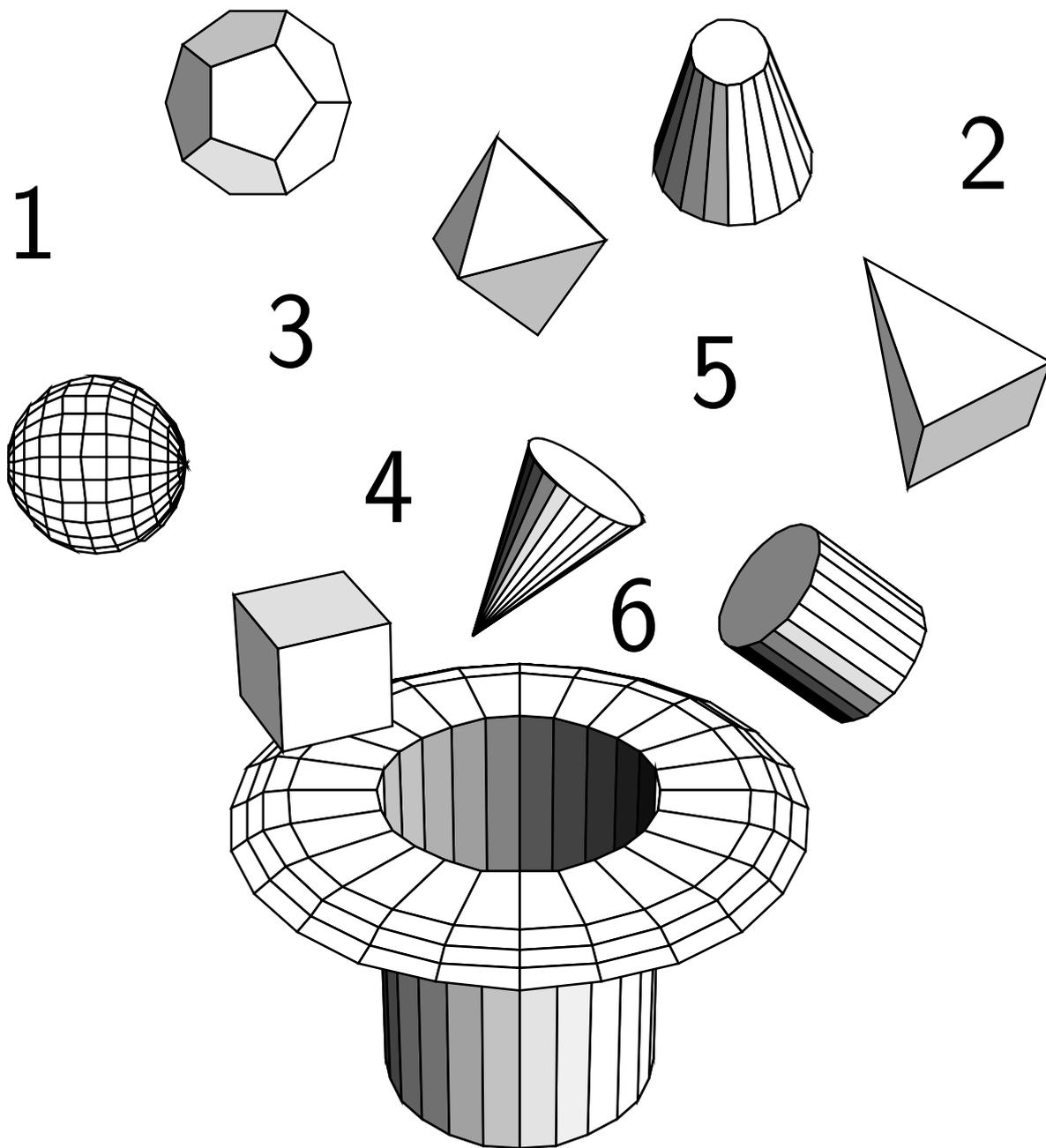


# MATHÉMATIQUES VIVANTES



**UFC**  
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

**pufc**

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCHE-COMTÉ

Bulletin de l'IREM  
de BESANÇON

n° 71 – Mai 2006



# Mathématiques vivantes

Bulletin IREM  
n° 71, Mai 2006

édité par François PÉTIARD

# Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Franche-Comté (IREM)

DIRECTRICE HOMBELINE LANGUEREAU

# TABLE DES MATIÈRES

Table des matières (François Pétiard)	ici même
Réflexion sur la liaison mathématiques-physique-chimie	1
Tracés de figures géométriques à l'aide d'un seul triangle gabarit	27



# TRAVAUX PERMETTANT UNE RÉFLEXION SUR LA LIAISON ENTRE LES MATHÉMATIQUES ET LA PHYSIQUE-CHIMIE DANS LES CLASSES DE PREMIÈRE ET TERMINALE SCIENTIFIQUES DES LYCÉES D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAUX ET TECHNOLOGIQUES

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Titration acido-basique . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>B</b>	<b>Méthode d'Euler . . . . .</b>	<b>16</b>

---

## Préambule

Depuis plusieurs années le groupe *mathématiques-physique* mène, au sein de l'IREM de Franche-Comté, une réflexion sur la nature de la « cohabitation » entre ces deux disciplines, d'une part au niveau des professeurs, de leurs pratiques respectives, dans le cadre de leurs programmes respectifs, avec leurs exigences respectives, mais surtout au niveau des élèves : plus précisément ce groupe travaille sur la recherche et l'analyse des difficultés d'ordre mathématique rencontrées par les élèves dans le cadre de l'enseignement de la physique et de la chimie, dans les classes de lycée d'enseignement général. En outre, ces échanges et cette analyse conjointe constituent une base de réflexion pour notre pratique dans le cadre des Travaux Personnels Encadrés.

Nous présentons ici deux domaines de réflexion :

**A** : Titration acido-basique

**B** : Méthode d'Euler

*Groupe mathématiques-physique de l'IREM de Franche-Comté :*  
*Françoise De LABACHELERIE*  
*Mickael DUNAND*  
*Chantal GEOFFROY*  
*Philippe GUILLAUME*  
*Michel MAGNET*  
*Françoise RABA*

## A Titrage acido-basique

Le premier article concerne une situation *chimie-mathématiques* concernant le **titrage acido-basique** en Terminale S :

### I. Chimie : analyse d'une courbe « $\text{pH} = f(V)$ »

L'exemple étudié repose sur un outil graphique incontournable du programme de chimie de TS, à forte connotation mathématique dont l'étude théorique n'est pas au programme. Il pose notamment le problème de la pertinence de la méthode couramment utilisée par le chimiste, sans justification, sans précision des hypothèses d'utilisation.

### II. Mathématiques : un devoir en temps libre en Terminale scientifique

Il s'agit de l'étude d'une fonction rationnelle mise dans une contextualisation, non pas « préfabriquée » pour la seule cause mathématique (!), mais bien réelle, et répond en cela aux demandes des programmes actuels. Cette étude est présentée sous la forme d'un sujet de « devoir-maison », dans lequel les élèves auront à utiliser les approximations affines, verront l'intérêt de l'échelle logarithmique, et seront confrontés à la mise en défaut de l'outil-calculatrice, la fonction étudiée ne pouvant être représentée globalement.

## I. Chimie : analyse d'une courbe « $\text{pH} = f(V)$ »

### 1. Contexte (connaissances mises en jeu)

La solution d'acide chlorhydrique renferme, outre l'eau, les espèces  $\text{H}_3\text{O}^+$  (appelées ions OXONIUM) et  $\text{Cl}^-$  (ions chlorure).

La solution de soude ou hydroxyde de sodium (solution basique) renferme, outre l'eau, les espèces  $\text{HO}^-$  (appelées ions HYDROXYDE) et  $\text{Na}^+$  (ions sodium).

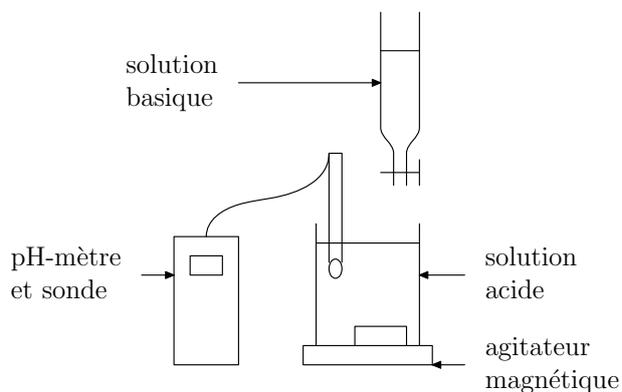
La « teneur » en ion  $\text{H}_3\text{O}^+$  d'une solution caractérise son acidité qui est évaluée par le pH avec  $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$  soit  $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$  ; la notation  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  signifiant concentration molaire volumique en ions oxonium dans le mélange (solution aqueuse) mesurée en  $\text{mol.L}^{-1}$

(en toute rigueur,  $\text{pH} = -\log\left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C_0}\right)$  avec  $C_0 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$ ).

Lors de l'ajout d'une solution de soude dans une solution d'acide chlorhydrique, il se produit une réaction modélisée par l'équation :  $\text{H}_3\text{O}^+ + \text{HO}^- = 2\text{H}_2\text{O}$

Cette réaction qui peut donner lieu à un équilibre chimique (d'où le signe égal) est ici considérée comme totale et à chaque ajout de solution basique, il y a consommation des ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  initialement présents dans la solution donc évolution du pH.

## 2. Protocole expérimental



Le but de la manipulation est de disposer « d'informations suffisantes » permettant de déterminer la concentration molaire volumique inconnue  $c_A$  (en  $\text{mol.L}^{-1}$ ) de la solution acide.

- on a introduit un volume connu  $V_A$  de solution acide dans le bécher
- la burette graduée permet la lecture du volume de base versée  $V_B$ ; la concentration molaire volumique de la solution basique est  $c_B$  (en  $\text{mol.L}^{-1}$ )
- la sonde reliée au pH-mètre permet la lecture du pH après chaque ajout de solution basique et après avoir agité le mélange.

## 3. Exploitation

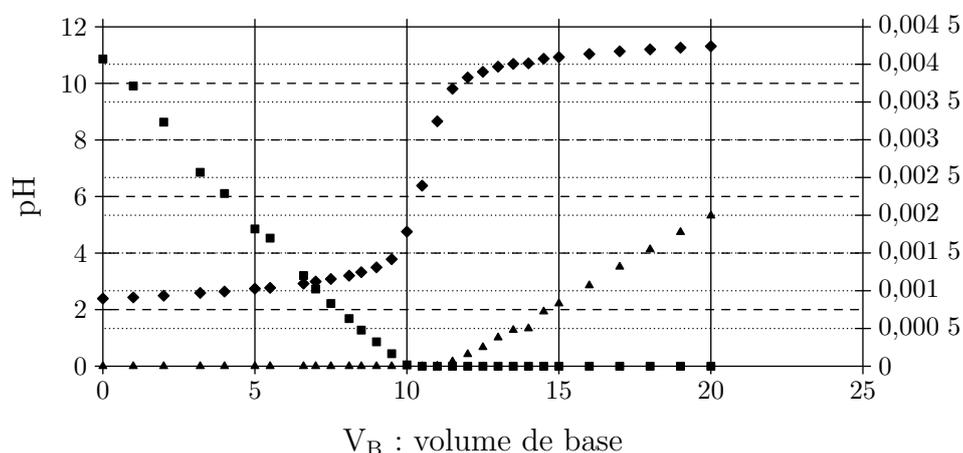
- les élèves tracent, en général à l'aide d'un tableur, la représentation graphique de la fonction  $f$  telle que  $\text{pH} = f(V_B)$  et en appliquant « la méthode des tangentes » décrite dans tous les ouvrages de chimie de Terminale S (voir devoir ci-après), ils obtiennent les coordonnées du point  $E$  appelé point d'équivalence.
- pour mieux analyser le phénomène chimique masqué par la définition du pH, on peut utiliser le tableur pour obtenir les courbes montrant l'évolution de  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  et de  $[\text{HO}^-]$  lors de l'ajout progressif de base. (voir document EXCEL page suivante pour  $[\text{H}_3\text{O}^+]$ , pour  $[\text{HO}^-]$  et pour pH).

On conclut qu'à l'équivalence, c'est-à-dire lorsqu'il y a changement de réactif limitant alors, la quantité d'ions hydroxyde versée (soit  $n_E = c_B V_E$ ) est égale à la quantité initiale d'ions oxonium (soit  $n_i = c_A V_A$ ).

On a donc la relation  $n_E = c_B V_E = n_i = c_A V_A$  d'où on extrait l'inconnue (grandeur cherchée)

$$c_A = \frac{c_B V_E}{V_A}$$

Titration acido-basique



**Remarque :** les élèves sont habitués à lire des graphiques représentant des grandeurs différentes et, par conséquent, avec des échelles et des unités qui peuvent être différentes sur un même axe.

#### 4. Approfondissement mathématique (non abordé avec les élèves)

Posons  $x = \frac{c_B V_B}{c_A V_A}$  parfois appelée « fraction titrée », puis  $[H_3O^+] = h$  et  $[HO^-] = \omega$ .

