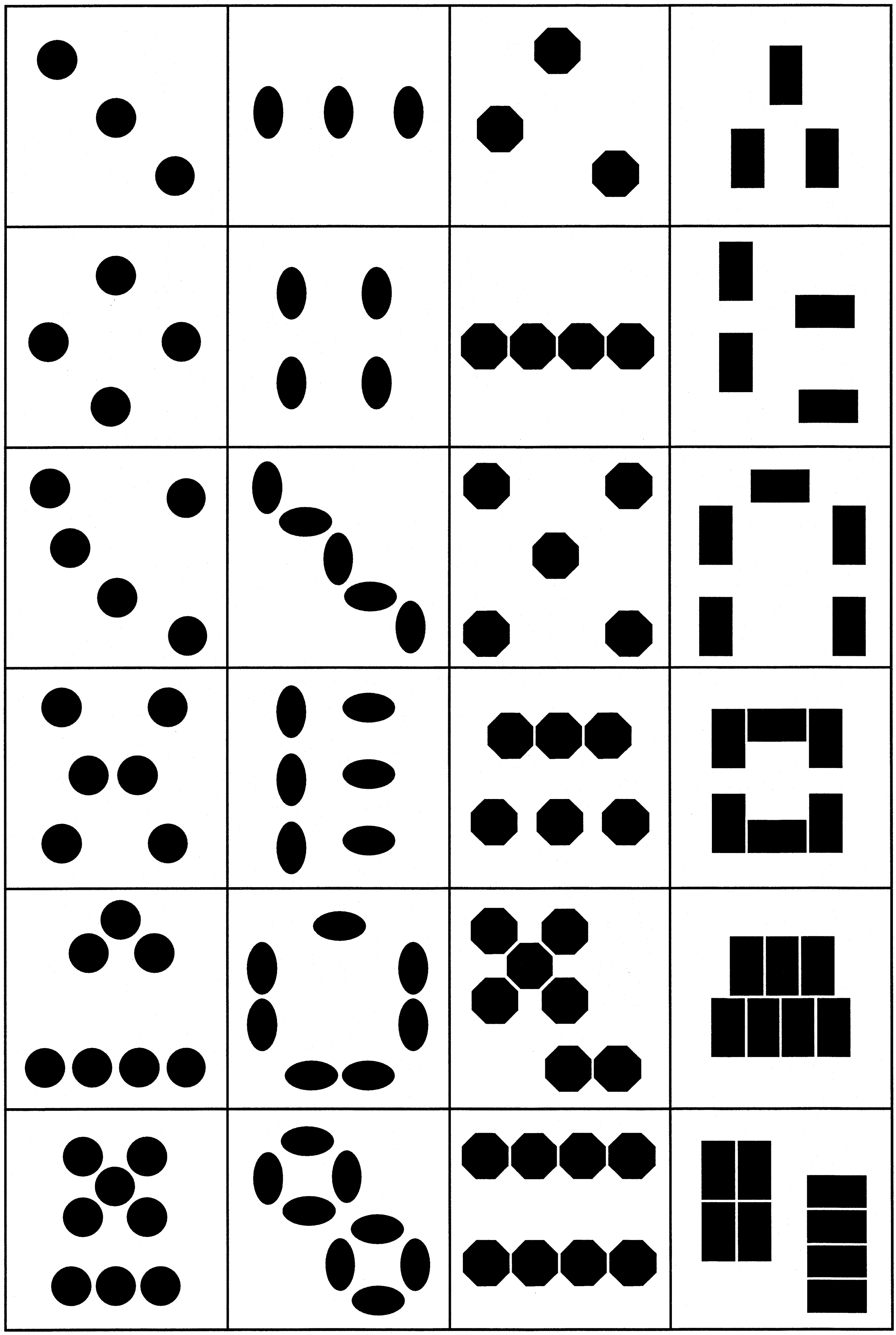




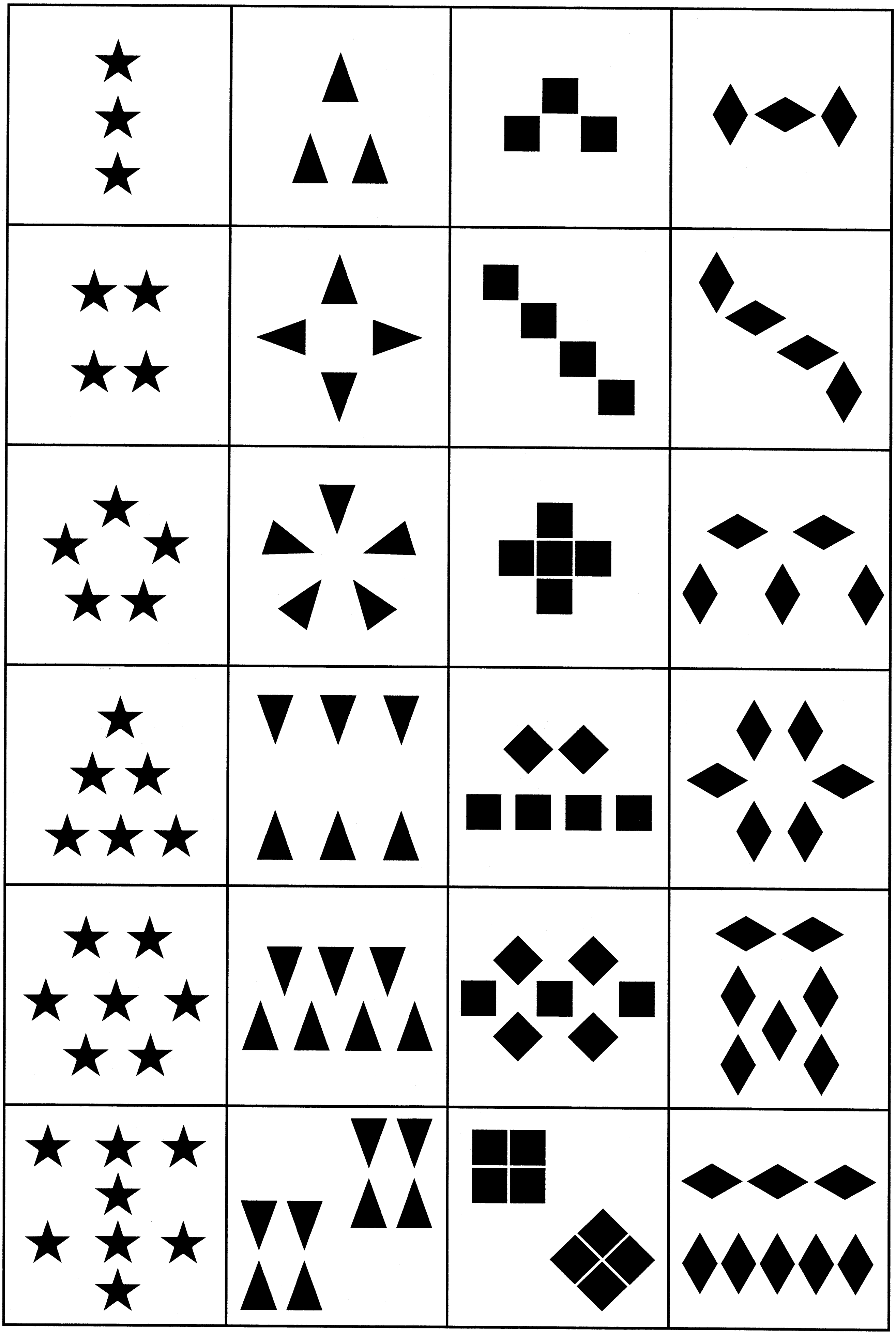
Pavés dominos 1-9 2



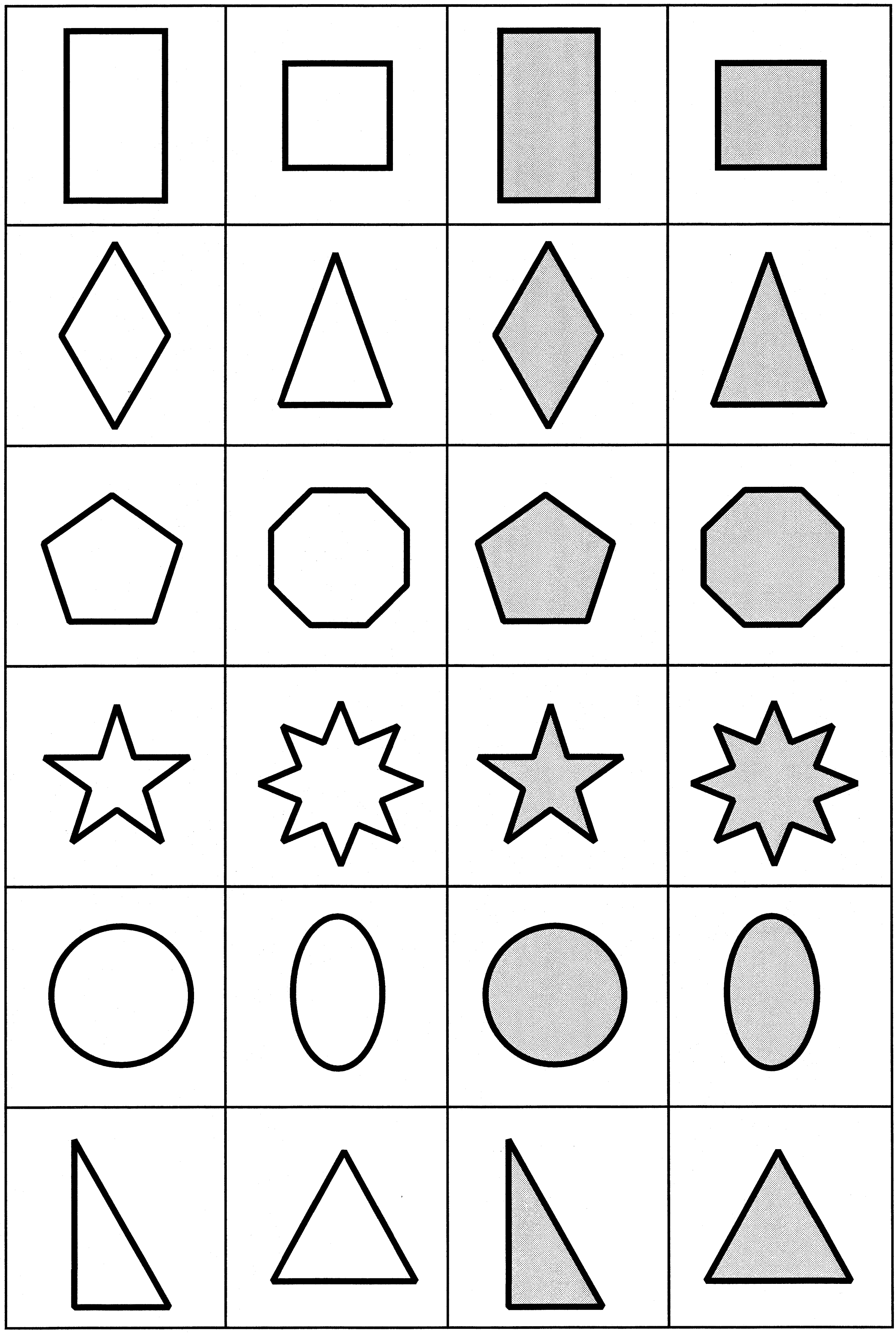




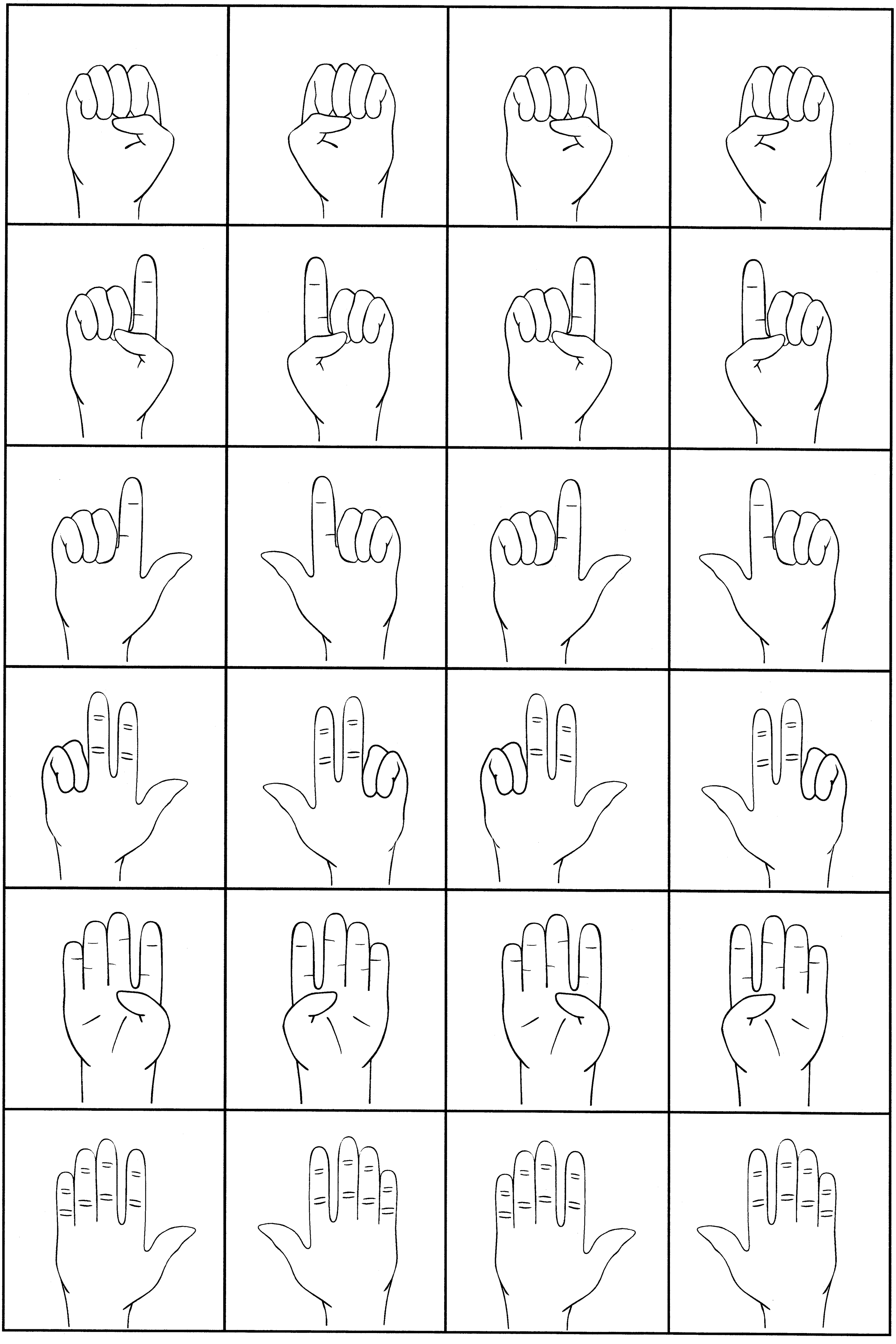
Pavés formes-nombres 1



Pavés formes-nombres 2



Pavés géométriques



Pavés doigts

Chapitre 2 : Jeux de nombres (cycle 2)

Les nombres sont présents depuis la nuit des temps comme repères de l'ordre et de la quantité. Ils ont pris, dans nos civilisations écrites, un rôle prépondérant, car ils sont devenus, grâce aux opérations, le langage des sciences.

Sans calendrier, nous aurions du mal à nous repérer dans le temps : les jours se suivent et se ressemblent. Nous leur avons attribué un numéro dans chaque mois de chaque année depuis le repère arbitraire de la naissance théorique de Jésus-Christ. Et ces numéros de la bande du calendrier font partie de la première perception de l'écriture et du nom oral des nombres. C'est le même concept d'ordre que nous utilisons lorsque nous savons que nous avons arrêté notre lecture à la page 136. Seul, le concept d'ordre nous préoccupe alors, et si nous ouvrons le livre à la page 124, nous savons que nous devons le feuilleter vers l'avant, alors que si c'est 153, ce sera vers l'arrière.

Lorsque les bergers notaient le passage d'une brebis d'un trait sur le mur d'une caverne ou d'une coche sur une branche de noisetier, le groupe de traits leur permettait de savoir, le soir, si toutes les brebis étaient rentrées. C'est encore ce que font les scrutateurs lors des dépouillements.

Dans le premier cas, où seul intervient l'aspect ordonné de ces « objets » que sont les numéros, nous avons affaire à des <u>nombres ordinaux</u>. Dans le second cas, où l'effectif du groupe d'objets, animaux ou personnes est mesuré par le nombre figuré par des traits sur le bâton, il est un <u>nombre cardinal</u>. En réalité, nous n'avons pas deux sortes de nombres, mais les deux faces d'une même réalité : le nombre naturel. Et nous devons comprendre ces deux aspects et leurs liens : nous avons sans cesse besoin de l'un pour décrire l'autre.

Les nombres ont une troisième face. Ils sont un langage, grâce aux opérations arithmétiques. Ils ont leur grammaire particulière. Les écritures numériques obéissent à des règles qui ne sont pas celles de l'écriture habituelle de notre langue. Beaucoup de changements sont permis dans leurs écritures qui deviennent de plus en plus nombreuses. L'essentiel est de savoir quels sont les changements autorisés, c'est-à-dire ceux qui ne changent pas le nombre dont on écrit les noms. L'égalité devient le lien fondamental des écritures numériques, car elle indique que les noms écrits de part et d'autre désignent le même nombre. Ces « règles de grammaire » particulières demandent un enseignement spécifique et se prêtent aux jeux d'associations des symboles divers (ensembles d'objets, écritures, problèmes, devinettes, ...) qui représentent les nombres.

Nombres ordinaux

1) Spirales et bandes numériques

En maternelle, le numéro du jour est repéré par un curseur ou une pince à linge sur la bande-calendrier du mois, présentant aux enfants une première bande numérique composée des 30 premiers « numéros[1] »

L'ordre des nombres naturels fait partie de leur nature. La mise en ordre est faite d'emblée dans les *spirales* et les *bandes numériques 1 et 2*. Les spirales ressemblent au terrain du jeu de l'oie, mais avec le 1 au centre pour suggérer que la suite des nombres est infinie. Dans la *spirale 2*, les nombres sont écrits de 5 en 5. Ils servent de repères pour placer les autres nombres. Ces mêmes nombres ont été mis en relief dans *spirale 1* et les enfants peuvent être invités à les colorer.

Les *bandes numériques* sont à découper puis à coller par leurs languettes en fonction de la gamme de nombres à étudier (progressivement jusqu'à 30 en GS, jusqu'à 100 en CP). On peut, en maternelle, construire plus progressivement la bande en découpant cinq bandes verticales de six nombres (en y ajoutant des languettes) dans les pages *pavés écritures chiffrées.*

Le maître peut les exploiter, soit en faisant poser un pion sur une case nommée par son numéro, soit en demandant le numéro correspondant à la place d'un pion placé. La liaison entre les désignations écrite et orale des numéros se fait ainsi à double sens.

Dans un premier temps, un enfant peut suivre la suite des codes écrits sur la bande, à partir du centre, en énonçant les mots de la comptine numérique à partir de « un » et trouver ainsi le code écrit correspondant à un mot-nombre donné.

Les *bandes numériques 3 et 4* offrent les mêmes possibilités. Le placement du pion nécessite de repérer le nombre par rapport aux multiples de 5 qui sont les seuls visibles. Dans les *bandes numériques 1 et 2*, il peut être utile de colorer les multiples de 10 d'une couleur, et les autres multiples de 5 d'une autre couleur, pour aider au passage vers la forme épurée des *bandes numériques 3 et 4*.

Les deux séries de planches de *bandes numériques* peuvent ensuite être reprises sans les découper. Le pion peut toujours être placé ou repéré, mais la linéarité de la bande est mentale, car le passage de 10 à 11 ou de 20 à 21 est matérialisé par la présence de la languette. Cette façon de procéder permet d'aller progressivement vers un rangement en tableau à double entrée, en gardant la forme de la bande, découpée en séries de dix numéros et en marquant bien les sauts à la dizaine.

Avec les *pavés écritures chiffrées*, la première activité consiste à faire ranger les nombres de 1 à 40 dans l'ordre naturel. Lorsqu'ils sont rangés, on les retourne sans modifier leur emplacement. Chacun en choisit un, donne son nom et le retourne. Si l'écriture correspond au

1 Les nombres sont souvent appelés numéros par les jeunes enfants. Ce mot désigne la face ordinale du nombre.

nom oral, le joueur gagne un point et laisse le pavé visible. Sinon, il le remet à nouveau, face cachée. Les nombres « gagnés » sont laissés sur la bande pour permettre de découvrir les autres par voisinage.

Lorsqu'on retourne un pavé sur deux, on sépare les nombres pairs et impairs ; avec un sur trois, à partir de 3, on extrait les multiples de 3, ... et on pose ainsi des jalons dans la suite des nombres.

Une activité ludique individuelle, de type « réussite » peut être développée. Les pavés sont alignés, faces cachées, au hasard. Le joueur retourne un pavé, le pose à sa place naturelle, face visible, après avoir ôté celui qui l'occupe qui ira de même, retrouver sa place et ainsi de suite. La réussite est gagnée si, en une seule boucle, chaque nombre a regagné sa place.

La recherche d'un nombre est aussi l'occasion de jeux de cache-tampon (du type « tu chauffes », « tu refroidis »). Les *pavés écritures chiffrées* sont rangés, faces cachées. Un joueur choisit, dans sa tête, un nombre de la série qu'il doit faire trouver aux autres. Pour éviter toute contestation, il écrit son nombre et le garde caché. Il devient le maître de jeu. Chacun, à son tour, retourne un pavé ; le maître du jeu lui donne une indication du type : « c'est plus », « c'est moins » ou « c'est juste ». Si le pavé retourné est le nombre choisi par le maître de jeu, le jeu est gagné et le gagnant devient le maître du jeu suivant. Sinon, un autre joueur prend son tour.

Le support des bandes numériques permet le même jeu en plaçant et déplaçant un pion jusqu'au nombre cible. Pour éviter les essais ne tenant pas compte des informations connues, on peut fixer un nombre maximal d'essais. On peut aussi, partir de la série des numéros rangés, faces visibles, et, à chaque information donnée par le maître du jeu, faire retourner tous les pavés éliminés par l'information.

2) Jeux de l'oie

Chaque déplacement d'un pion sur une spirale ou une bande numérique visualise le passage d'un nombre à un autre. Un saut en avant (ou « en plus ») vers un nombre plus grand ; un saut en arrière (ou « en moins ») vers un nombre plus petit. Dans un premier temps, il peut être nécessaire, avec des petits, de faire repérer les sauts en les accompagnant par des « hop, hop, hop », car la confusion est courante entre le nombre de sauts et le nombre de cases visité (un seul saut pour deux cases occupées successivement).

Comme pour le jeu traditionnel, le déplacement peut être conduit aléatoirement par un dé. Ou, encore, par deux dés, l'un portant les 6 constellations traditionnelles et l'autre, des dessins représentant la marche en avant ou en arrière. Quatre faces pour l'avant contre deux pour l'arrière permettent d'aller globalement vers un nombre cible fixé.

Ainsi, partant de la case 7, quatre sauts en avant font arriver à la case 11, trois sauts en arrière, à la case 4.

Ce jeu est l'occasion, pour le maître, de préparer les élèves au fonctionnement de l'addition et de la soustraction et à leur réversibilité. De la case 11, on peut retrouver la case d'où on est parti en faisant quatre sauts en arrière ; de la case 4, par trois sauts en avant.

Enfin, on peut chercher combien de sauts permettent de passer de la case 7 à la 11.

Les spirales fournissent le premier abaque à calcul : chaque action se traduit par écriture opératoire ou par une phrase :

- « Je pars de 6, je fais cinq sauts en avant et j'arrive sur ...? » ...11.
- « Je pars de 8, je fais trois sauts en arrière et j'arrive sur ...? » ...5.

À partir du CP, ces questions seront progressivement liées aux écritures : $6 + 5 = ?$ et $8 - 3 = ?$

Un nouveau type de questions ou d'écritures, avec une boîte cachant le nombre demandé, introduit un problème (équation) :

- « D'où suis-je parti, si j'arrive sur le 8 par trois sauts en avant ? » ou : $\square + 3 = 8$.
- « D'où suis-je parti, si j'arrive sur le 6 par cinq sauts en arrière ? » ou : $\square - 5 = 6$.
- « Combien de sauts en avant pour passer de 3 à 9 ? » ou : $3 + \square = 9$.
- « Combien de sauts en arrière pour passer de 7 à 4 ? » ou : $7 - \square = 4$.

Nombres cardinaux

1) Perception globale et comptage

Plusieurs jeux du chapitre 1 mettent en scène les premiers nombres (*pavés figurix, dominos formes-nombres, premiers nombres, noirs et blancs, dominos 1-9*) sous forme de dispositions de dessins. Lorsque ces nombres sont petits (de 1 à 5) on les repère en général globalement. Lorsqu'ils atteignent 6, cette approche devient difficile à prolonger, sauf dans le cas des constellations connues. Le processus général qui permet d'assurer que deux ensembles comme les symboles des *dominos formes-nombres, noirs et blancs ou 1-9* ont le même nombre est la correspondance un à un des objets.

Mais celle-ci s'avère laborieuse et il s'y substitue un procédé intermédiaire : le comptage. Aux objets du premier ensemble, on associe un à un les mots de la comptine orale des nombres ordinaux et le dernier mot est retenu. Le même procédé appliqué au second ensemble donne le même dernier mot si les nombres sont égaux. Les nombres ordinaux viennent donc au secours des nombres cardinaux.

Ce procédé permet davantage : si on reprend le comptage d'un ensemble suivant un ordre différent, on arrive toujours au même dernier mot qui n'est donc pas seulement le numéro d'ordre du dernier objet pointé, mais le mot de l'ensemble entier, c'est-à-dire le nombre cardinal de l'ensemble.

2) Jeux de doigts

Les doigts sont le meilleur outil que les hommes ont utilisé depuis les temps les plus reculés pour transmettre les quantités. C'est d'ailleurs ce qui explique la diffusion universelle du système décimal : dix n'est pas un nombre plus simple qu'un autre (au contraire, partager en dix, par exemple, est beaucoup moins simple que partager en huit), mais c'est le nombre le plus facile à montrer, mains ouvertes et surtout le plus grand nombre que nous pouvons montrer dans un seul geste. Nos doigts nous permettent de montrer dans un premier temps, tous les nombres jusqu'à dix, zéro compris en montrant les deux poings fermés. Puis, en ouvrant plusieurs fois nos deux mains, les nombres au delà, dans une décomposition décimale.

Il est important d'allier le langage gestuel muet aux langages oral et écrit et de faire passer de l'un à l'autre. Le langage gestuel a aussi l'avantage de permettre à chaque enfant de donner le nombre sans bruit, et donc sans être gêné par d'autres enfants plus rapides, prompts à crier leur solution, lorsqu'on montre collectivement une carte portant un ensemble de symboles faite, par exemple, à partir des *pavés premiers nombres* (p. 25 à 27) agrandis.

Les *pavés doigts* (p. 35) offrent l'occasion de lire des nombres sur une main, droite ou gauche, puis sur les deux mains en combinant une main droite et une main gauche. Ensuite, ils permettent de retrouver les diverses décompositions des nombres jusqu'à dix sur les deux mains. En couplant un nombre de cinq à dix choisi parmi les *pavés écritures chiffrées* et un pavé *doigts*, l'enseignant crée un jeu de complément : montrer sur une main les doigts à ajouter à ceux du pavé doigt pour former le nombre désigné par l'écriture chiffrée.

Les *pavés deux mains* permettent une lecture des nombres simultanément sur les deux mains. Ils sont représentés de la manière courante avec une main soit complètement ouverte, soit complètement fermée, ainsi qu'avec des positions symétriques pour les doubles. En prenant un premier nombre sous forme d'un pavé et le second sur ses doigts, ils permettent de construire la table d'addition. Ce qui donne l'avantage de compléter à dix au besoin la position sur le pavé en repliant autant de doigts. (par ex, 8 + 7 : pavé 8 et mains 7. Je passe deux doigts pour faire dix et il m'en reste cinq : le nombre est donc 15.) Le même jeu de complément que ci-dessus est possible avec un nombre entre 10 et 20 et un *pavé deux mains*.

Le <u>jeu de la mourre</u> est un des plus anciens jeux de hasard. Deux joueurs, face à face, préparent, dans leur dos, un nombre sur leur main droite. À un signal, chacun montre sa main droite en énonçant simultanément la somme présumée des deux nombres. Celui qui est le plus proche de la vérité emporte le point. La partie se joue en cinq points.

On peut en organiser une variante exploitant la comparaison des nombres plutôt que la somme. Chacun prépare, dans son dos, un nombre sur une ou deux mains puis la montre. Une pièce de monnaie lancée (ou un jeton marqué d'un + sur une face, - sur l'autre) permet de savoir si le gagnant est celui qui a le plus grand ou le plus petit nombre. Celui-ci marque autant de points que la différence des deux nombres de doigts. La partie se joue en 10 points, avec une main et 30 points avec les deux mains.

3) Compositions et décompositions d'ensembles

Basé sur la règle du jeu de Punta, *l'orchestre* est un jeu de décompositions additives. Six séries d'instruments de musique sont à reproduire en double exemplaire et à découper. Les points de la page 57 sont à séparer des instruments ; ils peuvent servir au tirage à la place des dés dans différents jeux, y compris *l'orchestre.* Les pavés instruments sont distribués entre les joueurs, 12 par joueur. Cela permet de jouer par groupes de six au plus.

Le jeu consiste à se débarrasser de ses instruments pour constituer un orchestre. Pour cela, à son tour, un joueur lance deux dés (ou tire deux cartes de tirage retournées) et tous les joueurs déposent sur la table autant d'instruments que la somme des dés obtenue, dans la décomposition additive qui leur convient (on peut déposer autant de cartes qu'on le veut, quels qu'en soient les instruments, pourvu que leur somme soit égale à la somme des dés). Si un joueur ne peut pas réaliser le nombre, il passe le tour. Dès qu'un joueur n'a plus que trois pavés, le tirage se fait avec un seul dé.

Au début de l'apprentissage, on peut ne lancer qu'un dé et demander aux enfants de déposer le nombre d'instruments demandé par le dé. Les enfants cherchent le nombre du dé dans leur jeu et ne pensent pas à composer le nombre avec deux ou plusieurs pavés.

Puis on passe au tirage à deux dés, ce qui oblige à additionner les nombres des dés et à redécomposer la somme.

4) Compléments

Les *pavés tetraktys* reprennent la figuration du nombre dix faite par Pythagore par un triangle équilatéral. Différentes combinaisons de points noirs et blancs visualisent les compléments à dix de différentes façons. Chaque pavé possède son « négatif » qui peut lui être associé dans un jeu de paires. Chaque configuration peut aussi être associée à une autre configuration portant les mêmes couples de nombres.

Les *pavés compléments* sont des doubles carrés portant un nombre de points compris entre 3 et 10 ainsi que son écriture chiffrée aux coins supérieurs. Ils sont coupés par le milieu et chaque carré est un demi-pavé. Le but sera de retrouver sa moitié dans un jeu de paires.

- Une première règle simple, en GS, consiste à empiler tous les demi-pavés, faces cachées. Le carré du dessus est posé sur la table, face visible. Puis, chacun, à son tour, prend le carré libre de la pile ; s'il trouve parmi les carrés visibles une moitié qui complète le sien, il constitue un pavé complet et le gagne ; sinon, il dépose le carré tiré sur la table, face visible. Si un joueur a déposé son carré, alors que le complément était disponible, le suivant peut prendre les deux moitiés avant de retourner son carré.
- Jeu de paires pour le CP. Les six carrés de chaque joueur sont disposés devant lui, sur un support, cachés pour les autres. Chacun, à son tour, demande au joueur de son choix s'il a tel nombre de points pour former son nombre (ex. « Pierre, as-tu trois points pour faire 7 ? »). Pour le reste, la règle est celle de la page 9.

Sous cette forme, le jeu utilise, sans la nommer une opération arithmétique.

Opérations arithmétiques

1) Écritures additives

Pour une introduction aux écritures arithmétiques, prendre au hasard cinq ou six pavés *premiers nombres* (p. 25 à 27) et décrire l'ensemble par une écriture montrant le contenu de chaque pavé.

Chaque *pavé somme* porte une écriture formée de 2 nombres entre 0 et 9 séparés par le signe + . Parmi les deux écritures de type ($a + b$) et ($b + a$), une seule est choisie.

Cette série peut être utilisée seule pour :

- mettre en pile les écritures de même nombre puis aligner les piles par ordre croissant,
- ranger les écritures dans un tableau à double entrée,
- jouer à la bataille suivant la règle classique.

Elle peut aussi être associée aux *pavés écritures chiffrées* (de 2 à 18) dans un jeu d'association des écritures et de leur valeur numérique, aux *premiers nombres* (p. 25 à 27) pour représenter une écriture additive avec deux pavés, aux représentations des nombres sur les doigts des deux joueurs mis ensemble ou aux *pavés deux mains*.

2) Problèmes et dispositions arithmétiques

Les *pavés problèmes,* présentent de petites histoires liées aux deux séries précédentes. Le refrain de tous ces pavés est : « Combien ...? » dont la réponse est un nombre entre 5 et 12. En ce sens, chaque histoire est associée à un nombre qu'elle met en scène et ainsi le « représente ».

Les *dispositions arithmétiques 1* représentent les objets des *problèmes* à l'aide de points blancs groupés et de points noirs figurant des objets ôtés. Le lecteur pourra inventer des textes correspondant à la page 2.

À chaque *disposition arithmétique 1* des nombres de 5 à 12, correspond un texte de cette série. Ces deux séries ensemble avec la série *écritures chiffrées* peuvent individuellement être classées selon les nombres et, en groupes, se prêtent aux jeux d'association (paires, lotos ou dominos) :

- entre textes et dispositions,
- entre dispositions et solutions,
- entre textes et solutions.

Pour asseoir la représentation correcte des textes, il est intéressant de faire dessiner l'histoire racontée par le pavé choisi. Inversement, on peut reprendre les *dispositions arithmétiques*, et faire inventer d'autres histoires qu'elles peuvent mettre en scène.

De nouveaux problèmes correspondant aux *pavés dispositions arithmétiques* peuvent être inventés par les enfants. Cette réversibilité des rôles atténue le côté, souvent pesant pour les enfants, des problèmes en leur donnant le statut d'invention. Toute situation faite de jetons ou cailloux peut être prétexte à l'invention de problèmes, grâce au côté neutre des objets qui peuvent, au gré de la fantaisie des enfants, devenir animaux, fleurs, bonbons, ...

3) Paires, lotos et batailles numériques

Les jeux de paires, lotos ou dominos, proposés au premier chapitre, ont pris, ci-dessus, un essor important lorsqu'ils sont joués dans l'ensemble des représentations numériques. Le grand nombre de façons de décrire un nombre permet d'associer les symboles, non plus par l'identité des dessins, mais par celle des nombres qu'ils représentent : *pavés compléments, pavés équations* et leurs solutions, *pavés dispositions arithmétiques et problèmes.* Dans le dernier cas, une troisième série, les *écritures arithmétiques*, se combine à l'une ou l'autre des deux dernières.

Nous rencontrerons d'autres exemples, au cycle 3, avec les *pavés montres à aiguilles* (p. 95) et *montres digitales 1 et 2* (p. 96-97), les *pavés rectangles* (p. 112-113) et les *pavés fractions* (p. 127 à 130).

