Tracés de figures géométriques à l'aide d'un seul triangle gabarit

Groupe Rallye de l'IREM de Franche-Comté

Sommaire

Dans le cadre des exercices proposés au Rallye Mathématique de Franche-Comté [1], organisé par l'IREM de l'université de Franche-Comté, nous présentons ici quelques problèmes utilisant le triangle gabarit seul. En effet, certains problèmes proposés dans les épreuves de rallye donnent à l'enseignant des occasions de prolonger les activités de recherche initiées lors du rallye dans le cadre de la classe « ordinaire ». La situation de l'exercice 6 de la qualification et de la finale 2005 offre, selon nous, cette possibilité.

Le thème de la construction avec un gabarit permet développer des compétence inscrites dans les programmes puisqu'elles permettent de *développer des capacités d'initiatives* [2]. Il prend également sa place dans l'apprentissage de la démonstration ainsi que dans celui de l'étude des transformations dont le rôle essentiel dans l'apprentissage des mathématiques est souligné dans les programmes de collèges.

Proposer aux élèves des exercices utilisant le triangle gabarit, c'est leur permettre de faire fonctionner les transformations et leurs propriétés sous un aspect ludique.

L'utilisation du triangle gabarit sort des sentiers battus : elle n'est guère développée tant au niveau des classes de collèges que de celles de lycée. Aussi les exercices proposés dans le cadre du rallye peuvent dérouter dans un premier temps élèves et enseignants, car les conventions d'utilisation de cet outil ne sont pas nécessairement connues des uns et des autres (le gabarit peut servir de règle, mais ne peut pas être plié, etc ...). C'est pourquoi nous vous proposons ici une « progression » permettant d'utiliser cet outil, essentiellement dans le cadre de problèmes de constructions.

La construction de figures géométriques nécessite différentes étapes : tracé, justification, discussion ...

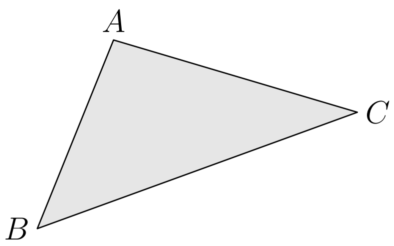
[1] On peut consulter les épreuves du Rallye sur le site de l'IREM de l'Université de Franche-Comté à l'adresse http://www-irem.univ-fcomte.fr, à la rubrique « Rallye ».

[2] Programme de Troisième des collèges.

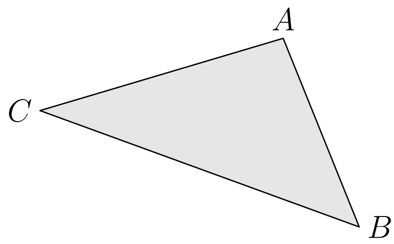
Dans le document qui suit, seuls les tracés de quelques figures élémentaires sont proposés ; d'autres sont envisageables.

Les différentes étapes de preuves sont laissées au soin du professeur, qui adaptera les méthodes au niveau de sa classe.

Ces tracés sont largement inspirés de la brochure : « Le raisonnement géométrique, avec la moisson des formes », de Bernard Bettinelli [3].