Pour toute valeur positive de  $V_B$ , on écrit la relation d'électroneutralité de la solution aqueuse (mélange situé dans le bécher) soit

$$(1) \quad [Na^+] + [H_3O^+] = [Cl^-] + [HO^-]$$

avec  $[Na^+] = \frac{c_B V_B}{V_A + V_B}$  car  $Na^+$  est apporté par la solution de soude et  $[Cl^-] = \frac{c_A V_A}{V_A + V_B}$  car  $Cl^-$  est apporté par la solution acide.

$$(1) \text{ conduit donc à } h - \omega = \frac{c_B c_A}{c_B + c_A x} (1 - x)$$

Mais pour toute solution aqueuse, le produit  $[H_3O^+].[HO^-]$  est constant pour une température fixée et vaut  $K_e$  soit  $10^{-14}$  à  $25^\circ C$ .

On peut donc substituer  $\omega$  par  $\frac{K_e}{h}$  et il vient après quelques arrangements la relation suivante :

$$h^2(c_B + c_A x) - h c_B c_A (1 - x) - K_e(c_B + c_A x) = 0$$

$h$  est fonction de  $x$ .

L'équivalence correspondra au cas où  $x = 1$ .

Remarque : sans introduire  $x$ , on peut reprendre les relations et parvenir à :

$$(2) \quad h - \omega = \frac{c_A V_A - c_B V_B}{V_A + V_B}$$

Cette dernière relation étant plus simple à établir pour les élèves.

Là aussi, on peut donc substituer  $\omega$  par  $\frac{K_e}{h}$  et il vient après quelques arrangements la relation suivante :

$$h^2(V_A + V_B) - h(c_A V_A - c_B V_B) - K_e(V_A + V_B) = 0$$

que l'on peut réécrire en divisant tout par  $V_A$  :

$$\boxed{h^2 \left( 1 + \frac{V_B}{V_A} \right) - h \left( c_A - c_B \frac{V_B}{V_A} \right) - K_e \left( 1 + \frac{V_B}{V_A} \right) = 0}$$

## II. Mathématiques : devoir en temps libre

### 1. Énoncé

#### 1. Titrage acidobasique

Dans un bécher contenant une solution d'acide chlorhydrique, on ajoute progressivement une solution de soude.

La concentration en ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  de la solution contenue dans le bécher dépend du volume de solution de soude versée.

On note

- La concentration en ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  de la solution contenue dans le bécher (en moles par litre) :  $h$ ;
- Pour la solution d'acide chlorhydrique :  $c_A$  sa concentration (en moles par litre), et  $V_A$  son volume (en litres) ;
- Pour la solution de soude :  $c_B$  sa concentration (en moles par litre) et  $V_B$  le volume versé dans le bécher (en litres).

L'écriture de lois chimiques (relation d'électroneutralité, produit ionique de l'eau, ...) a permis d'obtenir la relation :

$$h^2 \left( 1 + \frac{V_B}{V_A} \right) - h(c_A - c_B) - 10^{-14} \left( 1 + \frac{V_B}{V_A} \right) = 0$$

1. Exprimer le rapport  $\frac{V_B}{V_A}$  en fonction de  $h$ ,  $c_A$  et  $c_B$  ;
2. On suppose que  $c_A = c_B$  ; déterminer pour quelle valeur de  $h$  on a :  $V_A = V_B$ .

#### 2. Étude d'une fonction

1. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{D}$  des valeurs de  $x$  telles que  $\frac{-x^2 + 10^{-2}x + 10^{-14}}{x^2 + 10^{-2}x - 10^{-14}}$  est calculable.
2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathcal{D}$  par  $f(x) = \frac{-x^2 + 10^{-2}x + 10^{-14}}{x^2 + 10^{-2}x - 10^{-14}}$ , et soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .
  - (a) Étudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles.
  - (b) Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
  - (c) Résoudre l'inéquation :  $f(x) > 0$ .
  - (d) Donner l'allure générale de la représentation graphique de  $f$ .

La fonction  $f$  étudiée dans cette question est celle associant le quotient  $\frac{V_B}{V_A}$  à la concentration  $x$  en ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  dans le bécher en moles par litre,  $\left( \frac{V_B}{V_A} = f(x) \right)$ , dans le cas particulier où les concentrations (en moles par litre) de la solution d'acide chlorhydrique et de la solution de soude sont égales à  $10^{-2}$ .

### 3. Point d'équivalence

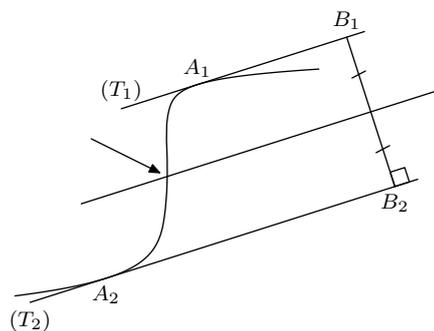
Dans la pratique, en TP de chimie, ce n'est pas la courbe de la fonction précédente  $f$  qui est obtenue, mais celle de la fonction associant le pH de la solution contenue dans le bécher au volume  $V_B$  de soude versée (nous la noterons  $g$ ).

On admet que la fonction  $g$  est dérivable et que sa fonction dérivée  $g'$  admet un extremum. Le volume équivalent, noté  $V_E$ , est la valeur en laquelle cet extremum est atteint, et le point d'équivalence est le point de la courbe  $(\mathcal{C}_g)$  d'abscisse  $V_E$ .

Pour déterminer ce point d'équivalence, deux méthodes sont proposées dans les programmes de chimie de TS :

- L'utilisation de la courbe de la fonction  $g'$  (on recherche les extrema de  $g'$ );
- La « **méthode des tangentes** » (telle qu'elle figure dans les manuels scolaires de chimie) :

- On choisit un point  $A_1$  sur la courbe  $(\mathcal{C})$ .
- On trace la tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $A_1$  (notée  $(T_1)$ )
- On détermine un deuxième point, noté  $A_2$ , de  $(\mathcal{C})$ , tel que la tangente à  $(\mathcal{C})$  en ce point, (notée  $(T_2)$ ), soit parallèle à  $(T_1)$ .
- On choisit un point  $B_1$  de  $(T_1)$  et un point  $B_2$  de  $(T_2)$  tels que  $(B_1B_2)$  soit perpendiculaire à  $(T_1)$  (et donc à  $(T_2)$ ).



**Le point cherché est le point d'intersection de la médiatrice du segment  $[B_1B_2]$  et de la courbe  $(\mathcal{C})$ .**

Nous nous intéressons à la pertinence de cette dernière méthode pour déterminer les « points d'équivalence », c'est-à-dire les extrema éventuels de la dérivée d'une fonction.

Pour cela, nous allons étudier un cas particulier :

Soit  $u$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} u(x) = x^3 & \text{pour } x \leq 0 \\ u(x) = \frac{x^3}{4} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  ;  
 (b) Donner les variations de la fonction  $u'$  ;  
 Préciser le minimum de  $u'$  et en quelle valeur il est atteint.
2. (a) Tracer la courbe représentative de  $u$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  ;  
 (b) Soit  $(T_1)$  la tangente à la courbe  $(\mathcal{C}_u)$  au point d'abscisse 2 ; déterminer l'équation de  $(T_1)$  ;  
 (c) Déterminer les tangentes à la courbe  $(\mathcal{C}_u)$  parallèles à  $(T_1)$  ;  
 (d) Utiliser la méthode des tangentes pour déterminer graphiquement le « point d'équivalence ».
3. Conclure quant à la pertinence de la « méthode des tangentes » sur cet exemple.

## 2. Éléments de réponse au devoir

Les parties écrites en italique sont des remarques complémentaires que l'on peut faire lors de la correction du devoir, ou des commentaires et approfondissements destinés aux enseignants.

### 1. Titration acidobasique

1. De l'égalité :  $h^2 \left(1 + \frac{V_B}{V_A}\right) - h(c_A - c_B \frac{V_B}{V_A}) - 10^{-14} \left(1 + \frac{V_B}{V_A}\right) = 0$ , on déduit

$$\frac{V_B}{V_A} (h^2 + hc_B - 10^{-14}) = -h^2 + hc_A + 10^{-14}, \text{ soit : } \boxed{\frac{V_B}{V_A} = \frac{-h^2 + hc_A + 10^{-14}}{h^2 + hc_B - 10^{-14}}}$$

2. Par hypothèse,  $c_A = c_B$ . On a alors :

$$\begin{aligned} V_A = V_B &\iff \frac{V_B}{V_A} = 1 \\ &\iff -h^2 + hc_A + 10^{-14} = h^2 + hc_B - 10^{-14} \\ &\iff h^2 = 10^{-14} \end{aligned}$$

Or  $h > 0$ , donc :  $\boxed{V_A = V_B \iff h = 10^{-7}}$

**Interprétation chimique :** lorsque  $c_A = c_B$ , si  $V_A = V_B$ , on atteint l'équivalence et dans ce cas  $\text{pH} = -\log(h) = 7$  (la solution du bécher est neutre, c'est de l'eau avec  $\text{Na}^+$  et  $\text{Cl}^-$ ).

### 2. Étude d'une fonction

1.  $\frac{-x^2 + 10^{-2}x + 10^{-14}}{x^2 + 10^{-2}x - 10^{-14}}$  est calculable  $\iff x^2 + 10^{-2}x - 10^{-14} \neq 0$

Les racines du trinôme  $x^2 + 10^{-2}x - 10^{-14}$  sont  $\frac{-10^{-2} + \sqrt{10^{-4} + 4.10^{-14}}}{2}$  et  $\frac{-10^{-2} - \sqrt{10^{-4} + 4.10^{-14}}}{2}$ .

Donc  $\mathcal{D} = ]-\infty ; \alpha_1[ \cup ]\alpha_2 ; +\infty[$   
avec  $\alpha_1 = \frac{-10^{-2} - \sqrt{10^{-4} + 4.10^{-14}}}{2}$  et  $\alpha_2 = \frac{-10^{-2} + \sqrt{10^{-4} + 4.10^{-14}}}{2}$ .

**Recherche de valeurs approchées de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  :** on peut écrire  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sous la forme :  $\alpha_1 = \frac{-10^{-2} - 10^{-2}\sqrt{1 + 4.10^{-10}}}{2}$  et  $\alpha_2 = \frac{-10^{-2} + 10^{-2}\sqrt{1 + 4.10^{-10}}}{2}$ .

On peut alors utiliser l'approximation affine tangente  $t$  de la fonction  $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$  au voisinage de 0 :  $t(x) = g(0) + g'(0)(x-0)$ , soit  $t(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ .

On en déduit que :  $\sqrt{1 + 4.10^{-10}} \approx 1 + 2.10^{-10}$ . D'où  $\boxed{\alpha_1 \approx -10^{-2} \text{ et } \alpha_2 \approx 10^{-12}}$ .

2. (a) **Limites en l'infini** :  $f$  est une fonction rationnelle, donc sa limite en l'infini est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur en l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2}, \text{ soit :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1} \text{ et de même : } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1}$$

**La droite d'équation  $y = -1$  est donc asymptote à la courbe ( $\mathcal{C}_f$ ) en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .**

**Limites en  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  :**

- Signe du dénominateur  $d(x) = x^2 + 10^{-2}x - 10^{-14}$  de  $f(x)$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$+\infty$		
signe de $x^2 + 10^{-2}x - 10^{-14}$		+	0	-	0	+

Le trinôme  $ax^2 + bx + c$  est du signe de  $a$  à l'extérieur des racines.

- Limite du numérateur  $n(x) = -x^2 + 10^{-2}x + 10^{-14}$  de  $f(x)$  en  $\alpha_1$  :  
 $\alpha_1$  est racine de  $x^2 + 10^{-2}x - 10^{-14}$ , donc :  $\alpha_1^2 + 10^{-2}\alpha_1 - 10^{-14} = 0$  et :  
 $-\alpha_1^2 + 10^{-14} = 10^{-2}\alpha_1$ .

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow \alpha_1} n(x) = 2 \cdot 10^{-2}\alpha_1$$

$$\text{Or } \alpha_1 < 0, \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow \alpha_1} n(x) < 0.$$

$$\text{On a de même : } \lim_{x \rightarrow \alpha_2} n(x) = 2 \cdot 10^{-2}\alpha_2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \alpha_2} n(x) > 0.$$

- $\lim_{x \rightarrow \alpha_1} n(x) < 0$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_1 \\ x < \alpha_1}} d(x) = 0$  avec  $d(x) > 0$ , donc  $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_1 \\ x < \alpha_1}} f(x) = -\infty}$ .

$$\text{De même } \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_1 \\ x > \alpha_1}} f(x) = +\infty}, \quad \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_2 \\ x < \alpha_2}} f(x) = -\infty}, \quad \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_2 \\ x > \alpha_2}} f(x) = +\infty}.$$

**Les droites d'équation :  $x = \alpha_1$  et  $x = \alpha_2$  sont asymptotes à la courbe ( $\mathcal{C}_f$ ).**

- (b) **Étude des variations** :  $f$  est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition  $\mathcal{D}$ , et pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}$ ,

$$f'(x) = \frac{(-2x + 10^{-2})(x^2 + 10^{-2}x - 10^{-14}) - (2x - 10^{-2})(-x^2 + 10^{-2}x + 10^{-14})}{(x^2 + 10^{-2}x - 10^{-14})^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2 \cdot 10^{-2}x^2 - 2 \cdot 10^{-16}}{(x^2 - 10^{-2}x - 10^{-14})^2} \quad f'(x) < 0 \text{ pour tout } x \in \mathcal{D}$$

On en déduit que :

**$f$  est strictement décroissante sur chacun des intervalles  $] -\infty ; \alpha_1[$ ,  $]\alpha_1 ; \alpha_2[$  et  $]\alpha_2 ; +\infty[$**

Puis le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$+\infty$
variations de $f$	-1 ↘ -∞	+∞ ↘ -∞	+∞ ↘ -1	

(c) **Étude du signe :**

– Sur  $] -\infty; \alpha_1[$  :  $f$  est strictement décroissante et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ , d'où  $f(x) < 0$ .