Les nombres possèdent une qualité que n'ont pas les autres objets en général : ils sont totalement ordonnés. Les *pavés dispositions arithmétiques*, *sommes*, *équations* se prêtent donc au jeu de bataille à deux, comme les cartes, avec la règle classique. Les deux joueurs posent chacun un pavé de leur jeu et doivent déterminer quel nombre est le plus grand, ou en cas d'égalité, poser un pavé à l'envers puis un à l'endroit jusqu'à ce que le nombre le plus grand l'emporte. Le joueur qui a le plus grand nombre prend toutes les cartes posées dans son jeu.

4) Parenthèses

Pour comprendre la richesse de la composition arithmétique des nombres, il est intéressant de réaliser des écritures plus complexes faisant intervenir plusieurs signes opératoires dans la même écriture. Dans les *écritures chiffrées*, la présence de pavés + et = permet des compositions simples.

Sur chaque *pavé parenthèse* se trouve une étiquette portant un nombre écrit sous forme de deux nombres de 1 à 5 liés par un symbole +, –, × dans un panneau ovale. Les bandes inférieures seront présentées ci-après.

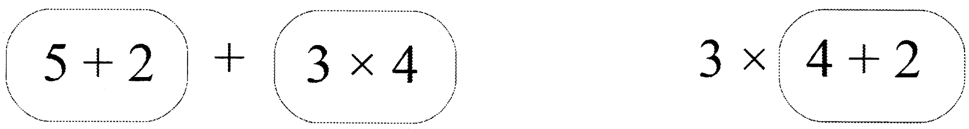
Pour comprendre le principe de l'écriture arithmétique, il est préférable de ne travailler qu'avec de petits nombres, dont la conception ne pose pas de problème car nos doigts les portent, et de mêler, dès le CP, les trois opérations arithmétiques afin que l'enfant distingue les fonctions de chacune.

Chaque pavé peut être montré sur les doigts (la somme avec les deux mains, la différence, en repliant des doigts et le produit par répétition du geste montrant le nombre. Par exemple, (4 × 3) en montrant quatre fois le nombre 3)[2]. En particulier, les pavés étant étalés, visibles entre deux joueurs, chacun à son tour fait deviner un pavé à l'autre par gestes.

2 Je fais le choix d'écrire 4×3 et de dire « quatre fois 3 » pour : 3 + 3 + 3 + 3. Voir justification page 47 et le site de Jean-Luc Brégeon ou le bulletin APMEP n° 457 pour une analyse des choix possibles.

Par la suite, les panneaux perdront, en écriture, leurs côtés plats supérieur et inférieur et deviendront les deux moitiés, extensibles, d'une parenthèse. En excluant les lignes inférieures des deux pages, ces pavés s'utilisent comme les *écritures additives* citées ci-dessus.

Chaque écriture d'un pavé est donc un nombre bien qu'il soit écrit à l'aide de plusieurs codes et ces nombres pourront au cycle 3, être combinés grâce aux signes + et – de la partie inférieure pour former de nouveaux nombres de la forme : $(5 + 2) + (3 \times 4)$ ou $(4 \times 3) - (5 + 4)$. Les autres pavés de la bande inférieure permettront de combiner la multiplication avec les parenthèses, du type : $3 \times (4 + 2)$.



Associés aux *écritures chiffrées*, ces pavés permettent d'écrire des égalités complexes.

5) Écritures et dispositions arithmétiques

Dans les *pavés écritures arithmétiques*, chaque nombre de 5 à 20 est représenté par trois écritures arithmétiques faisant intervenir addition, soustraction et / ou multiplication et éventuellement des panneaux-parenthèses (sur le principe de la série précédente). Ils peuvent être regroupés trois par trois, selon le nombre qu'ils désignent, puis rangés du plus petit au plus grand.

Les *dispositions arithmétiques* figurent les *écritures arithmétiques* à l'aide de points blancs groupés et de points noirs représentant des objets ôtés. Chaque écriture possède une représentation. En reprenant les propositions du paragraphe 2. La page 1 de cette nouvelle série peut aussi s'associer avec les *pavés problèmes* qu'elle représente.

L'association des deux séries permet de comprendre les écritures et se prête en particulier aux jeux de paires, dominos et lotos.

On doit voir en particulier à travers ces activités le fait qu'une écriture arithmétique est un nom de nombre au même titre que l'écriture chiffrée : par exemple, $(2 \times 2) + 1$ <u>ne font pas 5 mais est un nom</u> de 5.

6) Équations

Les égalités, réalisées en alignant des pavés nombres et des signes + et =, deviennent des devinettes en retournant un pavé nombre dans une égalité et en cherchant sa valeur par le sens global de l'égalité. Ceci conduit à représenter un pavé retourné, donc inconnu, dans une écriture par un petit carré et donne le sens de ces *pavés équations* où chaque petit carré correspond à un nombre caché dans son écriture. Chaque nombre de 1 à 12 est le nombre caché de deux pavés de cette série.

Cette série peut être utilisée seule en associant le même nombre solution aux deux écritures où il est caché, ou associée aux *écritures chiffrées,* l'un étant devinette et l'autre, sa solution. Elle peut aussi donner naissance à un jeu de loto, chaque membre du groupe ayant une carte composée de six devinettes et le tirage étant fait avec les *écritures chiffrées* correspondantes.

7) Cartes de points et cailloux

Les *cartes de points* sont à la base un jeu d'observation fine du type des « jeux de Kim ». On montre rapidement une carte de grande taille à un groupe d'enfants, puis on la cache. Chacun doit donner le nombre exact. Pour éviter que les enfants rapides ne gênent les autres en criant leur résultat, le langage gestuel sur les doigts est important. Le maître peut proposer ce jeu à des petits avec les *pavés premiers nombres* agrandis.

Avec les *cartes de points*, l'action est arithmétique. Il ne s'agit plus seulement de donner un nombre de points, mais plusieurs formes arithmétiques de ce nombre. Les points sont alignés et chacun peut le décomposer en repérant des nombres de 1 à 5, de différentes manières. Le but sera de donner au moins trois noms pour un nombre, l'un d'eux pouvant être le nombre global. Sur la première carte par exemple, on peut lire $4 + (2 \times 2)$ ou $4 + 2 + 2$ ou $2 + (2 \times 3)$ ou $4 + 4$ ou 8. Toutes ces écritures désignent le même nombre ; et les mathématiciens, depuis longtemps traduisent cette réalité à l'aide du signe incontournable : = qui signifie « a pour autre nom » ou « est un autre nom pour ». En aucun cas, il n'a le sens « effectuer une opération et en donner le résultat », comme semble le dire l'expression « 5 et 3 <u>font</u> 8 », malheureusement trop commune. 5 et 3 ne font rien ! Ils sont deux éléments d'une façon de dire 8.

En écrivant : $4 + (2 \times 2) = 4 + 2 + 2 = 2 + (2 \times 3) = 4 + 4 = 8$, on ne parle que d'un seul nombre : le nombre 8.

On peut, soit montrer rapidement une carte, comme indiqué ci-dessus en demandant trois écritures différentes du nombre observé, soit laisser la carte visible et proposer de trouver un maximum d'écritures différentes du nombre de points affichés.

Une autre approche de l'égalité consiste à observer, à organiser de différentes manières un tas de cailloux ou de jetons (de 10 à 20) et à écrire les expressions correspondantes. En formant des petits groupes de nombres allant de 2 à 5, visibles globalement, addition et multiplication se combinent pour créer le nombre. Par exemple, le nombre 14 peut être groupé par 3 en $(4 \times 3) + 2$; ou par 4 en $(3 \times 4) + 2$; ou par 5 en $(2 \times 5) + 4$ ou, de façon composite $(3 \times 2) + (2 \times 4)$.

Ces combinaisons d'additions et de multiplications deviendront essentielles au chapitre suivant pour exprimer la numération, c'est-à-dire la représentation écrite des nombres (voir en ce sens les *pavés numération* 2, p. 90). Il est intéressant, d'ailleurs, de compléter ces manipulations en découpant plusieurs exemplaires des deux premières colonnes de *pavés numération 1*, (p. 89) représentant des petites boîtes contenant des cailloux, de nombre (maximum 10) inscrit sur la boîte, avec lesquelles on peut réaliser une expression comme : $(3 \times 7) + 5$ en choisissant trois boîtes marquées 7 et une marquée 5.

À propos de l'introduction de la multiplication

Les choix proposés dans cet ouvrage au sujet de l'introduction de la multiplication ne sont pas ceux que le lecteur a pu rencontrer dans différentes formations ou dans les manuels actuels. Georges Cuisenaire et Caleb Gattegno ont construit entre 1950 et 1968 une méthode d'apprentissage des nombres basé sur l'utilisation du matériel créé par Cuisenaire sous le nom de nombres en couleur, plus communément appelés « réglettes Cuisenaire ». Leur réflexion pédagogique les a conduit à introduire les quatre opérations dans le cadre des 10 premiers nombres à partir de la manipulation de réglettes colorées.

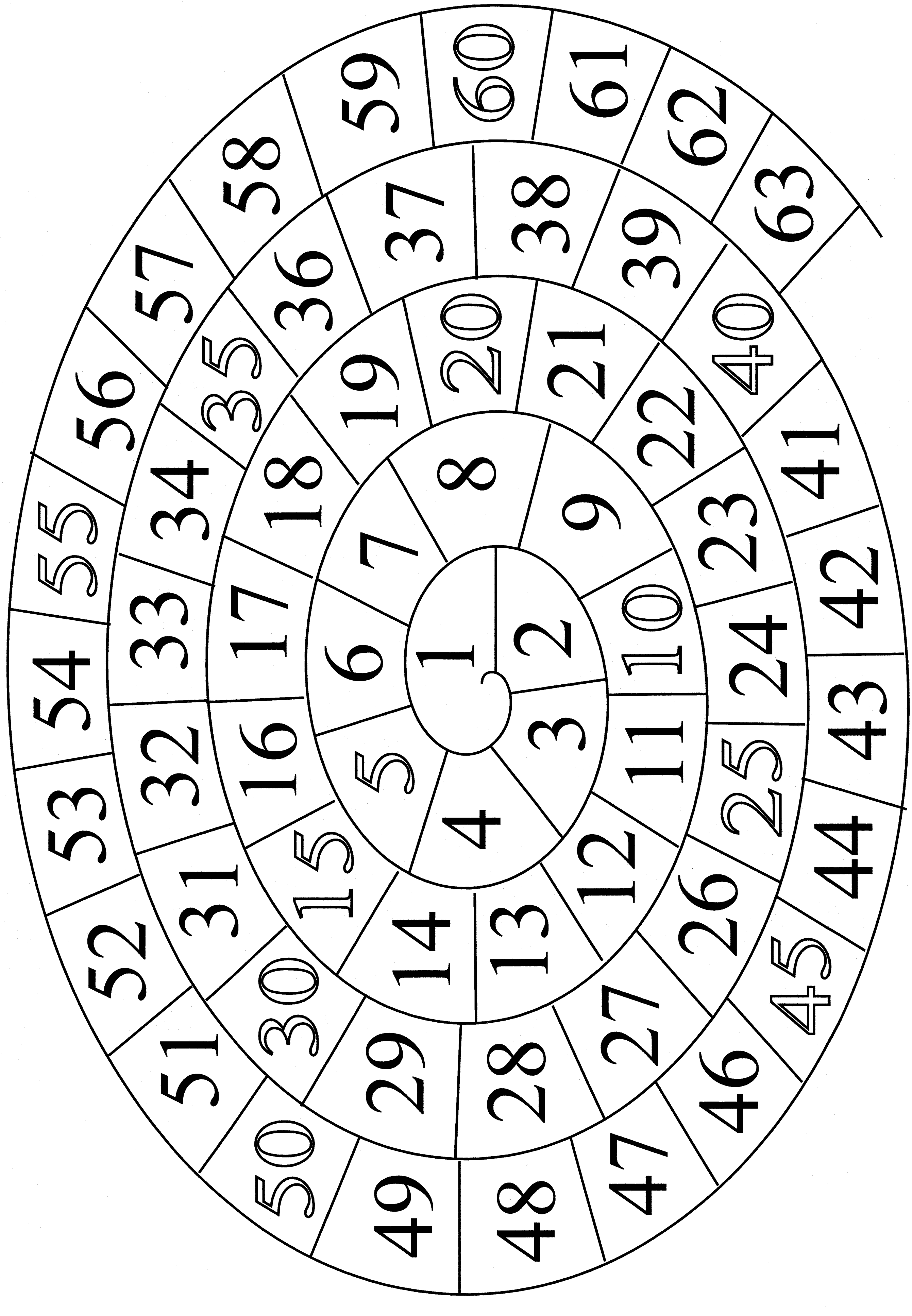
Mon expérience personnelle dans ce contexte m'a montré que les enfants de 6 à 7 ans percevaient aussi facilement un produit qu'une somme. Le produit se fonde sur la répétition d'un nombre, qu'un enfant énoncera rapidement comme « trois fois 5 » s'il voit trois exemplaires d'une disposition de 5 objets. Souvent même, il préfère la situation symétrique de « deux fois 6 » à la dissymétrie de « 7 + 6 ».

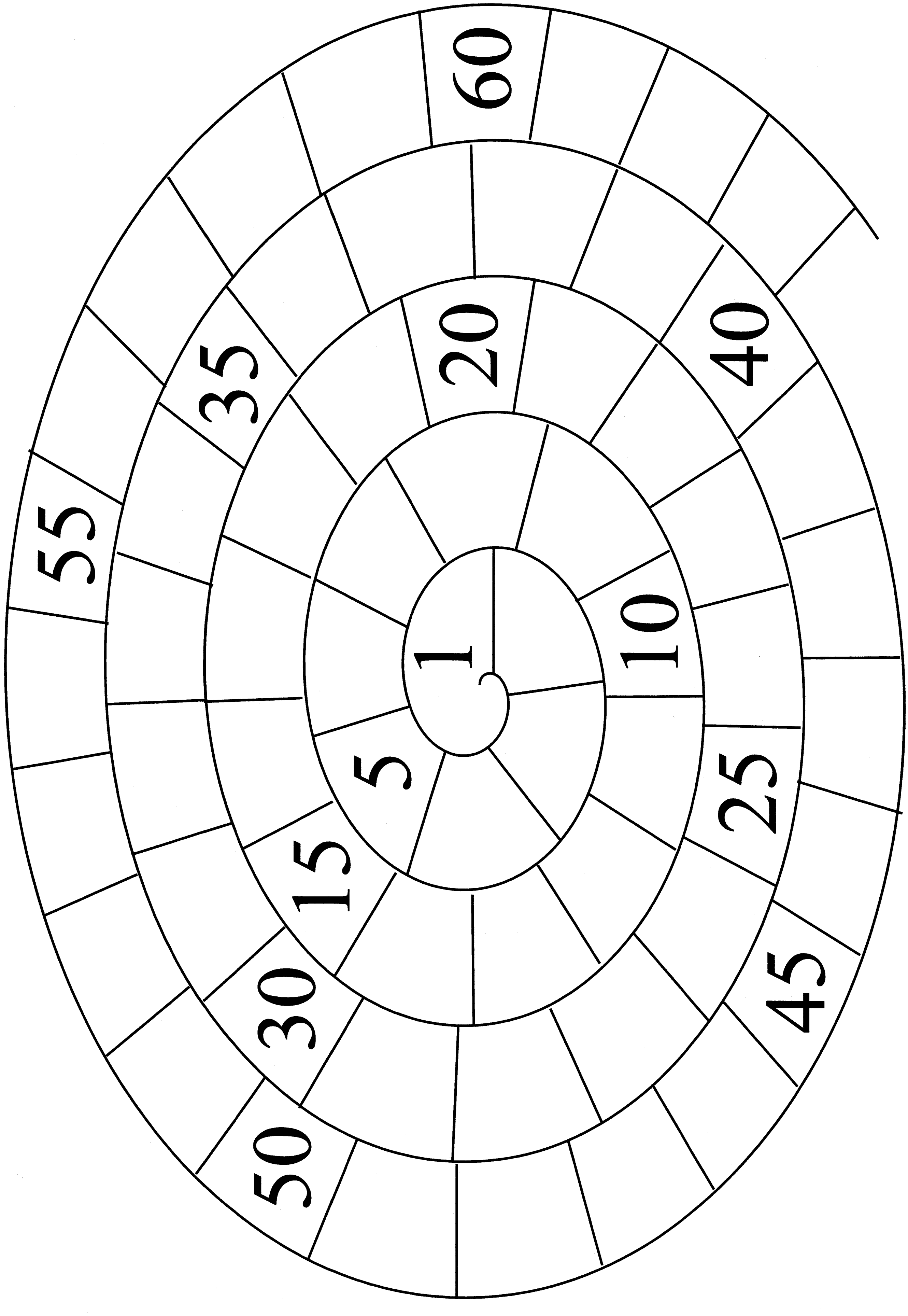
Les nombres naturels évoluent dans une double structure additive – multiplicative, et la distinction de ces deux structures est essentielle. On peut choisir de s'arrêter à une description orale, dans un premier temps ou aller vers l'utilisation simultanée de deux symboles opératoires : + et ×, tout en restant dans le cadre des premiers nombres, comme je l'ai proposé dans les planches précédentes.

Je suis convaincu qu'il est plus difficile à 6 ans de comprendre le retournement sur lequel se fonde la soustraction que la répétition sur laquelle se construit la multiplication. À choisir, je propose plutôt de retarder l'introduction de la soustraction que celle de la multiplication.

La désignation orale naturelle de la multiplication, par un enfant, est du type « je vois trois fois le 5 » ou « je vois trois 5 ». J'ai donc fait le choix de calquer la notation écrite sur l'expression orale et donc d'écrire « 3 × 5 » pour la situation précédente (3 × 5 = 5 + 5 + 5).

Le prochain chapitre renforcera cette conviction personnelle, car la désignation des nombres, à partir de 10, fera intervenir simultanément addition et multiplication dans la désignation des nombres (34 = (3 × 10) + 4).


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63



Spirale 2

1	11	21	31	41
2	12	22	32	42
3	13	23	33	43
4	14	24	34	44
5	15	25	35	45
6	16	26	36	46
7	17	27	37	47
8	18	28	38	48
9	19	29	39	49
10	20	30	40	50

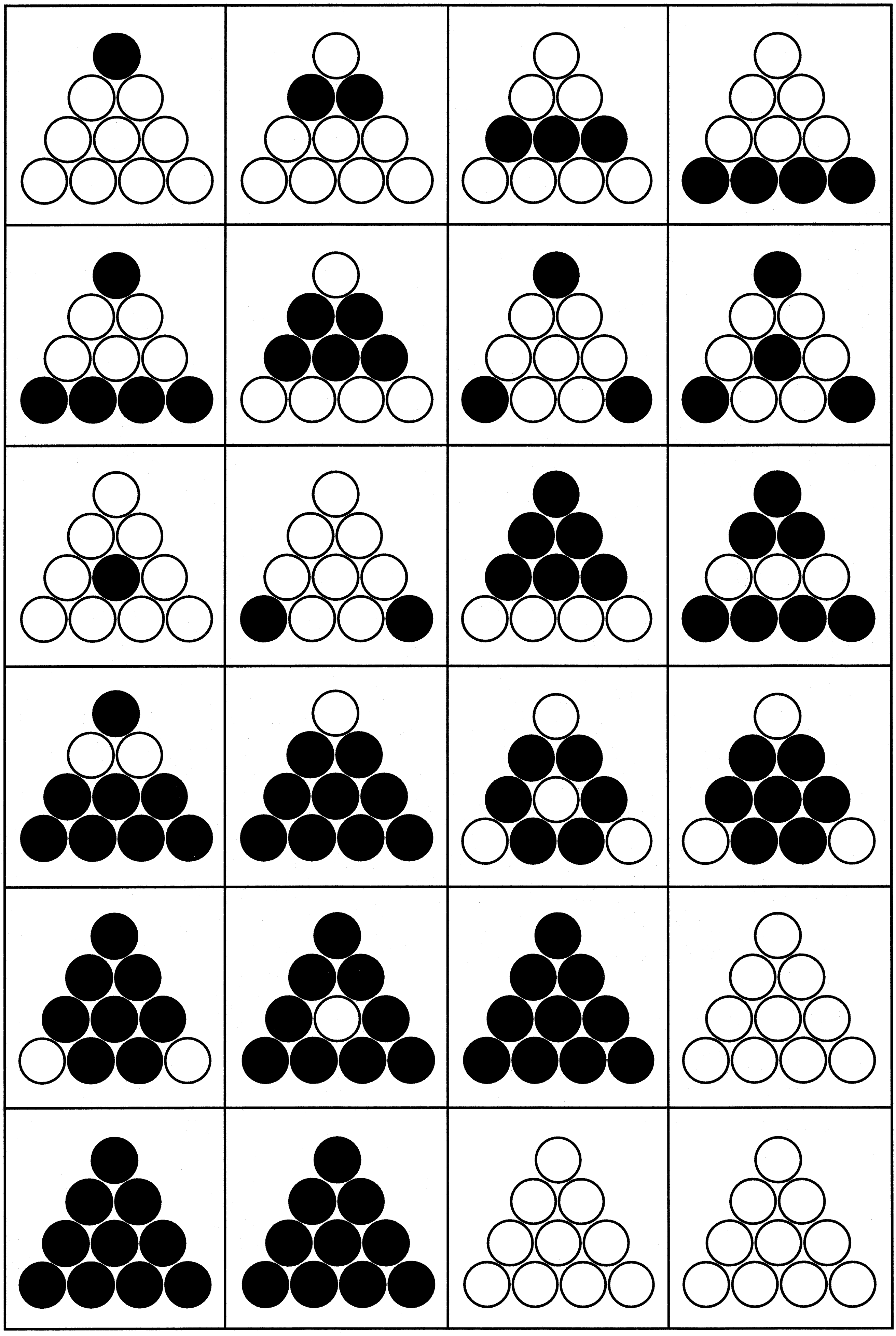
Bandes numériques 1

51	61	71	81	91
52	62	72	82	92
53	63	73	83	93
54	64	74	84	94
55	65	75	85	95
56	66	76	86	96
57	67	77	87	97
58	68	78	88	98
59	69	79	89	99
60	70	80	90	100