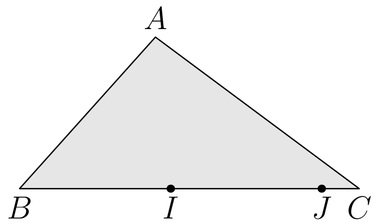
Triangle gabarit ABC de sens direct



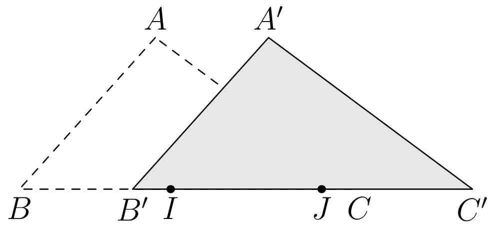
Triangle gabarit ABC de sens non direct

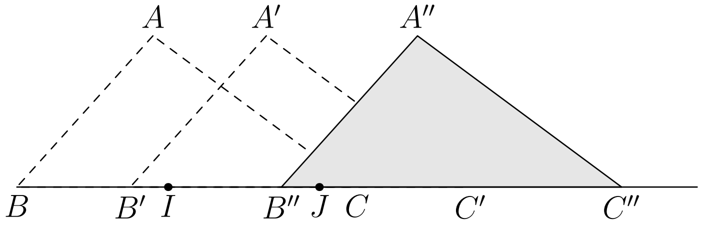
1 Utiliser le triangle gabarit comme une règle

Soit deux points I et J tels que IJ soit inférieure à la longueur du plus grand côté du triangle gabarit.
Celui-ci peut alors contenir I et J.



Puis, par translations successives du gabarit, la droite peut être tracée.





Remarque *: dans le cas où les points I et J sont « éloignés », une démarche est proposée dans la solution de l'exercice 6 de la finale 2005.*

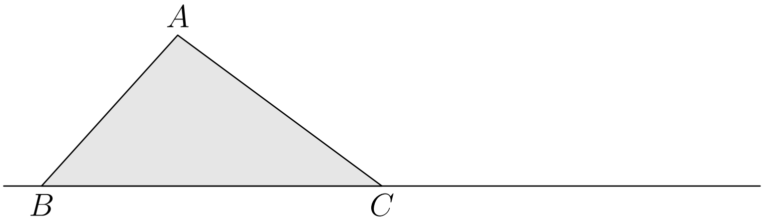
[3] ÉDITION : La moisson des formes, 1 rue de la Perrouse, 25115 Pouilley les Vignes

2 Tracer des droites parallèles

I. Premier cas : tracer deux droites parallèles sans autre contrainte

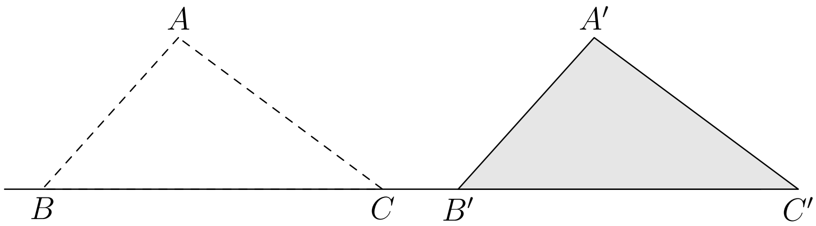
Le principe est le même qu'avec la règle et l'équerre.

On place l'un des côtés du triangle gabarit sur une droite arbitrairement donnée.



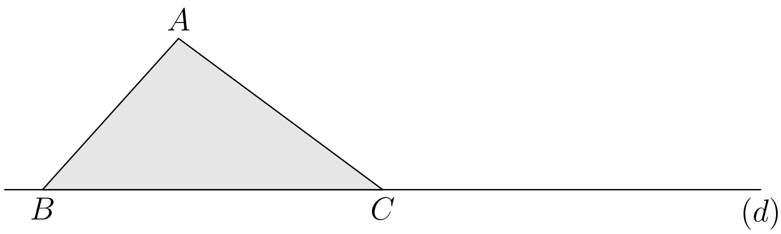
Par glissement de ce côté le long de la droite, on obtient des paires de droites parallèles :

les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, de même que les droites (AC) et $(A'C')$.