– Sur  $] \alpha_1 ; \alpha_2[$  :  $f$  est continue et strictement décroissante,  $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_1 \\ x > \alpha_1}} f(x) = +\infty$  et

$\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_2 \\ x < \alpha_2}} f(x) = -\infty$ , d'où l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta_1$  sur cet intervalle.

– Sur  $] \alpha_2 ; +\infty[$  : de même l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta_2$  sur cet intervalle.

Or  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont les racines du trinôme  $n(x) = -x^2 + 10^{-2}x + 10^{-14}$ , avec  $\beta_1 < \beta_2$ .

D'où  $\beta_1 = \frac{10^{-2} - \sqrt{10^{-4} + 4 \cdot 10^{-14}}}{2}$  et  $\beta_2 = \frac{10^{-2} + \sqrt{10^{-4} + 4 \cdot 10^{-14}}}{2}$  (on peut remarquer que :  $\beta_1 = -\alpha_2$  et  $\beta_2 = -\alpha_1$ )

– On résume les résultats ci-dessus dans le tableau de variations suivant :

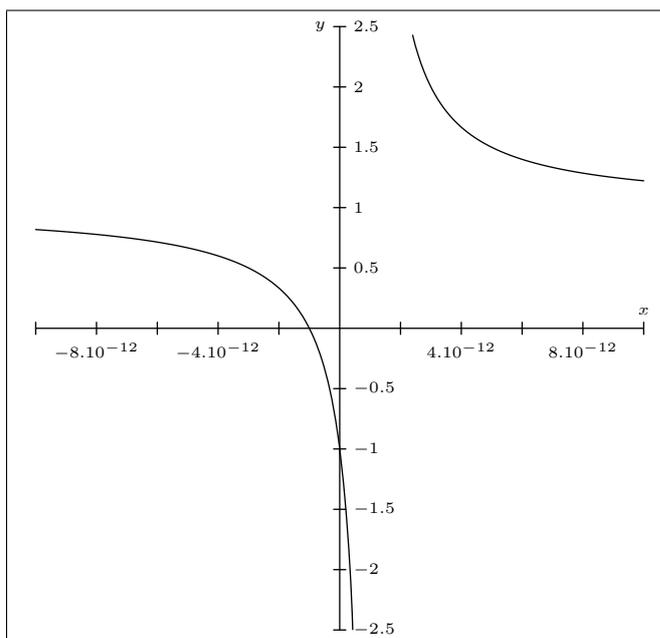
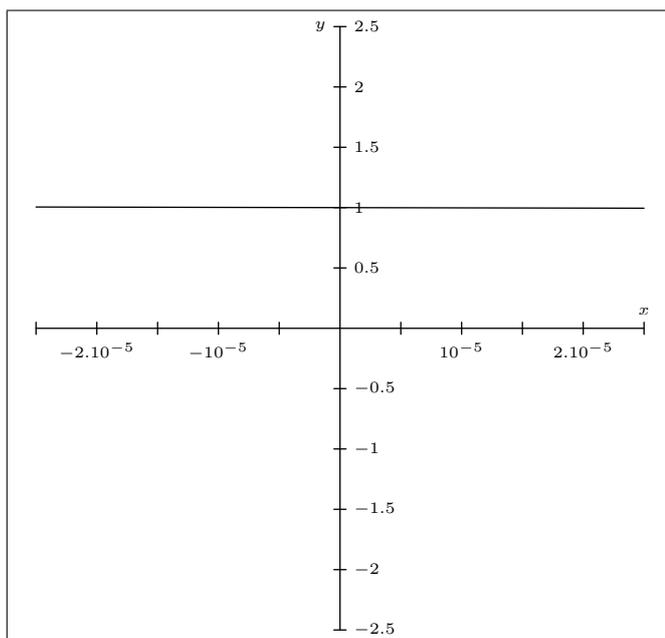
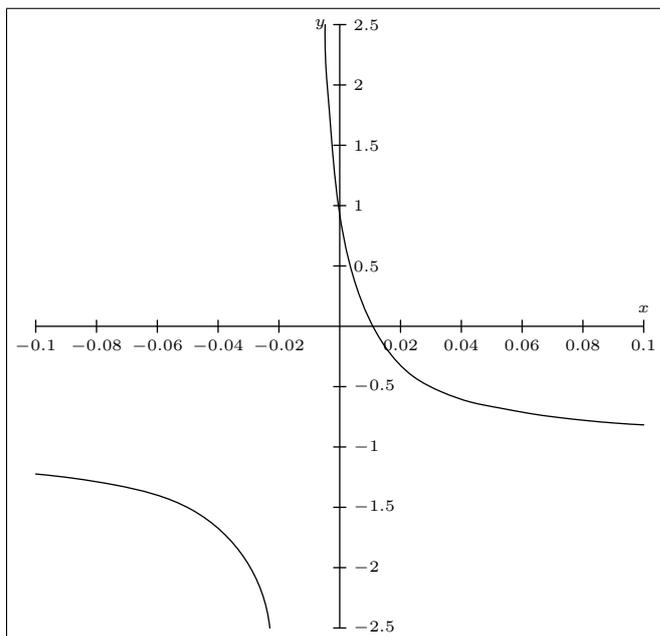
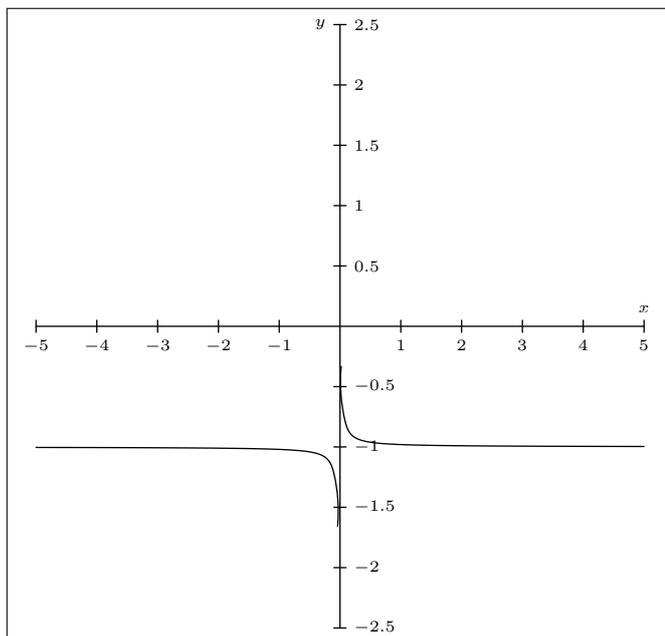
$x$	$-\infty$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$+\infty$
variations de $f$	-1		$+\infty$		$+\infty$	
		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	
			0		0	
		$-\infty$		$-\infty$		-1

On en déduit que :  **$f$  est strictement positive sur  $] \alpha_1 ; \beta_1[ \cup ] \alpha_2 ; \beta_2[$**

– On pouvait également trouver ce résultat à l'aide d'un tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$+\infty$
signe de $-x^2 + 10^{-2}x + 10^{-14}$		-	0	+	0	-
signe de $x^2 + 10^{-2}x - 10^{-14}$		+	0	-	0	+
signe de $\frac{-x^2 + 10^{-2}x + 10^{-14}}{x^2 + 10^{-2}x - 10^{-14}}$		-	+	0	-	+

(d) **Représentation graphique de  $f$**  : exemples de graphiques obtenus avec le logiciel « DERIVE » avec différentes fenêtres.



On constate qu'il n'est pas possible d'obtenir, avec la même « fenêtre » une visualisation significative des propriétés de  $f$  à la fois au voisinage de  $\alpha_2$  et de  $\beta_2$ .

### III. Point d'équivalence

Dans le cadre de l'expérience décrite,  $x$  représente la concentration en ions  $\text{H}_3\text{O}^+$ , et  $f(x)$  un rapport de volume. On s'intéresse donc aux valeurs positives de  $x$  pour lesquelles le réel  $f(x)$  est également positif, c'est-à-dire à  $x$  appartenant à  $] \alpha_2 ; \beta_2 [$  ( $\alpha_2 \approx 10^{-12}$  et  $\beta_2 \approx 10^{-2}$ ). Cela correspond au fait qu'au début de l'expérience, la concentration en ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  de la solution contenue dans le bécher est égale à  $10^{-2}$ . Cette concentration décroît

ensuite lorsque l'on verse de la soude, la valeur minimale,  $10^{-12}$ , correspondant à une solution ne contenant que de la soude.

Pour une meilleure visualisation du phénomène observé, au lieu d'utiliser comme variable la concentration  $x$ , on utilise le pH de celle-ci, donné par la formule :  $\text{pH} = -\log(x)$ .

La fonction « log » n'est abordée au cours de mathématiques qu'en fin de terminale S : elle est définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(10)}$ . On montre que :  $\log(a) = b \iff a = 10^b$ .

Soit :  $\text{pH} = -\log(x) \iff x = 10^{-\text{pH}}$ .

Dans la pratique, les élèves tracent, à partir de données obtenues par l'expérience, la courbe représentant le pH de la solution contenue dans le bécher en fonction du volume  $V_B$  de soude versée.

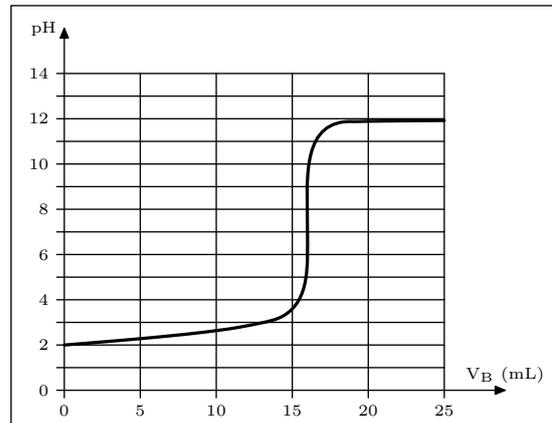
Or :  $\text{pH} = -\log([\text{H}_3\text{O}^+])$

$$\text{pH} = -\log\left(f^{-1}\left(\frac{V_B}{V_A}\right)\right)$$

On obtient une courbe dont l'allure est donnée ci-contre :

Cette courbe représente la fonction :

$$x \mapsto -\log\left(f^{-1}\left(\frac{x}{V_A}\right)\right)$$



Courbe de titrage d'une solution d'acide chlorhydrique par une solution de soude

L'étude qui suit montre la non-validité de la méthode des tangentes.

- (a) En tant que fonction polynôme par intervalles, la fonction  $u$  est dérivable sur  $] -\infty ; 0[$  et sur  $]0 ; +\infty[$ .

$$\text{Sur } ] -\infty ; 0[, u'(x) = 3x^2 \text{ et sur } ]0 ; +\infty[, u'(x) = \frac{3x^2}{4}.$$

**Étude de la dérivabilité en 0 :**

$$\text{-- Pour } x < 0 : \frac{u(x) - u(0)}{x} = x^2, \text{ d'où } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{u(x) - u(0)}{x} = 0.$$

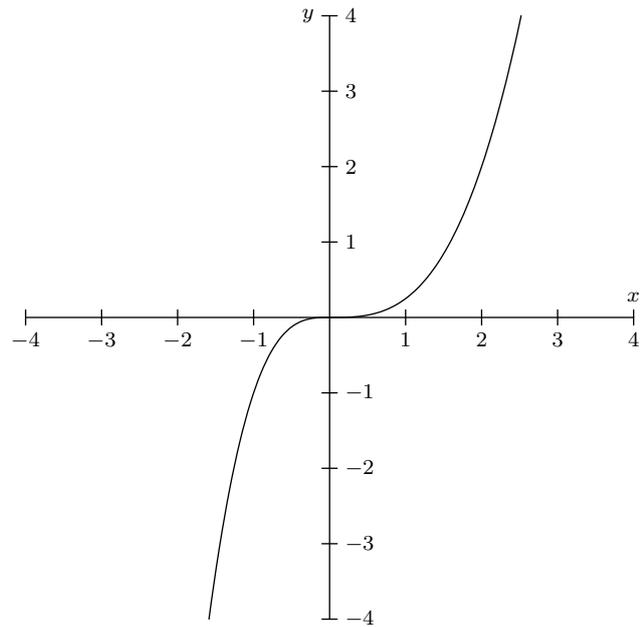
$$\text{-- Pour } x > 0 : \frac{u(x) - u(0)}{x} = \frac{x^2}{4}, \text{ d'où } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{u(x) - u(0)}{x} = 0.$$

Donc  $u$  est dérivable en 0 et  $u'(0) = 0$ .