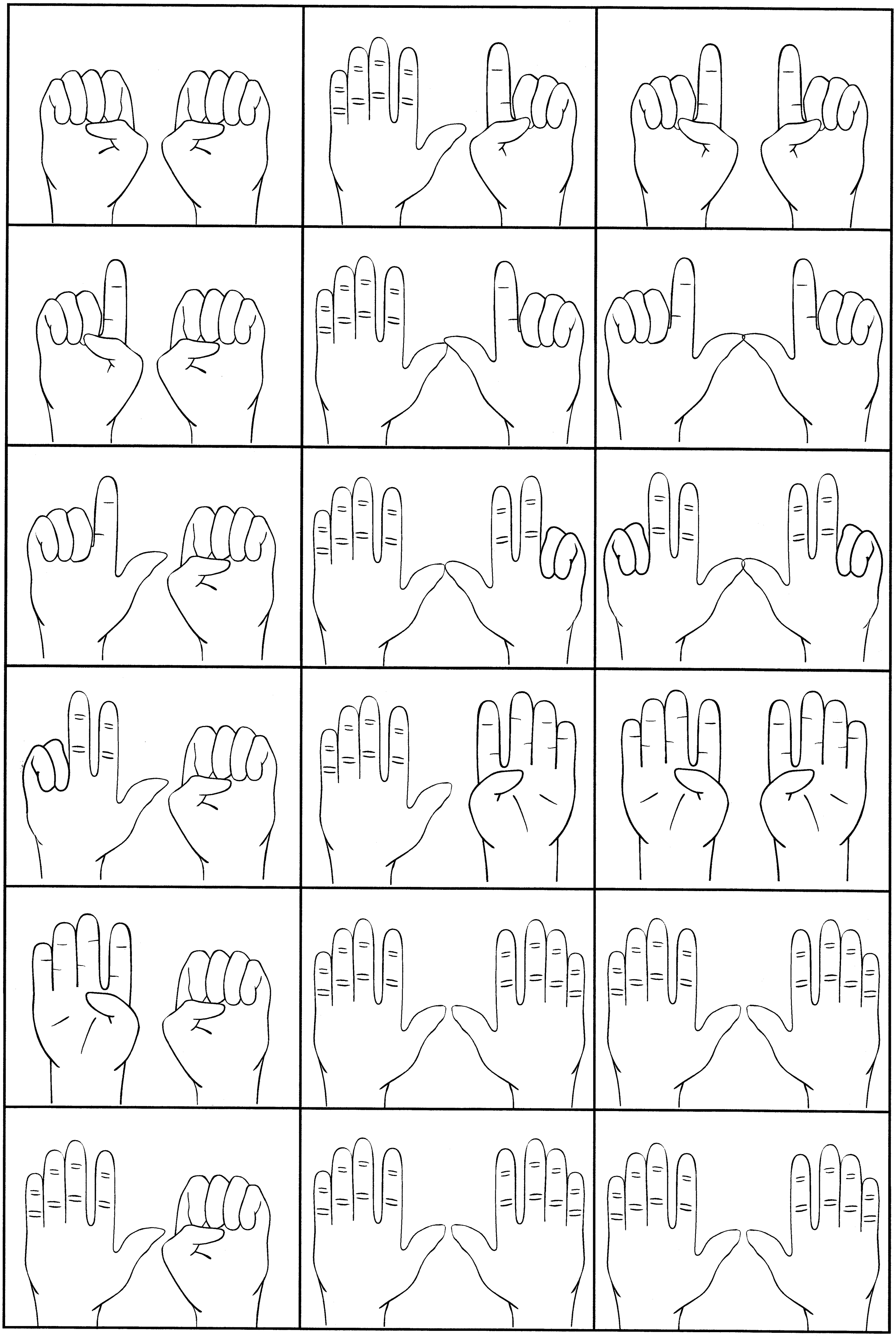
5	15	25	35	45
10	20	30	40	50

Bandes numériques 3

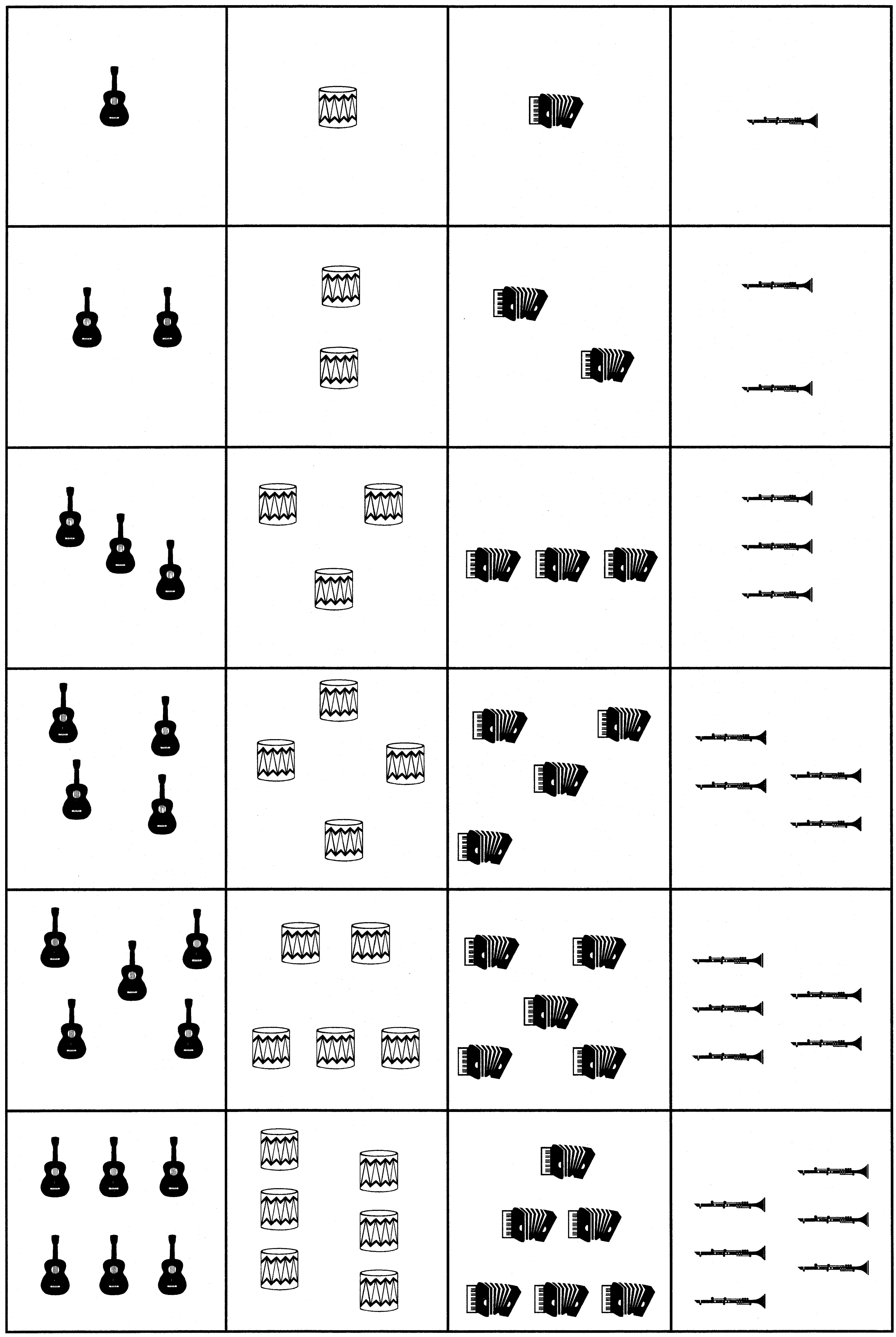
55	65	75	85	95
60	70	80	90	100



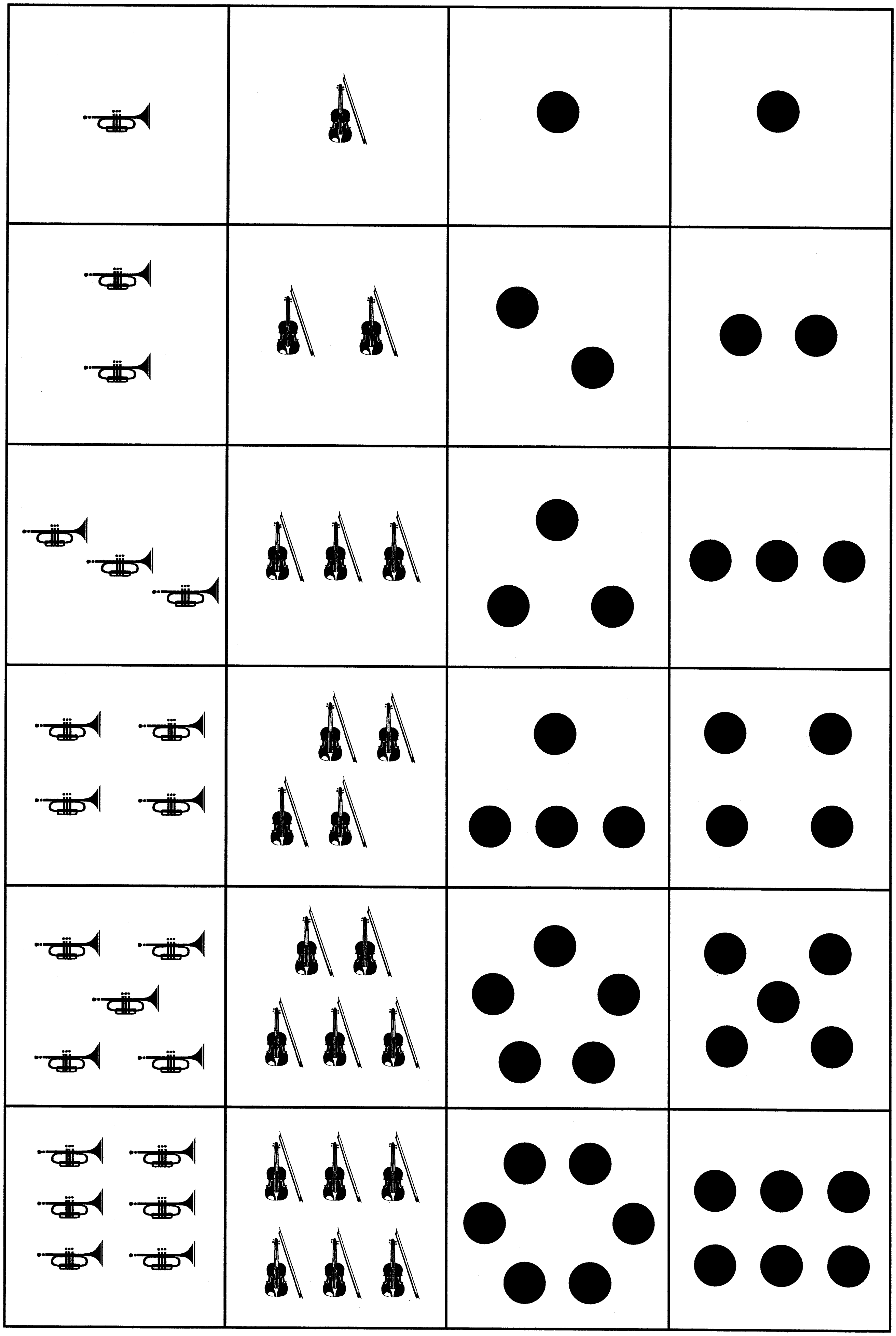
Pavés tetraktys



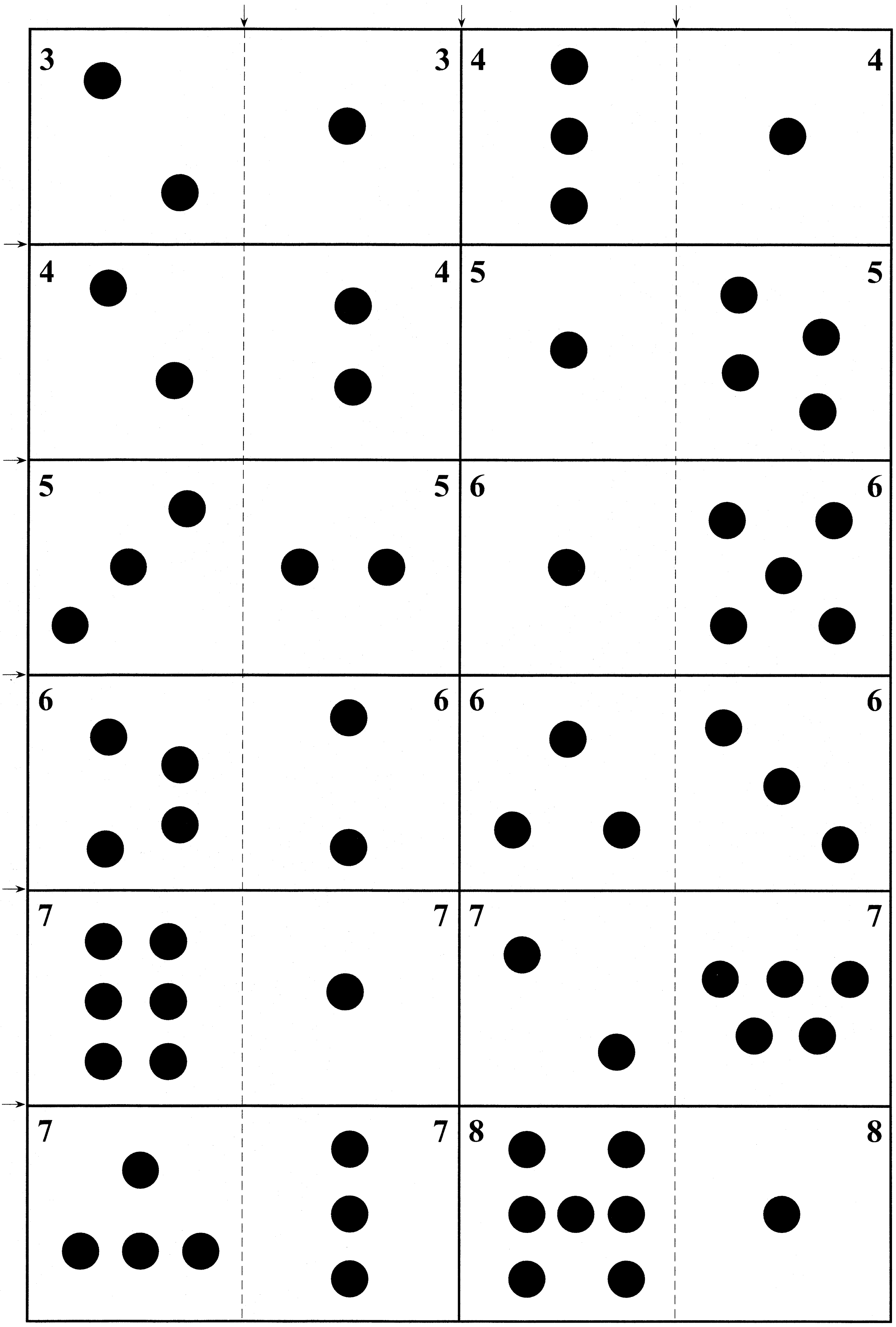
Pavés deux mains

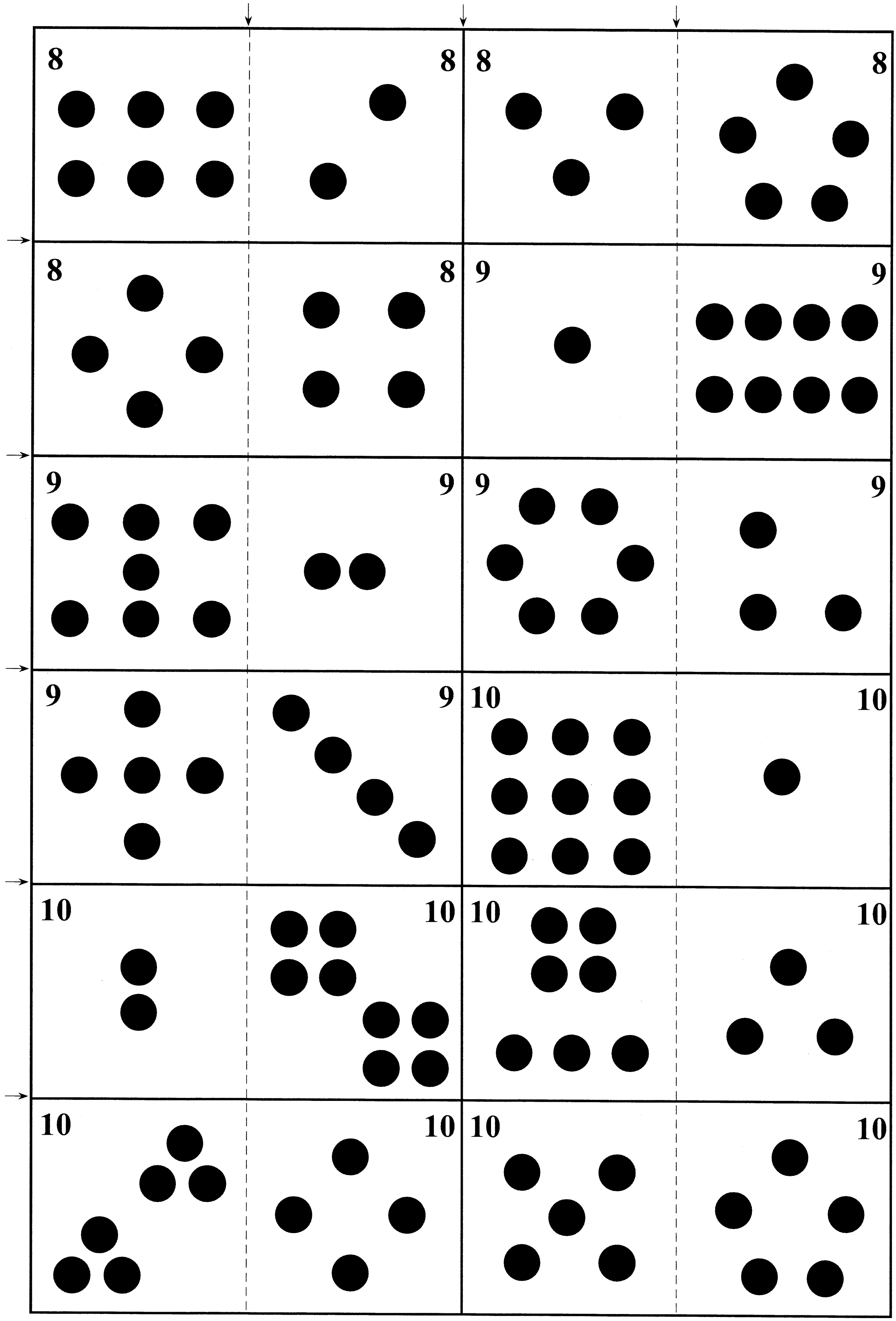


Pavés orchestre 1



Pavés orchestre 2


3
3
4
4
4
4
5
5
5
5
6
6
6
6
6
6
7
7
7
7
7
7
8
8

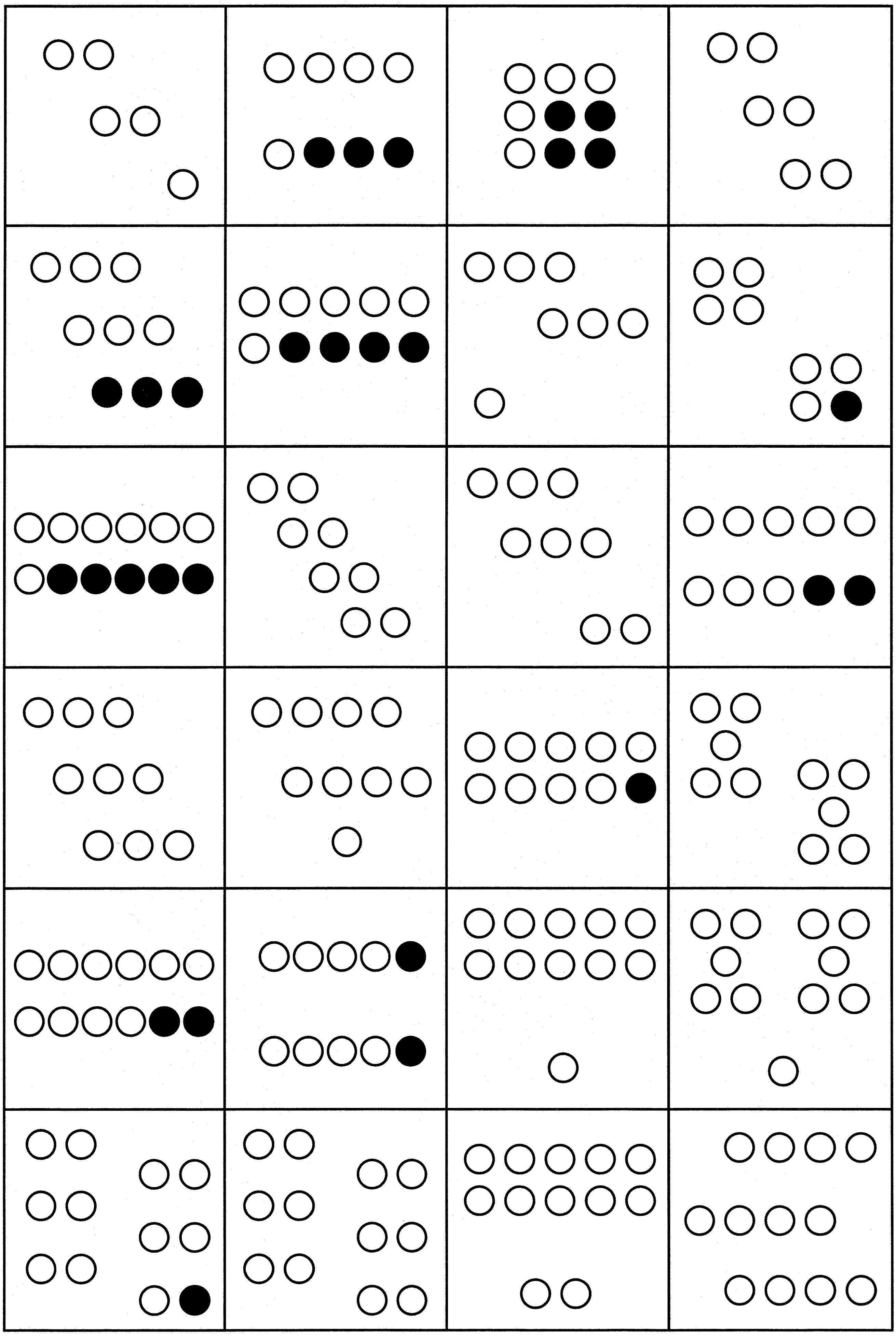

8
8
8
8
8
8
9
9
9
9
9
9
9
9
10
10
10
10
10
10
10
10
10
10

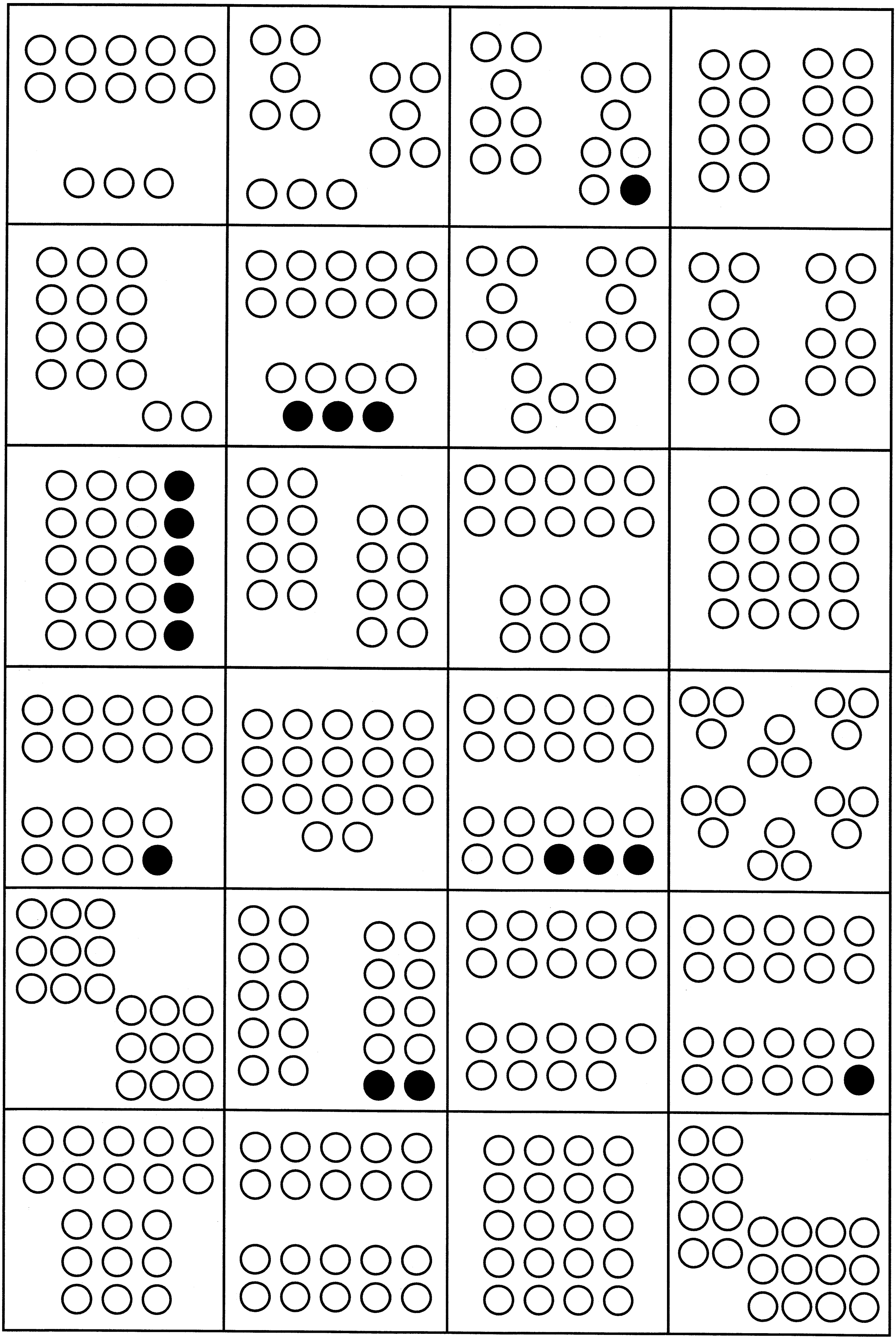
1	7	13	19
2	8	14	20
3	9	15	21
4	10	16	22
5	11	17	23
6	12	18	24

25	**31**	**37**	**60**
26	**32**	**38**	**70**
27	**33**	**39**	**80**
28	**34**	**0**	**90**
29	**35**	**40**	**+**
30	**36**	**50**	**=**

2 + 2	2 + 3	2 + 4	5 + 2
2 + 6	7 + 2	2 + 8	9 + 2
2 + 1	3 + 3	3 + 4	5 + 3
3 + 6	3 + 7	8 + 3	9 + 3
1 + 3	4 + 4	4 + 5	6 + 4
7 + 4	4 + 8	9 + 4	1 + 4

5 + 5	6 + 5	5 + 7	5 + 8
9 + 5	5 + 1	6 + 6	7 + 6
6 + 8	9 + 6	1 + 6	7 + 7
7 + 8	9 + 7	7 + 1	8 + 8
1 + 8	8 + 9	9 + 9	1 + 9
1 + 1	6 + 0	0 + 9	4 + 0





Line range ses chaussures. 2 rouges font une paire, 2 vertes, une autre paire mais elle n'en trouve qu'une verte. **Combien a-t-elle de chaussures ?**	Émilie met 4 cerises dans l'assiette de chacun de ses 2 bébés. Mais la pie voleuse lui en prend 3. **Combien lui reste-t-il de cerises ?**	9 hirondelles se posent sur un fil. 2 s'envolent, suivies de 2 autres. **Combien reste-t-il d'hirondelles sur le fil ?**	Élise prépare le goûter de ses 3 amis : 2 gâteaux chacun. **Combien de gâteaux lui faut-il ?**
Gaétan met ses billes dans une boîte : 3 rouges, 3 bleues et 3 jaunes. Mais les jaunes ont roulé sous le lit. **Combien a-t-elle de billes dans la boîte ?**	Julie joue avec ses 10 chatons. Mais l'un d'eux se sauve sous le lit, suivi d'un deuxième, d'un troisième et d'un quatrième. **Combien reste-t-il de chatons ?**	Malika cueille 3 marguerites, 3 boutons d'or et 1 coquelicot. **Combien a-t-elle de fleurs dans son bouquet ?**	Sur le manteau de Lise , il y a 2 rangées de 4 boutons. Mais l'un d'eux s'est décousu. **Combien reste-t-il de boutons sur son manteau ?**
Sandra avait 12 pogs. Mais elle a joué avec Sophie et en a perdu 5. **Combien lui reste-t-il de pogs ?**	Je range les aiguilles de maman : 2 grosses pour les gros pulls, 2 moyennes, 2 fines et 2 courtes pour les chaussettes. **Combien a-t-elle d'aiguilles ?**	Mamy a donné 3 bonbons à Pierre, 3 à Mathieu et seulement 2 au grand Jérome. **Combien a-t-elle donné de bonbons ?**	Luc range ses autos sur son étagère en 2 rangs de 5. Malheur ! 2 ont roulé par terre. **Combien reste-t-il d'autos sur le rayon ?**
Camille cueille 3 trèfles à 3 feuilles. **Combien a-t-elle de feuilles ?**	Pour sa poupée, Marie a 4 culottes, 4 pulls et 1 manteau. **Combien a-t-elle de vêtements ?**	A chaque doigt, Muriel met une bague. Mais il en manque une pour le pouce gauche. **Combien a-t-elle de bagues ?**	Dans chaque main, j'ai 5 doigts. **Combien ai-je de doigts ?**
Dans une grande boîte à œufs, il y a 12 œufs. Maman en a pris 2 pour faire un gâteau. **Combien reste-t-il d'œufs ?**	Pour jouer, Pierre et Jules ont chacun 5 voitures. Chacun en a cassé une. **Combien leur reste-t-il de voitures ?**	Avec ses amies, Julie fait une grande ronde de 10 enfants. Sa petite sœur se réveille et rentre dans la ronde. **Combien d'enfants font la ronde ?**	Pour faire une étoile, Julien colle 5 triangles. Il fait 2 étoiles et il lui reste 1 triangle. **Combien avait-il de triangles ?**
Où ai-je mis cette chaussette rouge ? J'en avais 6 paires, mais une rouge est égarée. **Combien ai-je de chaussettes ?**	Pour ma fête, nous sommes 6 enfants. Chacun aura 2 gâteaux. **Combien me faut-il de gâteaux ?**	Maman cane se promène avec ses petits. Je les compte : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. En voici encore 2 à la traine. **Combien a-t-elle de canetons ?**	Stéphanie range ses playmobils en 3 rangs de 4. **Combien a-t-elle de playmobils ?**

$3 \times 2 + \square = 7$	$12 - \square = 11$	$2 \times 4 + \square = 10$	$9 - \square = 7$
$3 \times 3 + \square = 12$	$8 - \square = 5$	$3 \times \square = 12$	$10 - \square = 6$
$2 \times \square = 10$	$11 - \square = 6$	$2 \times \square = 12$	$8 - \square = 2$
$4 + \square = 11$	$10 - \square = 3$	$1 + \square = 9$	$12 - \square = 4$
$2 \times 1 + \square = 11$	$10 - \square = 1$	$1 + \square = 11$	$\square - 9 = 1$
$\square + 1 = 12$	$12 - \square = 1$	$\square - 2 = 10$	$12 - \square = 0$

5 + 2	2 + 4	5 – 1
3 + 2	2 + 2	5 – 3
5 + 3	3 + 4	5 – 5
3 + 3	5 + 4	4 – 2
5 + 5	4 + 4	3 – 1

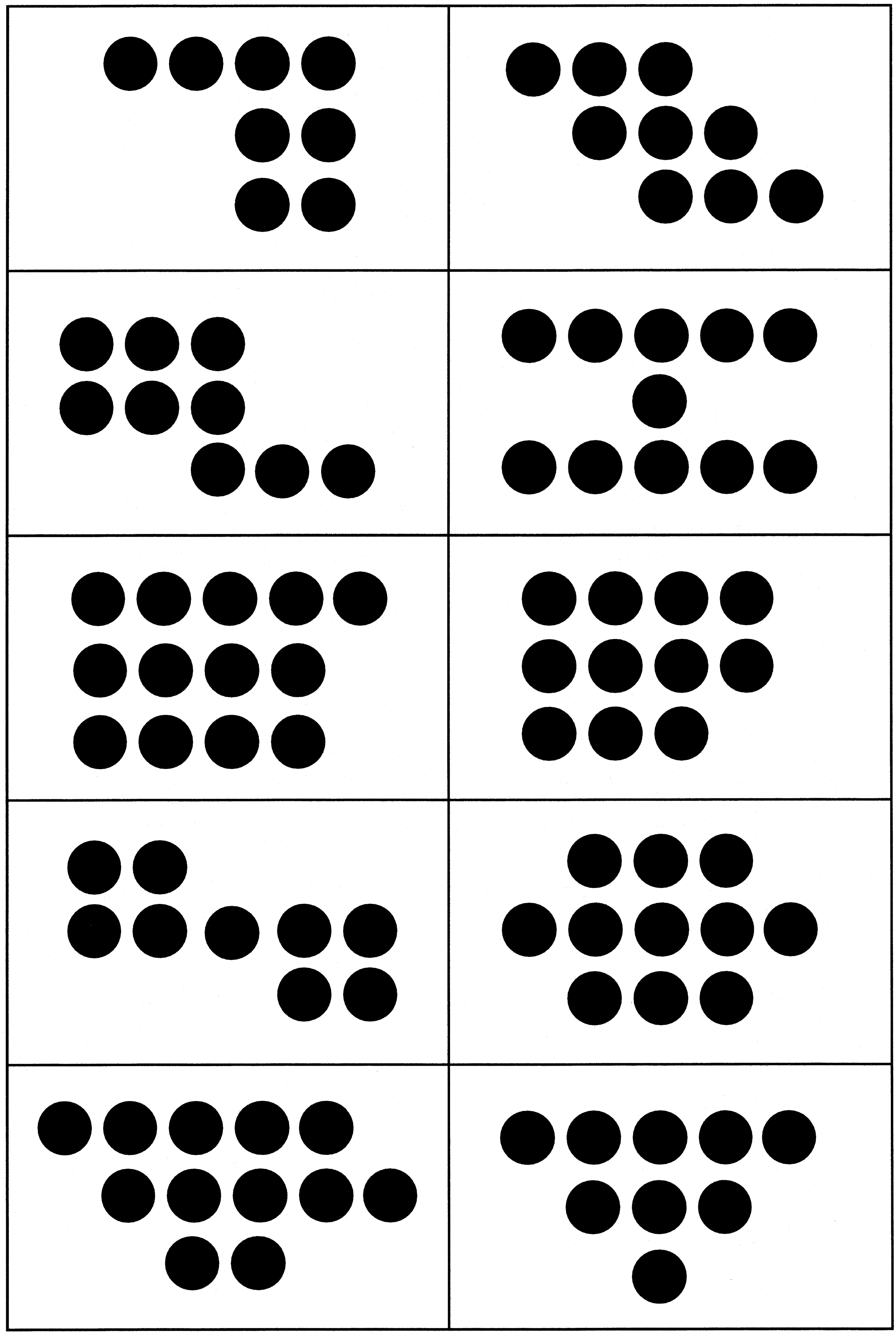
1×	2×	3×	4×

Pavés parenthèses 1

$5-2$		2×2	2×3
$5-4$		2×4	2×5
$4-1$		3×3	3×4
$4-3$		3×5	4×4
$3-2$		4×5	5×5
$5\times$	$10\times$	$+$	$-$

$2 \times 2 + 1$	$2 \times 4 - 3$	$9 - 2 \times 2$	3×2
$3 \times 3 - 3$	$10 - 4 \times 1$	$2 \times 3 + 1$	$2 \times 4 - 1$
$12 - 5$	4×2	$2 \times 3 + 2$	$2 \times 5 - 2$
3×3	$2 \times 4 + 1$	$10 - 1$	2×5
$12 - 2$	$2 \times 5 - 2$	$10 + 1$	$2 \times 5 + 1$
$6 \times 2 - 1$	6×2	$10 + 2$	3×4

$10 + 3$	$2 \times 5 + 3$	$2 \times 7 - 1$	7×2
$4 \times 3 + 2$	$17 - 3$	3×5	$2 \times 7 + 1$
$5 \times 4 - 5$	8×2	$10 + 6$	4×4
$18 - 1$	$3 \times 5 + 2$	$20 - 3$	6×3
2×9	$10 \times 2 - 2$	$10 + 9$	$2 \times 10 - 1$
$2 \times 5 + 3 \times 3$	2×10	5×4	$4 \times 2 + 3 \times 4$



Cartes de points

Chapitre 3 : Systèmes de numération (cycles 2 et 3)

Si certains peuples anciens ont continué à donner un nom ou un signe nouveau pour chaque nombre[1], depuis la naissance de l'écriture, pratiquement tous les peuples ont compris qu'il était beaucoup plus avantageux de choisir un groupe de référence comme dix et de désigner les nombres supérieurs à dix comme dix et un, dix et deux, ..., dix et neuf, deux dix, ...

Tout nombre entier au moins égal à deux peut servir de groupe de référence. Mais on ne trouve, en réalité, que quelques nombres utilisés comme nombres de base, c'est-à-dire nombre du groupe de référence, à travers le monde et les civilisations. Ces nombres de base sont dix, de loin le plus fréquent, vingt, cinq et soixante[2]. Excepté dans ce dernier choix, ils nous montrent à l'évidence, le rôle joué par les doigts et des gestuelles adaptées dans la désignation des nombres.

C'est un grand principe d'économie. Si on choisit de grouper par cinq, par exemple, avec les nombres : un, deux, trois, quatre, cinq, on peut former tous les nombres jusqu'à « 5 cinq ».

Pendant les années 1970, les mathématiciens ont cru que la démarche du paragraphe précédent pouvait permettre aux enfants, dès le CP, de mieux comprendre notre désignation usuelle, décimale, des nombres. Et qu'il était pertinent de faire grouper par trois, puis quatre, cinq, ... et jusqu'à dix.

En fait, ce n'est que lorsque l'écriture décimale est intégrée, plus tard, que le processus global des systèmes de numération[3] permet une compréhension plus profonde. Et dans ce cas, le crescendo des bases de trois à dix n'a aucun intérêt. En revanche, étudier des numérations anciennes, comme le chapitre 5 le suggère, fait prendre conscience aux élèves d'une part de l'arbitraire de notre dix et d'autre part de l'évolution historique qui conduit notre système écrit actuel à être un des rares langages universels.

De plus, le fonctionnement des numérations décimales orale et écrite actuelles, en France, est très différent. Nous disons « trois cent cinquante huit » et nous écrivons 358 (trois codes accolés). Et encore, j'ai évité, dans cet exemple, les nombreux écueils oraux du français qui a gardé des noms aberrants comme « soixante quatorze » ou « quatre-vingt douze » ! Je ne comprends pas pourquoi la France, contrairement aux autres pays francophones, a préféré[4] « soixante-dix » à « septante » ou « quatre-vingt dix » à « nonante ».

---

1 Et se sont arrêtés aux alentours de 30 ! Pour plus de précisions, lire le chapitre 1 de l'*Histoire universelle des chiffres* de Georges Ifrah.

2 Voir le chapitre 5 qui présente les numérations anciennes.

3 Une numération est un procédé de désignation des nombres. Il peut être oral, gestuel ou écrit. Lorsque ce procédé est organisé et permet de désigner tous les nombres (éventuellement jusqu'à un maximum), il prend le nom de système de numération.

4 Les nombres de 70 à 99 sont désignés oralement en fonction d'un système de base vingt utilisé par les Celtes. Je me demande pourquoi avoir pris le système latin jusqu'à 69, puis avoir opté pour la base vingt à partir de 80 et d'avoir maintenu une désignation hybride entre 70 et 79, plutôt que de garder la logique décimale jusqu'à 100.

Abordons donc directement la numération décimale une fois que l'addition et la multiplication des premiers nombres sont intégrées, ces deux opérations étant indispensables pour comprendre comment dix, le nombre de nos doigts et notre référent commun, est capable, avec l'aide des premiers, de créer tous les nombres au delà. C'est pourquoi je propose d'introduire la multiplication en même temps que l'addition, comme addition répétée, sur les premiers nombres (facteurs de 1 à 5), en CP[5], afin que les deux concepts soient présents, dans leur spécificité, pour présenter ensuite la numération décimale.

Numération décimale

1) Dix

Pythagore louait le nombre dix comme un dieu sous le nom de tetraktys : il est simultanément la somme des quatre nombres fondamentaux : un, deux, trois, quatre, et le générateur de tous ses suivants.

Les *pavés tetraktys* et les *pavés deux mains* (p. 54-55) offrent chacun plusieurs dix qui permettent de construire des nombres plus grands que dix et de compter de dix en dix en apprenant les noms que notre langue a malheureusement gardés déformés (vingt, trente, quarante, ...). Je reviendrai plus loin sur ces difficultés de langage.

De même, les *écritures chiffrées*, (p. 60-61) au delà de 40 (mais aussi avant), permettent de composer des nombres à deux chiffres de la forme : 40 + 7 qui peuvent être associés aux figurations précédentes.

Les *bandes numériques* (p. 50 à 53) sont découpées par bandes de dix et donnent l'écriture des multiples de dix. Elles montrent la permanence du chiffre de gauche dans toutes les cases d'une bande sauf la dernière qui, grâce à zéro va faire le saut et se rattacher à la bande suivante.

Pour dire les nombres après 19, il faut connaître les noms donnés par notre langue aux multiples de dix. Le plus grand nombre montré sur nos mains est 10. Pour aller au delà, nous devons montrer nos dix doigts « lancer un 10 », puis refermer les mains pour montrer un complément. En lançant plusieurs fois 10, nous énonçons : « vingt, trente, ... ».

Les *tableaux 10 × 10* sous forme imagée de l'escadrille d'avions ou celle du carré de carrés, permettent aussi de compter les 10. Il suffit de cacher le tableau avec une feuille, puis de la glisser ligne par ligne. Chaque ligne contient 10 objets et les noms s'égrainent. De plus, cette action donne le sens cardinal de ces multiples de 10 qui s'ajoutent naturellement.

2) Tableaux numériques

Notre système d'écriture des textes permet de représenter les phrases orales par une ligne de caractères qui sera physiquement cassée par le « passage à la ligne » pour remplir une page, mais mentalement recomposée dans la lecture. Pour les nombres, il est intéressant de reprendre ce procédé qui va permettre de ranger en tableau une grande quantité de nombres sur une page

5 C'est une option personnelle, confortée par l'expérience des réglettes Cuisenaire. Voir la justification p. 47.

en concevant qu'on a ainsi compacté une longue bande numérique. C'est ainsi qu'au chapitre précédent, j'ai suggéré que les bandes numériques pouvaient, en un deuxième temps, être conservées par pages entières, les bandes de dix côte à côte, symboliquement recollées par les languettes.

On peut aussi écrire la suite des nombres sur une grille de dix cases par ligne.

Les *tables de numération* sont construites sur ce principe. La première montre l'écriture de tous les nombres jusqu'à 99 ; la seconde ne montre que la première ligne et la première colonne et permet de concevoir chaque case comme portant le nombre formé par la somme des deux en-têtes correspondants. Le choix de laisser la première case vide est volontaire. Il laisse la place libre pour un nombre essentiel qui sortira des coulisses plus tard. De plus, comme le second tableau le montre, lorsqu'on videra son intérieur, les multiples de dix deviendront naturellement les entêtes de lignes de ce tableau à double entrée.

Les nombres étant placés les uns au dessous des autres dans ces tableaux, on découvre que le « jeu de l'oie » avec déplacement d'un pion sur une spirale ou sur une bande[6] va gagner une liberté nouvelle : le pion, placé sur une case dans l'un ou l'autre de ces tableaux, se déplace a priori dans le sens de l'écriture ou à l'opposé. En avançant de 10 à partir de différents nombres, on découvre le second mouvement, plus rapide, qui fait sauter de 10 en 10 « verticalement ».

La combinaison d'un mouvement horizontal et d'un mouvement vertical va permettre de réaliser un déplacement complexe dans deux directions et, donc, d'effectuer une addition ou une soustraction de nombres à deux chiffres par déplacement d'un pion. Pour ajouter 24, par exemple, je saute 2 cases verticalement vers le bas puis 4 cases horizontalement vers la droite, avec éventuellement saut à la ligne. Pour soustraire 24, ...

Une bande verticale peut compléter l'un ou l'autre de ces tableaux : c'est l'ascenseur qui permet de changer d'étage – donc d'ajouter ou soustraire des centaines. Avec un second pion, les centaines sont indiquées. Tout nombre de 0 à 999 est ainsi repéré à l'aide de deux pions et les additions et soustractions de nombres à trois chiffres traduites en mouvements des deux pions.

3) Écritures positionnelles

La numération écrite actuelle est positionnelle, ce qui signifie que les seuls symboles écrits sont les chiffres dont la valeur dépend de la place. Les trois 3 de l'écriture 333 ont des valeurs différentes et nous savons où nous lisons trois unités, trois dizaines ou trois centaines. Tous les nombres que les enfants côtoient, parfois écrits en grand sur les étiquettes des étals des magasins, sont écrits dans ce système que sa perfection a rendu universel. Les enfants de CP, dès qu'ils ont intégré les dix nombres de un chiffre, sont prêts pour cette lecture particulière. De plus, lorsque les nombres seront supérieurs à 1000, notre nomenclature propose d'en séparer les chiffres, trois par trois, par des blancs.

6 Voir chapitre 2 p. 48 à 53

Les *cartes numérales*[7] sont de trois largeurs et portent chacune une bande repère à droite. Elles se composent de 27 rectangles portant les nombres 1, 2, …, 9 ; 10, 20, …, 90 ; 100, 200, …, 900. Pour former un nombre à trois chiffres au plus, il faut d'abord apprendre le nom de ces 27 rectangles : un, deux, ..., dix, vingt, trente, ..., cent, deux cents, trois cents, ...

Lorsque le nom oral d'un nombre est dit, l'élève doit entendre les mots le composant et extraire les cartes qui portent ces mots. Par exemple, pour « deux cent trente sept », prendre les trois cartes 200, 30, 7 ; pour « deux cent trente », prendre les deux cartes 200 et 30, pour « deux cent sept », prendre les deux cartes 200 et 7. Puis on les superpose, de la plus grande à la plus petite, les bandes repères les unes sur les autres à droite. Les zéros qui doivent disparaître sont cachés par les cartes supérieures, et l'écriture positionnelle apparaît. Si un zéro terminal ou intercalaire est indispensable, il reste visible (comme dans 230 ou 207).

Inversement, on peut démonter une écriture par cartes superposées et découvrir la décomposition arithmétique : 237 = 200 + 30 + 7. On comprend, en formant deux nombres, que la somme peut se faire ordre par ordre, comme on le fait dans la technique écrite.

Reprenons les difficultés de langage que le français impose à nos enfants. Les noms oraux des dix premiers nombres sont brefs et bien différenciés, donc parfaitement adaptés à devenir des « syllabes orales » de noms plus complexes. En revanche, le changement de logique qui s'opère entre 16 et 17 impose de concevoir qu'en disant « treize[8] » on désigne le nombre (10+3). Certaines présentations des nombres proposent de désigner les nombres de 10 à 19 par : « dix un », « dix deux », ..., « dix neuf ». C'est une option possible bien que lourde, car les mots de la comptine « onze, douze, ... » apparaissent simultanément. En revanche, le cas des nombres de 70 à 99 est beaucoup plus gênant dans notre langue (ce choix de noms est d'ailleurs incompréhensible et Condorcet[9] a tenté une régularisation qui n'a pas abouti).

Le choix fait pour les cartes numérales de présenter d'emblée des nombres à trois chiffres dès que les dix premiers sont connus part d'une volonté de présenter d'abord ce qui est logique, donc simple, avant de rentrer dans des difficultés particulières qui masquent la clarté de la logique de construction sous des scories de langage. Le nom des centaines est clair : si je dis à un enfant de six ans que l'écriture 200 se dit « deux cents » et que je lui présente ensuite 500 ou 700, il me dira, de lui-même, « cinq cents » ou « sept cents ». Seul, 100 présente une petite particularité de langage, mais ce n'est pas gênant de dire provisoirement « un cent ». En revanche, si je lui dis, en décomposant bien les syllabes, que 50 se dit « cinq-ante », il pourra, pour 70, 80, 90 me dire « sept-ante[10] », « huit-ante », « neuf-ante » et j'accepte volontiers ces désignations temporaires pour privilégier la logique et reporter à plus tard le fait que « sept-

7 Comme je l'ai indiqué dans l'introduction, ce jeu a été conçu pour l'éducation spéciale. C'est beaucoup plus tard que j'ai découvert que la même idée avait été exploitée par Maria Montessori au début du XX^{ième} siècle.

8 On, dou, trei, quint, sei sont des anciens mots du français pour un, deux, trois, cinq, six. La terminaison -ze désignant dix.