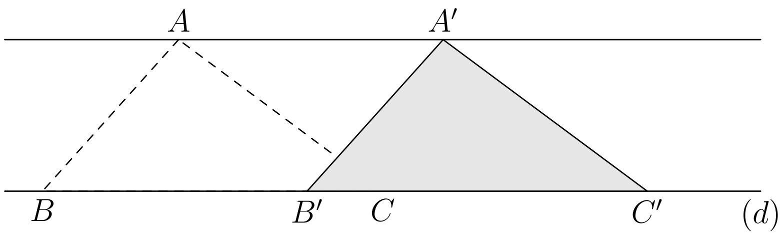


II. Deuxième cas : tracer une droite parallèle à une droite donnée $(\boldsymbol{d})$

On place l'un des côtés du triangle gabarit sur la droite (d)

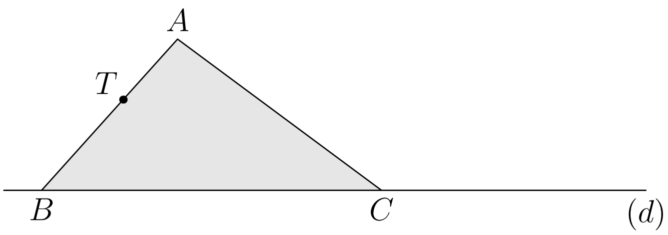


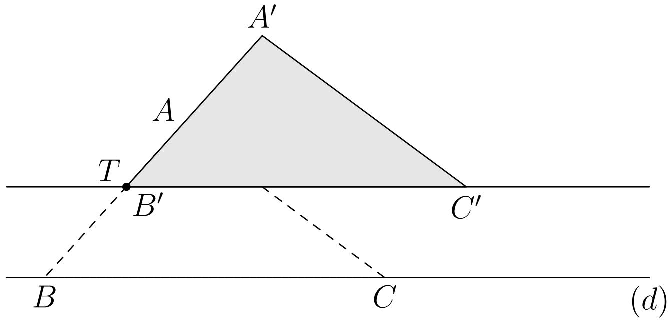
Par translation de celui-ci, la droite (AA') est parallèle à (d).



III. Troisième cas : tracer la droite parallèle à une droite donnée, passant par un point donné

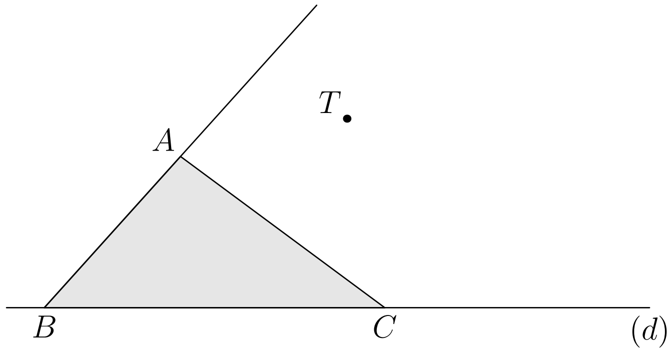
Situation 1 : la droite (d) est donnée, le point T donné est situé à une distance de (d) inférieure à la plus grande longueur d'une hauteur du triangle gabarit.



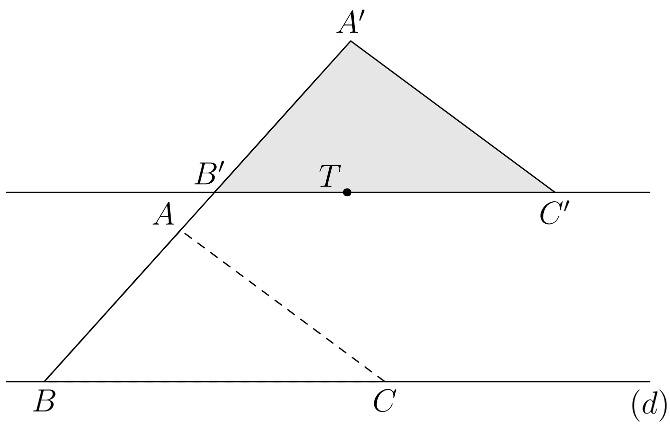


Situation 2 : la droite (d) est donnée, le point T donné est situé à une distance de (d) supérieure à la plus grande longueur d'une hauteur du triangle gabarit.