La fonction  $u$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus  $u'$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- (b) La fonction  $u'$  est continue, strictement décroissante sur  $] -\infty ; 0[$  et strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$  : elle atteint donc son minimum en 0 et ce minimum vaut  $u'(0) = 0$ .

2. (a) Représentation graphique de la fonction  $u$ .



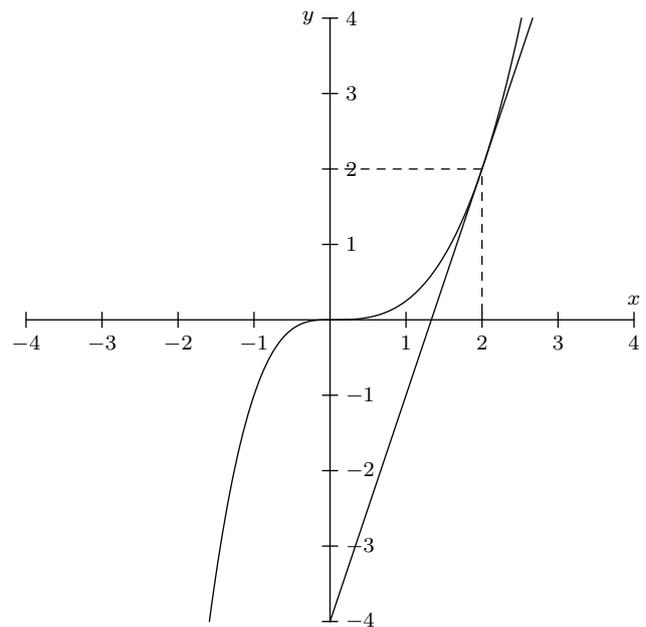
- (b)

L'équation de  $(T_1)$  est :

$$y = u(2) + u'(2)(x - 2)$$

$$y = 2 + 3(x - 2)$$

soit :  $y = 3x - 4$



(c)

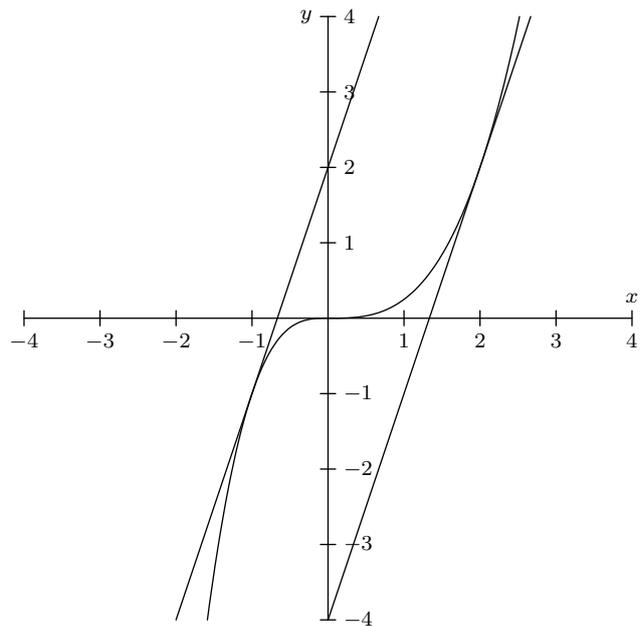
$(\mathcal{C}_u)$  admet une tangente parallèle à  $(T_1)$  en  $A(a ; h(a))$  si et seulement si  $u'(a) = 3$ .

Les valeurs possibles pour  $a$  sont 2 et  $-1$ .

Donc  $(\mathcal{C}_u)$  admet une tangente  $(T_2)$  strictement parallèle à  $(T_1)$  en  $A(-1 ; u(-1))$ .

L'équation de  $(T_2)$  est :

$$y = 3x + 2.$$



(d) Appliquons la « méthode des tangentes » :

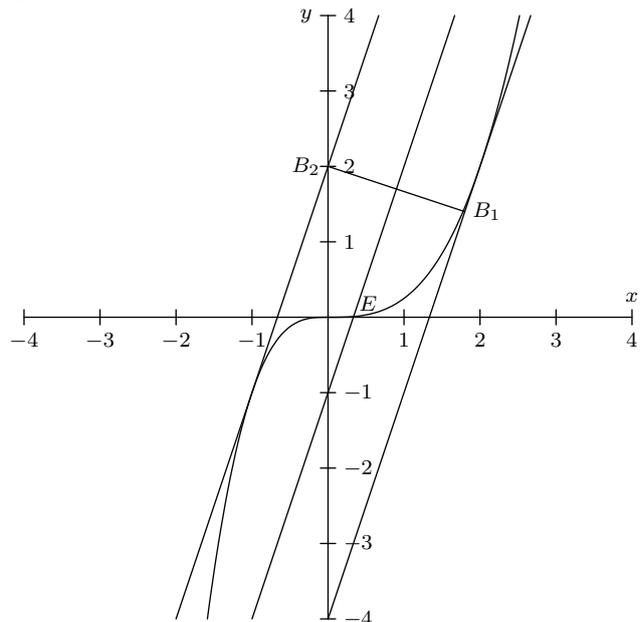
Soit  $B_2(0 ; 2)$  un point de  $(T_2)$ .

La droite perpendiculaire à  $(T_2)$  passant par  $B_2$  a pour équation  $y = -\frac{1}{3}x + 2$ .

Elle coupe  $(T_1)$  en  $B_1\left(\frac{9}{5} ; \frac{7}{5}\right)$ .

La médiatrice  $(d)$  de  $[B_1B_2]$  a comme équation :  $y = 3x - 1$ .

La droite  $(d)$  coupe la courbe  $(\mathcal{C}_u)$  au point  $E$ .



**Remarque :** la fonction  $u'$  atteint son minimum en 0, mais  $(d)$  ne coupe pas la courbe  $(\mathcal{C}_u)$  au point d'abscisse 0.

### 3. Conclusion :

la fonction  $u'$  atteint son minimum en 0, et ce minimum est égal à 0. Le « point d'équivalence » est donc, par définition, le point O de coordonnées  $(0 ; 0)$  tandis que par la méthode des tangentes, le point obtenu n'est pas le point O.

**La « méthode des tangentes » ne permet pas, dans ce cas, d'obtenir le « point d'équivalence ».**

### Remarques concernant la méthode des tangentes :

– Dans un repère non orthonormal, la condition «  $(B_1B_2)$  perpendiculaire à  $(T_1)$  et  $(T_2)$  » n'est pas valide. On peut alors prendre deux points,  $B_1$  sur  $(T_1)$  et  $(B_2)$  sur  $T_2$ , et

remplacer le tracé de la médiatrice du segment  $[B_1B_2]$  par celui de la parallèle à  $(T_1)$  et  $(T_2)$  passant par le milieu de  $[B_1B_2]$ .

- La « méthode des tangentes » ne permet pas, en général, de déterminer le point d'inflexion d'une fonction. **Examinons cependant le cas particulier d'une fonction dérivable dont la courbe représentative admet un centre de symétrie :**

On suppose qu'une fonction  $u$  est définie et dérivable sur un intervalle ouvert  $\Omega$ , et que sa courbe représentative admet pour centre de symétrie le point  $I(a ; b)$ .

**1. Montrons que  $I$  est un point d'inflexion :**

Le point  $I(a ; b)$  est un centre de symétrie de la courbe représentative de  $u$  signifie que, pour tout  $h$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $(a + h)$  et  $(a - h)$  appartiennent à  $\Omega$ ,

$$(3) \quad u(a + h) + u(a - h) = 2b$$

- La fonction  $u$  étant dérivable sur  $\Omega$ , on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis : il existe un réel  $\theta$  de  $]0 ; 1[$  tel que

$$u(a + h) = u(a) + hu'(a + \theta h) = b + hu'(a + \theta h).$$

On a alors :

$$u(a - h) = 2b - u(a + h) = b - hu'(a + \theta h)$$

- Une équation de la tangente à la courbe représentative de  $u$  en  $I$  est :

$$y = u'(a)(x - a) + b$$

Calculons la différence des ordonnées entre les points d'abscisse  $a + h$  (respectivement  $a - h$ ) sur la courbe et cette tangente :

$$u(a + h) - y = b + hu'(a + \theta h) - u'(a)(a + h - a) - b = h[u'(a + \theta h) - u'(a)]$$

$$u(a - h) - y = b - hu'(a + \theta h) - u'(a)(a - h - a) - b = -h[u'(a + \theta h) - u'(a)]$$

Ceci montre bien que les quantités  $[u(a + h) - y]$  et  $[u(a - h) - y]$  sont de signes contraires, donc que la courbe « traverse » sa tangente en  $I$  (dans le cas particulier où  $u'(a + h) - u'(a) = 0$  pour tout  $h$ , alors on a un segment de droite).

- 2. Montrons que les droites  $(T_1)$  et  $(T_2)$ , tangentes à la courbe représentative de  $u$ , respectivement en  $(a + h)$  et  $(a - h)$  sont parallèles ( $h$  étant un réel quelconque tel que  $a + h$  et  $a - h$  appartiennent à  $\Omega$ ) :**

De la relation (3)  $u(a + h) + u(a - h) = 2b$ , on déduit que :

$$u'(a + h) - u'(a - h) = 0, \text{ d'où : } u'(a + h) = u'(a - h)$$

**Conclusion :** les tangentes à la courbe représentative de  $u$  en  $(a + h)$  et  $(a - h)$  ont des coefficients directeurs égaux, et sont donc parallèles.

- 3. Appliquons la « méthode des tangentes » avec les droites  $(T_1)$  et  $(T_2)$  :**

Équation de  $(T_1)$  :  $y = u(a + h) + u'(a + h)[x - (a + h)],$

soit :  $y = u'(a + h)x + u(a + h) - (a + h)u'(a + h)$

Équation de  $(T_2)$  :  $y = u(a - h) + u'(a - h)[x - (a - h)]$

soit :  $y = u'(a - h)x + u(a - h) - (a - h)u'(a - h)$

Équation de  $(T)$  :  $y = u'(a + h)x + b - au'(a + h)$

$(T)$  coupe bien la courbe représentative de  $u$  en  $I$ , point d'inflexion.

**En conclusion :** la méthode utilisée en chimie de Terminale scientifique pour trouver le point d'inflexion est correcte si les conditions suivantes sont remplies :

- la courbe admet un centre de symétrie (au moins localement) et la fonction est dérivable;
- les tangentes à la courbe en des points situés d'un même côté de ce centre de symétrie ont des directions toutes différentes (de façon à ce que les points  $A_1$  et  $A_2$  choisis de part et d'autre du centre de symétrie aient des abscisses symétriques par rapport à  $a$ ).

La fonction considérée dans l'exemple du devoir, fonction associant le pH au volume  $V_B$ , est dérivable, et sa courbe représentative peut être approchée par une courbe ayant un centre de symétrie. La méthode utilisée est donc valide, à condition de choisir  $A_1$  et  $A_2$  pas trop loin du point d'équivalence.

## B Méthode d'Euler

Le deuxième article porte sur une situation *physique-mathématiques* en Terminale scientifique.

### I. Physique : modélisation de la force de frottement fluide

Il s'agit de construire un modèle mathématique à partir de données expérimentales. Cette étude se fait avec tableur, et vise à obtenir la meilleure adéquation entre les valeurs expérimentales et deux modélisations mathématiques proposées.

L'étude met en œuvre la résolution d'équations différentielles par la méthode d'Euler dans un contexte concret.

### II. Mathématiques : une activité en Première scientifique

La méthode d'Euler est abordée en Première scientifique dans le cas où la fonction dérivée  $f'$  est donnée explicitement sans recours à une équation différentielle.

Dans l'exemple présenté, l'activité peut être complétée par une étude comparative des courbes représentant les solutions approchées obtenues par la méthode d'Euler et de la fonction vérifiant les conditions.

Un autre choix pour la fonction dérivée  $f'$  (un choix qui ne permettrait pas aux élèves de trouver une fonction  $f$  satisfaisant aux conditions) mettrait en évidence l'intérêt de la méthode d'Euler ou, plus généralement, d'une méthode de résolution numérique.

En Terminale Scientifique, cette méthode est réinvestie pour la résolution d'équations différentielles du premier ordre, en particulier pour l'introduction de la fonction exponentielle, solution de l'équation différentielle  $y' = y$ .

## I. Physique : modélisation de la force de frottement fluide

### 1. Objectifs

#### **Résoudre « numériquement » une équation différentielle ?**

La résolution d'une équation différentielle est souvent perçue par les élèves comme une question abstraite et ardue. La méthode d'Euler permet de ramener cette résolution à l'application de simples opérations d'addition et de multiplication.

Le remplacement d'une relation différentielle à une équation aux différences finies implique que le résultat n'est pas, strictement parlant, une solution de l'équation différentielle : la fonction solution (si elle existe) n'est pas trouvée. On n'obtient seulement ici qu'une *série de valeurs numériques* et ces valeurs sont calculées avec une *approximation* (qu'il faut évidemment contrôler).

La nécessité d'articuler les utilisations en physique et la présentation de la méthode (donc sa validité) en mathématiques est alors évidente. Outre le passage d'une méthode abstraite à des opérations simples, l'approche numérique permet de concrétiser les équations différentielles : des exemples simples peuvent être étudiés qui peuvent faire comprendre ce que peut signifier, par exemple, qu'une dérivée dépend de la valeur de la fonction dont elle dépend...