9 Condorcet, *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*.

10 Je propose de dire « sept ante » et non « septante », « huit ante » et non « octante » « neuf ante » et non « nonante », la déformation du vieux français conservée dans les pays francophones étant inutile en France.

ante » se dit en réalité « soixante-dix » pour des raisons historiques remontant aux Celtes. Il est à noter que notre langue a tellement de déformations que « cinquante » est le seul multiple de 10 sur lequel je peux m'appuyer pour cette proposition.

Voici une autre utilisation originale de ces cartes qui s'apparente au jeu de cartes « le 21 ». Un groupe de joueurs détermine un nombre cible à trois chiffres par tirage au sort de trois cartes numérales, réparties selon la largeur et retournées (ou à deux chiffres en ôtant les cartes centaines) et l'expose. Les *pavés numération 1* (p. 89) sont étalés, faces cachées. Chacun prend au hasard trois pavés, en repère la somme sans montrer ses pavés et, à son tour de jouer, prend, remet ou échange un pavé, puis abat éventuellement son jeu s'il pense être le plus proche du nombre cible. Alors chacun abat son jeu et la somme la plus proche donne le point. On peut aussi imposer que la somme en main soit inférieure au nombre cible.

Les *cartes numérales* sont aussi utilisables au cycle 3 pour la représentation des grands nombres. Trois ou quatre séries de *cartes numérales* sont photocopiées sur des supports de couleurs différentes qui représentent les classes des unités, mille, millions, milliards. Chaque couleur permet de réaliser un nombre à trois chiffres. En accolant ces nombres dans l'ordre, les bandes repères séparant les séries de trois chiffres s'appellent successivement : mille, millions, milliards (à partir de la deuxième) et les trois nombres colorés composent un grand nombre. La carte portant 000 ne sert que dans l'écriture des grands nombres lorsqu'un ordre, sauf le plus grand, n'a pas de centaine comme dans 23 005 709.

4) Tableau de numération

Une variante collective des activités proposées ci-dessus avec les *cartes numérales* a été proposée par Caleb Gattegno[11] en 1974. Les mêmes nombres que ceux des cartes sont écrits sur trois lignes du *tableau de numération* présenté aux élèves. Un nombre est montré en désignant au plus un élément par ligne du tableau en commençant par le bas. Tous les nombres jusqu'à 999 peuvent être nommés par les élèves, avec la simplification proposée ci-dessus pour ceux qui contiennent les 70, 80 ou 90. Puis ils sont écrits sur trois lignes, puis abaissés sur une seule ligne comme dans une addition posée. « Trois cent quarante six » s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} & & 6 \\ & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 4 & 6 \end{array}$$

Inversement, un nombre écrit peut être « remonté » dans le tableau et désigné oralement. Certains enseignants préfèrent une disposition inversée, la ligne des centaines en haut pour avoir une lecture verticale descendante plus proche de notre lecture habituelle. L'adaptation est simple. Seul écueil à éviter : la sortie en ligne horizontale des nombres du tableau, les enfants ayant naturellement envie d'écrire le nombre ci-dessus : 300406.

11 Caleb Gattegno, *The common sense of teaching mathematics*.

5) Le boulier vivant

Les bouliers orientaux[12] représentent les nombres par des boules, toutes identiques, glissant sur des tiges différentes. Ils sont une vraie représentation de la numération décimale de position, où ce sont les mêmes chiffres qui représentent tous les ordres (contrairement aux numérations anciennes, comme nous le verrons au chapitre 5).

Le jeu des doigts peut conduire à une telle figuration. Lorsqu'on montre un nombre supérieur à 40 en ouvrant plusieurs fois les deux mains, le nombre de dizaines est fugace, compté par les gestes, alors que le nombre d'unités est permanent. Pour éviter qu'une inattention d'un instant transforme le nombre pour un observateur, une seconde personne peut compter les dix en dépliant un doigt à chaque lancer de dix. De cette façon, le nombre complet est permanent : un enfant montrant les « dix[13] » et l'autre les « un ». Le jeu se poursuit au delà de 100, de la même façon, avec un troisième enfant « porteur des cents ». Comme avec les cartes numérales, la similitude des symboles pour tous les ordres est représentée par les mêmes figurations de doigts et la différence des valeurs cardinales par la personnalité des enfants. Un nombre dit peut être montré, puis écrit. Inversement, un nombre montré par deux ou trois enfants formant ce « boulier vivant » peut être dit et écrit et un nombre écrit peut être dit et montré.

Comme tout boulier, ce « boulier vivant » permet d'effectuer des calculs. Ajouter 20 à un nombre ainsi montré, signale au « porteur des dix » de déplier deux doigts, alors que les autres ne font rien ; enlever 300, signale au « porteur des cents » de replier trois doigts. Dans certains cas, l'action ne devient possible qu'avec un échange intermédiaire de dix « un » contre un « dix » ou de dix « dix » contre un « cent », ou l'inverse : c'est le rôle de la retenue.

Les *pavés deux mains* permettent de mettre en scène, individuellement, ce jeu, un pavé montrant les « un », un autre les « dix », un troisième les « cents ». Tout nombre à trois chiffres est réalisé par la juxtaposition de trois pavés ; ce qui peut être relié avec l'écriture positionnelle donnée par les *cartes numérales*. Mais l'extension la plus intéressante de ce jeu est donnée page suivante par la pratique de l'abaque à jonchets des anciens savants chinois qui transpose ce jeu des doigts sur un quadrillage où se placent et se déplacent des réglettes remplaçant les doigts, permettant la compréhension des liens essentiels entre les opérations et la numération de position, en particulier la multiplication par dix, et la mise en place des techniques opératoires.

6) Calculs et cailloux

Les cailloux ont été utilisés depuis très longtemps pour effectuer des calculs. Le mot calcul vient d'ailleurs du mot latin « calculus » qui signifie caillou ; ce qui explique qu'on parle de calculs rénaux ou biliaires. On a d'ailleurs retrouvé des bourses d'argile dans les fouilles de Suse (Iran), contenant de petits objets numériques qu'on nomme calculi. En remplissant de petites boîtes de cailloux (boîtiers de pellicules photos, par exemple), on reprend ce principe qui va

12 Voir le site : http://www-cabri.imag.fr/nathalie/boulier

13 J'ai écrit volontairement « un », « dix » ou « cent » plutôt que unités, dizaines, centaines comme on le fait habituellement. C'est une façon naturelle chez les enfants qui exprime mieux la valeur cardinale. En disant « trois dizaines » ou « trois centaines » on désigne trois nouveaux objets plutôt que les 30 ou 300 initiaux.

donner aux nombres une nouvelle liberté : on peut ajouter des cailloux ou en ôter et réaliser ainsi, manuellement, des calculs.

L'invention de l'écriture, il y a 5000 ans, a permis de graver des signes sur les bourses d'argile et de montrer le nombre enfermé sans être obligé, comme pour une tirelire, de casser la bourse. De la même façon, nous pouvons fermer les boîtes de cailloux et coller une étiquette qui permet d'en écrire et lire le nombre. À partir de là, différentes actions sont possibles : vérifier le contenu d'une boîte, mélanger celui de deux boîtes ou ôter des cailloux dans une boîte étiquetée et prédire le nombre restant.

Les *pavés numération 1* reproduisent en dessin ce jeu des boîtes de cailloux en le prolongeant. Les boîtes sont étiquetées et contiennent 1, 2, ..., 9, 10, 20, 30, 40, 50 cailloux. Des sacs de 100 contiennent dix boîtes de 10 ; un sac de 500, cinq sacs de 100 et un gros carton de 1000, deux sacs de 500 ou ... Tous les nombres jusqu'à 1999 (ou plus avec plusieurs séries) peuvent être représentés.

Les *pavés numération 2* donnent l'expression arithmétique de la décomposition de la série 1 sous la forme : $2548 = (2 \times 1000) + (5 \times 100) + (4 \times 10) + 8$, les unités étant reprises dans les *écritures chiffrées* (p. 60-61). Les parenthèses sont mises automatiquement par les cartes. Les trois dernières cartes ne sont utiles que lorsqu'on veut décomposer des grands nombres.

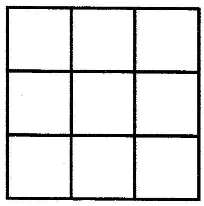
7) Monnaie

Les manipulations d'argent donnent une décomposition différente des nombres. Beaucoup de manuels proposent des fac-similés de pièces et de billets qui permettent aux enfants des échanges fictifs d'argent. Les *pavés monnaie*, de même, offrent le moyen de recomposer toute somme d'argent de 1 c à 100 € et de simuler des jeux de marchande. Notez cependant que la représentation de l'argent est symbolique, l'importance financière des pièces n'étant pas liée à leur taille, mais à leur couleur. C'est plus la connaissance des décompositions d'un nombre qui permet de le composer avec des pièces que le contraire.

8) Abaque à jonchets

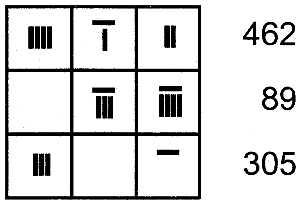
Il y a 2 500 ou 3 000 ans, les savants chinois étaient capables d'effectuer les quatre opérations arithmétiques grâce à une machine à calculer formée d'une sorte d'échiquier sur lequel ils disposaient de petites allumettes d'ivoire suivant un rituel très précis. Cet abaque est le **chou suan**, ancêtre de l'actuel boulier nommé **suan pan**.

L'abaque à jonchets est une adaptation libre de cet instrument qui peut permettre la compréhension des concepts liés à la numération décimale de position. Le « terrain de jeu » est un quadrillage de 3×3, éventuellement en plusieurs exemplaires. Les « chiffres » sont formés d'organisations d'allumettes, toutes semblables, disposées dans les cases, selon le schéma suivant :



1 2 3 4 5 6 7 8 9

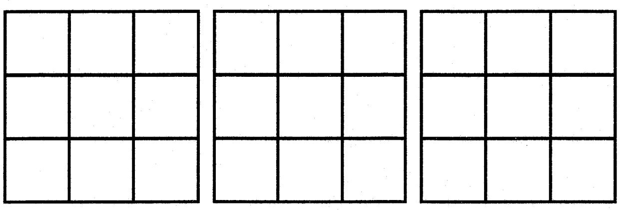
Voici trois représentations de nombres, une sur chaque ligne :



Dans le primaire, la représentation décimale est capitale, et cet abaque permet de représenter les nombres d'au plus trois chiffres sur une plaque et de réaliser pratiquement, par manipulation, les techniques opératoires des quatre opérations arithmétiques et de comprendre leur disposition en tableau. En particulier, la multiplication d'un nombre par 10, 100, ... se traduit par décalage des jonchets du nombre d'une, deux, ... case(s) vers la gauche. Les zéros accolés à droite par multiplication par 10, 100, ... correspondent aux cases laissées vides par le déplacement. La représentation en « chiffres chinois » pourra être associée à la numération sur les doigts du « boulier vivant » présenté pages 77-78.

L'opération arithmétique inverse de la multiplication par 10, 100, ... est la division par 10, 100, 1000 et l'action associée, le glissement vers la droite d'une, deux ou trois cases du train des jonchets du nombre, celui-ci étant tiré par son « wagon de queue ».

Deux, trois ou quatre telles plaques peuvent être accolées pour de plus grands nombres. (La première portera les unités, la deuxième, les mille, la troisième, les millions, ...)



Quant à la réalisation du matériel, elle est simple, les plaques sont réalisées en carton ou en contreplaqué (la planche *Abaque à jonchets* peut être agrandie, si besoin) et les jonchets, de petites lattes carrées de 4 cm de long (plus stables que des allumettes) ou de grandes allumettes américaines découpées au cutter.

Autres systèmes de numération

1) Numération sexagésimale

De la même manière que le « boulier vivant », présenté p. 78, fait jouer un groupe d'enfants acteurs, la représentation horaire peut donner lieu à un jeu théâtral préliminaire aux activités symboliques. Douze enfants, placés en rond, portent les heures, de 1 h à 12 h, dans un premier temps, puis de 1 h à 24 h, l'enfant représentant 1 h prenant naturellement 13 h à la suite de 12 h ou midi. Un chapeau, passé d'heure en heure, repère l'heure présente. Un treizième enfant se place derrière « l'horloge vivante » et fait le tour en comptant de 5 en 5. Tout instant peut être mimé, ainsi que l'écoulement du temps et toute durée d'un instant à l'autre par le déplacement du « coureur des minutes ». Le passage par 12 donne lieu au passage du chapeau chez les « porteurs des heures » ainsi qu'à l'annonce, à voix haute, de la nouvelle heure. On peut compléter ce modèle avec un quatorzième enfant, au centre, qui dispose deux bâtons ou balais de longueurs différentes qui montrent les deux enfants repères. Un quinzième enfant peut être l'horloge parlante.

Les deux modèles *horloge 1 et 2* complètent une horloge véritable dont l'observation fait comprendre le système complexe de repérage du temps[14]. Leur originalité consiste à présenter les 12 heures sous forme de clochettes qu'une aiguille centrale montre. Les minutes forment un circuit fermé analogue aux bandes numériques, avec 60 cases. Un pion marque l'instant sur ce circuit, ou se déplace en avant ou en arrière dans l'ordre du temps. C'est un abaque de calcul horaire une fois que le mode de représentation est compris. Partant d'une heure donnée, le déplacement du pion des minutes permet de connaître l'heure tant de minutes plus tard ou plus tôt. Le passage par la clochette supérieure fait avancer – ou reculer – l'heure d'une unité et tourner l'aiguille. On peut préférer remplacer l'aiguille des heures par un second pion qui se déplace sur le circuit de clochettes.

Horloge 1 repère les minutes dans le système commun (par exemple « 7 heures moins 20 »). Les quart, demi et trois quart d'heure sont figurés par des fractions de clochettes. Les positions avant l'heure qui sont désignées par « moins » sont grisées. Les clochettes des heures sont reliées par un anneau intérieur portant une gradation de quatre niveaux de gris entre deux heures successives, ce qui permet, si on le désire, de prendre en compte que l'aiguille des heures ne change pas brutalement au passage de la clochette supérieure, mais graduellement et qu'elle peut être légèrement tournée à chaque quart d'heure.

Horloge 2 repère les minutes de 0 à 59 et permet, grâce aux clochettes extérieures, un repérage sur 24 h. Le fonctionnement global restant le même qu'avec l'*horloge 1*.

Les *pavés horloge* donnent les minutes de 5 en 5 sous deux formes, dans la lecture de l'heure. Il faut les associer aux nombres de 0 à 12 (ou 0 à 24) des *écritures chiffrées* (p. 60-61). Le tirage d'un pavé de chacune de ces séries donne une heure qu'on peut représenter sur l'une ou l'autre des *horloges*. Inversement chaque position de l'horloge conduit au choix de deux pavés.

Les *pavés montres* offrent un éventail de positions horaires sous trois formes :

- affichage à aiguilles,
- affichage digital du matin,
- affichage digital de l'après-midi.

Ils se prêtent à différents jeux de paires, lotos, œil de lynx. Les affichages digitaux peuvent aussi être associés aux horloges pour donner des heures à afficher.

2) Écriture romaine

La petite série *écriture romaine* peut aider à comprendre ce mode ancien utilisé, de nos jours, essentiellement pour numéroter les chapitres et les dates. C'est un système décimal non

14 Pour une exploitation plus détaillée de l'étude de la lecture de l'heure, voir : *Prends ton temps !*, IREM de Franche-Comté

positionnel. En combinant ces huit signes, on peut former l'écriture romaine de tous les nombres de 1 à 98. (Rappel : L = 50 ; C = 100 ; D = 500 ; M = 1000)

On pourra donc associer cette série aux représentations cardinales de *pavés numération 1.*

3) Systèmes non décimaux de numération positionnelle

Leibniz (1646-1716) a découvert le moyen de représenter tous les nombres avec deux signes seulement : le système binaire. En réalité, tout nombre entier au moins égal à deux peut jouer le rôle de dix dans le système décimal. Les nombres sont alors exprimés avec les puissances de ce nombre (comme 10, 100, 1000, ... dans le système décimal).

Le *tableau de numération* peut être repris dans ce contexte en CM2. Il présente les écritures de base permettant d'exprimer tout nombre de 1 à 999 dans le système décimal. Si on coupe ce tableau par une barre verticale, la partie gauche permet toujours de désigner tous les nombres jusqu'à un nombre maximum dans un nouveau langage oral et écrit. Ce travail est fait en général, et il le fut systématiquement dans les années 1970, sur le langage écrit, sans rapport avec un langage oral associé, ce qui perd en grande partie son efficacité.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900

La position de la barre entre 4 et 5 correspond à la situation donnée en introduction de ce chapitre où le groupe de base est la main, s'appelle « cinq » et s'écrit 10. Afin de savoir dans quel système sont écrits les nombres, je propose d'utiliser des couleurs.

Voici une proposition personnelle pour la désignation orale des nombres en base « cinq ». Dix se dira « deux cinq » et treize « deux cinq trois ». Nous pouvons inventer un mot pour dire l'écriture 100 (de la couleur de la base « cinq »). Ce mot, qui correspond à « cinq cinq », n'existe pas dans notre langue et je vais l'inventer pour cette activité : « cenq ». Ainsi, grâce aux six mots : « un, deux, trois, quatre, cinq, cenq », on pourra dire tous les nombres jusqu'à $5^3 - 1$ = 444 (base « cinq ») = 124 (base « dix »)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Toute autre position de la barre donne naissance à un système de numération. Ci-dessus, le groupe de base est « huit ». Selon la proposition précédente, il se dit « huit » et s'écrit, comme pour tous les systèmes : 10 (couleur de la base « huit »). La deuxième ligne se lit « huit, deux huit, trois huit, ..., sept huit ». Pour dire et écrire tous les nombres jusqu'à $8^3 - 1 = 511$ (base « dix »), il nous faut inventer un mot pour dire 100 (base « huit »), soit, par exemple « hent ». La troisième ligne se lit « hent, deux hents, trois hents, ..., sept hents ». Le nombre désigné par « hent » est « huit huit », soit 64 en décimal. Le nombre cent (de notre système décimal) se dit dans ce système de base huit : « hent quatre huit quatre » et s'écrit 144 (base « huit »), puisqu'il s'écrit en décimal : $64 + 4\times8 + 4$.

Les *cartes numérales* se prêtent aux mêmes variations que le tableau précédent. Dans les exemples ci-dessus, il suffit de laisser de côté les cartes contenant les signes 5, 6, 7, 8, 9 pour obtenir la représentation en base « cinq » ou les signes 8 et 9 pour obtenir la base « huit ».

Les *pavés binaires* {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024} se combinent par addition pour former tout nombre de 1 à 2047.

La double série des *pavés ternaires* {1, 3, 9, 27, 81, 243, 729} permet de former tout nombre de 1 à 2186.

On peut donc avec chaque ensemble :

- se donner un nombre - éventuellement par tirage au sort - et essayer d'associer les cartes qui le caractérisent (par addition),
- deviner un nombre choisi par le partenaire par décodage : on essaie une combinaison et le codeur informe par : « plus » ou « moins ».

Avec ces deux séries de pavés, on peut dessiner les deux plateaux d'une balance Roberval, l'un portant une « masse » inconnue X à déterminer, avec les « masses marquées » des ensembles *binaire* ou *ternaire.* A chaque essai d'un joueur, le codeur indique de quel côté penche la balance.

Avec les *pavés ternaires,* en ne gardant qu'un exemplaire de chaque nombre, le joueur peut découvrir la masse X, en plaçant, à son gré, les pavés sur le plateau de X et sur le plateau opposé (X est la différence des masses posées sur chacun des plateaux).

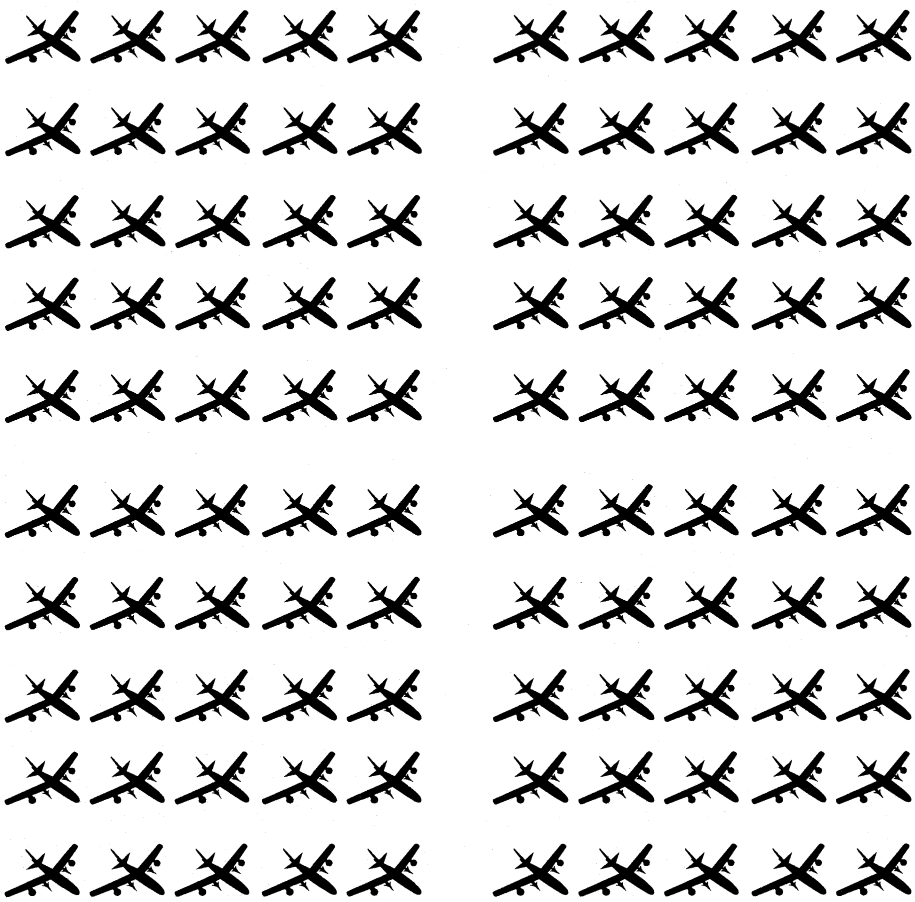
Par exemple, on équilibre une masse inconnue en plaçant les « masses ternaires » 3, 27 et 81 sur l'autre plateau et 9 à son côté. La masse est $(3 + 27 + 81 - 9)$.

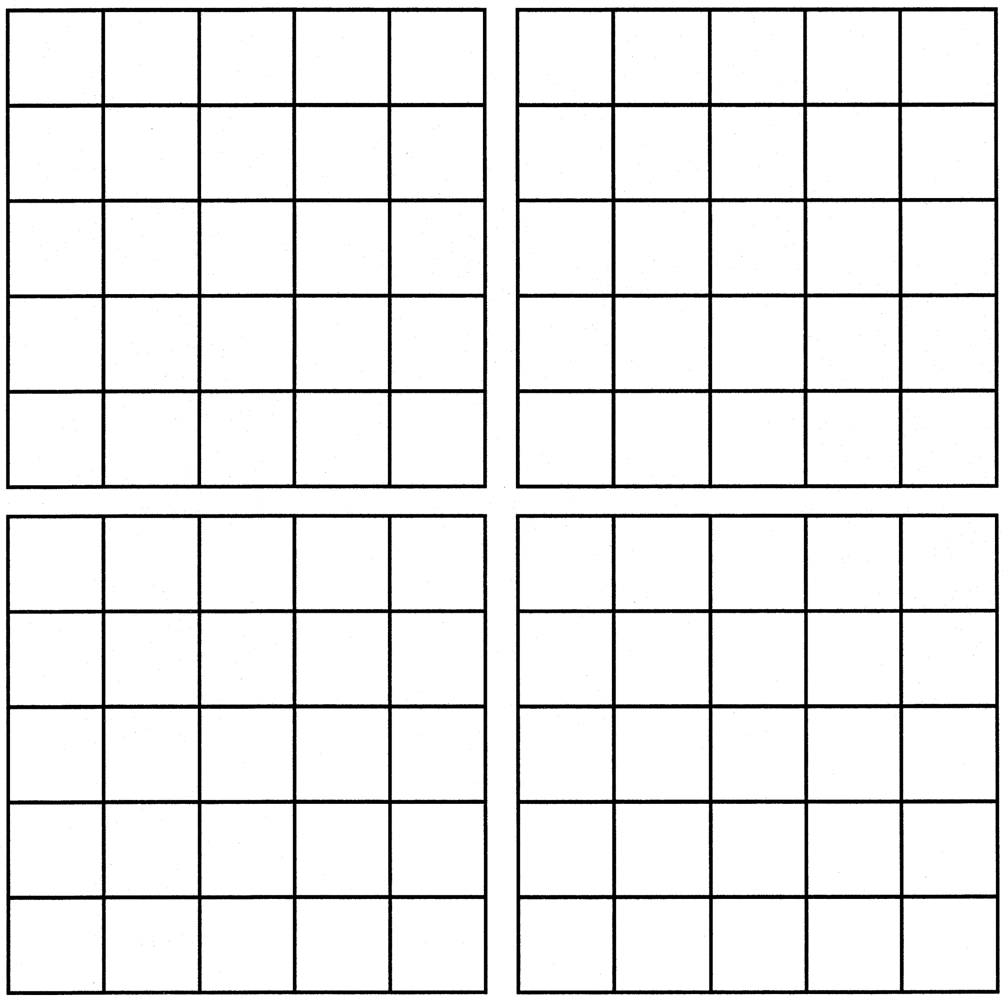
L'étonnant est que toute masse de 1 à 1093 (= 2186/2) peut être équilibrée de cette manière[15].

Le système binaire est à la base d'un jeu de prestidigitateur étonnant : *l'éventail mystérieux.* Les six bandes sont découpées. Le « prestidigitateur » propose à une personne de choisir un nombre entre 1 et 63, puis de lui donner les bandes dans lesquelles ce nombre apparaît. Il donne alors instantanément le nombre.

En réalité, chaque bande contient les nombres de 1 à 63 dont la décomposition binaire comprend la puissance de 2 qui est son en-tête. Il suffit au prestidigitateur d'ajouter ces en-têtes pour obtenir la décomposition binaire, donc donner le nombre choisi. Par exemple, 27 se trouve dans les bandes d'entêtes 1, 2, 8 et 16 ; et il en est la somme.

15 Supposons la masse X sur le plateau de gauche et qu'on dispose d'une triple série de masses ternaires. On place une série complète (soit 1093) à gauche, comme une tare. Ce plateau contient donc une masse comprise entre 1094 et 2186. Il peut être équilibré à droite par une partie de la double série restante. On ôte alors toutes les masses communes. L'équilibre est maintenu et il reste au plus une masse d'une série simple, soit à droite, soit à gauche. En effet, si, à droite pour une masse, on a 0 exemplaire, elle reste à gauche ; si on en a 1, elle disparaît ; et si on en a 2, il en reste une à droite.





900
800
700
600
500
400
300
200
100

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

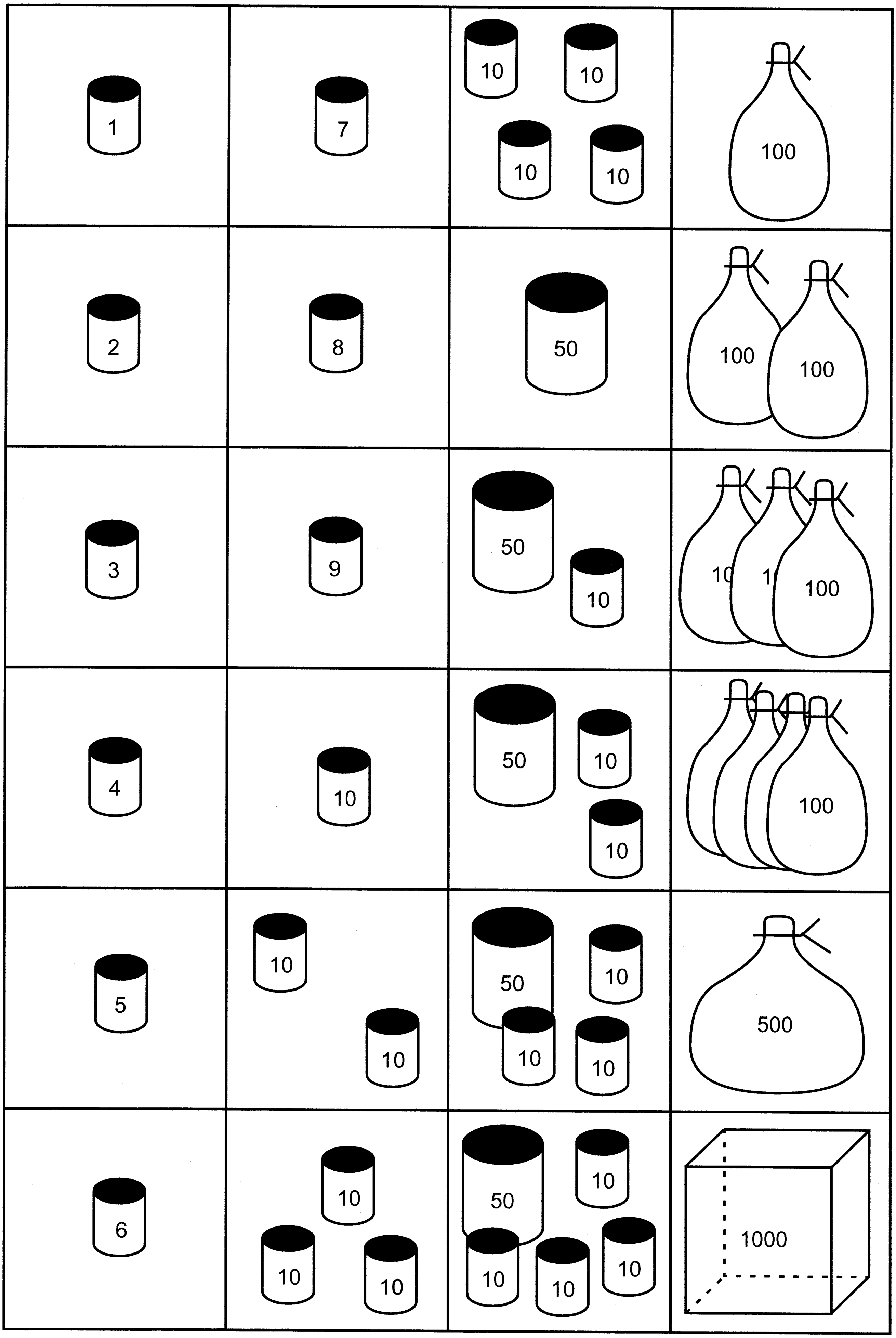
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10									
20									
30									
40									
50									
60									
70									
80									
90									

1	10	100
2	20	200
3	30	300
4	40	400
5	50	500

6	60	600
7	70	700
8	80	800
9	90	900
0		000

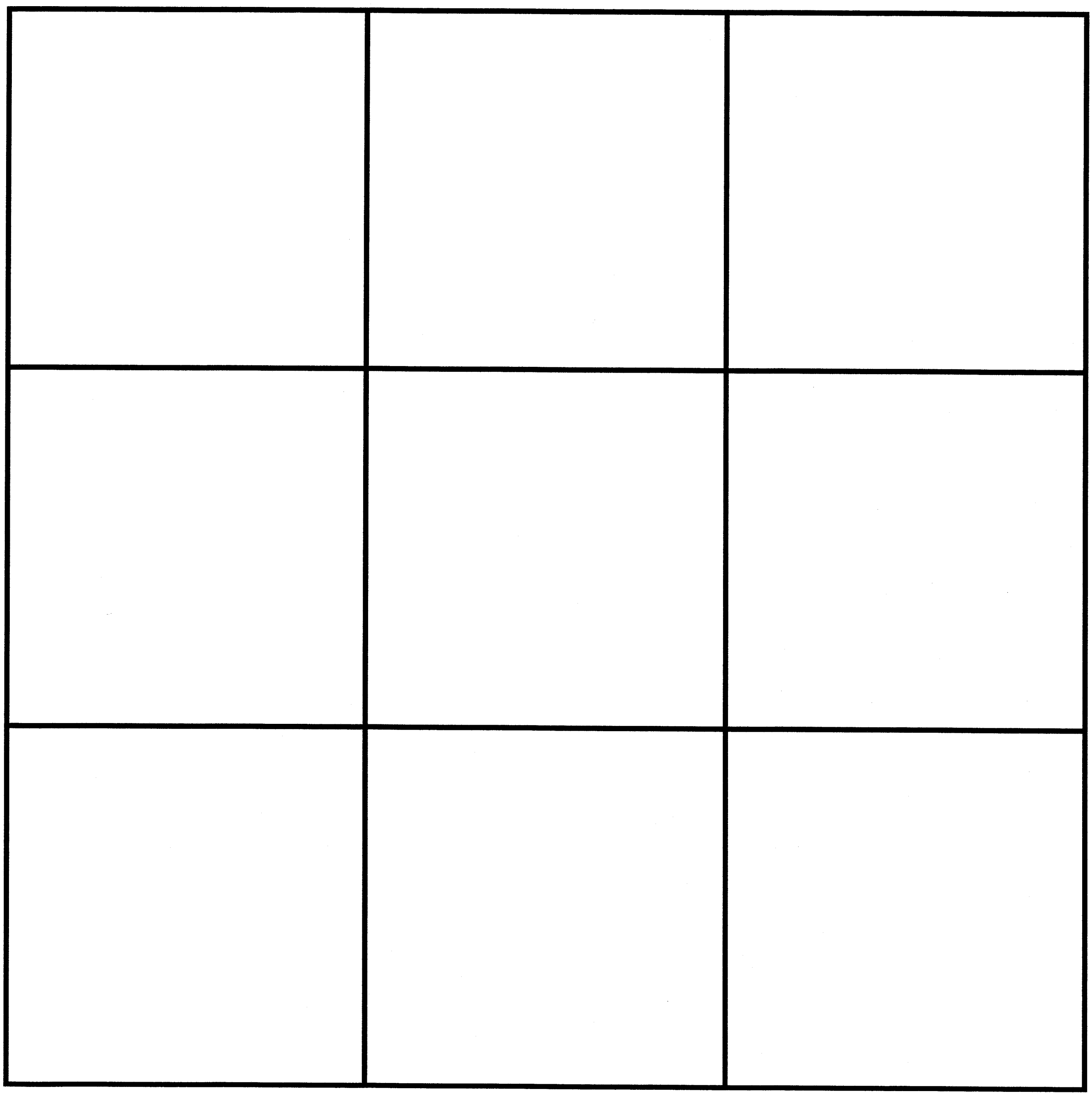
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900