On place le côté d'extrémités B et C sur la droite (d).



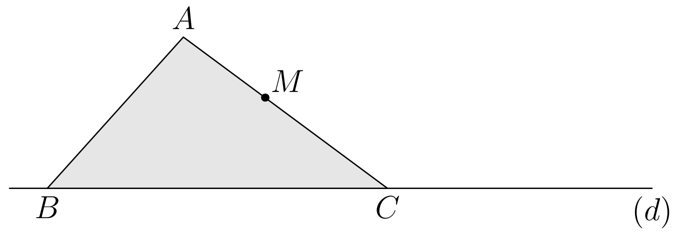
Après avoir tracé la droite (AB), on glisse le triangle gabarit sur cette droite, de telle sorte que $[B'C']$ contienne T. La droite $(B'C')$ est parallèle à (d).



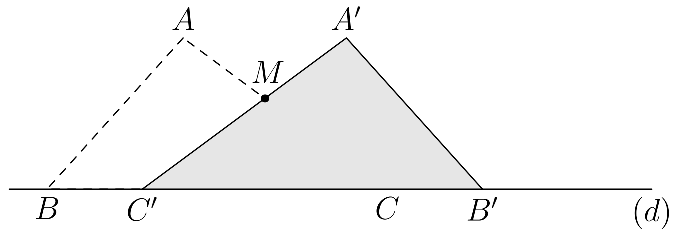
3 Tracer la droite perpendiculaire à une droite donnée, passant par un point donné

I. Le point M est « proche » de (d)

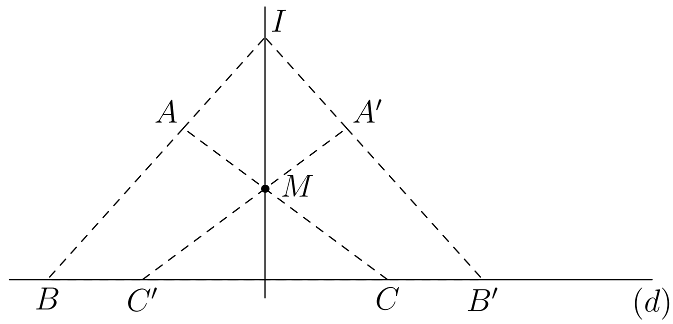
L'un des côtés étant contenu dans (d), on glisse le triangle sur cette droite, de telle sorte que le segment $[AC]$ contienne M.



Le triangle gabarit est retourné et disposé comme précédemment. Les segments $[AC]$ et $[A'C']$ sont symétriques par rapport à la droite perpendiculaire à (d) passant par M.

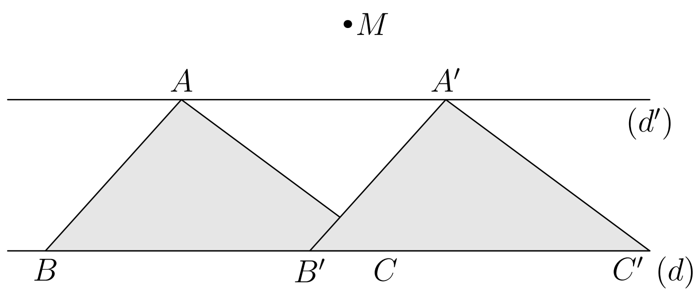


Soit I l'intersection des deux droites (AB) et $(A'B')$. La droite (IM) est perpendiculaire à (d).