Cette séance fait suite à l'étude expérimentale de la chute d'une bille dans un fluide.

Le but est ici d'utiliser les données expérimentales obtenues précédemment afin de **construire un modèle** en termes de force des frottements avec un outil de résolution numérique : ici la méthode d'Euler.

**Le principe de cette étude est le suivant :**

On formule différentes hypothèses plausibles concernant la forme de la relation liant la valeur de la force représentant les frottements fluides à la vitesse  $v$  du solide en mouvement dans le fluide.

L'application de la deuxième loi de Newton au solide en mouvement permet alors d'établir une équation différentielle dont la fonction inconnue est l'expression, en fonction du temps, de la vitesse  $v(t)$ .

La résolution de cette équation différentielle par la méthode d'Euler fournit une courbe représentative de la fonction cherchée.

Si l'hypothèse de départ concernant l'expression de la force de frottement est bonne, une courbe obtenue par la méthode d'Euler doit passer au plus près des points expérimentaux. Si, au contraire, il est impossible d'obtenir un recouvrement acceptable, l'hypothèse de départ doit être revue.

Sur la base d'une analyse physique du désaccord, une nouvelle hypothèse est alors testée. Les élèves sont conduits à examiner successivement les deux hypothèses simples  $f = k.v$  et  $f = k'.v^2$  concernant le modèle des frottements fluides qui interviennent au cours de la chute.

On constate alors qu'il est possible de déterminer dans chaque cas la valeur de  $k$  ou de  $k'$  de manière à obtenir une courbe passant au plus près des points expérimentaux. La qualité de ce recouvrement dépend du fluide, des conditions de chute et de l'objet en chute.

On montre néanmoins que, quel que soit le modèle envisagé pour la force  $f$ , il est toujours possible de distinguer deux régimes d'évolution (transitoire puis permanent) et de déterminer la valeur d'une vitesse limite de chute.

**2. Exploitation**

Quels que soient les objets et les fluides utilisés pour cette étude, celle-ci se déroule sur **deux séances expérimentales** :

- la première est consacrée à l'étude expérimentale de la chute d'un solide dans un fluide.
- la seconde va permettre d'explorer différents modèles pour la force de frottement fluide :  
 $f = k.v$  ou  $f = k'.v^2$ .

Chaque élève dispose dans son tableur de la feuille de calcul (annexe a) page 21) dans laquelle sont reportées les coordonnées des points expérimentaux et le calcul des vitesses, ainsi que leur représentation graphique dans le plan  $(t, v)$  (cf. annexe b) page 22).

**a) Hypothèses**

Les élèves ont eu à lire le texte d'Huygens dans lequel Huygens discute deux hypothèses concernant la relation liant la force des frottements à la vitesse  $v$  du solide dans l'air.

L'hypothèse la plus simple à tester, est une force de frottement de type  $f = k.v$ .

**b) Premier essai de modélisation :  $f = k.v$** **Établissement de l'équation différentielle**

*Montrer qu'avec l'hypothèse faite concernant les frottements, la vitesse  $v$  satisfait à une équation différentielle de la forme :  $\frac{dv}{dt} = A.v + B$*

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la bille est soumise à trois forces : son poids  $\vec{P}$ , la poussée d'Archimède  $\vec{F}$  et la force de frottement fluide  $\vec{f}$ .

La deuxième loi de Newton s'écrit alors :  
 $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = M\vec{a}$  ( $\vec{a}$  étant l'accélération du centre d'inertie de la bille)

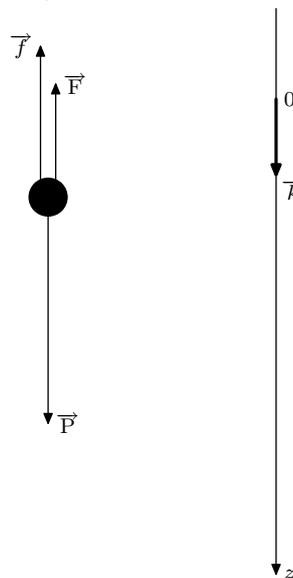
soit  $P_z \cdot \vec{k} + F_z \cdot \vec{k} + f_z \cdot \vec{k} = M a_z \cdot \vec{k}$

d'où  $P_z + F_z + f_z = M \cdot a_z$ .

avec  $P_z = +P$  ( $P = M \cdot g$ )

$F_z = -F$  ( $F = m \cdot g$ ,  $m$  étant la masse de fluide déplacé)

$f_z = -f$  et par hypothèse,  $f = k \cdot v$



On obtient donc la relation suivante (tout étant unidirectionnel) :

$$\begin{aligned} M \cdot g - m \cdot g - k \cdot v &= M \cdot \frac{dv_z}{dt} \\ (M - m)g - k \cdot v &= M \cdot \frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{M} v + \frac{(M - m)g}{M} \end{aligned}$$

ou  $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{M} v + \left(1 - \frac{\rho \cdot V}{M}\right) g$   
 que l'on peut écrire sous la forme

$$(4) \quad \boxed{\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{M} v + \alpha \cdot g} \quad \text{avec } \alpha = 1 - \frac{\rho \cdot V}{M}$$

On pose :

$$(5) \quad A = -\frac{k}{M}$$

$$(6) \quad \text{et } B = \left(1 - \frac{\rho \cdot V}{M}\right) g$$

**Montrer que l'estimation de la vitesse limite permet de calculer la valeur de A.**

**Effectuer alors les calculs de A et de B en s'aidant de l'enregistrement.**

A est déduit de la relation (4) : lorsque  $v$  est constante (**vitesse limite, régime asymptotique ou permanent**), la dérivée de  $v$  est nulle; alors  $0 = -\frac{k}{M} \cdot v_{\text{lim}} + \alpha \cdot g$

d'où  $\frac{k}{M} = \frac{\alpha \cdot g}{v_{\text{lim}}}$  donc  $A = -\frac{\alpha \cdot g}{v_{\text{lim}}}$

B est donné par la relation (6) :  $B = \alpha.g = \frac{(M - m)g}{M}$ .

**Remarque** : il existe une autre possibilité pour déterminer B :

on définit le temps caractéristique  $\tau$  associé à une chute verticale comme étant la date qui correspond, pour la courbe  $v = f(t)$ , au point d'intersection de la tangente à l'origine ( $v = 0$ ) et de l'asymptote ( $v_{\text{lim}}$ ) ;

à  $t = 0$ ,  $v = 0$  et l'équation différentielle (4) donne  $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = \alpha.g$ .

Cela signifie que l'équation de la tangente à l'origine de la courbe  $v = f(t)$  est  $w(t) = \alpha.g.t$ .

Pour  $t = \tau$ ,  $v = v_{\text{lim}}$  donc  $v_{\text{lim}} = \alpha.g.\tau$  d'où  $\alpha.g = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}$

On obtient  $\alpha.g = \frac{4,23}{0,43} = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

Enfin,  $\frac{k}{M} = \frac{\alpha.g}{v_{\text{lim}}} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} \cdot \frac{1}{v_{\text{lim}}} = \frac{1}{\tau}$   $\frac{k}{M} = \frac{1}{\tau}$

$\frac{k}{M} = \frac{1}{0,43} = 2,3 \text{ s}^{-1}$

Avec ces valeurs (exprimées en unités SI<sup>1</sup>), l'équation différentielle s'écrit alors numériquement de la façon suivante :

$$\frac{dv}{dt} = -2,3v + 9,8$$

### c) Résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler

On rappelle aux élèves le principe de cette méthode :

plutôt que de rechercher l'expression mathématique de la fonction  $v = f(t)$ , on va résoudre numériquement l'équation différentielle, c'est-à-dire utiliser une méthode qui consiste à obtenir les valeurs approchées de  $f(t)$  et d'en déduire la représentation graphique.

Les vitesses, calculées à partir des accélérations, sont données par la relation :

$$\frac{dv}{dt} = -2,3v + 9,8$$

À condition de choisir  $\delta t$  suffisamment petit, on peut écrire qu'on a pratiquement  $a = \frac{\delta v}{\delta t}$

d'où  $\delta v = a.\delta t$  (avec  $a = A.v + B$ )

$\delta v$  étant la variation de la valeur  $v$  de la vitesse pendant la durée  $\delta t$ .

Si l'on connaît les valeurs de A et de B et les conditions initiales, on peut trouver de proche en proche les différentes valeurs de  $v$  au cours du temps.

– Conditions initiales connues : à la date  $t_0 = 0$ , on a  $v = 0$ .

– On choisit une valeur  $\delta t$  assez petite : c'est le **pas du calcul**.

À la date  $t_1 = t_0 + \delta t$ , la vitesse est devenue

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + \delta v_0 \\ &= v_0 + a_0.\delta t \end{aligned}$$

Cette nouvelle valeur de  $v_1$  est calculable puisque  $v_0$ ,  $a_0$  et  $\delta t$  ont des valeurs connues.

<sup>1</sup>SI : Système International d'unités ; voir <http://www.bipm.fr/fr/si/>

– On utilise la même méthode pour calculer la vitesse  $v_2$  :

$$v_2 = v_1 + \delta v_1 = v_1 + a_1 \delta t$$

et ainsi de suite, soit

$$\boxed{v_{i+1} = v_i + \delta v_i = v_i + a_i \cdot \delta t}$$

On définit alors deux nouvelles colonnes de la feuille pour les calculs de  $v_i$  et  $a_i$  :

**Colonne A** :  $\delta t$  : 0,00 ; 0,02 ; 0,04 ; ...

**Colonne B** : on porte la valeur 0 comme première valeur de la vitesse calculée (cellule B2).

**Colonne C** : on écrit la formule de l'accélération correspondante (C2).

$$a_i = -2,3 \cdot v_i + 9,8 \quad C2 = -2,3 * B2 + 9,8$$

**Colonne B** : à la ligne suivante, on peut écrire alors la formule de la vitesse sous la valeur zéro (cellule B3) :

$$v_{i+1} = v_i + a_i \cdot \delta t. \quad B3 = B2 + C2 * 0,02$$

On recopie alors jusqu'au bas du tableau de valeurs les contenus des cellules B3 (mais pas B2!) et C2 et l'on demande la construction de la courbe représentative de  $v_{\text{calc}} = f(t)$ .

**On constate que la courbe — annexe c), courbe 1 page 23 — passe au-dessous des points expérimentaux. L'hypothèse  $f = k \cdot v$  n'est pas satisfaisante.**

**d) Deuxième essai de modélisation : avec l'hypothèse  $f = k' \cdot v^2$**

Il s'agit maintenant de tester de la même façon l'hypothèse  $f = k' \cdot v^2$ .

Cela signifie qu'il faut ré-exprimer l'équation différentielle et déterminer les valeurs des constantes A et B, avec  $\frac{dv}{dt} = A \cdot v^2 + B$ . Dans ce cas, seule la valeur de A est modifiée (puisque à  $t = 0$ ,  $v = 0$  donc  $a_0 = B$ ).

Quand  $v = v_{\text{lim}} = 4,24 \text{ m.s}^{-1}$ , on a

$$A = -\frac{B}{(v_{\text{lim}})^2} = -0,548 \text{ m}^{-1}$$

L'équation différentielle à résoudre est  $\frac{dv}{dt} = -0,548 \cdot v^2 + 9,8$  soit  $a_i = -0,548 \cdot v_i^2 + 9,8$

On remplace donc, dans la colonne C, la formule de calcul de  $a_{\text{calc}}$  par  $-0,548 * B2 \wedge 2 + 9,8$