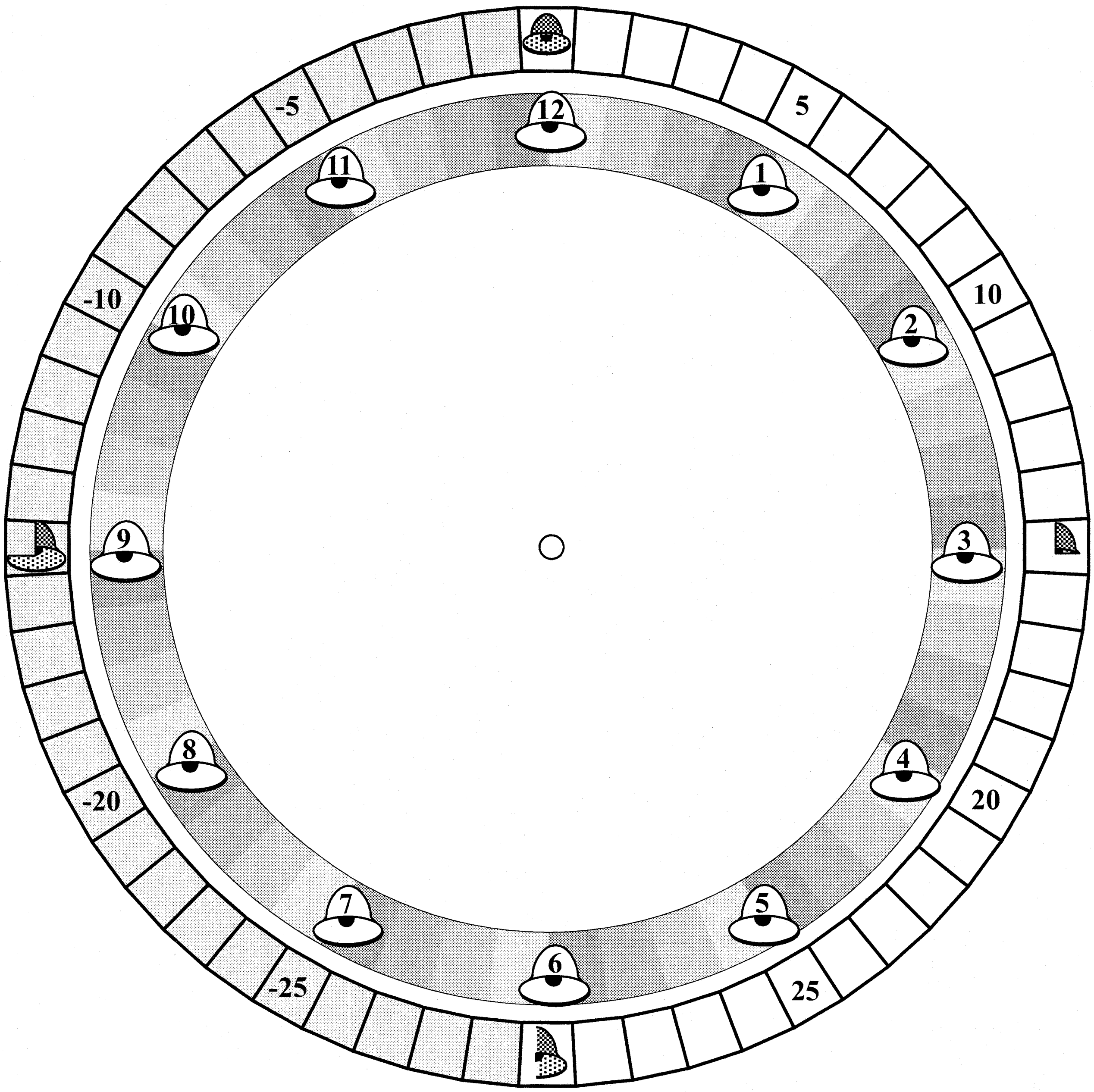
Tableau de numération

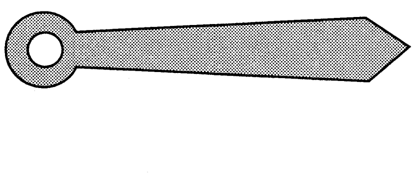

1
7
10 10 10 10
100
2
8
50
100 100
3
9
50 10
100
4
10
50 10 10
100
5
10 10
50 10 10 10
500
6
10 10 10
50 10 10 10 10 10
1000

1×	2×	3×	+
4×	5×	6×	+
7×	8×	9×	+

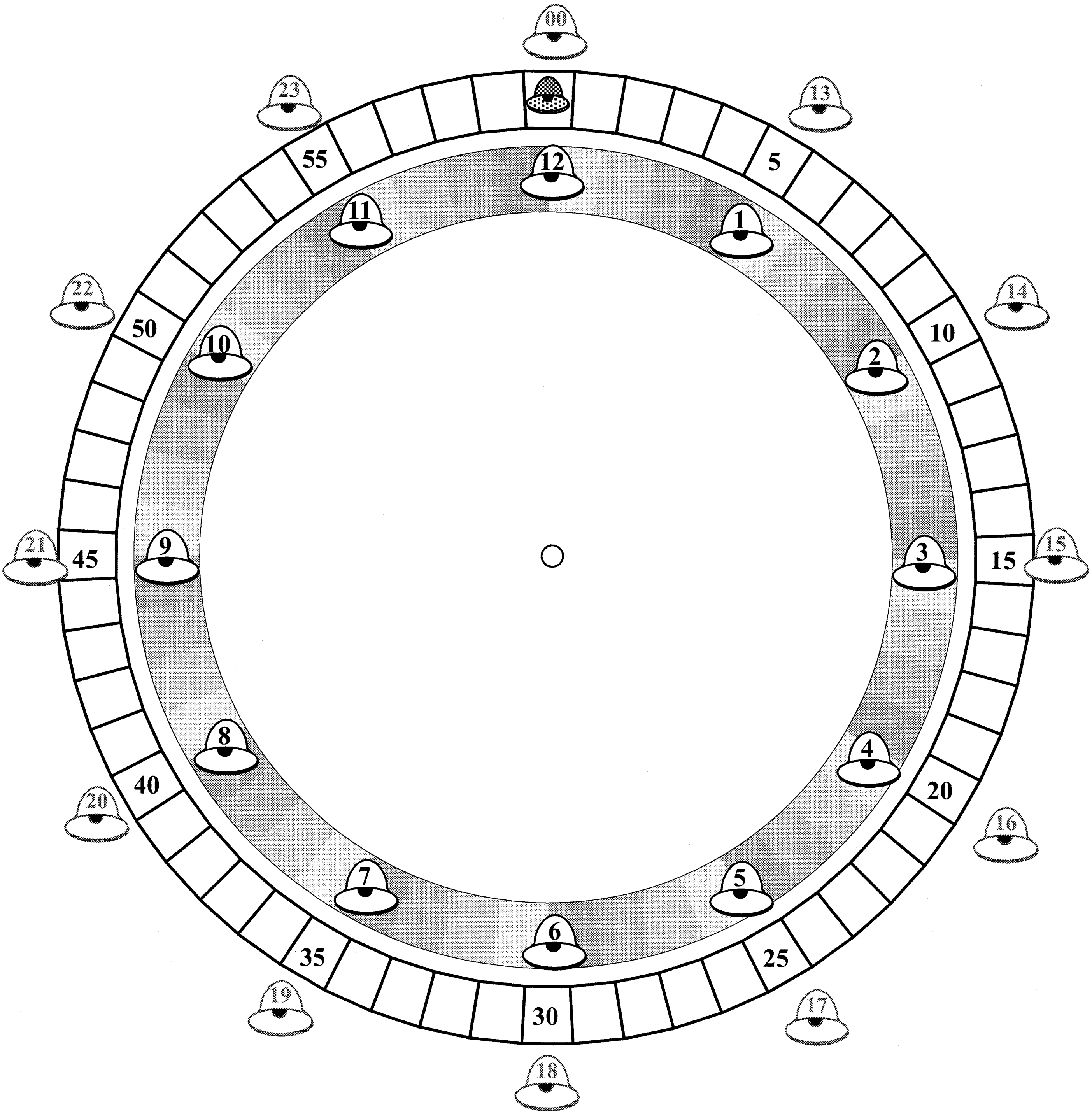
10	100
1000	10 000
100 000	1000000

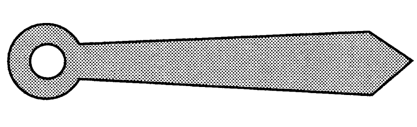






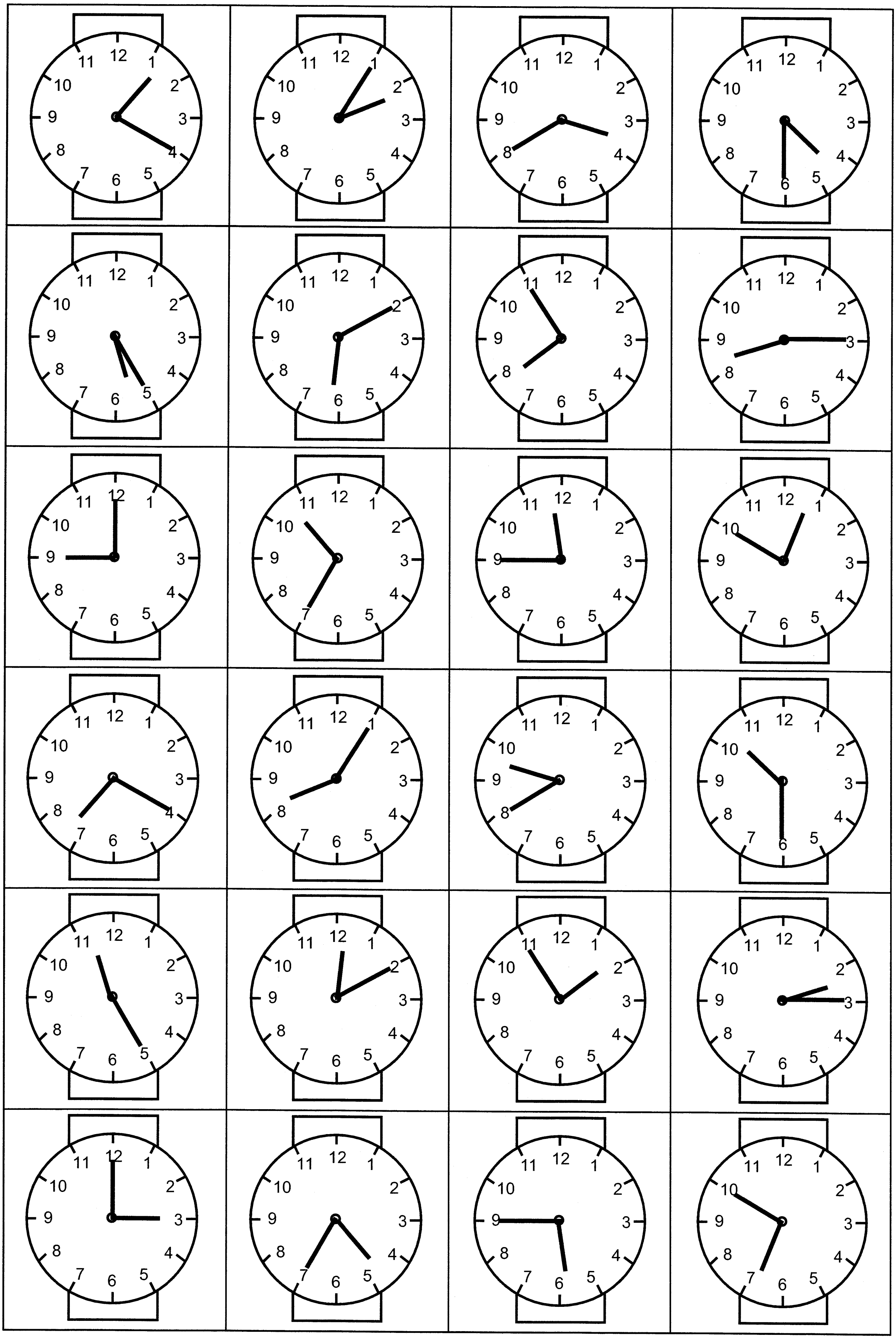
Horloge 1


00
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55



: 00	: 05	: 10	: 15
: 20	: 25	: 30	: 35
: 40	: 45	: 50	: 55
5	10	et quart	20
25	et demi	-25	-20
moins le quart	-10	-5	midi

Pavés horloge



Pavés montres à aiguilles

01:20	02:05	03:40	04:30
05:25	06:10	07:55	08:15
09:00	10:35	11:45	12:50
07:20	08:05	09:40	10:30
11:25	00:10	01:55	02:15
03:00	04:35	05:45	06:50

13:20	14:05	15:40	16:30
17:25	18:10	19:55	20:15
21:00	22:35	23:45	00:50
19:20	20:05	21:40	22:30
23:25	12:10	13:55	14:15
15:00	16:35	17:45	18:50

1 c	**2 c**	**2 c**	**5 c**
10 c	**10 c**	**20 c**	**50 c**
1 €	**1 €**	**2 €**	**5 €**
10 €	**10 €**	**20 €**	**50 €**
I	**I**	**I**	**V**
X	**X**	**X**	**L**

Pavés monnaie et pavés écriture romaine

1	**2**	**4**	**8**
16	**32**	**64**	**128**
256	**512**	**1 024**	**1**
3	**3**	**9**	**9**
27	**27**	**81**	**81**
243	**243**	**729**	**729**

32	16	8	4	2	1
33	17	9	5	3	3
34	18	10	6	6	5
35	19	11	7	7	7
36	20	12	12	10	9
37	21	13	13	11	11
38	22	14	14	14	13
39	23	15	15	15	15
40	24	24	20	18	17
41	25	25	21	19	19
42	26	26	22	22	21
43	27	27	23	23	23
44	28	28	28	26	25
45	29	29	29	27	27
46	30	30	30	30	29
47	31	31	31	31	31
48	48	40	36	34	33
49	49	41	37	35	35
50	50	42	38	38	37
51	51	43	39	39	39
52	52	44	44	42	41
53	53	45	45	43	43
54	54	46	46	46	45
55	55	47	47	47	47
56	56	56	52	50	49
57	57	57	53	51	51
58	58	58	54	54	53
59	59	59	55	55	55
60	60	60	60	58	57
61	61	61	61	59	59
62	62	62	62	62	61
63	63	63	63	63	63

Eventail mystérieux

Chapitre 4 : Produits et fractions (cycle 3)

La structure multiplicative est l'ouverture la plus importante dans l'organisation des nombres. J'ai proposé d'introduire, au cycle 2, l'addition et la multiplication simultanément dès que les premiers nombres ont été maîtrisés afin de différencier leur rôle dans le cadre des premiers nombres comme Cuisenaire et Gattegno l'ont proposé avec les nombres en couleurs. Leur usage conjoint permet de définir les nombres, au dela de 10, par le processus fondamental de la numération. Mais les rapports multiplicatifs entre les nombres entiers vont créer des concepts nouveaux : fractions, nombres décimaux, pourcentages, proportionnalité et, plus tard, puissances et fonctions polynômes.

Structure multiplicative

1) Pavés rectangles

Les *pavés* rectangles regroupent trois séries de figures rangées en rectangles dont les dimensions varient entre 1 et 5 pour les premiers, 1 et 6 pour les autres :

- parkings de véhicules rangés,
- rectangles de carrés,
- rectangles de carrés cachés partiellement par une tache.

Les parkings permettent d'exprimer un rangement rectangulaire par un produit et, donc peuvent être associés à 15 *écritures chiffrées 1* (p. 60). Ils peuvent se décomposer en lignes ou en colonnes et, ainsi, visualiser la commutativité (par exemple : $3 \times 5 = 5 \times 3$).

Les deux autres séries conduisent aux mêmes activités (les taches conduisent au calcul en éliminant le comptage). Chaque pavé étant carré, il peut être disposé de deux façons différentes - par quart de tour - et permet deux lectures en lignes horizontales (sens normal de lecture) du type 3×5 ou 5×3. Ils se prêtent à plusieurs jeux :

- Dominos (jeu à deux) : chaque pavé est porteur de deux nombres, les dimensions du rectangle représenté et peut devenir une pièce d'un jeu de dominos. Comme dans le jeu classique, on choisit au hasard cinq pavés et chacun, à son tour, pose un pavé pour allonger la ligne et se débarrasser de ses pavés. Celui qui a le plus grand carré commence. On peut accoler, dans l'une ou l'autre direction, les pavés à condition que les lignes ou colonnes de points se prolongent, c'est-à-dire que deux pavés s'accolent par un côté correspondant à une même dimension. La pioche, comme toujours, sert lorsqu'on ne peut pas jouer.
- Lotos : plusieurs combinaisons sont possibles. Les cartes de loto portent les rectangles d'un des trois types et les pavés de tirage peuvent porter, soit l'écriture des produits (empruntées à d'autres pages ou écrites à la main) soit la valeur du produit.

- Rectangles de rectangles : seuls les produits des nombres de 1 à 6 sont représentés sur ces pavés. Les tables de multiplication proposent la connaissance des produits de 1 à 9. Chaque produit d'un nombre de 7 à 10 et d'un nombre de 1 à 6 se représente par deux *pavés rectangles* accolés ; chaque produit de deux nombres de 7 à 10, par quatre pavés disposés en deux rangs de deux pavés. Le jeu consiste donc à tirer au sort un *pavé produit* dont un des facteurs, au moins, est supérieur à 6 et à le composer en *pavés rectangles.*

Dans ces jeux, comme dans ceux qui suivent, il peut ne pas y avoir assez de pièces, si on joue à plus de deux. Il est simple, dans ce cas de doubler la série.

2) Pavés produits et nombres composés

Deux autres séries complètent les *pavés rectangles* :

- les *Pavés produits* portant deux écritures inversées de produits (**3 x 5** et **5 x 3**), l'une noire et l'autre blanche, qui se lisent en effectuant un demi-tour au pavé (Ces deux écritures correspondent aux deux lectures du pavé rectangle associé),
- les *Nombres composés* qui sont les nombres de la table de multiplication à partir de 25. Il faut compléter cette série par la partie de la page é*critures chiffrées 1* (p. 60) des nombres composés jusqu'à 24, soit : 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24.

La série des *Pavés produits,* seule, est intéressante pour l'apprentissage des tables de multiplication, car elle se prête au jeu de la bataille : chaque fois que les deux joueurs ont abaissé un pavé, ils doivent chercher le nombre résultat pour savoir qui l'emporte, et en cas d'égalité faire une bataille.

3) Tables de multiplication

La *table de multiplication* est une autre forme de tableau intéressante pour consigner les résultats de l'opération. Elle résume l'ensemble des « tables de multiplication » que tous les enfants de CE2 ont à apprendre. Mais sa structure permet d'exploiter la relation fondamentale entre addition et multiplication (distributivité de la multiplication sur l'addition). En effet, la numération permet de connaître le bord de la table (en gras). Pour l'intérieur, les lignes et colonnes réagissent globalement comme leurs entêtes : si on connaît la ligne de 2, on a celle de 3 en ajoutant colonne par colonne les nombres des lignes de 1 et 2 (trois fois n égalent deux fois n et une fois n) ; on a celle de 4 en doublant celle de 2 (quatre fois n ...). De même, la ligne de 9 c'est celle de 10 moins celle de 1,... ; la ligne de 5, c'est la moitié de celle de 10. Et de même pour les colonnes par rapport aux lignes. On rapprochera cette analyse des associations de pavés rectangles pour former des rectangles.

La symétrie de cette table traduit l'autre propriété importante de la multiplication : la commutativité (45 résultats à connaître au lieu de 81).

Dans un premier temps, la table remplie permet de disposer de tous les résultats avant de les avoir mémorisés, mais aussi de comprendre les relations décrites ci-dessus. Si on regarde la composition de chaque ligne (ou colonne), on voit qu'elle contient les multiples de l'entête : n, $2.n$, …, $10.n$ (ou les nombres de n en n).

Dans un deuxième temps, la table est vide sauf au bord, et il faut découvrir les valeurs par sauts de n en n, par addition (exemple : la ligne de 2), par moitiés (exemple : la ligne de 5), par doubles (exemples : la ligne de 4, c'est deux fois celle de 2, la ligne de 8, c'est deux fois celle de 4). Dans un troisième temps, on les replace de mémoire d'abord en ordre, puis aléatoirement.

4) Table des produits

Le rangement de la *table des produits* donne toute la table de multiplication à partir de quelques éléments simples et de la capacité fondamentale à doubler tout nombre, ou prendre sa moitié. L'idée de base est due à G. Cuisenaire.

Sa construction est la suivante :

- Des deux produits $a \times b$ et $b \times a$, un seul est représenté,
- Deux produits égaux sont dans la même case,
- Lorsque deux cases sont collées, celle de droite a une valeur double de celle de gauche.

Ainsi, on obtient tout résultat de la table de multiplication en connaissant un résultat par ligne (ce qui est particulièrement avantageux pour toutes les lignes contenant un facteur 2 ou 10) et en sachant doubler un nombre ou prendre sa moitié, activité fondamentale pour le calcul mental.

5) Cartes de loto des produits

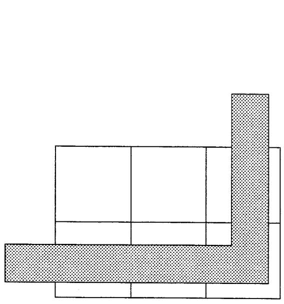
Les deux séries *pavés produits* et *nombres composés* s'associent en jeux de lotos de deux manières :

- en écrivant ou collant les *nombres composés* sur les cases des cartes (faites avec la *grille vide* (p. 24) et en tirant les pavés produits,
- en écrivant les produits sur les cartes et en tirant les nombres composés.

Le jeu de *loto des produits* correspond au second choix et propose une série de cartes de loto remplies. C'est un moyen ludique qui entretient la mémorisation des tables de multiplication dont l'apprentissage est fastidieux.

6) Produits en rectangles

Le tableau *Produits en rectangles* est un moyen pour composer tous les rectangles jusqu'à 20×30. Il est formé d'un grand rectangle de carrés, découpé par bandes de 10. Chaque carré de 10×10 comprend 100 carrés ; chaque carré de 5×5 comprend 25 carrés. En construisant une équerre formée de deux bandes perpendiculaires, on forme le rectangle de dimensions voulues



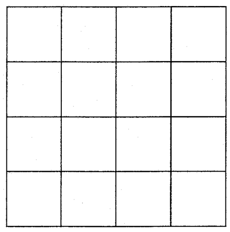
En connaissant les résultats des *pavés rectangles*, on obtient tous les produits en y ajoutant autant de 100 et 25 que de carrés 10×10 et 5×5.

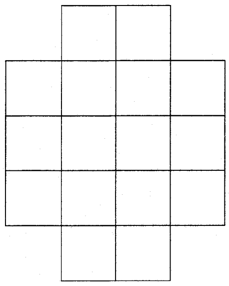
Pour commencer ce genre d'activité, il est intéressant de se reporter au *tableau 10 × 10* (p. 84) qui peut être exploité de la même manière avec l'équerre. De cette façon, on obtient toute la table de multiplication décomposée en rectangles semblables aux *pavés rectangles.* Ainsi, si on connaît les produits des nombres jusqu'à 5, on peut obtenir toute la table par quelques additions.

7) Jeux de nombres

Dans les *pavés treillis*, des bandes correspondent aux nombres de 1 à 10. Il est utile de colorer ces bandes, une couleur par nombre.

En accolant les pavés on prolonge les treillis et le but est de les continuer dans la couleur. Ainsi, les *pavés treillis 1* peuvent être un jeu de dominos. Mais d'autres jeux avec les *pavés treillis 1 ou 2* sont plus originaux (plus difficiles avec les *treillis 2*). Chacun dispose d'un terrain limité, qui peut être découpé dans la *grille vide* (p. 24).





On essaie de remplir ce terrain avec une partie des pavés tirée au sort, de plusieurs façons, pour obtenir le plus de points possible. Les points sont donnés par les lignes d'une seule couleur (tout mélange de couleurs sur une ligne l'annule). Une ligne de *n* pavés de même couleur compte *n* fois la valeur de la couleur et on fait la somme de toutes les lignes unicolores.

- En solitaire, on tire au sort 16 pavés qu'on garde visibles et on essaie de les placer.
- En solitaire, on tire au sort 16 pavés retournés. On retourne un à un les pavés qu'on place sur le terrain. Une fois placé, un pavé ne change plus de place.
- Collectivement, chacun range ses 24 pavés (pour les trouver facilement) sauf le maître du jeu qui tourne ses pavés, faces cachées et les mélange. Puis il retourne un à un 16 pavés en annonçant les deux nombres tirés. Chacun prend le même pavé dans son rangement et le place définitivement sur sa grille. En fin de jeu, le gagnant est celui qui a le meilleur score.

Le jeu commercial Take it easy est basé sur le même principe. Les carrés sont remplacés par des hexagones réguliers portant trois bandes et le terrain est un hexagone.

Le compte est bon, partie arithmétique de l'émission « Des chiffres et des lettres » est toujours un excellent moyen ludique de faire du calcul mental. Il peut être adapté en jeu collectif de différentes façons :

- les *cartes numérales* (p. 86-87) sont retournées. Le but, nombre à deux chiffres, est choisi avec une *carte numérale* unité et une carte dizaine. Deux séries de pavés {1, 2, ..., 9} pris parmi les *écritures chiffrées* (p. 60-61) servent au tirage de cinq cartes qui sont présentées aux enfants. Chacun essaie de combiner les nombres tirés à l'aide des opérations arithmétiques pour former le but,

- on choisit une *carte numérale* de chaque largeur pour former le nombre but à trois chiffres qui est affiché. Puis on tire six autres cartes numérales parmi les unités et les dizaines, présentées collectivement et chacun essaie de combiner les nombres tirés à l'aide des opérations arithmétiques pour former le but ou, à défaut, l'approcher. (Éventuellement imposer quatre cartes unités parmi les six).

Citons l'excellent jeu <u>Mathador</u> d'Eric Trouillot qui propose une version du <u>compte est bon</u> avec sept dés adaptés[1] : deux pour le but compris entre 0 et 99 et cinq formés avec les cinq polyèdres réguliers pour le tirage.

<u>Trio</u> est un jeu où les nombres à un chiffre sont placés en tableau aléatoire. Un nombre inférieur à 50 est tiré au sort et les joueurs essaient de composer ce nombre en utilisant trois nombres alignés (horizontalement, verticalement ou en diagonale) et les opérations arithmétiques (comme dans <u>le compte est bon</u>).

Trio adapte ce jeu en proposant un terrain de nombres formé de huit rectangles (3×4) qui peuvent être accolés de différentes façons après découpage (pour éviter un tableau fixe). La règle est la même.

8) Duplication

Le passage d'un nombre à son double est un acte capital pour le calcul mental. La raison vient certainement du fait que c'est la seule action qui est en même temps une addition et une multiplication simples : $n + n = 2 \times n$.

Les scribes égyptiens ont perfectionné cette méthode de calcul pour effectuer leurs multiplications et leurs divisions. Le *tableau de duplication* fait remplir une liste de multiples d'un nombre quelconque placé dans les cases de la première ligne. Pour cela, seule l'addition est nécessaire. Les tables de multiplication sont inutiles.

Lorsqu'on a établi les quatre premières lignes du tableau, on voit que les suivantes correspondent à la multiplication par 10 et qu'elles s'obtiennent par l'accolement de zéros.

/	1			4	9
	2			9	8
/	4		1	9	6
	8		3	9	2
/	10		4	9	0
/	20		9	8	0
	40	1	9	6	0
	80	3	9	2	0
	100	4	9	0	0

Pour effectuer le produit de 49 par 35, il suffit de faire l'addition : $49 + 196 + 490 + 980 = (1 \times 49) + (4 \times 49) + (10 \times 49) + (20 \times 49)$.

Le multiplicateur est décomposé suivant la première colonne et les nombres retenus cochés. Il reste à effectuer l'addition des nombres des lignes correspondantes du tableau de droite.

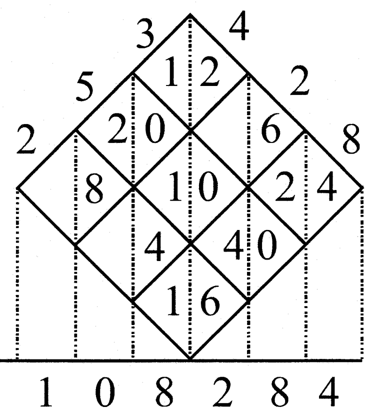
1 Les dés peuvent être achetés séparément dans les magasins spécialisés dans les jeux. Ils offrent un moyen agréable de réaliser collectivement un « Compte est bon » avec cible à deux chiffres comme celui de la page précédente.

La même méthode permet de réaliser des divisions, toujours sans tables de multiplication. Le même tableau est construit à partir du diviseur. Par exemple, pour diviser 6283 par 49, on soustrait 4900, soit 100 exemplaires de 49. On met de côté successivement des paquets de 49 dont il reste à faire la somme à la fin de l'algorithme.

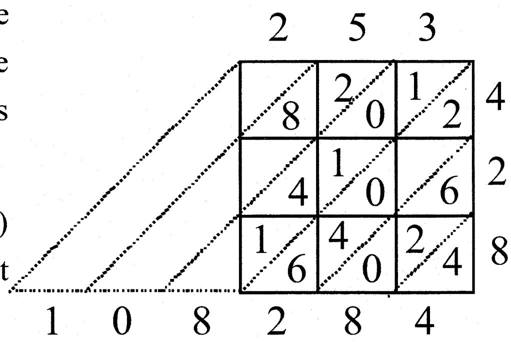
6183	49
-4900	100
1283	
-980	20
303	
-196	4
107	
-98	2
9	126

Cette technique de division a l'avantage d'être compréhensible, contrairement à la technique usuelle, pour la plupart des élèves et de n'utiliser que des soustractions. Dans certains cas, c'est un peu plus long, mais tellement plus économique en termes d'apprentissage, à une époque où nos élèves préféreront, au collège, prendre leur calculatrice plutôt que leur crayon pour effectuer une division.

9) Multiplication arabe



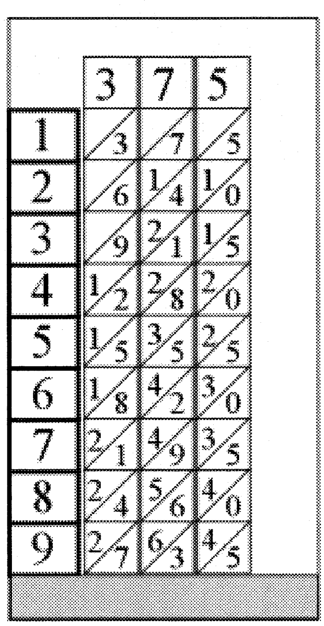
La présentation arabe du XV^e siècle de la technique de multiplication est aussi belle qu'agréable à utiliser. Son seul défaut est de demander le dessin préalable du tableau. La *multiplication arabe* donne ce tableau dans lequel on place les produits de nombres à un chiffre en séparant les dizaines des unités. La connaissance des tables de multiplication est indispensable. Chaque produit est placé dans sa case dans l'ordre qu'on veut. La somme se fait ensuite suivant les bandes verticales. Les retenues des produits ayant leur place dans le tableau, rien n'est à retenir.



Une disposition plus simple (mais moins belle) s'obtient en tournant le carré de 45° vers la droite. Il est ainsi réalisable sur un quadrillage.

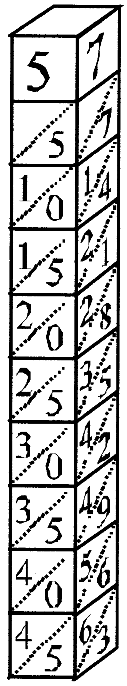
Voici, à titre d'exemple, le produit 253 × 428 dans les deux dispositions.

10) Bâtons de Neper



Neper (1550-1617), inventeur des logarithmes, a aussi inventé un instrument simple pour effectuer des multiplications, appelé *bâtons de Neper*. Dix bâtons mobiles, composant une colonne de 9 cases carrées partagées par une diagonale, portent chacun la table de multiplication du nombre entête. Une colonne fixe des nombres de 1 à 9, collée sur un support portant aussi une bande de base permettant de caler la base des bâtons, sert d'entrée de ligne de ce tableau à double entrée mobile.

Pour effectuer le produit d'un nombre par un nombre à un chiffre, on place les bâtons dont les entêtes correspondent aux chiffres du nombre contre la règle fixe et on lit le produit sur la ligne du multiplicateur en ajoutant, pour chaque ordre, les deux nombres de deux bâtons voisins contenus dans un parallélogramme. Sans connaître les tables de multiplication, cet outil permet de réaliser des produits en y intégrant simplement les retenues.



Ex : $6 \times 375 = 2250$

Pour un produit par un nombre à plusieurs chiffres, on lit successivement les produits par chaque chiffre et on les place avec un décalage identique à celui de notre technique écrite pour en faire l'addition.

Ex : $31 \times 375 = 11250 + 375$

Neper avait réalisé ses bâtons avec des lattes de section carrée et les tables étaient gravées sur les quatre faces. Il est possible de reprendre cette idée en recopiant les bandes sur les faces des lattes. Avec dix lattes, on pourra avoir chaque table en quatre exemplaires[2] et réaliser des multiplications, même si le nombre contient plusieurs fois le même chiffre.

Nouveaux nombres

1) Fractions

Il est commun de visualiser les fractions comme des « parts de tartes », la référence étant, en général, un disque. Dans cette étude, l'enfant doit prendre en compte trois variables permettant de comprendre les fractions sous leur première forme, celle d'opérateur qui agit sur un objet :

- l'objet référent qui sera partagé,
- le nombre de parts égales coupées dans cet objet,
- le nombre de parts choisi, éventuellement supérieur au précédent.

Les *pavés fractions* sont constitués de polygones réguliers convexes ou étoilés partagés en parts égales. Certaines sont colorées en gris sombre, les autres en gris clair. Les *pavés fractions 1* sont formés à partir de six formes ; les *fractions 2* en ajoutent quatre. Les *pavés fractions 3* donnent les écritures des fractions présentées dans les deux premières pages sous forme d'un pavé et les *fractions 4* associent un numérateur et un dénominateur sous forme de deux pavés qui peuvent composer différentes fractions représentables à l'aide des deux premières pages, à l'exception des vingt-cinquièmes, cinquantièmes, centièmes et millièmes qui sont à associer avec les pourcentages. Lorsqu'une fraction a un numérateur supérieur à son dénominateur, elle doit être réalisée avec plusieurs pavés dont les figures entièrement grises de *fractions 2*.

2 Pensez à mettre des tables différentes sur les faces d'une latte. Pour avoir chaque table en quatre exemplaires, remplir les dix lattes avec les tables (0,1,2,3) (1,2,3,4) ... (6,7,8,9) (7,8,9,0) (8,9,0,1) (9,0,1,2).

Les actions des enfants sont les suivantes :

- classer les pavés par figures géométriques,
- ranger, pour chaque figure, les parties sombres de la plus petite à la plus grande,
- exprimer la fraction représentée par la partie sombre - ou la claire,
- associer les pavés représentant la même fraction (indépendamment de la forme),
- associer chaque écriture de fraction avec les figures la représentant,
- composer une fraction en associant un dénominateur et un numérateur et la représenter à l'aide des figures.

À chaque figure correspondent deux écritures : une pour la partie sombre, l'autre pour la partie claire. Si on fait un loto en mettant au hasard les figures sur les cartes, on tire les écritures fractionnaires et chacun doit voir si soit une partie sombre, soit une partie claire correspond à l'écriture tirée.

2) Droite graduée

En collant ensemble, par les languettes, les trois parties de la *droite graduée* on constitue une graduation de 0 à 6 (les nombres pouvant aussi être effacés et remplacés pour obtenir un gros plan sur une autre partie de la droite). Huit réglettes de longueur unité sont à découper, à coller sur un support carton et à colorier, une couleur par réglette.

Le but est de placer des points correspondant à des fractions. Pour placer $\frac{5}{8}$ on met la réglette partagée en huit entre 0 et 1 et on compte cinq parts. Pour $\frac{8}{5}$ on met la réglette partagée en cinq entre 1 et 2 et on compte trois parts.

On peut ainsi ajouter, soustraire deux fractions ou multiplier une fraction par un entier.

3) Nombres décimaux

Parmi les réglettes de la *droite graduée*, il en est une qui est particulièrement intéressante parce qu'elle est liée au système décimal d'écriture des nombres : celle qui est partagée en dix.