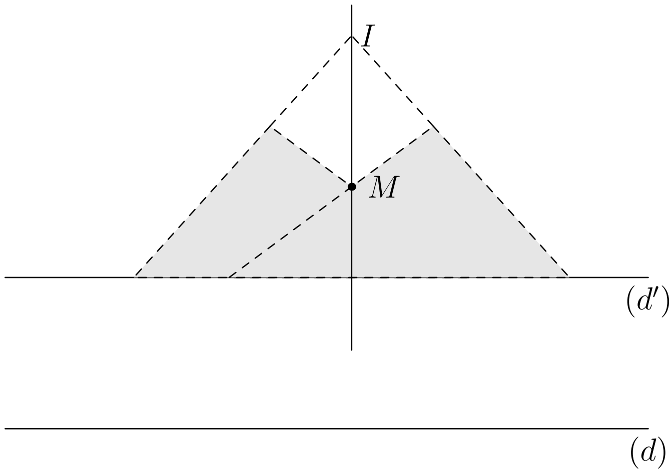


II. Le point M est « loin » de (d)

On peut se ramener au cas précédent en traçant une parallèle à (d).

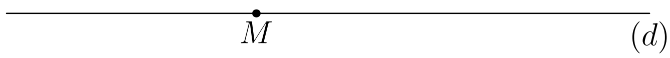


On effectue alors la même construction que précédemment.

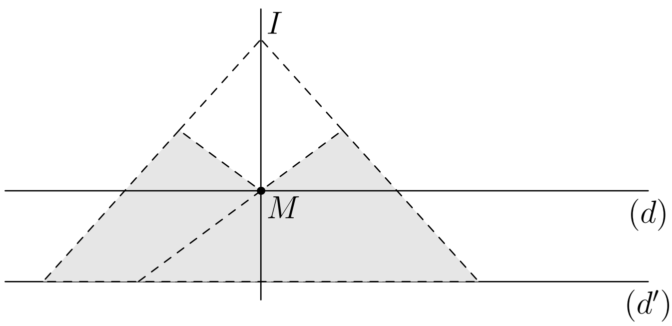


III. Le point M est sur la droite (d)

On peut se ramener au cas I. en traçant une parallèle (d') à (d).

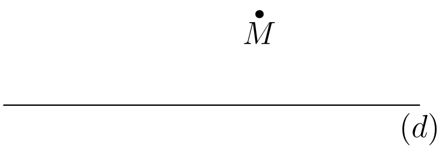


De M, on trace la perpendiculaire à (d') qui est aussi perpendiculaire à (d).

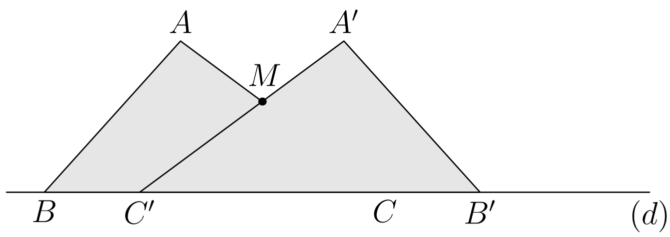


4 Tracer le symétrique d'un point donné par rapport à une droite donnée

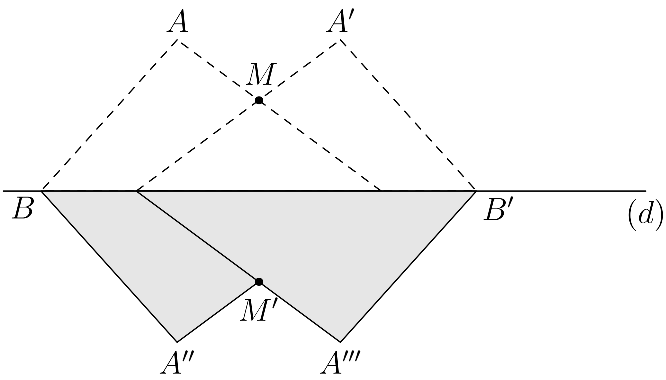
I. Le point M est « proche » de la droite (d) donnée



On trace les triangles BAC et $B'A'C'$

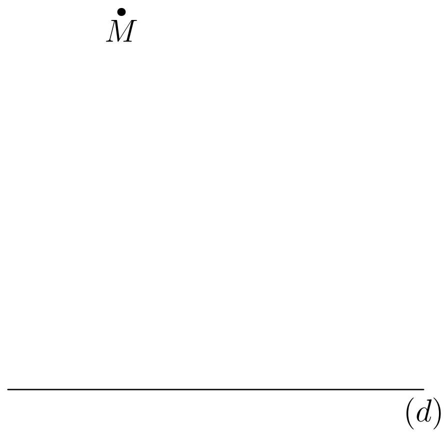


Puis les symétriques de ceux-ci par rapport à la droite (d).