**Ici, on constate que la courbe — annexe c), courbe 2 page 23 —, passe au voisinage des points expérimentaux.**

### 3. Conclusion

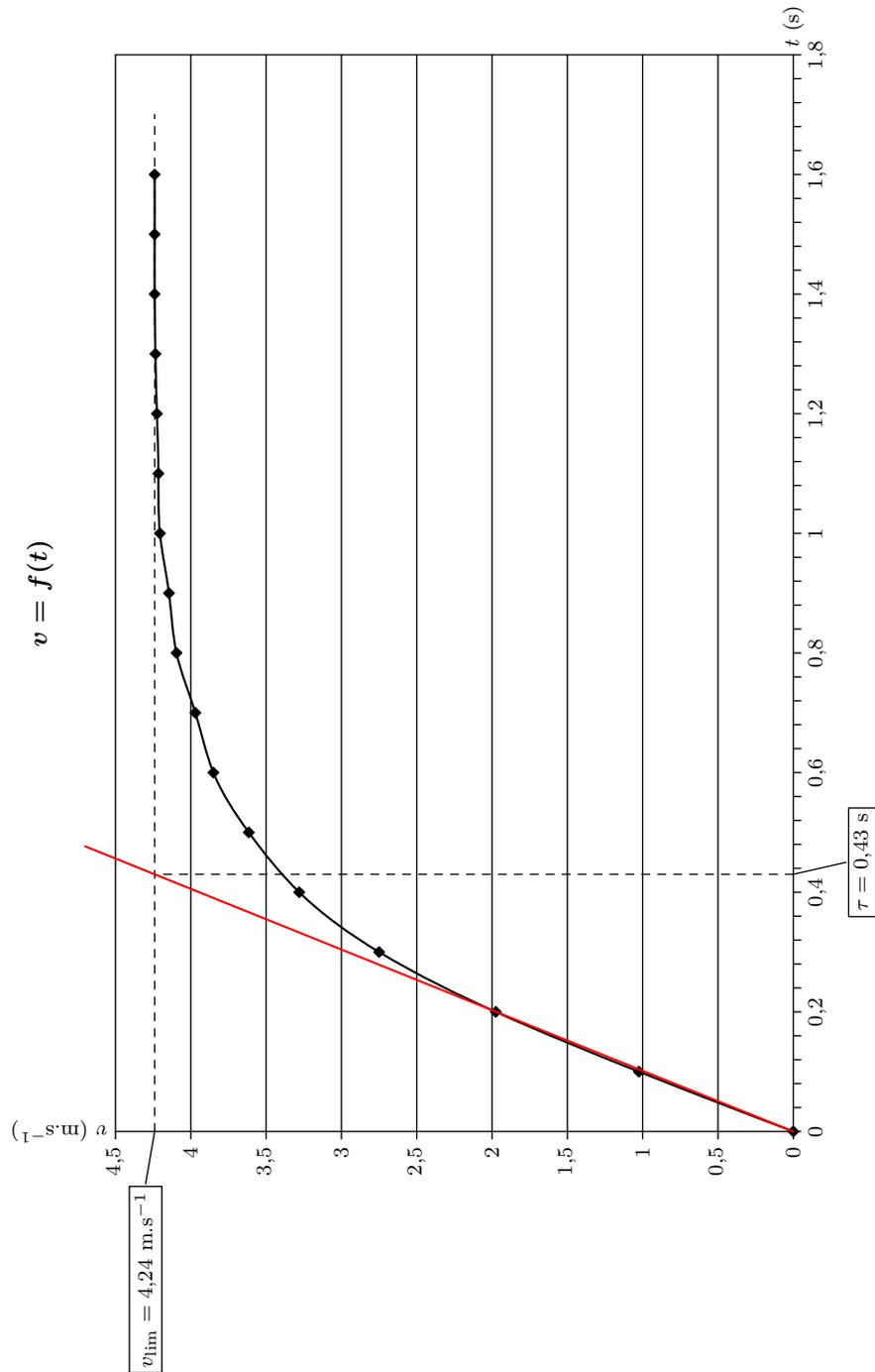
1. Dans le cadre de notre étude, les résultats précédents nous permettent de dire que, des deux hypothèses,  $f = k \cdot v$  ou  $f = k' \cdot v^2$ , celle qui modélise le mieux les frottements visqueux au cours de la chute étudiée est  $f = k' \cdot v^2$ . Dans ce cas, **les frottements peuvent être modélisés par une force qui augmente avec le carré de la vitesse.**
2. Les courbes obtenues dans les deux cas montrent qu'il est toujours possible de distinguer dans le phénomène **deux régimes d'évolution** : un régime transitoire accéléré suivi d'un régime permanent à vitesse constante (la somme des forces est alors nulle) et de déterminer la valeur d'une vitesse limite de chute.
3. Elles montrent également que l'accélération du mouvement varie toujours de manière continue entre la valeur initiale  $g \left(1 - \frac{\rho V}{M}\right)$  et la valeur finale **0**.

## 4. Annexes

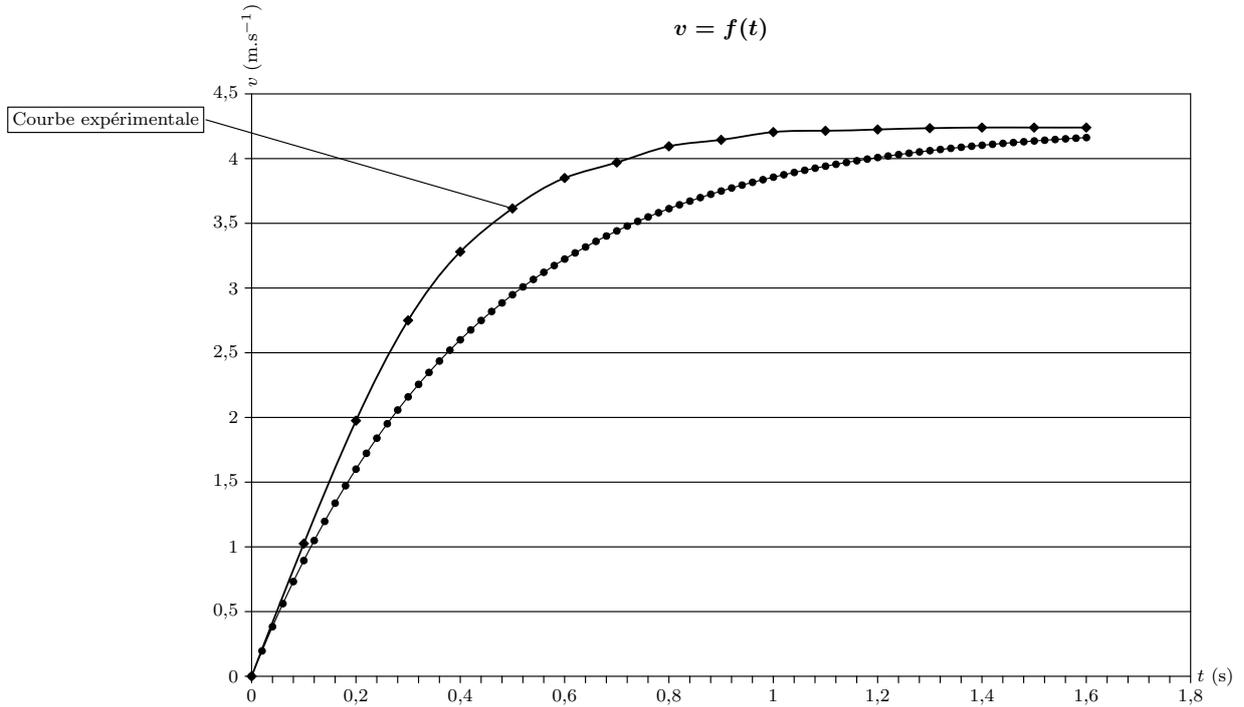
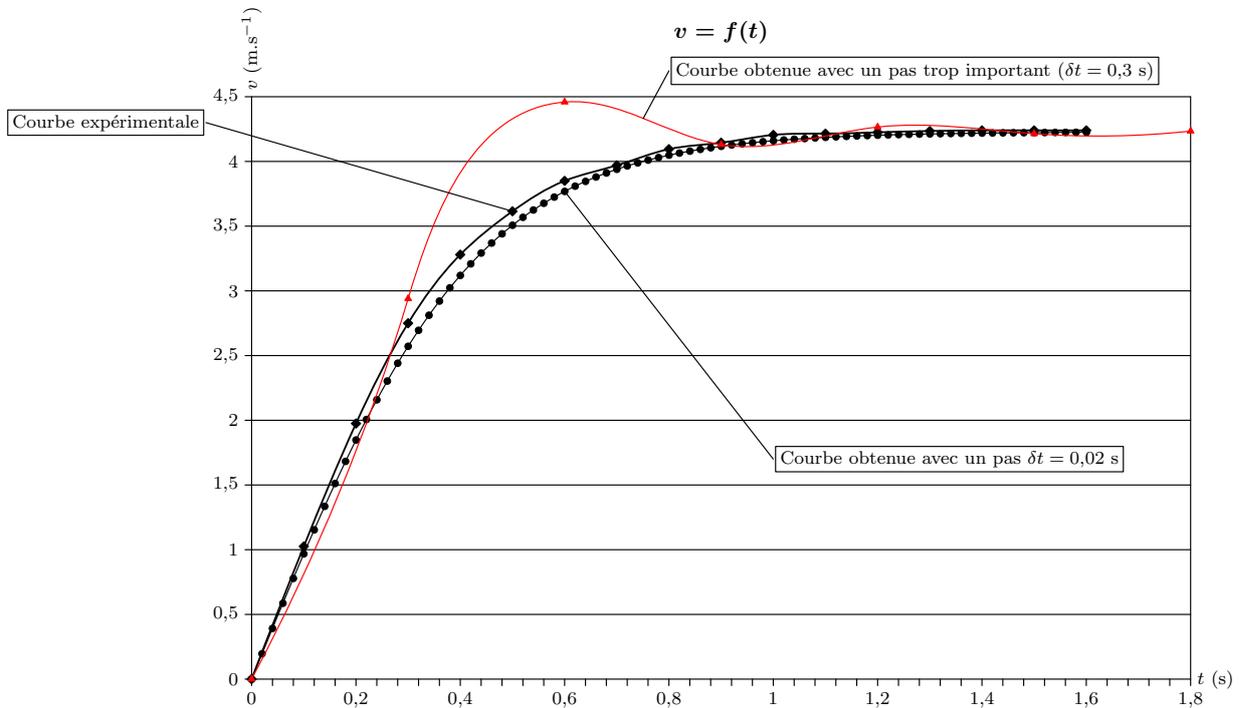
## a) Feuille de calcul

	A	B	C
1	<b>t(s)</b>	<b>z(m)</b>	<b>v<sub>i</sub>(m/s)</b>
2	0	0	0
3	0,1	0,051	1,025
4	0,2	0,205	1,975
5	0,3	0,446	2,75
6	0,4	0,755	3,28
7	0,5	1,102	3,615
8	0,6	1,478	3,85
9	0,7	1,872	3,97
10	0,8	2,272	4,095
11	0,9	2,691	4,145
12	1	3,101	4,205
13	1,1	3,532	4,215
14	1,2	3,944	4,225
15	1,3	4,377	4,235
16	1,4	4,791	4,24
17	1,5	5,225	4,24
18	1,6	5,639	4,24
19	1,7	6,073	

## b) Courbe déduite des mesures



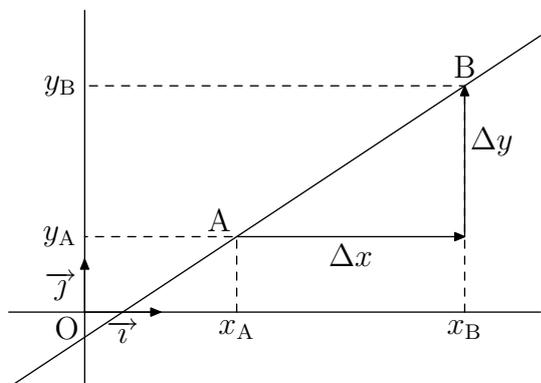
## c) Résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler

1. Première hypothèse :  $\phi = -k\bar{\omega}$ 2. Deuxième hypothèse :  $\phi = -k'v.\bar{\omega}$  (soit  $f = k'.v^2$ )

## II. Mathématiques : une activité d'introduction à la méthode d'Euler en Première scientifique

### 1. Quelques rappels

#### a) Droite et coefficient directeur



Soit  $m$  le coefficient directeur de la droite (AB)

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

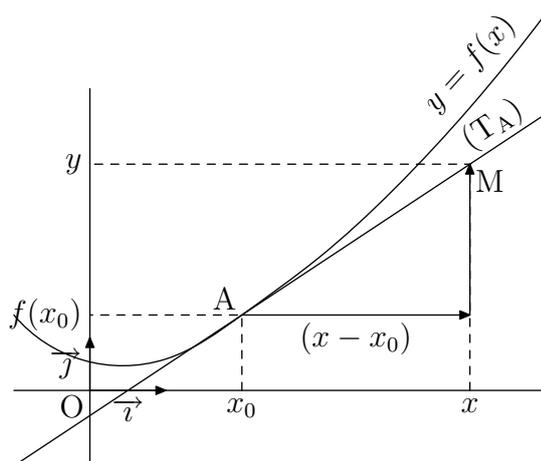
Soit :

$$\Delta y = m \Delta x$$

$$y_B - y_A = m(x_B - x_A) \text{ ou}$$

$$y_B = y_A + m(x_B - x_A)$$

#### b) Tangente à une courbe



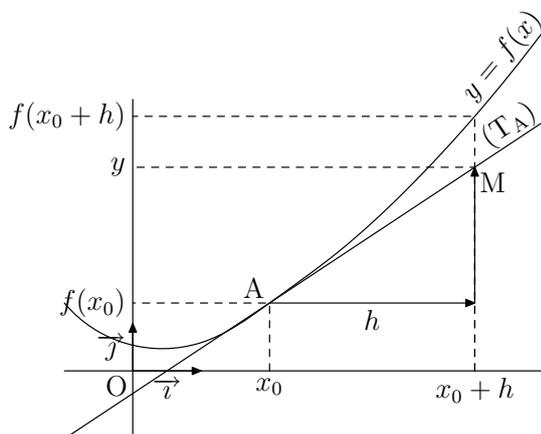
Soit A le point de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $x_0$ , et soit  $(T_A)$  la tangente en A à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

Coefficient directeur de  $(T_A)$  :  $f'(x_0)$

Équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $x_0$  :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

#### c) Approximation affine tangente



L'approximation affine tangente de la fonction  $f$  au voisinage de  $x_0$  est la fonction affine associée à la droite  $(T_A)$  :

c'est la fonction :  $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Pour  $x$  « proche » de  $x_0$ , la courbe  $\mathcal{C}_f$  est « presque » confondue avec  $(T_A)$ , la fonction  $f$  est « presque » égale à son approximation affine tangente :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0),$$

et pour  $x = x_0 + h$ , avec  $h$  « proche » de 0,

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \times h$$

## 2. Présentation de la méthode

### a) Objectif

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $[a ; b]$ ,  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On connaît  $f(a)$  ainsi que le nombre dérivé de  $f$  en tout réel de  $[a ; b]$ .