L'introduction en occident des nombres décimaux par Stevin, en 1585, utilise une idée simple mais géniale, qui ne pouvait germer sans utilisation d'un système de numération positionnel. Dans le nombre 1111, chaque 1 vaut dix fois le 1 placé à sa droite ; donc chaque 1 vaut le dixième du 1 situé à sa gauche. Ainsi, si on plaçait un 1 à droite de celui des unités, en mettant un repère pour les unités, sa valeur naturelle serait le dixième de 1 soit $\frac{1}{10}$. Et c'est ainsi que sont nés les nombres décimaux. Si on marque les dixièmes sur la droite graduée avec la réglette partagée en 10, les marques entre 1 et 2 se nomment : 1,1 ; 1,2 ; ... celles entre 2 et 3 : 2,1 ; 2,2 ; ... et entre 0 et 1 : 0,1 ; 0,2 ; ...

Donc 2,3 est une autre écriture de $2 + \frac{3}{10}$ ou $\frac{23}{10}$

En continuant ce raisonnement, si on place un nouveau 1 à droite de celui des dixièmes de 1111,1, il représente $\frac{1}{10}$ *de* $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{100}$.

L'idée de Stevin est, bien sûr, d'augmenter l'ensemble des nombres naturels, pas d'en faire un nouvel ensemble excluant ces derniers. Tous les points obtenus sur la *droite graduée* sont les repères de nombres décimaux, y compris les entiers 0, 1, 2, ... qui étaient placés au départ. Un nombre décimal n'a pas nécessairement une virgule dans son écriture.

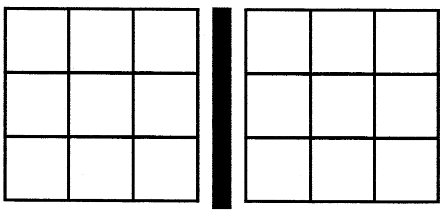
La *droite graduée* est en fait graduée en dm. Les dixièmes sont des cm et les centièmes des mm. Le double-décimètre permet donc de placer cette deuxième décimale sur la droite graduée. Pour placer 3,67 par exemple, on partage le segment [3 ; 4] en dix avec la réglette, on repère 3,6 et 3,7, puis on partage [3,6 ; 3,7] en dix avec le double-décimètre.

La *droite graduée* est donc le support de l'ordre des nombres décimaux qui n'est pas sans difficulté (comprendre que si 3,2 est plus petit que 3,7, il n'en est pas de même de 3,7 et 3,15). Et, comme pour les autres fractions, elle est aussi le support des opérations sur ces nombres.

Les *cartes numérales* (p. 86-87) peuvent représenter les écritures des nombres décimaux en combinaison avec les *pavés décimaux*. Dans cette nouvelle série, les bandes repères, plus larges, sont à gauche des cartes. Elle permet d'écrire la partie décimale d'un nombre décimal, cependant que les *cartes numérales* composent la partie entière. Le raccord entre les deux bandes repères est la place de la virgule. Le zéro simple de la page *cartes numérales 2* permet de composer les nombres décimaux inférieurs à 1 (ex. : 0,45).

L'abaque à jonchets, présenté p. 79, permet aussi la représentation des nombres décimaux. Ceux-ci peuvent naître ainsi à partir de problèmes où l'on sait que la division par 10 est possible ; en particulier, des problèmes de monnaie. 20 € se partagent en 10 ; mais aussi 15 €. Et en glissant le train à droite dans ce cas, il déraille, à moins qu'on n'ait prévu une voie de garage !

Ainsi, apparaissent naturellement les décimales, en plaçant une plaque 3×3 à droite de la plaque des unités, séparée par une règle.



On comprend l'intérêt de l'écriture des nombres décimaux : les techniques opératoires vont s'adapter à ces nouveaux nombres sans difficulté et, simultanément, ils vont être capables d'encadrer toutes les mesures avec autant de précision qu'on le souhaite. Ils combinent donc les avantages opératoires des entiers et ceux de précision des fractions sans les difficultés de calculs qu'elles comportent.

4) Pourcentages

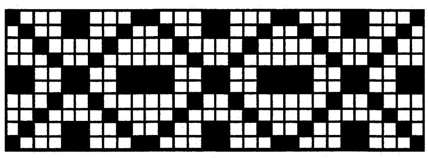
Les *pavés pourcentages* sont faits de carrés et rectangles partagés en petits carrés ou bandes dont une partie est noire :

- La page *Pourcentages 1* utilise toujours un carré de même taille, partagé en 10×10, en 5×5, en 2×2 ou en 10×1. Lorsqu'un carré est divisé en 10×10, le pourcentage de noirs est le nombre de petits carrés noirs contenus. Comme le principe des pourcentages est de se ramener à 100, dans les autres cas, il faut calculer le nombre de ces petits carrés contenus dans les plages noires.
- *Pourcentages 2* propose des rectangles de taille variable pour lesquels on peut se ramener facilement à 100 par multiples, ainsi que l'écriture des pourcentages de 10% en 10%.

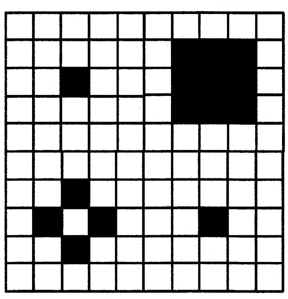
Les actions sont comparables à celle des *pavés fractions* :

- classer les pavés de *pourcentages 1* de même proportion de noir,
- ranger les pavés de *pourcentages 1* suivant leur proportion de noir,
- ajouter les pavés de *pourcentages 2* pour la même action
- étaler les pavés écrits de 10% en 10% et associer les dessins correspondants par leur proportion de noir,
- rechercher dans les *pavés fractions*, ceux qui s'expriment en pourcentages (partages en 2, 4, 5, 10...)

On peut, dans tous les cas, repérer soit le pourcentage de noir, soit celui de blanc.



On peut recopier et répéter un motif en frise ou pavage sur papier quadrillé à petits carreaux : le pourcentage de noirs (ou blancs) sera le même quel que soit le nombre de motifs.



On peut aussi mêler deux (ou plusieurs) motifs de carrés de *pourcentages 1* pour obtenir de nouveaux pourcentages. Par exemple, avec un carré à 16% de noirs un à 36% et deux à 4%, on crée un tapis à : $16 + 36 + (2 \times 4) = 60$ noirs sur un ensemble de 400, soit un tapis à 15% de noirs.

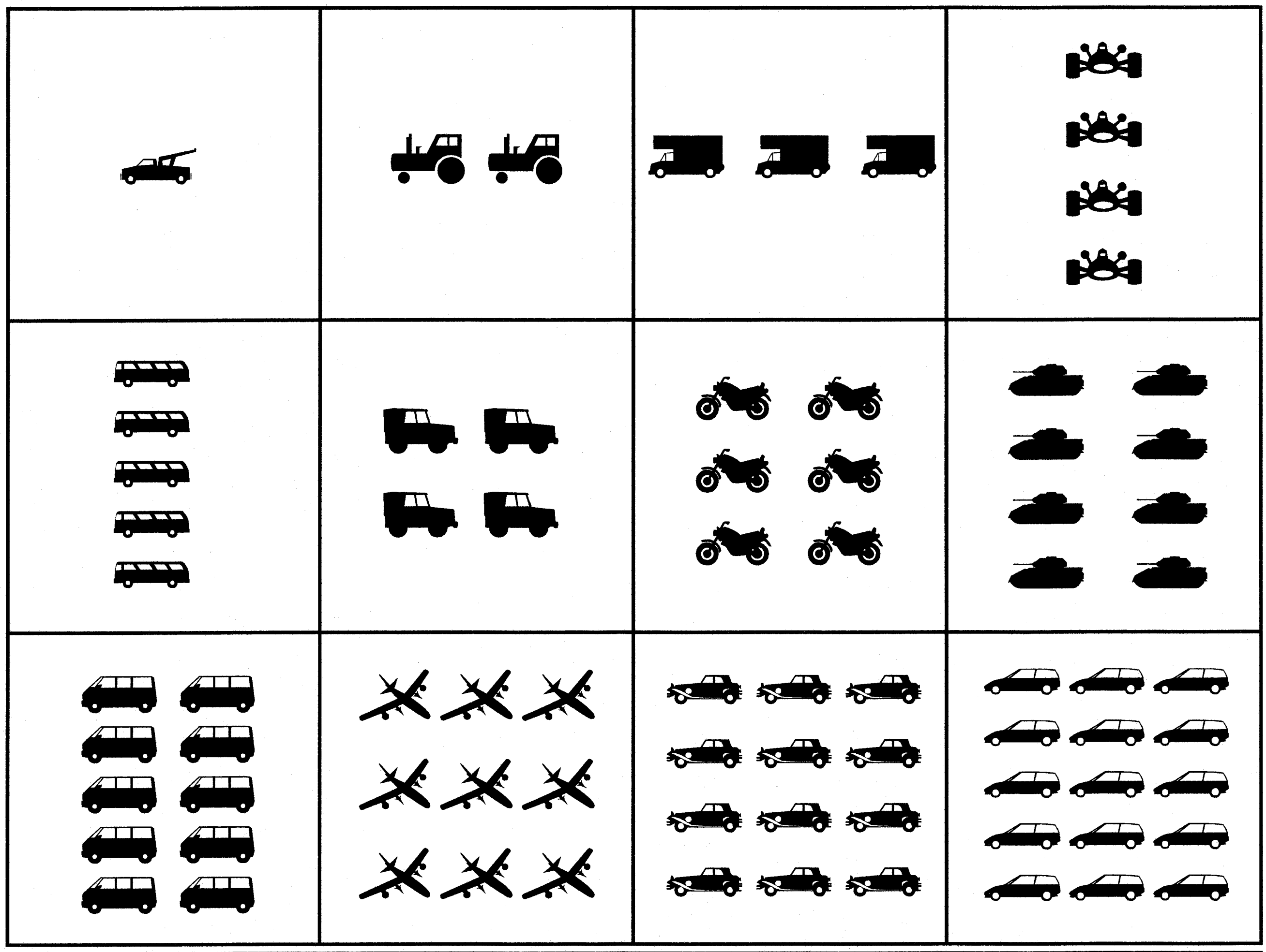
Chacun peut inventer, sur papier quadrillé, des motifs à plusieurs couleurs de pourcentages donnés : 16% de jaune, 24% de rouge et 60% de vert par exemple.

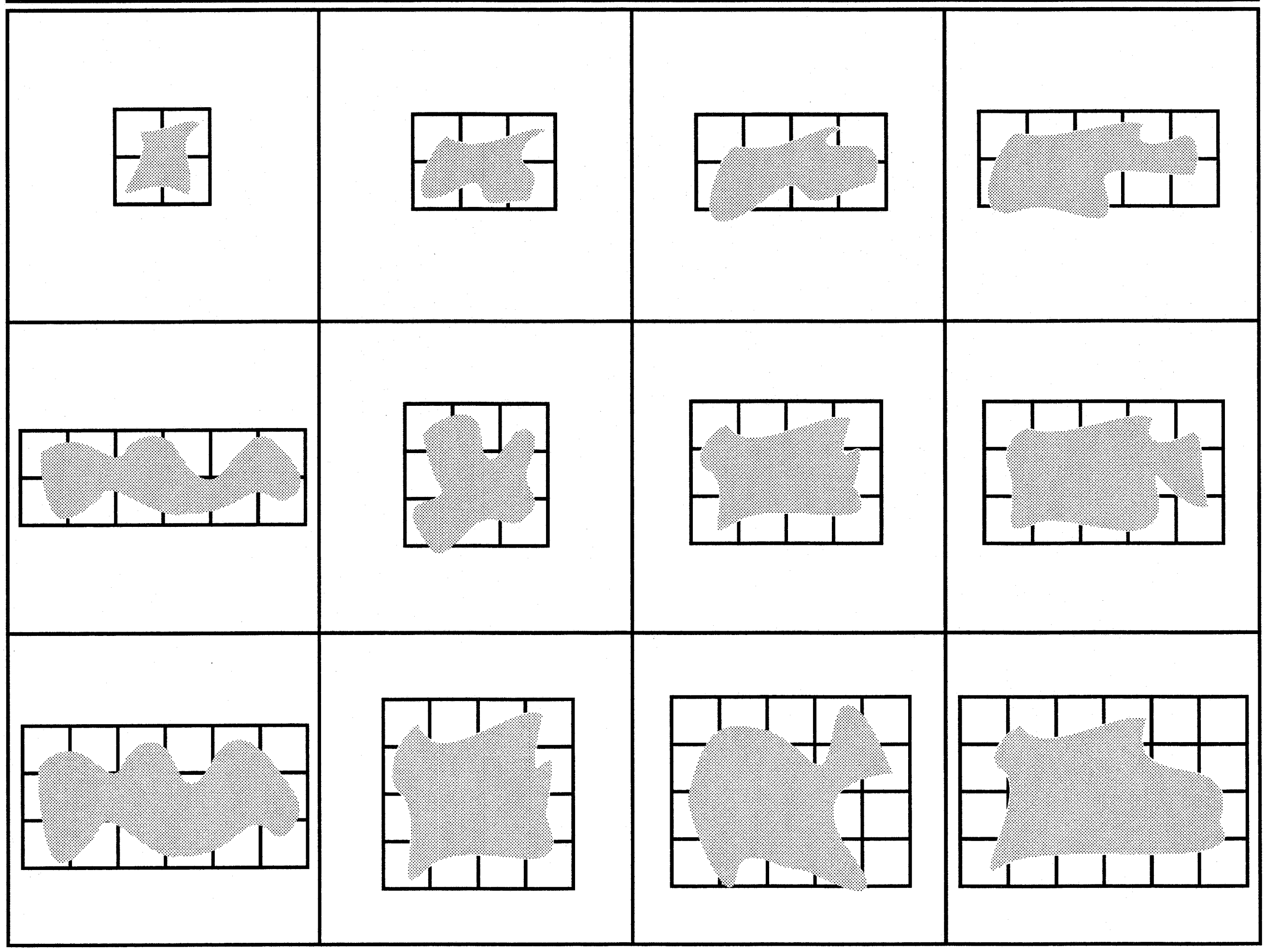
Il est intéressant de repérer aussi les complémentaires : n% de noirs sont combinés avec $(100 - n)$% de blancs. Si on associe plusieurs couleurs, la somme des pourcentages est toujours 100.

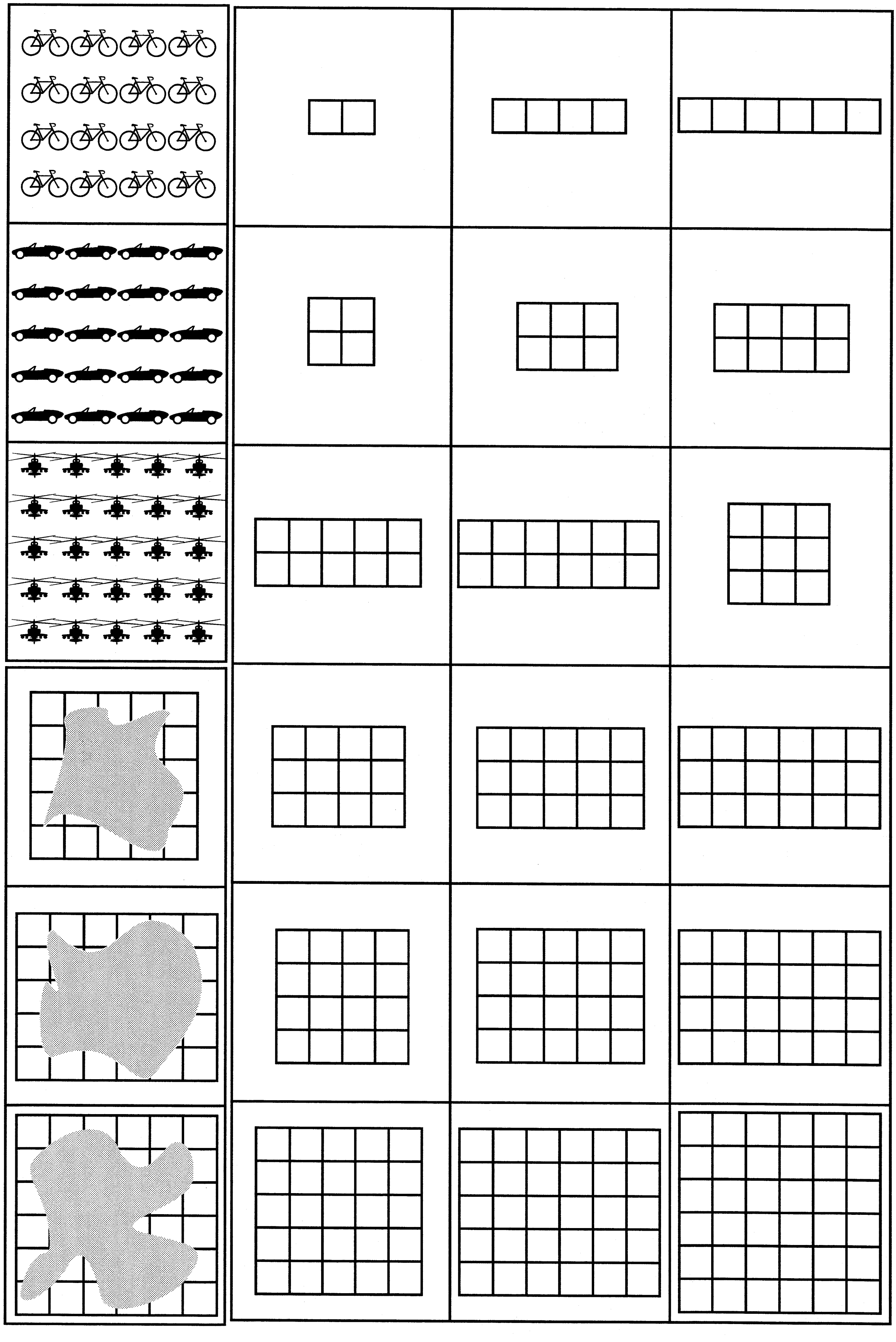
Un pourcentage correspond à une fraction et son calcul à une multiplication par un nombre décimal (25% de $n = 25/100$ de $n = 0{,}25 \times n$). Le « de » qui exprime une partie de … (25% de ...) correspond à « fois » qui exprime la multiplication des nombres décimaux (0,25 fois …) ; ce qui explique que ces deux mots se traduisent, à l'écrit, par le même signe : × (et au même calcul sur une calculette).

La difficulté du langage des pourcentages provient du fait qu'il est, par nature, multiplicatif, alors qu'il s'exprime le plus souvent dans un langage additif : une augmentation de 20 %, une réduction de 10 %, et que le passage de l'un à l'autre n'est pas évident. Une augmentation de 15 % de n revient à passer de n à $n+15\,\% \times n = (1+\frac{15}{100}) \times n = 1{,}15 \times n$ et une réduction de 5 % de n revient à passer de n à $n-5\,\% \times n = (1-\frac{5}{100}) \times n = 0{,}95 \times n$.

Mais cette difficulté dépasse l'école primaire.







2×2	3×2	4×2	5×2
3×3	4×3	5×3	4×4
5×4	5×5	6×2	7×2
8×2	9×2	10×2	6×3
7×3	8×3	9×3	10×3
6×4	7×4	8×4	9×4

10×4	6×5	7×5	8×5
10×4	6×5	7×5	8×5
9×5	10×5	6×6	7×6
9×5	10×5	6×6	7×6
8×6	9×6	10×6	7×7
8×6	9×6	10×6	7×7
8×7	9×7	10×7	8×8
8×7	9×7	10×7	8×8
9×8	10×8	9×9	10×9
9×8	10×8	9×9	10×9
10×10	8×1	9×1	10×1
10×10	8×1	9×1	10×1

25	**27**	**28**	**30**
32	**35**	**36**	**40**
42	**45**	**48**	**49**
50	**54**	**56**	**60**
63	**64**	**70**	**72**
80	**81**	**90**	**100**

Pavés nombres composés

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	4	6	8	10	12	14	16	18	**20**
3	6	9	12	15	18	21	24	27	**30**
4	8	12	16	20	24	28	32	36	**40**
5	10	15	20	25	30	35	40	45	**50**
6	12	18	24	30	36	42	48	54	**60**
7	14	21	28	35	42	49	56	63	**70**
8	16	24	32	40	48	56	64	72	**80**
9	18	27	36	45	54	63	72	81	**90**
10	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2									**20**
3									**30**
4									**40**
5									**50**
6									**60**
7									**70**
8									**80**
9									**90**
10	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**

2×2	2×4	2×8 4×4	4×8	8×8
2×3	2×6 4×3	4×6 3×8	6×8	
2×5	4×5 2×10	8×5 4×10	8×10	
3×3	3×6	6×6		
3×5	6×5 3×10	6×10		
5×5	5×10	10×10		
2×7	4×7	8×7		
3×7	6×7			
5×7	10×7			
2×9	4×9	8×9		
3×9	6×9			
5×9	10×9			
7×7	7×9	9×9		

2×2	6×6	4×10
4×8	3×8	7×8
2×7	4×4	3×6

2×4	7×4	8×7
9×10	3×3	9×2
3×9	4×7	9×5

5×9	3×3	5×5
3×9	5×8	4×5
2×9	8×9	6×10

5×10	8×10	4×9
9×9	3×4	4×6
2×8	8×8	7×9

5×7	2×10	3×5
6×7	2×5	5×5
8×9	3×7	6×8

7×7	2×6	6×9
3×10	4×7	5×6
2×3	6×8	7×10

Cartes loto des produits 1

2 × 4	10 × 9	9 × 8
6 × 5	3 × 3	5 × 5
9 × 7	3 × 5	7 × 10

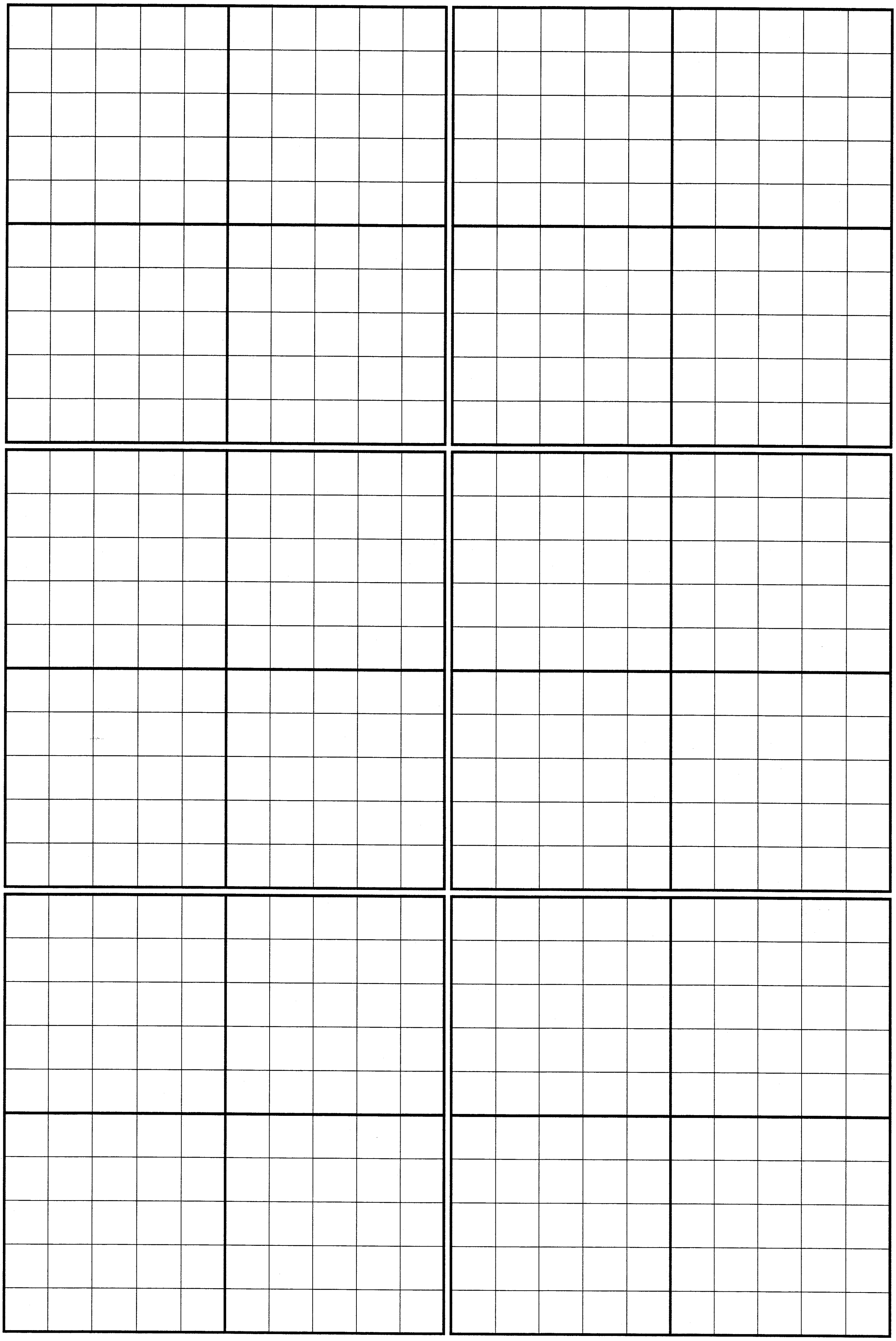
9 × 6	5 × 7	8 × 8
2 × 2	5 × 10	8 × 8
10 × 4	3 × 9	6 × 8

5 × 3	2 × 9	4 × 4
5 × 2	8 × 9	8 × 5
9 × 9	7 × 2	4 × 4

2 × 10	6 × 3	7 × 7
10 × 8	6 × 10	2 × 7
7 × 6	3 × 7	10 × 3

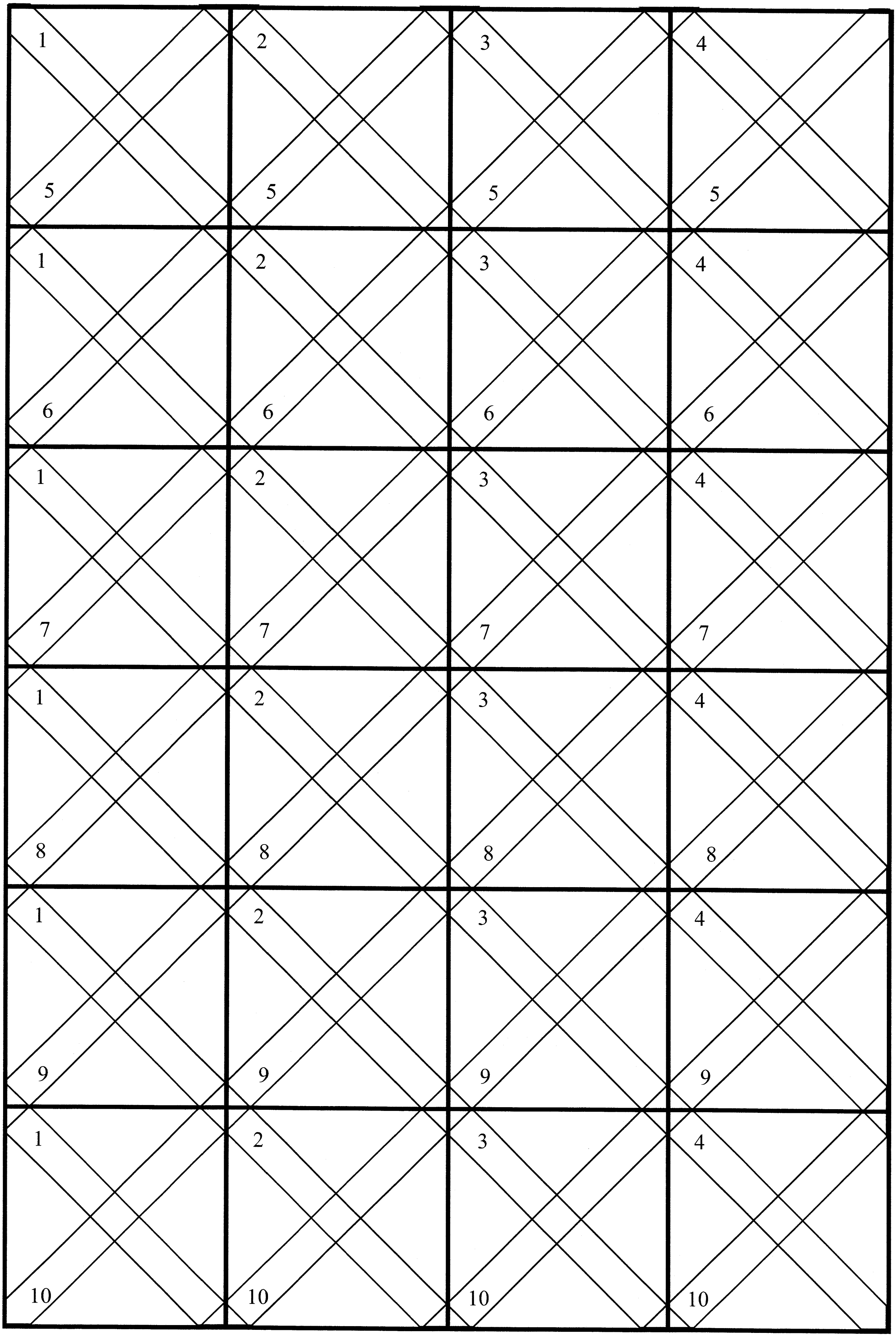
4 × 9	10 × 7	2 × 6
7 × 5	5 × 10	3 × 8
9 × 9	3 × 4	7 × 8

2 × 2	8 × 2	10 × 7
5 × 9	4 × 2	7 × 3
4 × 7	5 × 6	5 × 4



	1			2			3			4	
5			5			5			5		
	1			2			3			4	
6			6			6			6		
	1			2			3			4	
7			7			7			7		
	1			2			3			4	
8			8			8			8		
	1			2			3			4	
9			9			9			9		
	1			2			3			4	
10			10			10			10		

Pavés treillis 1



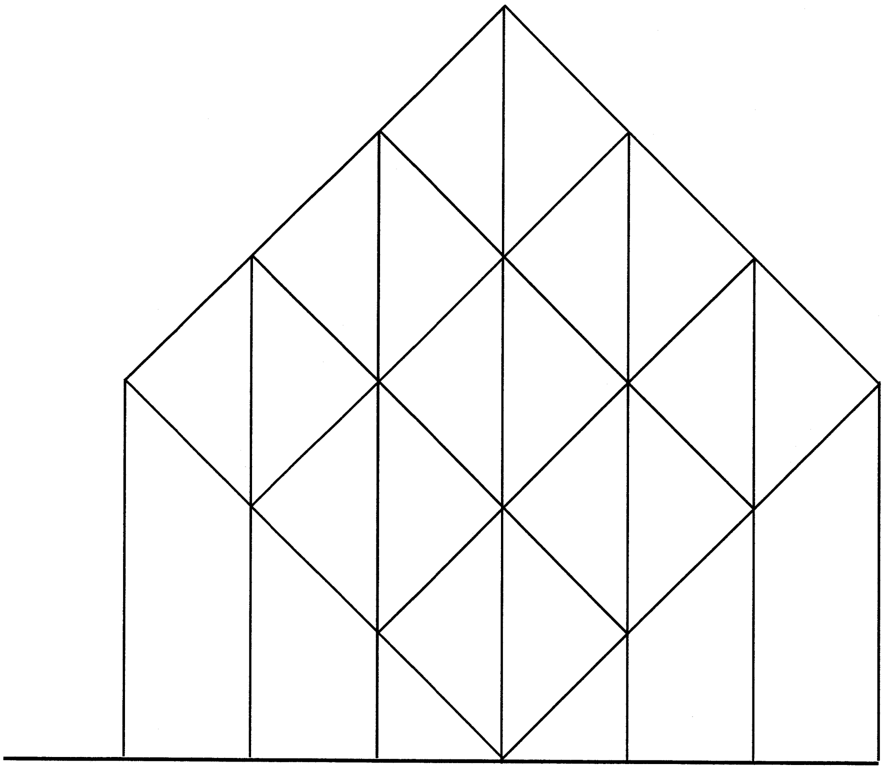
Pavés treillis 2

2	3	5	9	7	3	1	7
8	1	8	4	9	6	3	5
9	4	2	2	6	5	0	1

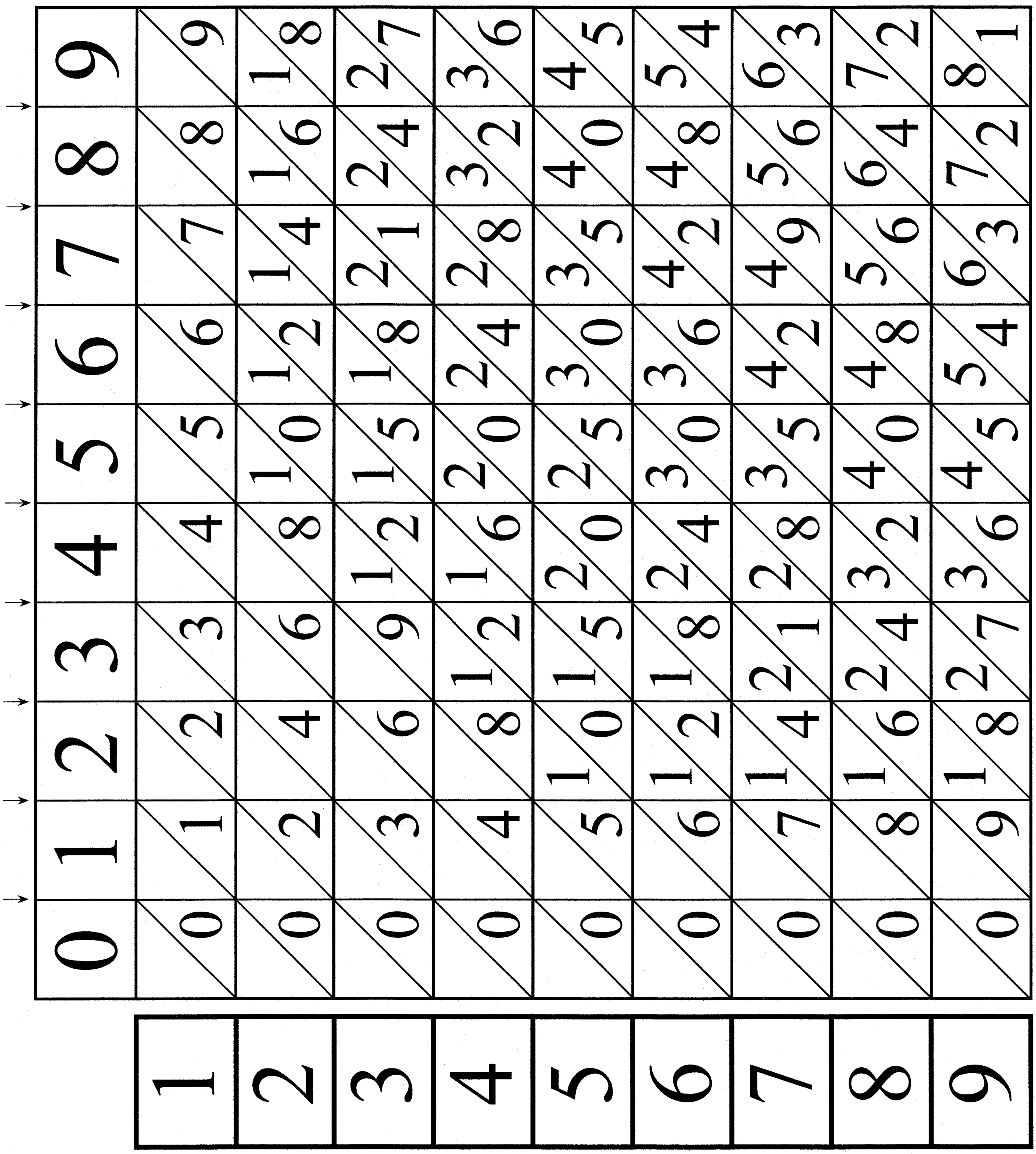
2	1	0	3	3	4	7	8
6	8	7	2	8	5	9	4
7	0	9	6	4	5	6	1