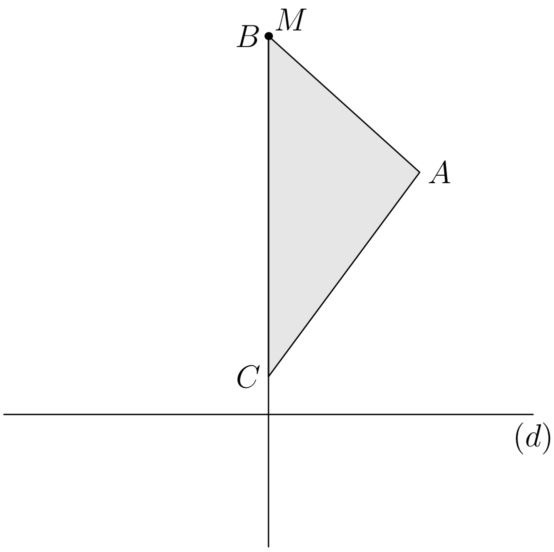


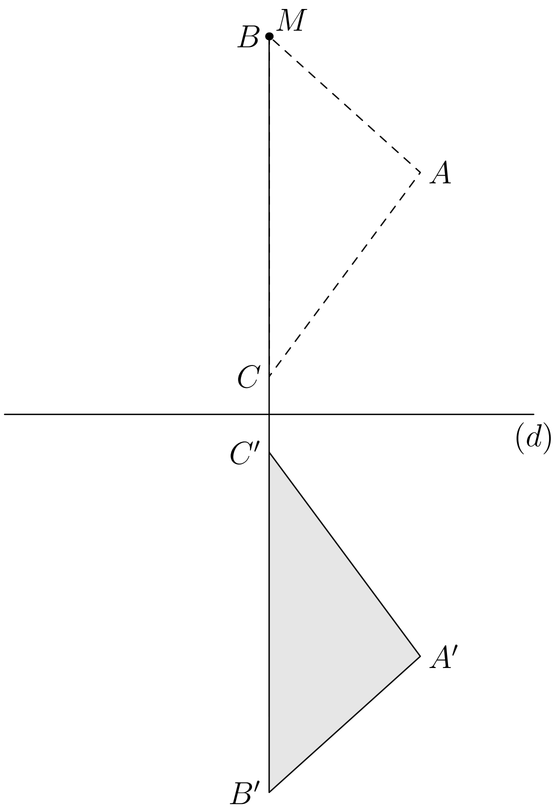
II. Le point M est plus « loin » de (d)

On peut se ramener au cas précédent en traçant la droite perpendiculaire à (d) passant par M (voir 3).



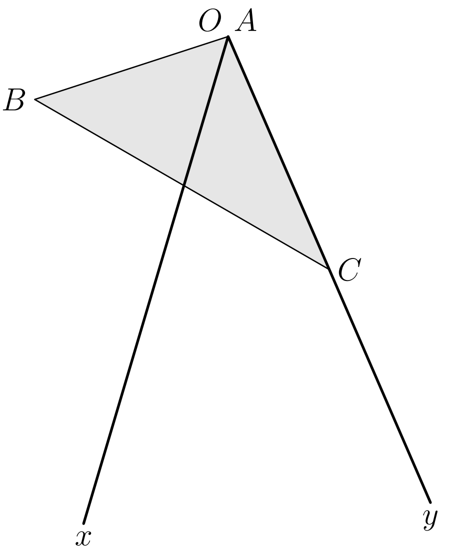
Puis on trace C', symétrique de C par rapport à (d).