On cherche une approximation  $g$  de la fonction  $f$ .

### b) Algorithme

On partage l'intervalle  $[a ; b]$  en  $n$  intervalles de

même amplitude  $h$  ( $h = \frac{b-a}{n}$ ) :

$$[a ; x_1], [x_1 ; x_2], \dots, [x_{n-1} ; b].$$

Sur l'intervalle  $[a ; x_1]$  :

- On assimile  $(\mathcal{C}_f)$  à sa tangente au point d'abscisse  $a$ , et donc la fonction  $f$  à son approximation affine tangente en  $a$ .
- On peut ainsi calculer une valeur approchée de  $f(x_1)$  :

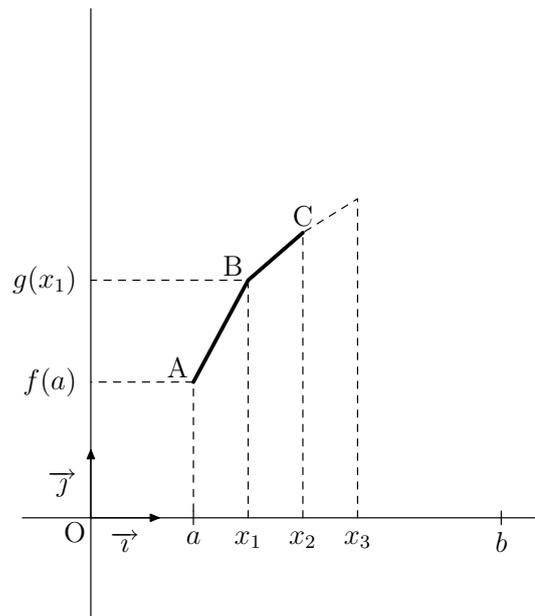
$$f(x_1) \approx f(a) + h \times f'(a)$$

$$\text{On pose : } \boxed{g(x_1) = f(a) + h \times f'(a)}$$

Puis, sur l'intervalle  $[x_i ; x_{i+1}]$

(avec  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $x_n = b$ ), on pose :

$$\boxed{g(x_{i+1}) = g(x_i) + h \times f'(x_i)}$$



$(AB)$  est la tangente à  $(\mathcal{C}_f)$  en  $A$ .

La fonction affine par morceaux obtenue par cette méthode est une approximation de  $f$ .

## 3. Exemple

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-1 ; 5]$  telle que  $f(1) = -4$ , et pour tout  $x$  de  $[-1 ; 5]$ ,  $f'(x) = 2x - 3$ .

1. Travail « papier-crayon »

Soit  $g$  l'approximation obtenue en partageant l'intervalle  $[-1 ; 5]$  en intervalles d'amplitude 0,5.

(a) Tracer la représentation graphique de  $g$ .

(b) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous (expliciter le calcul de  $g(1,5)$ ,  $g(2)$  et  $g(0,5)$ ) :

$x$	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f'(x)$													
$g(x)$													

## 2. Travail avec un tableur

Recommencer avec un tableur en partageant l'intervalle  $[-1 ; 5]$  en intervalles d'amplitude 0,1 (on notera  $k$  l'approximation obtenue).

(a) Compléter le tableau de valeurs ci dessous :

$x$	$k(x)$	$f'(x)$
-1		
-0,9		
...		
5		

(b) Tracer la courbe représentative de  $k$ .

*Avec l'assistant graphique, sélectionner « nuage de points », puis le sous-type choisi.*

# TRACÉS DE FIGURES GÉOMÉTRIQUES À L'AIDE D'UN SEUL TRIANGLE GABARIT

Groupe Rallye de l'IREM de Franche-Comté

## Sommaire

---

1	Utiliser le triangle gabarit comme une règle . . . . .	28
2	Tracer des droites parallèles . . . . .	29
3	Tracer la droite perpendiculaire à une droite donnée, passant par un point donné . . . . .	31
4	Tracer le symétrique d'un point donné par rapport à une droite donnée . . . . .	32
5	Tracer la bissectrice d'un secteur angulaire donné . . . . .	34
6	Tracer la médiatrice d'un segment donné . . . . .	35
7	Quelques exercices de tracés à l'aide du seul triangle gabarit	35

---

Dans le cadre des exercices proposés au Rallye Mathématique de Franche-Comté<sup>1</sup>, organisé par l'IREM de l'université de Franche-Comté, nous présentons ici quelques problèmes utilisant le triangle gabarit seul. En effet, certains problèmes proposés dans les épreuves de rallye donnent à l'enseignant des occasions de prolonger les activités de recherche initiées lors du rallye dans le cadre de la classe « ordinaire ». La situation de l'exercice 6 de la qualification et de la finale 2005 offre, selon nous, cette possibilité.

Le thème de la construction avec un gabarit permet développer des compétence inscrites dans les programmes puisqu'elles permettent de *développer des capacités d'initiatives*<sup>2</sup>. Il prend également sa place dans l'apprentissage de la démonstration ainsi que dans celui de l'étude des transformations dont le rôle essentiel dans l'apprentissage des mathématiques est souligné dans les programmes de collèges.

Proposer aux élèves des exercices utilisant le triangle gabarit, c'est leur permettre de faire fonctionner les transformations et leurs propriétés sous un aspect ludique.

L'utilisation du triangle gabarit sort des sentiers battus : elle n'est guère développée tant au niveau des classes de collèges que de celles de lycée. Aussi les exercices proposés dans le cadre du rallye peuvent dérouter dans un premier temps élèves et enseignants, car les conventions d'utilisation de cet outil ne sont pas nécessairement connues des uns et des autres (le gabarit peut servir de règle, mais ne peut pas être plié, etc . . .). C'est pourquoi nous vous proposons ici une « progression » permettant d'utiliser cet outil, essentiellement dans le cadre de problèmes de constructions.

La construction de figures géométriques nécessite différentes étapes : tracé, justification, discussion . . .

---

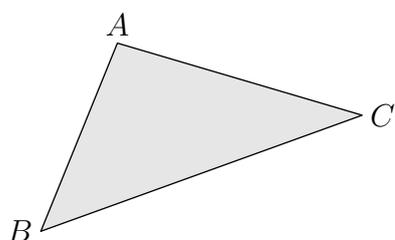
<sup>1</sup>On peut consulter les épreuves du Rallye sur le site de l'IREM de l'Université de Franche-Comté à l'adresse <http://www-irem.univ-fcomte.fr>, à la rubrique « Rallye ».

<sup>2</sup>Programme de Troisième des collèges.

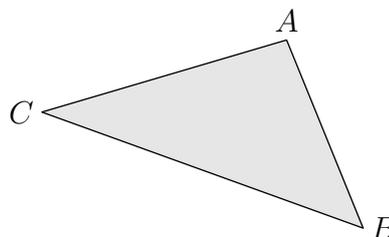
Dans le document qui suit, seuls les tracés de quelques figures élémentaires sont proposés ; d'autres sont envisageables.

Les différentes étapes de preuves sont laissées au soin du professeur, qui adaptera les méthodes au niveau de sa classe.

Ces tracés sont largement inspirés de la brochure : « Le raisonnement géométrique, avec la moisson des formes », de Bernard Bettinelli<sup>3</sup>.



Triangle gabarit ABC de sens direct

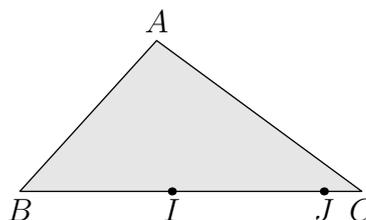


Triangle gabarit ABC de sens non direct

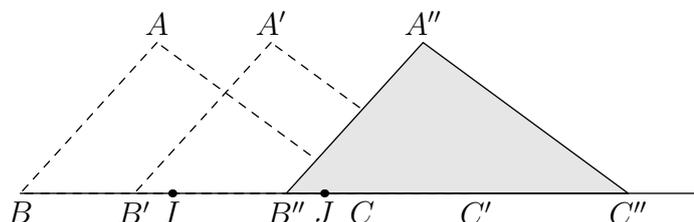
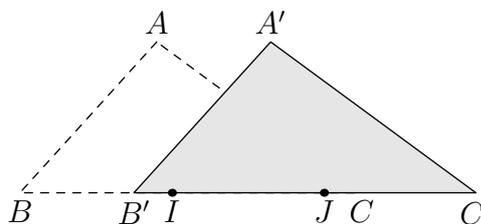
## 1 Utiliser le triangle gabarit comme une règle

Soit deux points  $I$  et  $J$  tels que  $IJ$  soit inférieure à la longueur du plus grand côté du triangle gabarit.

Celui-ci peut alors contenir  $I$  et  $J$ .



Puis, par translations successives du gabarit, la droite peut être tracée.



**Remarque :** dans le cas où les points  $I$  et  $J$  sont « éloignés », une démarche est proposée dans la solution de l'exercice 6 de la finale 2005.

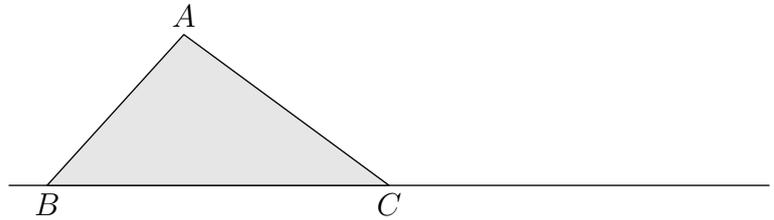
<sup>3</sup>ÉDITION : La moisson des formes, 1 rue de la Perrouse, 25115 Pouilley les Vignes

## 2 Tracer des droites parallèles

### I. Premier cas : tracer deux droites parallèles sans autre contrainte

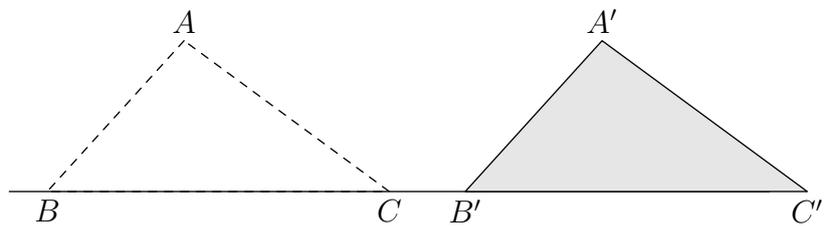
Le principe est le même qu'avec la règle et l'équerre.

On place l'un des côtés du triangle gabarit sur une droite arbitrairement donnée.



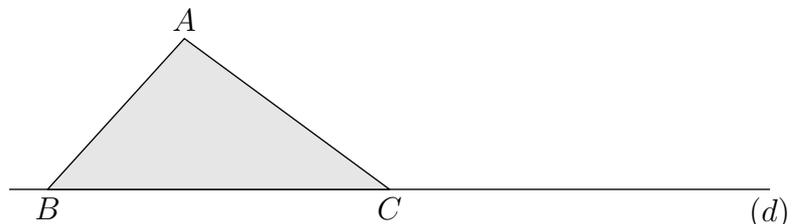
Par glissement de ce côté le long de la droite, on obtient des paires de droites parallèles :

les droites  $(AB)$  et  $(A'B')$  sont parallèles, de même que les droites  $(AC)$  et  $(A'C')$ .

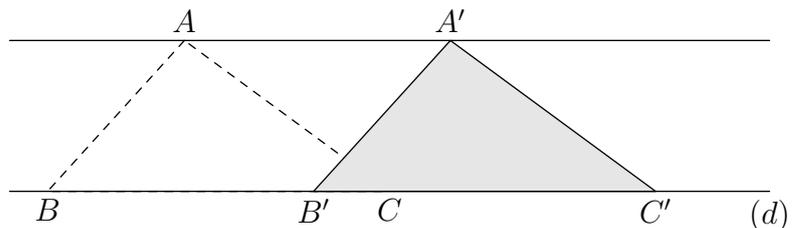


### II. Deuxième cas : tracer une droite parallèle à une droite donnée $(d)$

On place l'un des côtés du triangle gabarit sur la droite  $(d)$

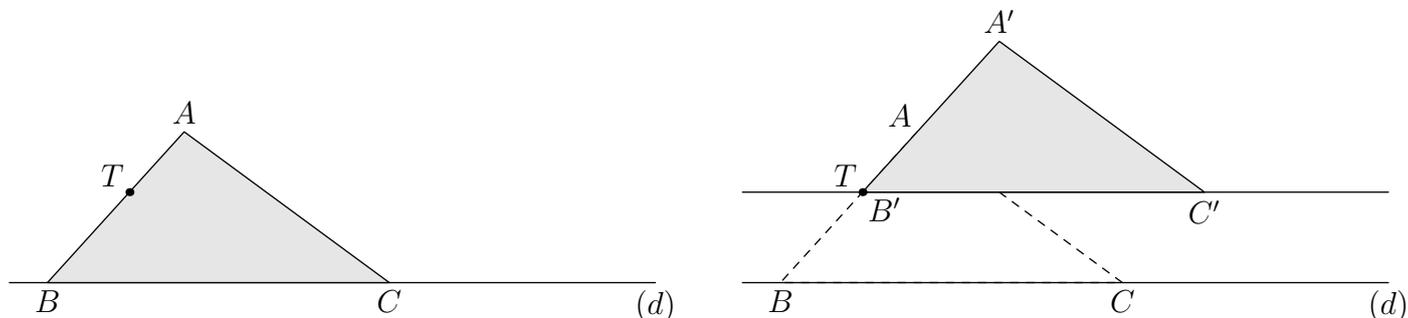


Par translation de celui-ci, la droite  $(AA')$  est parallèle à  $(d)$ .