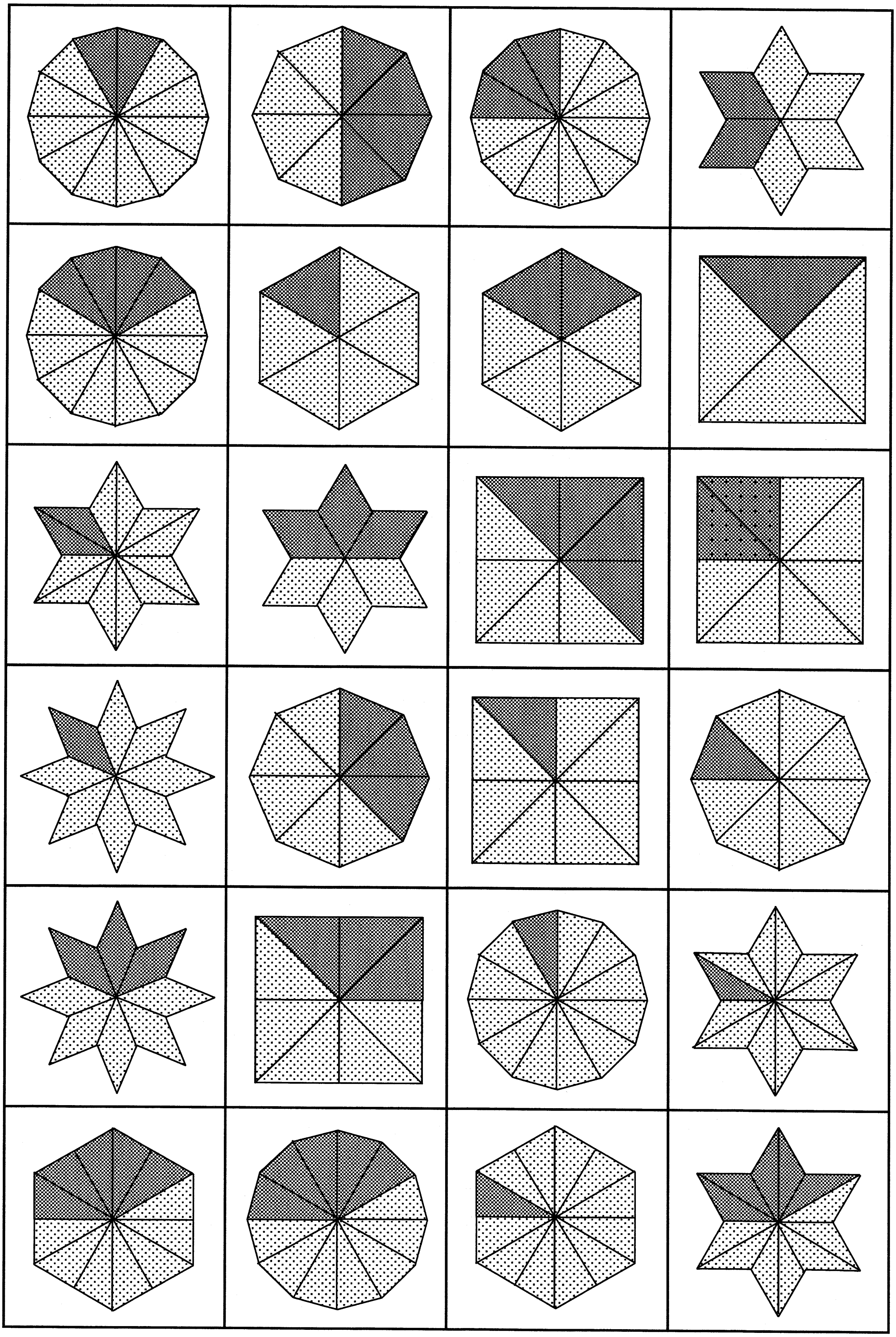
3	6	5	2	7	4	8	2
5	8	4	0	1	9	4	5
1	3	4	3	9	7	3	8

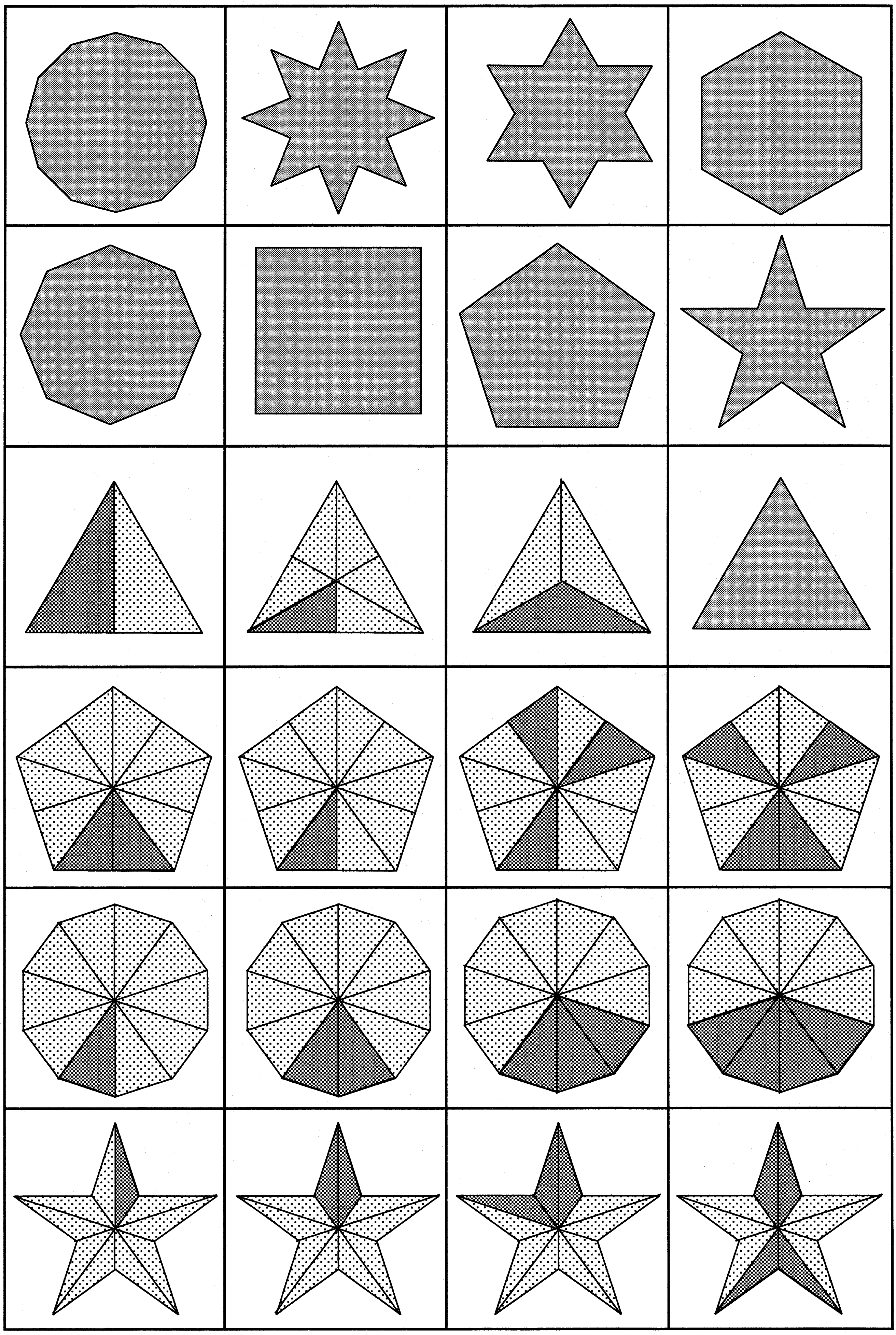
9	8	7	8	0	1	6	2
2	3	5	6	9	7	1	5
1	6	4	9	0	2	7	6



1 2 4 8 10 20 40 80 100



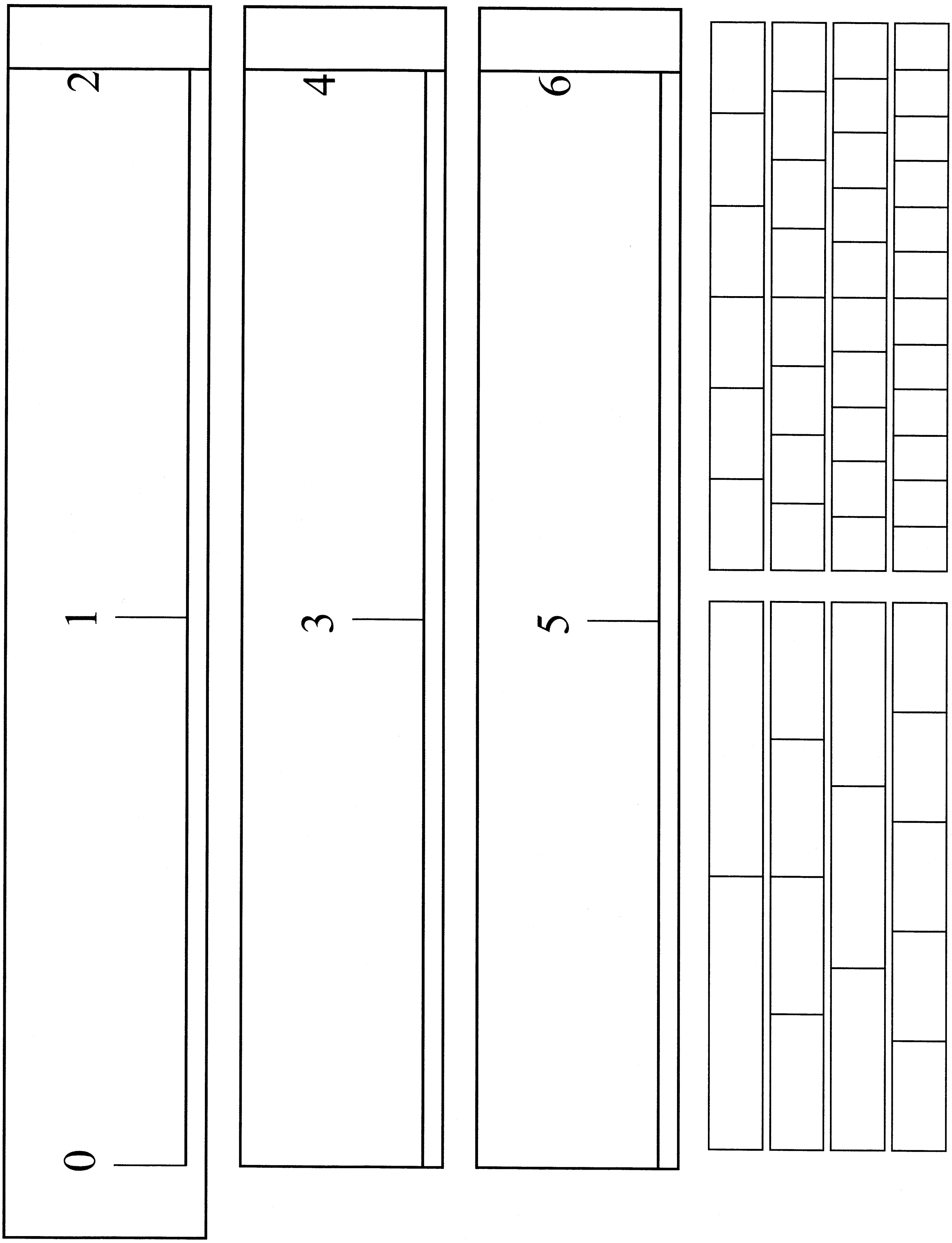




$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{10}$

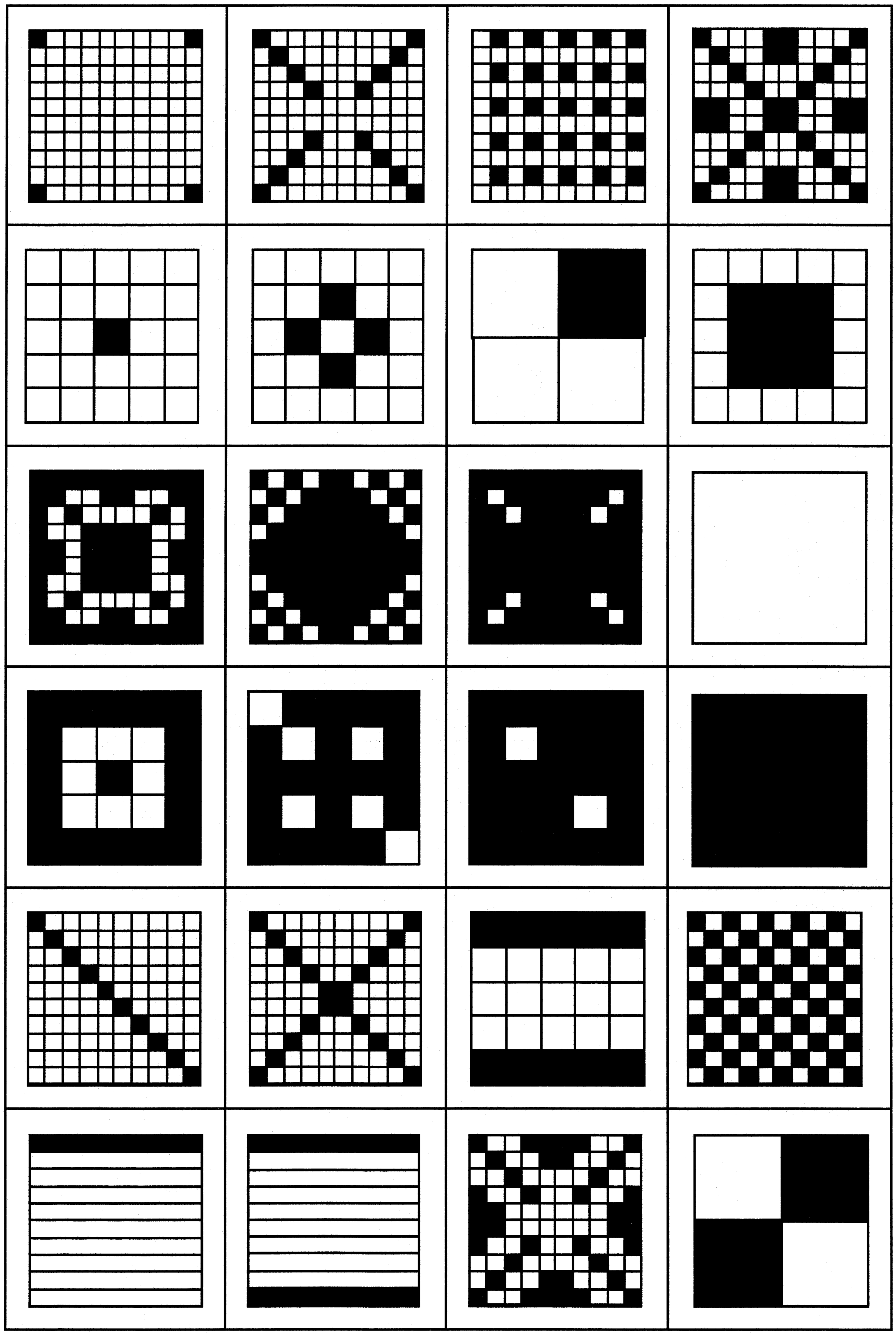
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
— 2	— 3	— 4	— 5
— 6	— 8	— 10	— 12
— 100	— 25	— 50	— 1000

Pavés fractions 4

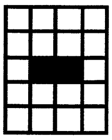
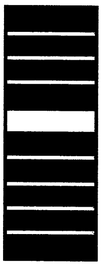
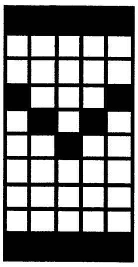
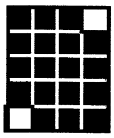
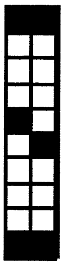
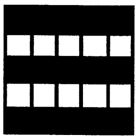
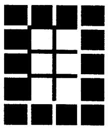
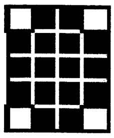
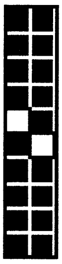
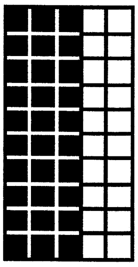
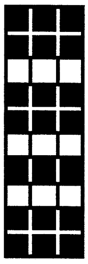
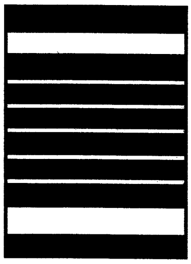
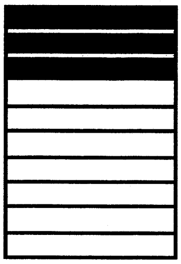
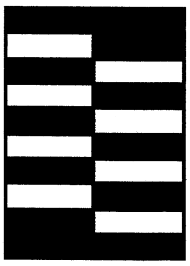

0
1
2
3
4
5
6

1	0 1	0 0 1
2	0 2	0 0 2
3	0 3	0 0 3
4	0 4	0 0 4
5	0 5	0 0 5

6	0 6	0 0 6
7	0 7	0 0 7
8	0 8	0 0 8
9	0 9	0 0 9
0	0 0	0 0 0



Pavé s pourcentages 1

			
			
			
			**50%**
10%	**20%**	**30%**	**40%**
60%	**70%**	**80%**	**90%**

Chapitre 5 : Numérations anciennes (cycle 3)

Comme nous l'avons signalé p. 73, dans les années 1970, les enseignants ont été poussés à utiliser les systèmes de numération dès le CP, ce qui fut une grosse erreur. En revanche, en cycle 3, être conscient qu'il existe d'autres façons de concevoir les « grands nombres » est un avantage, même pour la maîtrise du système décimal.

L'histoire nous montre les constructions retenues par différentes civilisations. Elles sont variées et présentent un double intérêt mathématique et historique. La plupart de ces numérations anciennes peuvent être présentées :

- soit sous forme de pavés présentant quelques nombres écrits dans un système d'écriture et que les élèves doivent déchiffrer. Pour pouvoir saisir la logique d'un système, il est nécessaire que l'élève sache que l'ensemble des nombres présentés lui offre la variété des organisations de symboles et surtout, pour chacun le nombre maximum d'exemplaires de ce symbole qu'un nombre peut contenir,
- soit sous forme d'un tableau où l'ensemble des caractères est exposé et sur lequel l'élève compose, par pointage à l'aide d'une baguette, les caractères d'un nombre. Les tableaux présentés ci-après répondent à une règle impérative : on ne peut jamais choisir deux caractères dans une même ligne pour former l'écriture d'un nombre.
- soit sous forme de pavés présentant les formes de base de leur écriture que l'utilisateur juxtapose pour former différents nombres. Une telle représentation n'est pas donnée dans les planches, puisqu'il suffit de découper un tableau en pavés pour les obtenir. (Un agrandissement A3 préalable du tableau permet d'obtenir des pavés de taille convenable.)

1) Numération sumérienne concrète

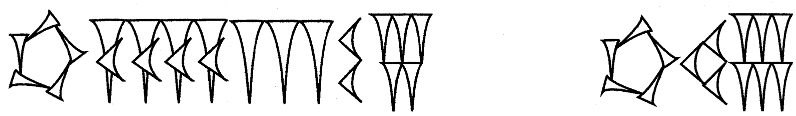
Les Sumériens, inventeurs de l'écriture, traçaient leurs caractères sur une tablette d'argile. Au départ, simples dessins, ceux-ci ont été stylisés et finalement gravés à l'aide d'un roseau taillé en lame de couteau sous forme de petits clous : c'est l'écriture cunéiforme. Les nombres en font partie dès le départ.

Le *tableau sumérien* montre les caractères disponibles :

- des clous alignés et superposés de 1 à 9 en deux tailles,
- des « chevrons » et des grands clous percés d'un chevron de 1 à 5,
- des « ronds » de 1 à 9 d'après le tableau,
- des ronds percés d'un clou de 1 à 5.

En pensant que les petits clous ont moins de valeur que les grands et que les chevrons s'intercalent, un chevron vaut nécessairement 10 et comme le plus grand nombre réalisable en petits clous et chevrons est 59, le grand clou vaut 60. En continuant cette logique, le grand clou percé d'un chevron vaut 600 (parce que le plus grand nombre possible avec les trois premiers caractères est $(9 \times 60) + (5 \times 10) + 9 = 599$), et de même, le rond vaut 3 600 et le rond percé d'un clou, 36 000.

Les symboles se rangent en ligne, du plus grand au plus petit. Voici 6 205 et 3 636 :



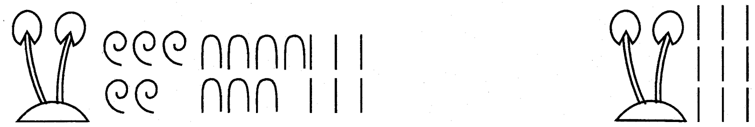
En fait, groupés deux par deux, les symboles sont construits suivant la base 60 qui est celle de notre lecture de l'heure. Il suffit de penser que les petits clous sont des secondes, les grands, des minutes et les ronds, des heures pour se trouver dans un système vieux de 5 000 ans encore en usage aujourd'hui.

2) Numération égyptienne

Contrairement à la précédente, cette écriture est formée de caractères qui se groupent tous au plus par 9. Le système égyptien est donc purement décimal et additif. Les signes les plus simples sont des traits qui sont les unités, l'anse de panier (U renversé) vaut 10, la corde 100, la fleur de lotus, 1000, le doigt levé 10 000 et le têtard 100 000.

Les symboles se rangent en ligne, du plus grand au plus petit. Mais comme l'écriture égyptienne est tantôt orientée de gauche à droite, tantôt de droite à gauche, le même nombre peut être écrit symétriquement selon le sens.

Les *nombres égyptiens* sont composés dans le sens de notre lecture (de gauche à droite) et le *tableau égyptien* se lit dans le même sens. Voici 2 576 et 2 009



Cette forme est celle qui a été gravée sur les pierres. Elle est différente dans les manuscrits sur papyrus. Le système égyptien est décimal, donc facile à déchiffrer.

3) Numérations grecques

Deux systèmes d'écriture différents ont été utilisés par les Grecs.

- Le système acrophonique, plus ancien, a été utilisé pour des échanges commerciaux. On le trouve gravé sur la pierre de la table de calcul de Salamine,
- le système alphabétique est employé dans les textes sur les papyrus.

La découverte de l'alphabet par les Phéniciens, vers -1200, a fait le tour du bassin méditerranéen. Il va être utilisé par les Grecs et les Hébreux pour l'écriture des nombres, chacun dans son alphabet.

Le *tableau grec acrophonique* est formé de lignes comprenant de un à quatre signes, séparées par un unique caractère Γ. Partant du haut à gauche, on obtient les quatre premiers nombres, puis Γ, qui vaut 5, permet de construire les nombres de 6 à 9.

Δ est donc 10. On continue de la même manière pour trouver que H est 100 et K 1000.

Le système est décimal additif et la lettre M (myriade) vaut 10 000. Elle fonctionne comme « mille » dans notre écriture. Voici 9768, 3515 et 5 202 107 :

𐅆KKKK𐅅HH𐅄ΔΓIII   KKK𐅅ΔΓ   𐅅ΔΔ M KKHΓII

Les lettres Δ, H, K nous ont donné les préfixes : déca-, hecto- et kilo- .

Le *tableau grec alphabétique* est formé de lignes comprenant toutes neuf caractères. Comme le système égyptien, il est purement décimal. Son avantage réside dans la brièveté de son écriture. Les Sumériens et les Égyptiens ont besoin de neuf signes pour écrire 9 et les Grecs, d'un seul... Les Égyptiens utilisent 27 signes pour 999 et les Grecs, 3 !

Certains signes numériques ne figurent pas dans l'alphabet grec. Ce sont des signes qui ont été abandonnés sauf dans l'écriture des nombres. Malgré cela, le choix de quatre lignes de caractères les a obligés à reprendre le début de l'alphabet pour 1000, 2000, ... en surmontant les lettres d'une sorte d'accolade.

Enfin, les Grecs ont cherché à écrire de très grands nombres. Les groupes de 10 000 ont été répétés pour donner des myriades secondes ou troisièmes, puissances de 10 000.

Voici 2 358, 5 003 et 23 930 920 167 :

$$ʹβτνη \quad ʹεγ \quad σλθ\overset{β}{\mathrm{M}}ʹγπβ\overset{α}{\mathrm{M}}ρξζ$$

4) Numération chinoise

À l'origine verticale, cette écriture est d'une logique simple, parfaitement conforme entre les désignations orale et écrite. Chaque ordre possède un nom correspondant à « dix » « cent » « mille ». On désigne un nombre en le décomposant selon chacun de ces ordres avec les nombres de 1 à 9. Quel gain de simplicité on ferait en copiant ce modèle à l'oral (on aurait « sept dix deux » et « neuf dix trois » au lieu des « soixante douze » ou « quatre-vingt treize » de notre langue) ! Actuellement, l'écriture chinoise s'écrit horizontalement, de gauche à droite.

Le *tableau chinois*, conformément à l'écriture traditionnelle, montre les unités en bas. Les puissances de 10 (« dix » « cent » « mille ») sont écrites seules sur une ligne dans l'ordre montant. La ligne des unités est reproduite pour indiquer le nombre de 1000, celui de 100 et celui de 10.

Ci-contre, le nombre 3 957 en écriture verticale :

三
千
九
百
五
十
七

Pour les grands nombres (supérieurs à 9 999), deux systèmes sont possibles.

- Le « système vulgaire » donne un symbole aux puissances de 10 suivantes : 10 000, 100 000, ... (représentés à droite) et les emploie de la même manière que 10, 100 et 1 000.

- Le « système savant » utilise les mêmes symboles, mais en leur donnant les valeurs : 10 000, 10 000 × 10 000 = 100 000 000, ...

Le nombre 243 500 se décompose en : 2 × 100 000 + 4 × 10 000 + 3 × 1 000 + 5 × 100 dans le « système vulgaire » et en : (2 × 10 + 4) × 10 000 + (3 × 1000 + 5 × 100) dans le « système savant ». (De la même manière que dans notre numération orale française, nous avons les classes des unités, mille, millions, ... pour chacune desquelles, le nombre est donné par les nombres à trois chiffres au plus, nous avons ici une classe des unités et une classe des myriades.)

Voici le nombre 243 500 dans chacun de ces deux systèmes :

二億四萬三千五百

二十四萬三千五百

5) Numération aztèque

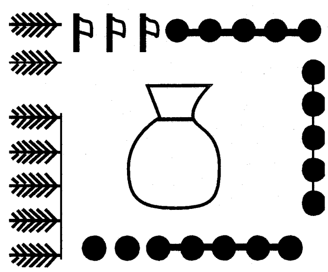
Les Aztèques utilisaient quatre types de symboles pour représenter les nombres : des grains, des drapeaux, des plumes et des bourses. Chaque symbole est reproduit de une à quatre fois et groupés par cinq sur une barre, deux ou trois barres.

En associant de toutes les façons chaque groupe de symboles, on peut réaliser de tous les nombres de 1 à 19 de ce symbole. Ce qui conduit à comprendre que le besoin d'un symbole nouveau se fait sentir après 19, donc pour 20 exemplaires d'un symbole.

Le grain est l'unité. Un drapeau vaut 20 grains, soit 20. Une plume vaut 20 drapeaux, soit 400 et une bourse vaut 20 plumes, soit 8 000. C'est un système de base 20 qui était utilisé en Amérique centrale et chez les Celtes. De ces derniers, il nous reste quelques vestiges (dont on se passerait volontiers) dans la désignation orale de nombres comme 93.

L'écriture aztèque est très picturale et les symboles numériques n'échappent pas à la règle. Dans les rares parchemins qui ont échappé à l'autodafé espagnol, on les trouve surmontant ou entourant un dessin d'objet pour en donner le nombre.

Voici par exemple : 2 877 sacs :



Dans les *nombres aztèques*, il faut donc distinguer les symboles numériques (grains, drapeaux, plumes, bourses) qu'on retrouve sur les différents pavés, d'un dessin de parure, sac, pot de miel, collier, bouclier, ... qui représente les objets désignés.

6) Numération sumérienne savante

Les deux derniers systèmes proposés sont extraordinaires dans l'évolution qu'ils présentent et dont le principe est actuellement universellement adopté.

Vers 2 500 ans avant notre ère, les savants babyloniens, peut-être gênés de devoir utiliser deux roseaux de tailles différentes pour effectuer, dans le système sumérien, les nombreux calculs de leurs tablettes, ont compris que, presque toujours, ils pouvaient remplacer le grand clou par un petit clou et le grand clou percé d'un chevron par un simple chevron sans que la lecture n'en souffre, au contraire. Ils firent donc ce choix de n'utiliser que deux sortes de caractères : petit clou et chevron qu'ils alternèrent dans leur écriture des nombres.

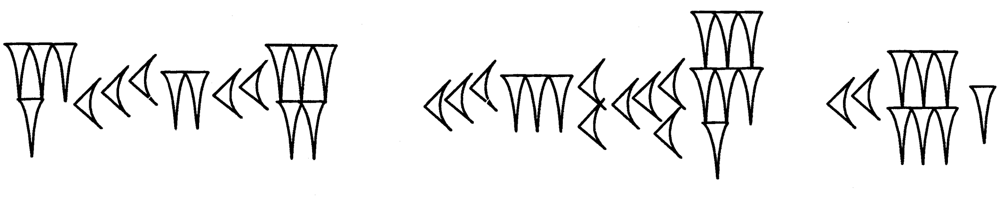
Ce système fut employé comme moyen de calcul. Pour calculer la surface d'un carré, sa longueur était exprimée dans le système concret avec une unité de longueur. Le calcul de surface était effectué dans le système savant. Une seconde tablette de conversion permettait de transcrire le résultat de la multiplication en mesure de surface dans le système concret.

La grande particularité de cette écriture est de ne pas distinguer 1 de 60 ou 3600. L'ordre de grandeur du résultat permettait de choisir une valeur réaliste. Le système savant servait exclusivement à effectuer les multiplications et divisions. Et, grâce au grand nombre de diviseurs de 60 et 3600, il pouvait exprimer de nombreuses fractions. Les Grecs, dont le système alphabétique ne permettait pas l'écriture fractionnaire, empruntèrent ce système pour accoler, en babylonien, une partie fractionnaire à la partie entière écrite avec leur alphabet.

Certains nombres, cependant, posaient un problème : ceux pour lesquels un ordre (puissance de 60) est absent. Il fallait laisser un trou, éventuellement deux trous jointifs dont la longueur était difficile à exprimer dans une écriture où les caractères sont extrêmement serrés. Pour résoudre ce problème, deux mille ans plus tard, ils décidèrent de marquer l'ordre manquant d'un repère formé de deux chevrons superposés ou deux clous en biais. (Lorsque seul un signe était absent, comme dans 61, la disposition non standard des deux clous successifs permettait la lecture sans ambiguïté).

Ce symbole nouveau fut la première expression d'une grande invention : le zéro qui permet de remplacer les numérations de valeurs par une numération de position, beaucoup plus efficace pour le calcul.

Voici 16345, 118 847 et 1 561 :



Ce double chevron pouvait aussi être placé en tête de l'écriture pour exprimer une fraction (comme notre 0,...).

Les *pavés babyloniens* sont formés de symboles combinant, dans un rectangle[1] coupé verticalement, des clous et des chevrons. Le zéro est représenté soit par un rectangle blanc, soit

1 Les rectangles sont entourés d'un trait noir et la base est différente, comme une ligne de terre pour permettre de savoir dans quel sens disposer les demi-rectangles. Faire attention à la colonne de droite qui ne contient que des demi-rectangles droits.

par un rectangle non découpé rempli des deux chevrons disposés verticalement. Dans une écriture où seul un type de caractères est manquant (par exemple, pas de symbole 60, mais présence de 10 et 600) il suffit d'accoler les demi-rectangles, celui du milieu étant blanc. (L'organisation géométrique des clous étant différente des empilements standards : 65 s'écrit avec six clous, un puis cinq, ce qui est différent de l'empilement de deux rangs de trois du nombre 6, et il n'y a pas d'ambiguïté.)

Mais lorsque un ou plusieurs rectangles blancs se suivent, il y a risque d'erreur et dans ce cas le double chevron du « zéro » babylonien s'avère nécessaire.

Le *tableau babylonien* répond à la même logique. Il se décompose en quatre mini-tableaux similaires de deux lignes dans lesquels se combinent les mêmes caractères. Lorsqu'une double ligne est absente de l'écriture, on pointe le « zéro » qui est à sa droite.

7) Numération maya

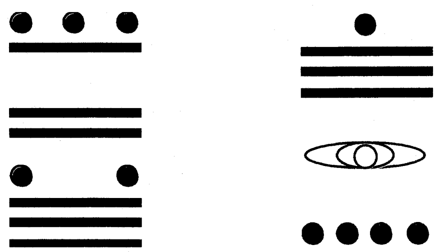
De même, les Mayas ont simplifié l'écriture aztèque. On retrouve les grains, mais les groupes de cinq sont de simples traits. La même organisation permet de composer tous les nombres jusqu'à 19 avec ces deux symboles.

Mais pour passer à 20, ils reprirent les deux mêmes symboles, écris un étage plus haut. Et, de même pour 400 et 8000, chacun sur un étage. C'est beaucoup plus simple à dessiner et à lire ; mais certains nombres créent un problème. Lorsque le contexte permet de connaître la base de l'écriture, on peut repérer les étages. Dans une table de résultats numériques, comme la table des phases de Vénus (car ils furent astronomes), il était nécessaire de marquer les étages vides. C'est ainsi qu'est apparu le zéro maya, sous forme d'un coquillage.

Les *nombres mayas* présentent cette écriture verticale sous forme de rectangles verticaux, combinant ronds et traits, sur plusieurs étages[2], certains étages vides étant éventuellement remplacés par des « coquillages-zéros ».

Le *tableau maya* décompose cette écriture en quatre mini-tableaux similaires de deux lignes dans lesquels se combinent les deux caractères. Toute double ligne manquante est remplacée par le « zéro » du même étage.