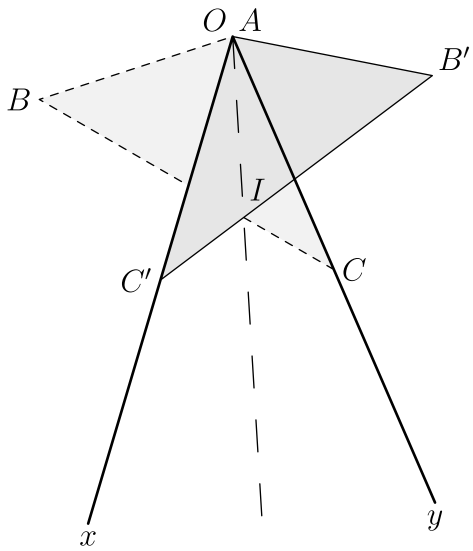




5 Tracer la bissectrice d'un secteur angulaire donné

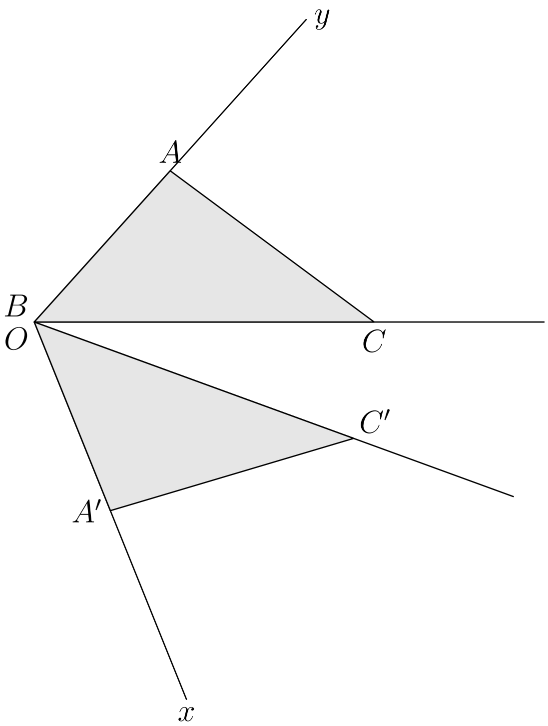
I. La mesure de l'angle est inférieure à la plus grande des mesures des angles du triangle gabarit

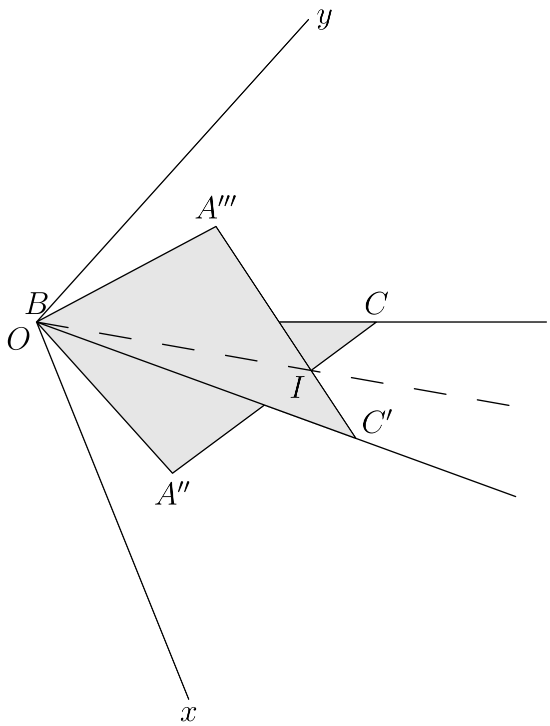




II. La mesure de l'angle est supérieure à la plus grande des mesures des angles du triangle gabarit

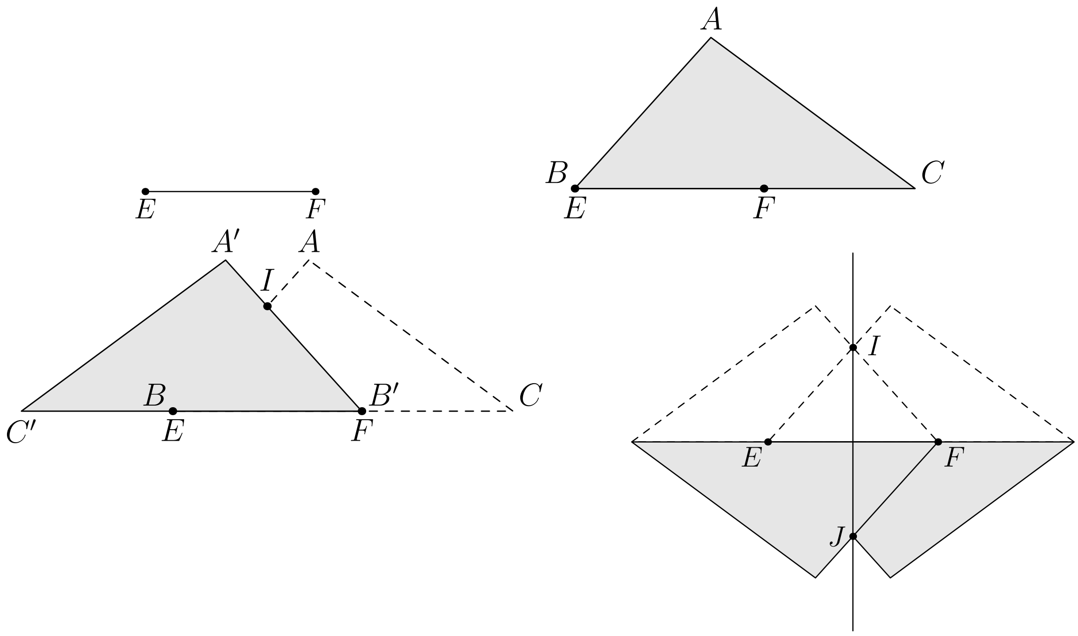
On se ramène au cas précédent en traçant un angle intermédiaire.





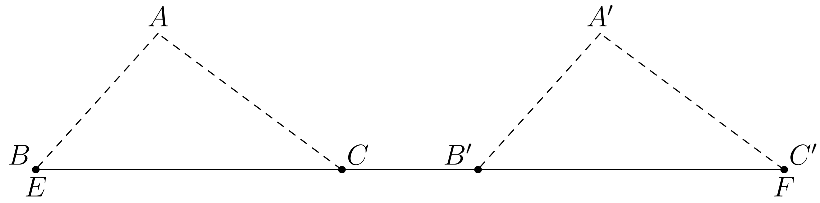
6 Tracer la médiatrice d'un segment donné

I. Le segment a une longueur inférieure à la plus grande longueur des côtés du triangle gabarit



II. Le segment a une longueur supérieure à la plus grande longueur des côtés du triangle gabarit

On se ramène au cas précédent en traçant deux points intermédiaires.



7 Quelques exercices de tracés à l'aide du seul triangle gabarit

1. Tracer les hauteurs d'un triangle donné (voir exercice 6 de la qualification 2005).
2. Tracer les médianes d'un triangle donné.
3. Tracer les bissectrices d'un triangle donné.
4. Tracer les médiatrices d'un triangle donné.
5. Deux points M et O étant donnés, tracer le symétrique de M par rapport à O.
6. Deux points étant donnés, tracer le segment dont les extrémités sont ces deux points.
7. Deux points A et B étant donnés, tracer un carré dont l'un des côtés est le segment $[AB]$.
8. Deux points A et B étant donnés, tracer un carré dont une diagonale est le segment $[AB]$.