Voici : 3 417 et 6 404



2 Une ligne de terre, au bas de chaque rectangle, permet de savoir dans quel sens disposer les nombres.

Bas du tableau

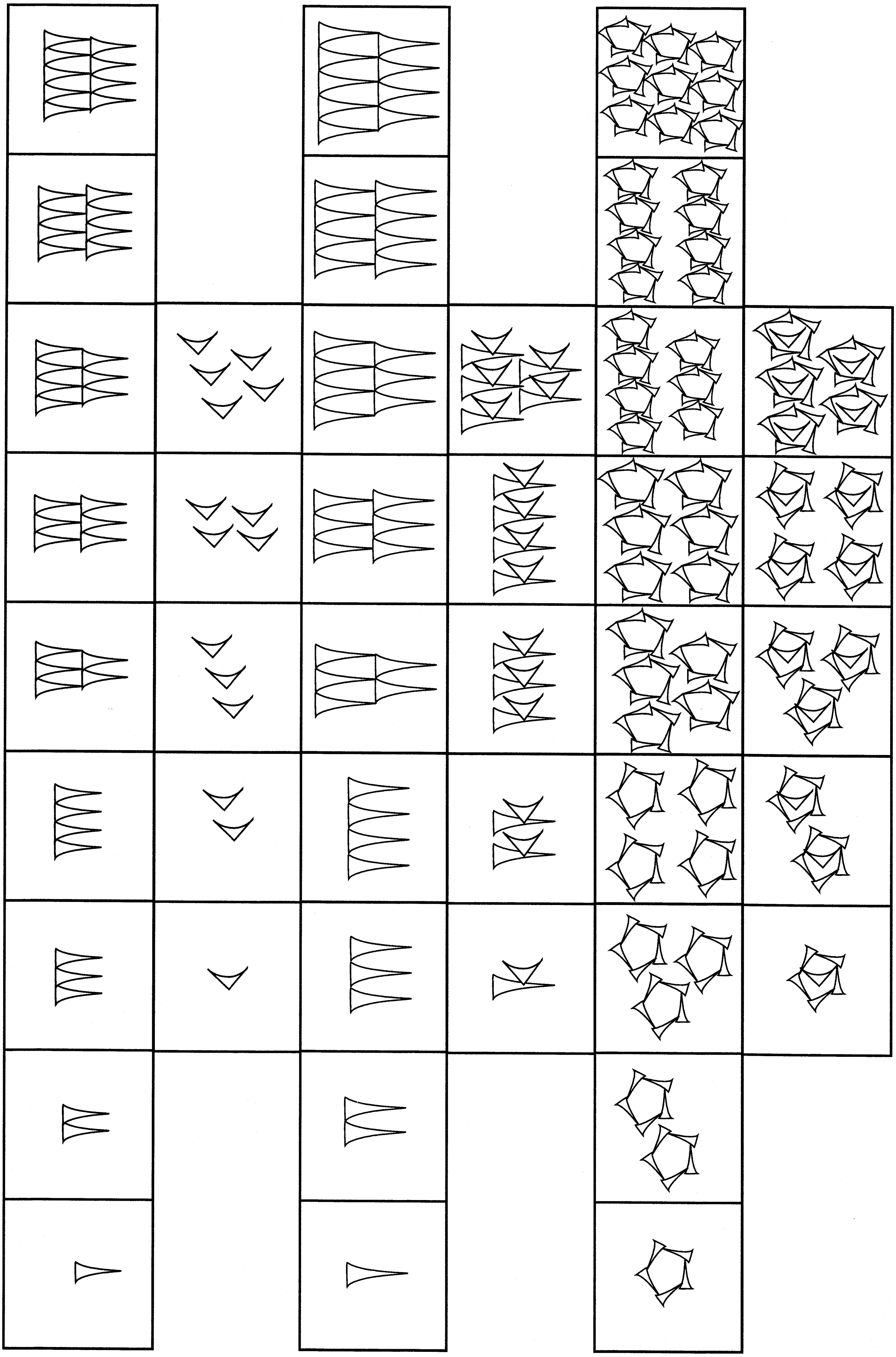
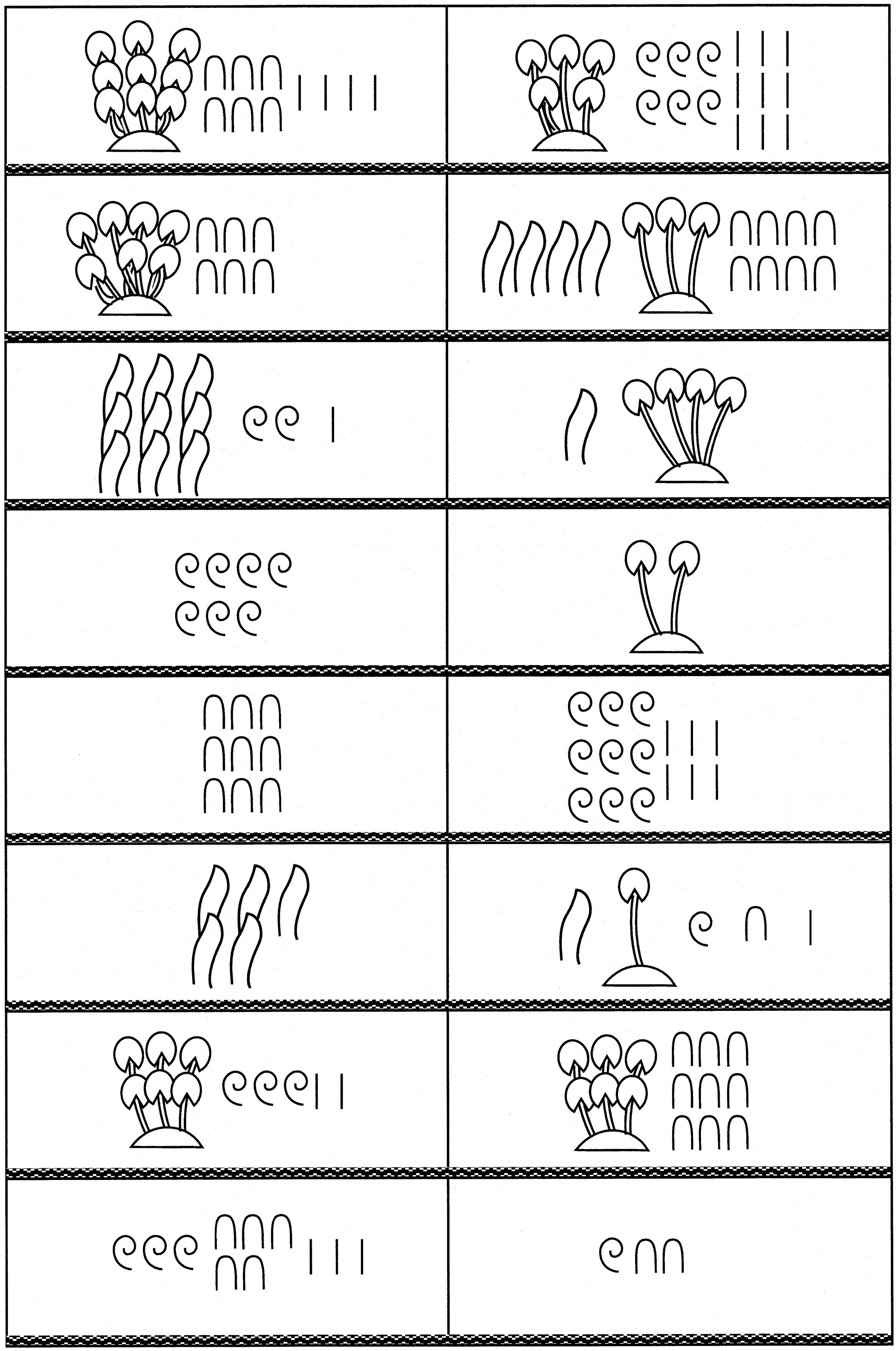


Tableau sumérien



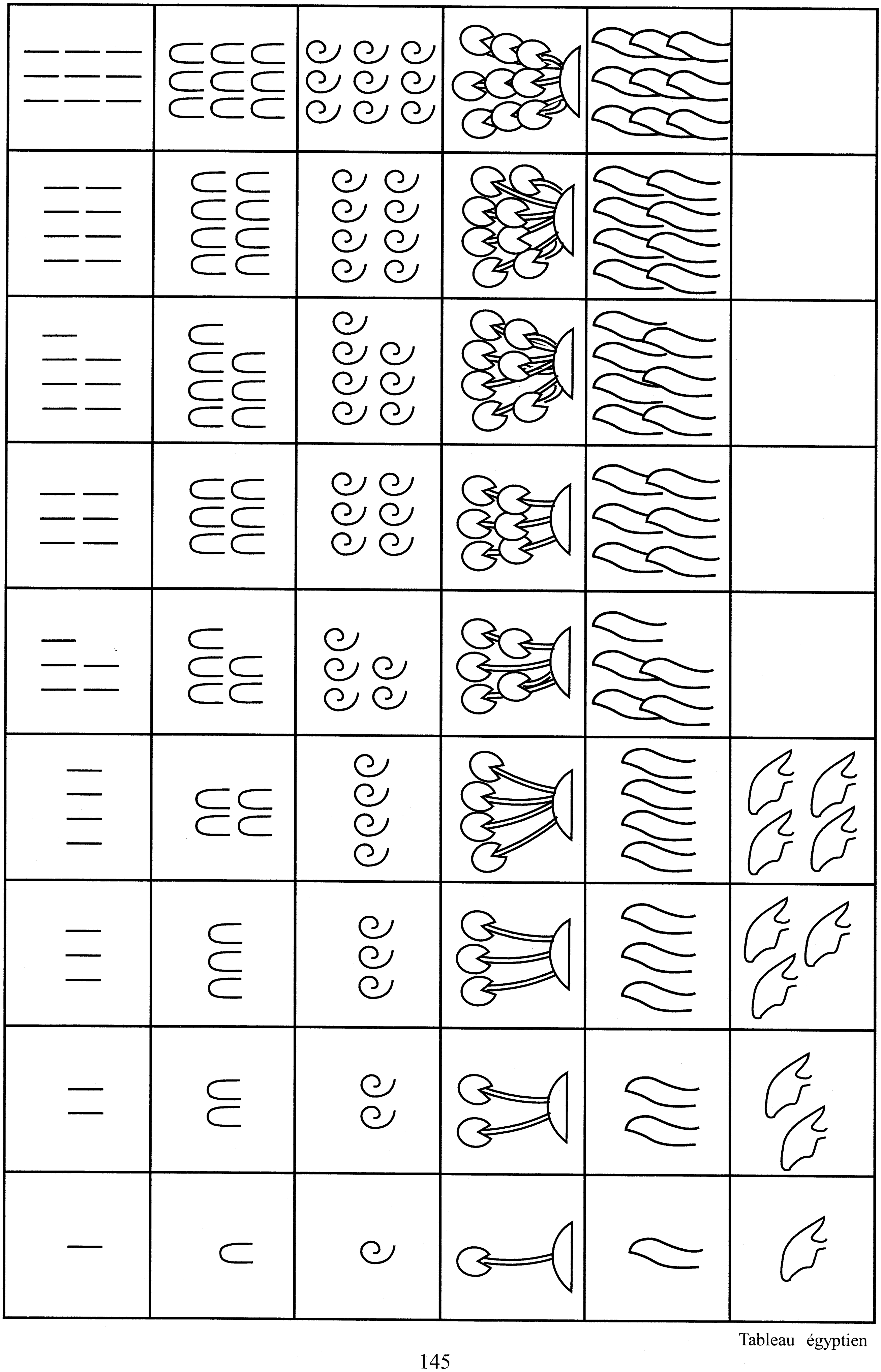


Tableau égyptien

I	II	III	IIII
	Γ		
Δ	ΔΔ	ΔΔΔ	ΔΔΔΔ
	Γ^{Δ}		
H	HH	HHH	HHHH
	Γ^{H}		
K	KK	KKK	KKKK
	Γ^{K}		
	M		

Tableau grec acrophonique

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
͵α	͵β	͵γ	͵δ	͵ε	͵ϛ	͵ζ	͵η	͵θ

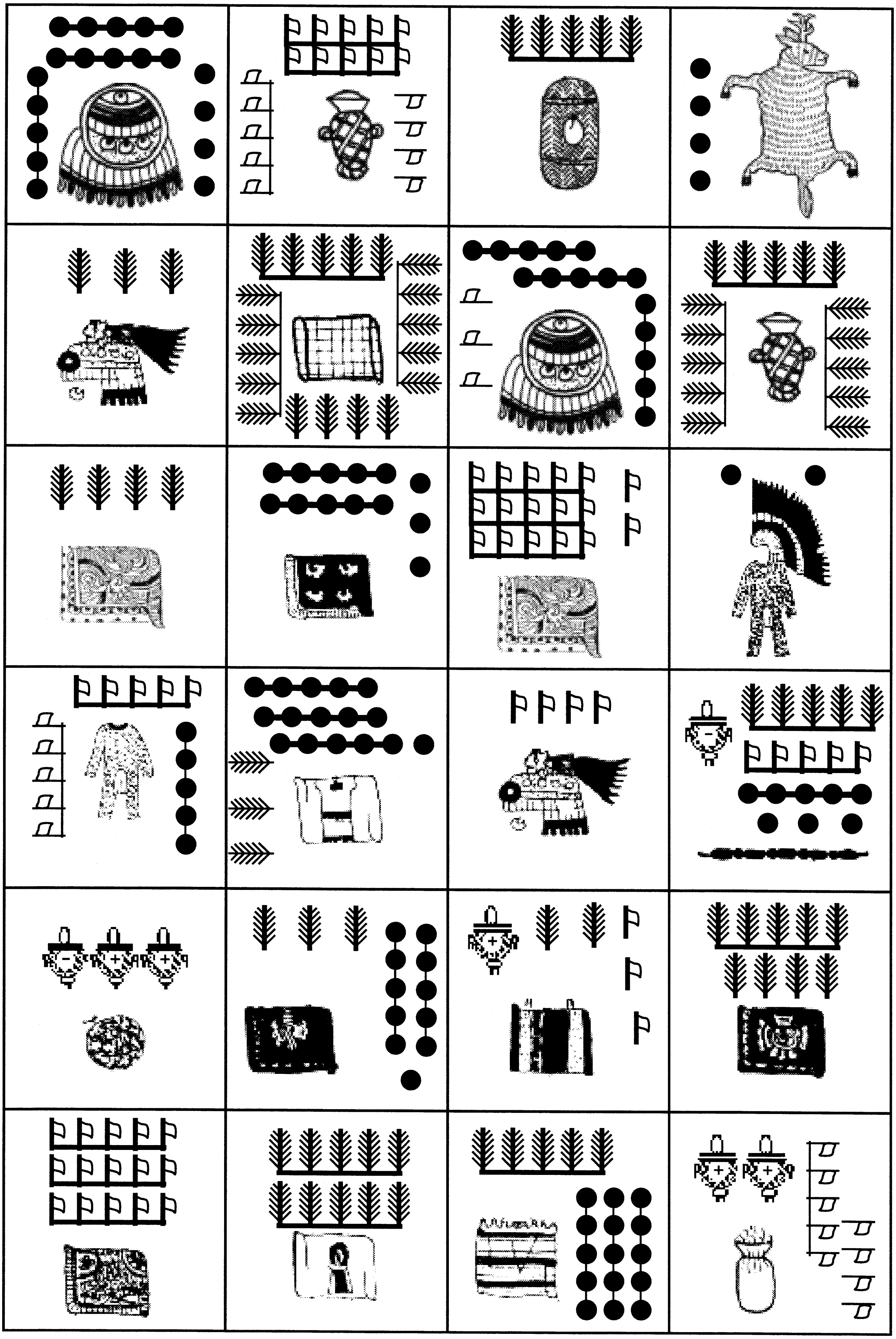
$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$ $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$

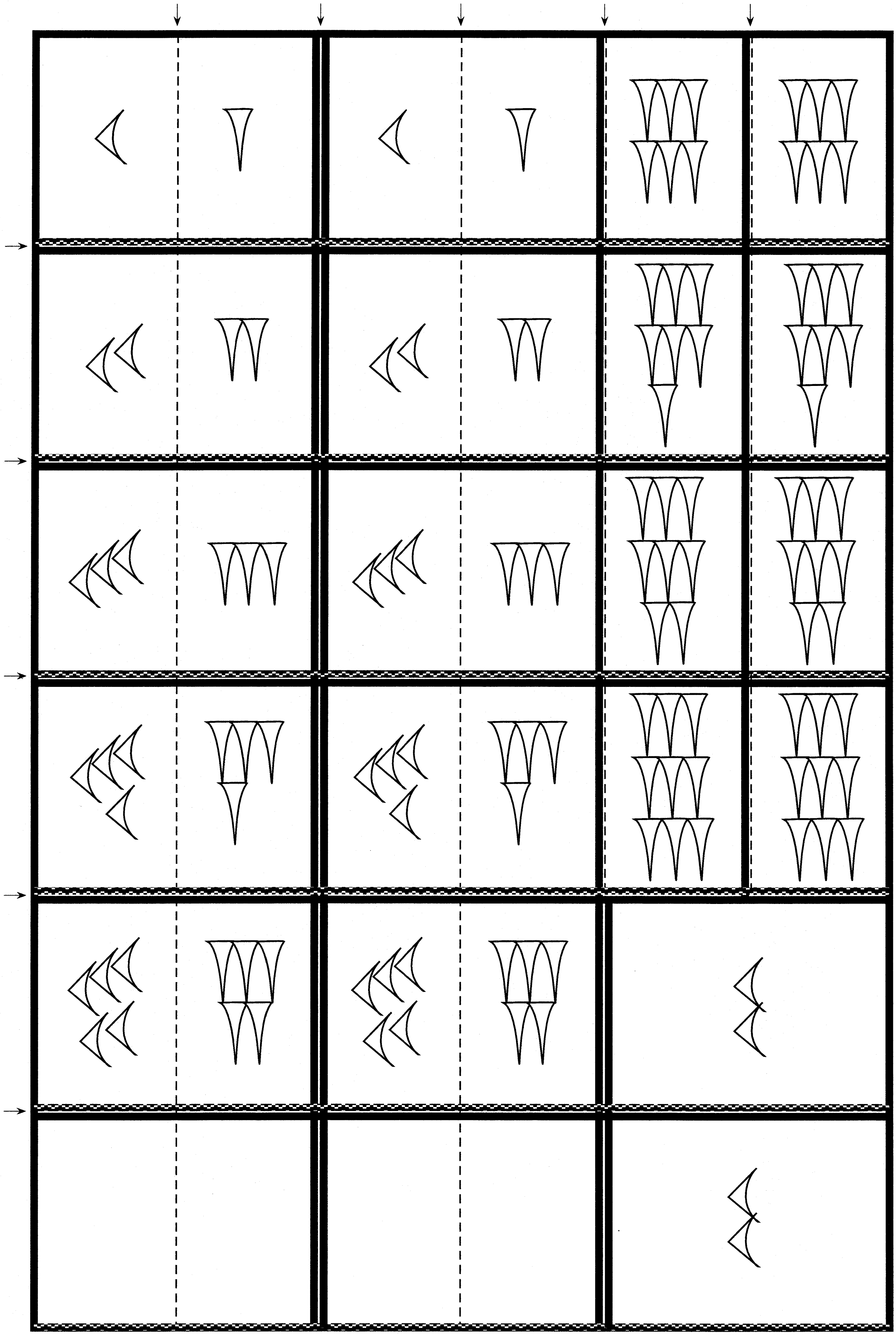
Tableau grec alphabétique

億萬

一	二	三	四	五	六	七	八	九
				千				
一	二	三	四	五	六	七	八	九
				百				
一	二	三	四	五	六	七	八	九
				十				
一	二	三	四	五	六	七	八	九

Tableau chinois





Pavés babyloniens

Bas du tableau

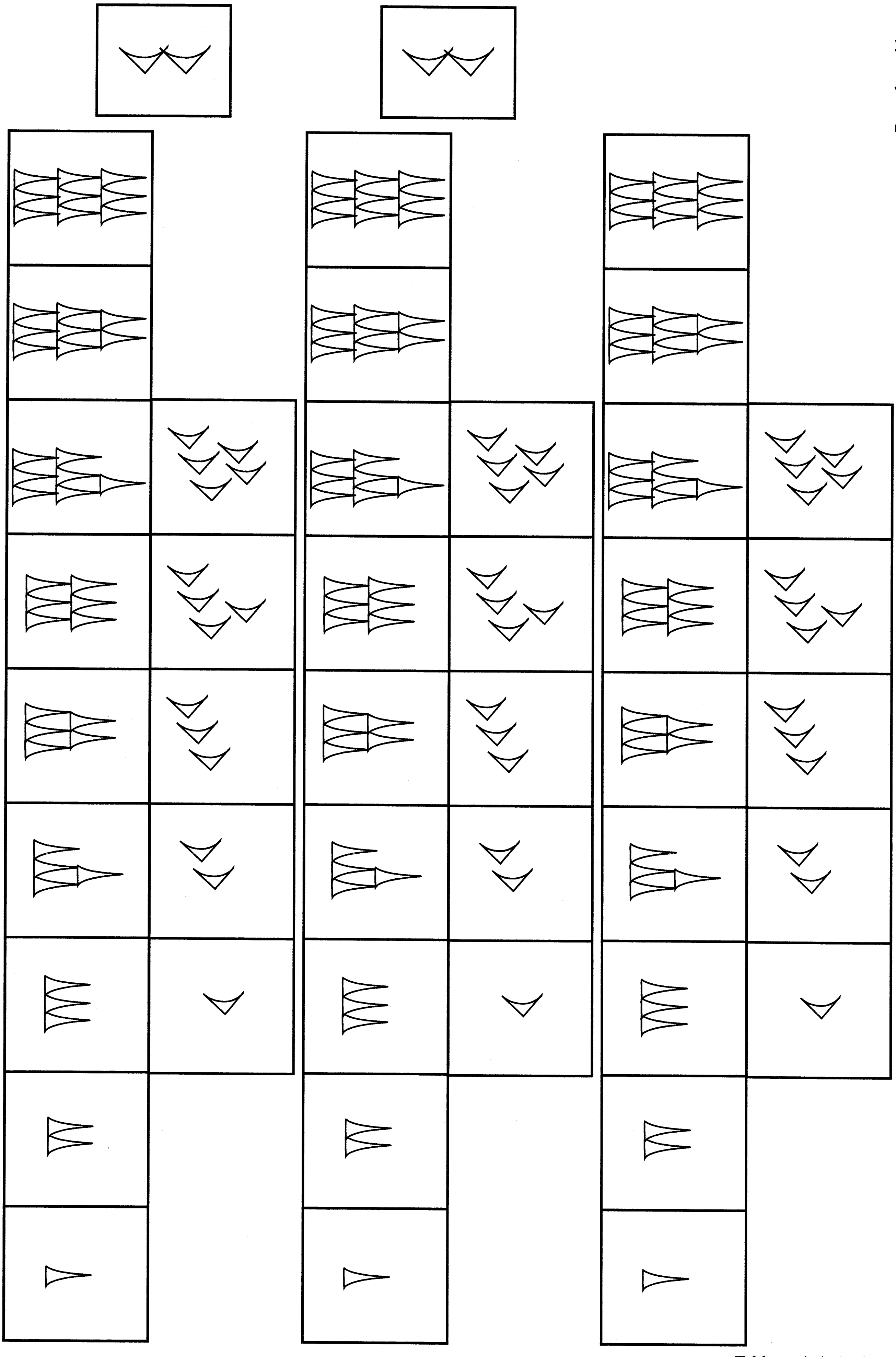
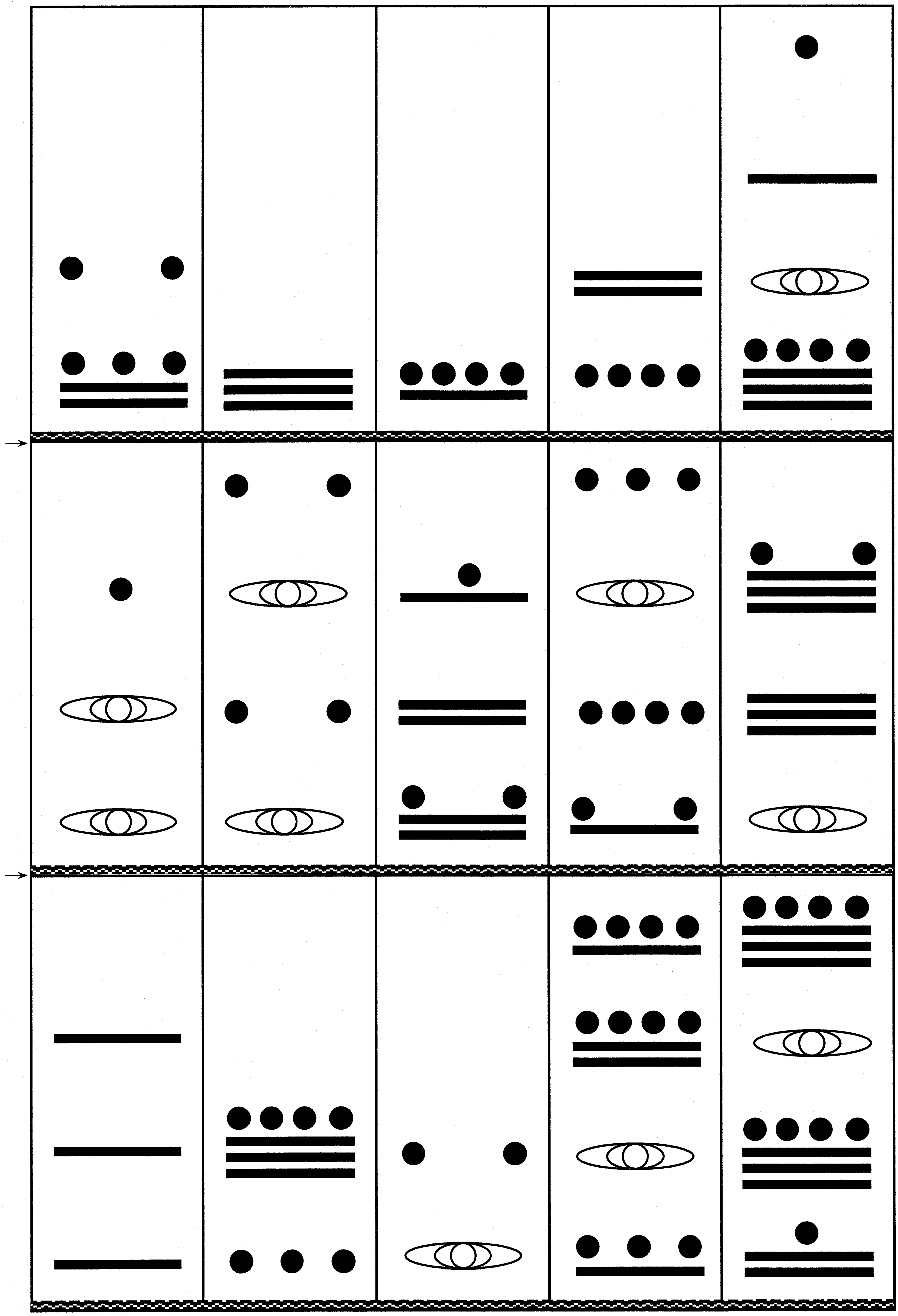


Tableau babylonien



Bas du tableau

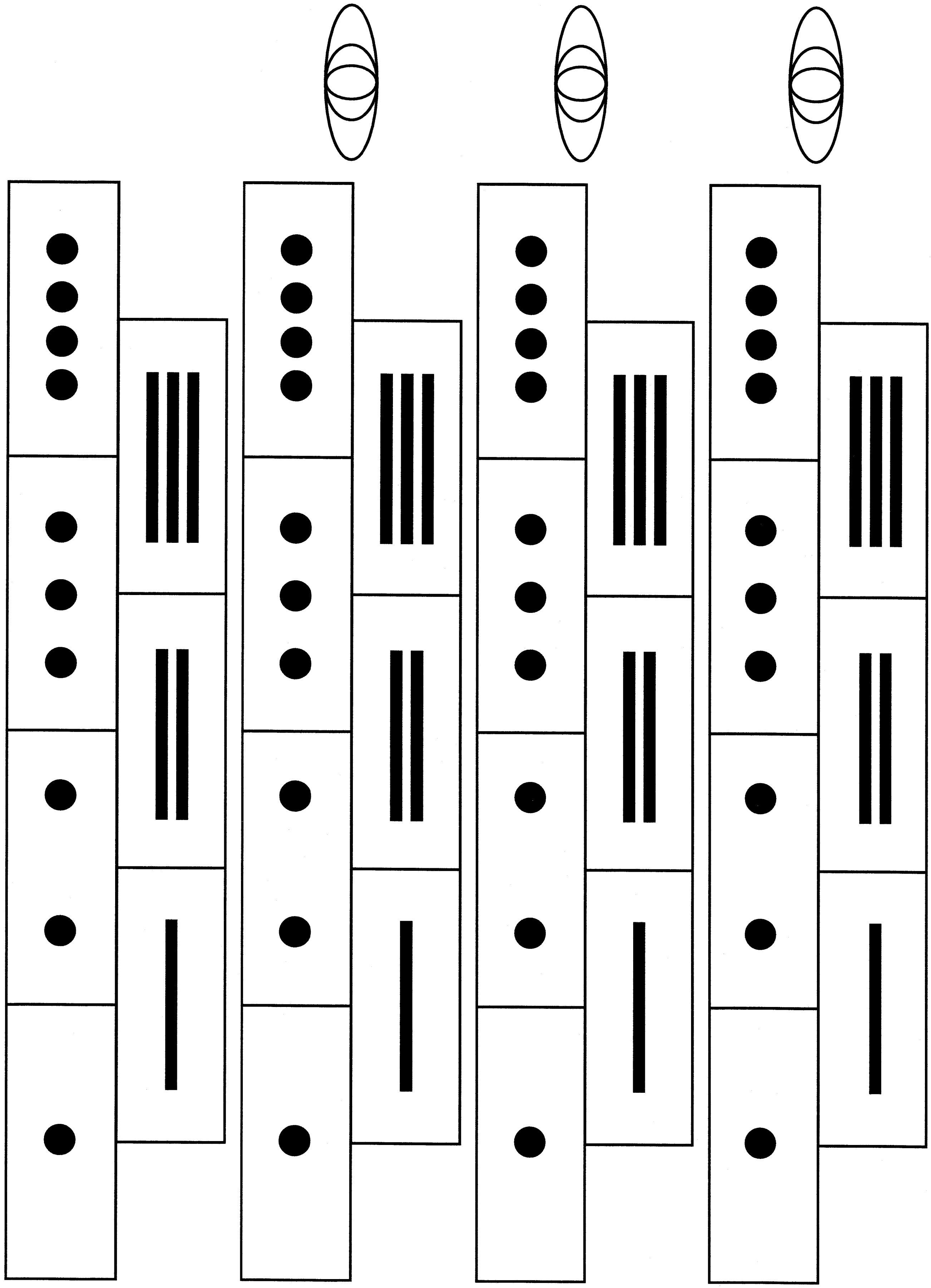


Tableau maya

Bibliographie

Livres

- B. Bettinelli, *Jeux de formes, formes de jeux*, IREM de Franche-Comté, Besançon 1984, 2de éd. 1991 (épuisé)
- B. Bettinelli, *Jeux mathématiques*, IREM de Franche-Comté, Besançon 1982 (épuisé)
- B. Bettinelli, *La maternelle en jeux mathématiques*, Presses universitaires de Franche-Comté, Besançon 2001, rééd. 2006
- Groupe élémentaire de l'IREM de Franche-Comté, *Prends ton temps !*, Presses universitaires de Franche-Comté, Besançon 2005
- B. Bettinelli, *Maths en formes*, Presses universitaires de Franche-Comté, Besançon 2006
- B. Bettinelli, *La moisson des formes*, Aléas, Lyon 1993
- G. Ifrah, *L'histoire universelle des chiffres*, Seghers, Paris 1981
- B. Bettinelli, *Techniques chinoises de calcul*, IREM de Franche-Comté, Besançon 1989, épuisé
- S. Stevin, *La disme*, 1585, réédition ACL-Editions, Paris 1997
- Condorcet, *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*, 1799, réédition ACL-Editions, Paris 1988
- C. Gattegno, *The common sense of teaching mathematics*, Educational solutions, 1974
- Commission premier degré (Arhel D., Cabassut R., Petit S., Roussignol N.), *5 fois 3 est-il égal à 3 × 5 ?* in « Bulletin APMEP » n° 457, mars-avril 2005, p. 165-172.

Matériels

- *Figurix*, Hermann Seitz, Ravensburger, 1998
- *Les jeux de l'âne*, A. Ménissier, Orthoédition
- *Mathador* et *Mathador junior*, Eric Trouillot, CRDP de Franche-Comté,
- *Take it easy*, Peter Burley, Ravensburger, 1998
- *Trio*, Heinz Wittenberg, Ravensburger, 1989
- *Triolet*, José Mellina et André Perriolat, DJ Games
- *Rummikub*, Éphraïm Hertzano, divers éditeurs dont MB, Parker, Hasbro, 1980
- *La moisson des formes*, B. Bettinelli, matériel de géométrie, association « Une Education pour Demain », 25720 Larnod, 1994

Sites internet utiles

- http://www.col-camus-soufflenheim.ac-strasbourg.fr/Page.php?IDP=79&IDD=0
- http://perso.orange.fr/jeux.lulu/
- http://www.recreomath.qc.ca/index.htm
- http://www.didacto.fr/default.asp?comlist=&par=0&prom
- http://www.math93.com/index.htm
- http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/
- http://www.crocodilus.org/index.htm
- http://perso.orange.fr/yoda.guillaume/index.htm
- http://www-cabri.imag.fr/nathalie/boulier/boulier.htm
- http://interstices.info/display.jsp?id=c_15272&portal=j_97&printView=true
- http://www.dma.ens.fr/culturemath/
- http://perso.orange.fr/jean-luc.bregeon/Page%2012.htm#Multiplication
- http://www.jabiru.com/

Liste alphabétique des planches

Presses universitaires de Franche-Comté
Université de Franche-Comté
Place Saint-Jacques - 25030 Besançon Cedex

Couverture : Bernard Bettinelli et Julie Gillet

Imprimé par Dicolor
21121 Ahuy

Dépôt légal : 2e trimestre 2007

Auteur	Bernard Bettinelli
Titre	Le carrousel des nombres Jeux numériques pour l'école primaire
Langage	Français

Caractéristiques de l'édition

Édition	Première édition
Éditeur	Presses universitaires de Franche-Comté
Diffuseur	IREM de Franche-Comté
Année	2007
Format	21 x 29,7 cm (A4) 164 pages recto verso support papier
Dépôt légal	2e trimestre 2007
ISBN	978-2-84867-181-9
ISSN	1629-7040

Public Cette publication s'adresse aux enseignants de l'école primaire mais aussi aux enseignants de collège (sixième, SEGPA) ainsi qu'à toute personne motivée par la pédagogie de l'école primaire.

Résumé Ecrite par un animateur de l'IREM professeur à l'IUFM, cette brochure présente de nombreuses situations ludiques favorisant l'apprentissage des nombres. Les jeux proposés – originaux ou adaptés de ceux du commerce – offrent des situations mathématiques variées correspondant aux connaissances et aux compétences exigibles des enfants de l'école primaire (maternelle et élémentaire). Le chapitre 1 vise les premiers apprentissages numériques à l'école maternelle. Les maîtres du cycle 2 (enfants de 5 à 7 ans) trouveront dans le chapitre 2 des situations d'introduction des opérations sur les nombres entiers. Le chapitre 3 exploite les propriétés de nos systèmes d'écriture des nombres. Le chapitre 4 développe les richesses de la multiplication et introduit les nombres décimaux et rationnels au cycle 3 (enfants de 8 à 10 ans). Enfin le chapitre 5 réunit diverses activités de compréhension des numérations anciennes.

Les planches photocopiables, supports des jeux sont intégrées au document.

Mots clés école primaire, maternelle, élémentaire, nombres, jeux mathématiques, opérations, problèmes, représentation, système décimal, calculs horaires, systèmes de numération, apprentissages numériques, numération babylonienne, égyptienne, grecque, chinoise, aztèque, maya, supports ludiques, supports pédagogiques, pavés, tableaux de nombres, Franche-Comté, presses universitaires, université.

Presses universitaires de Franche-Comté
http://presses-ufc.univ-fcomte.fr

Prix public : 10 euros

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Université de Franche-Comté

Département de Mathématiques - UFR Sciences et Techniques
16 route de Gray - 25030 BESANÇON Cedex - France

Tél. : 03 81 66 62 25 - Fax : 03 81 66 66 23
Courriel : iremfc@univ-fcomte.fr – http: //www-irem.univ-fcomte.fr/