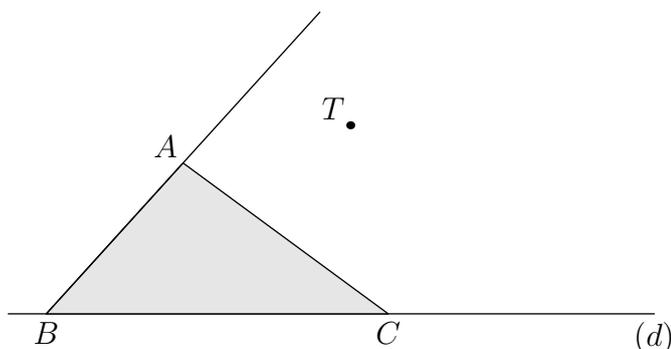
### III. Troisième cas : tracer la droite parallèle à une droite donnée, passant par un point donné

**Situation 1 :** la droite  $(d)$  est donnée, le point  $T$  donné est situé à une distance de  $(d)$  inférieure à la plus grande longueur d'une hauteur du triangle gabarit.

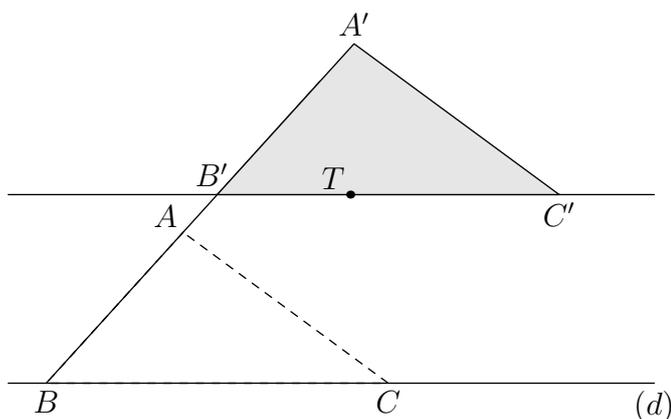


**Situation 2 :** la droite  $(d)$  est donnée, le point  $T$  donné est situé à une distance de  $(d)$  supérieure à la plus grande longueur d'une hauteur du triangle gabarit.

On place le côté d'extrémités  $B$  et  $C$  sur la droite  $(d)$ .



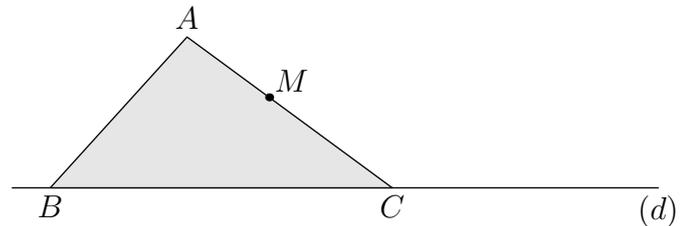
Après avoir tracé la droite  $(AB)$ , on glisse le triangle gabarit sur cette droite, de telle sorte que  $[B'C']$  contienne  $T$ . La droite  $(B'C')$  est parallèle à  $(d)$ .



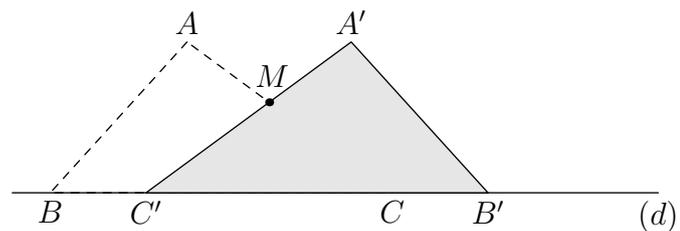
### 3 Tracer la droite perpendiculaire à une droite donnée, passant par un point donné

#### I. Le point $M$ est « proche » de $(d)$

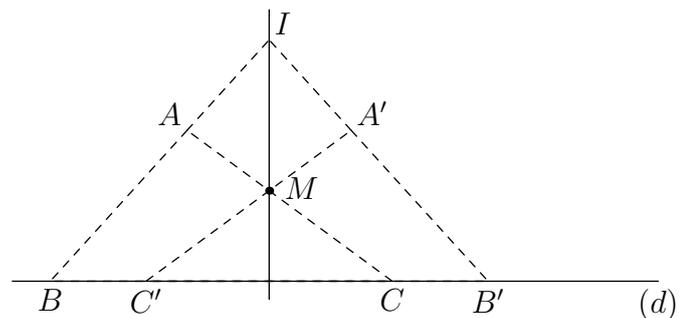
L'un des côtés étant contenu dans  $(d)$ , on glisse le triangle sur cette droite, de telle sorte que le segment  $[AC]$  contienne  $M$ .



Le triangle gabarit est retourné et disposé comme précédemment. Les segments  $[AC]$  et  $[A'C']$  sont symétriques par rapport à la droite perpendiculaire à  $(d)$  passant par  $M$ .

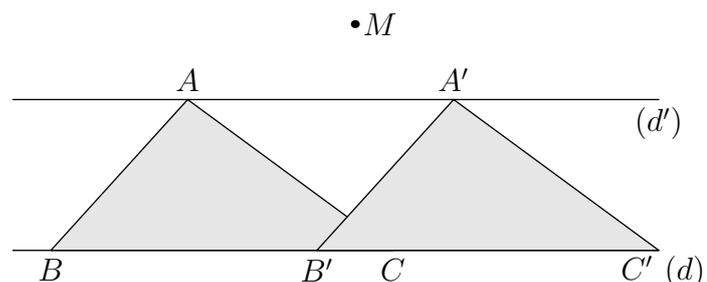


Soit  $I$  l'intersection des deux droites  $(AB)$  et  $(A'B')$ . La droite  $(IM)$  est perpendiculaire à  $(d)$ .

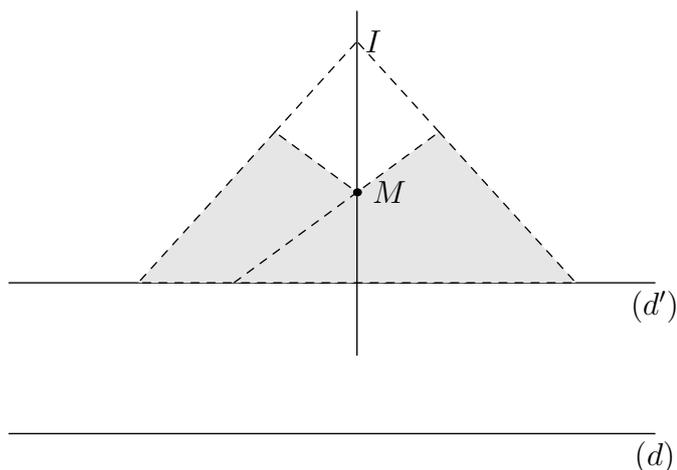


#### II. Le point $M$ est « loin » de $(d)$

On peut se ramener au cas précédent en traçant une parallèle à  $(d)$ .



On effectue alors la même construction que précédemment.

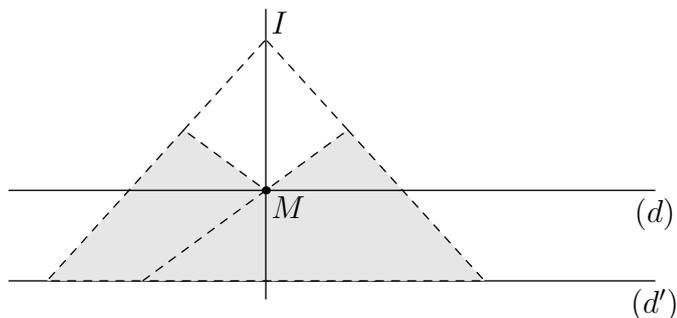


### III. Le point $M$ est sur la droite $(d)$

On peut se ramener au cas I. en traçant une parallèle  $(d')$  à  $(d)$ .



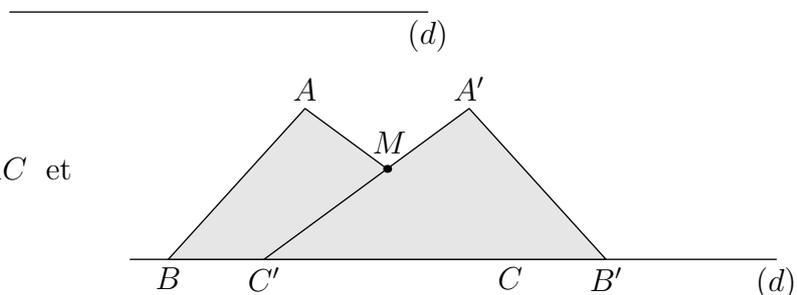
De  $M$ , on trace la perpendiculaire à  $(d')$  qui est aussi perpendiculaire à  $(d)$ .



## 4 Tracer le symétrique d'un point donné par rapport à une droite donnée

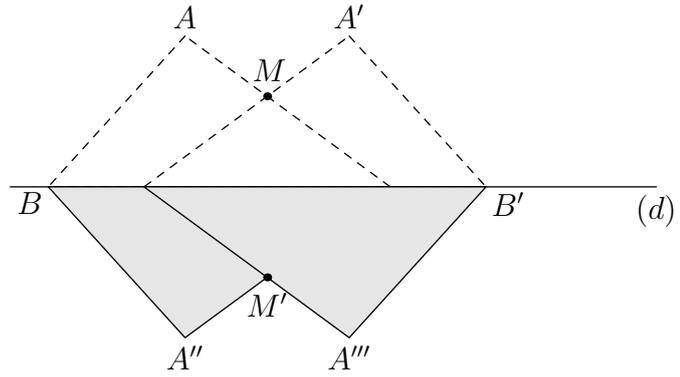
### I. Le point $M$ est « proche » de la droite $(d)$ donnée

$\dot{M}$



On trace les triangles  $BAC$  et  $B'A'C'$

Puis les symétriques de ceux-ci par rapport à la droite  $(d)$ .



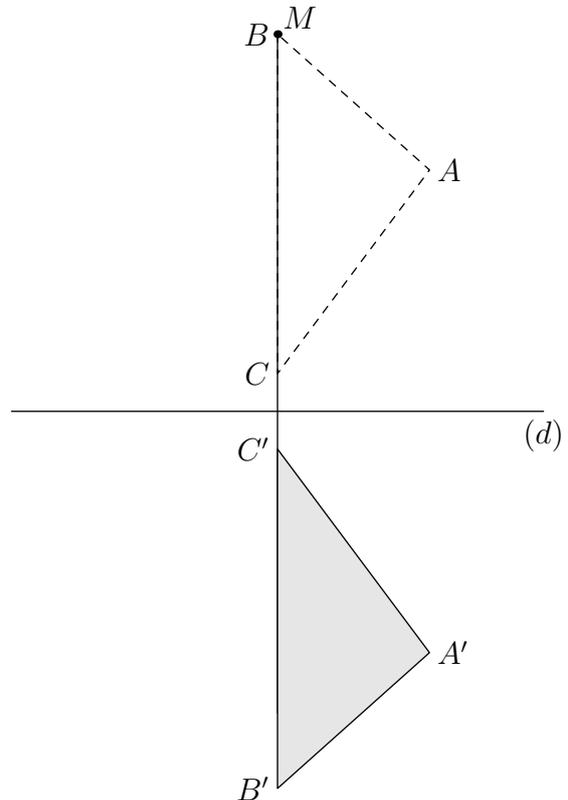
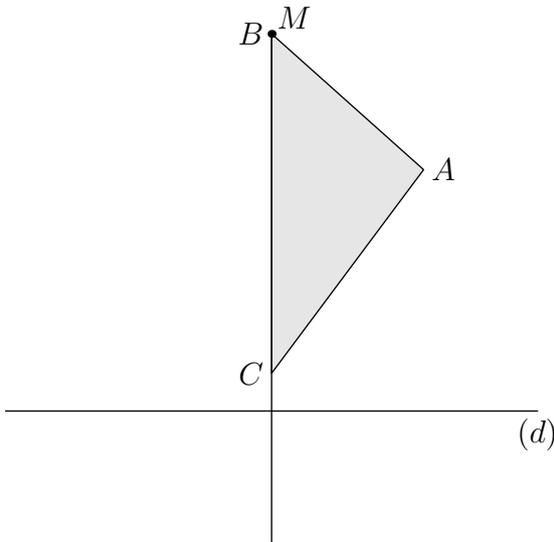
## II. Le point $M$ est plus « loin » de $(d)$

$\dot{M}$

On peut se ramener au cas précédent en traçant la droite perpendiculaire à  $(d)$  passant par  $M$  (voir 3).

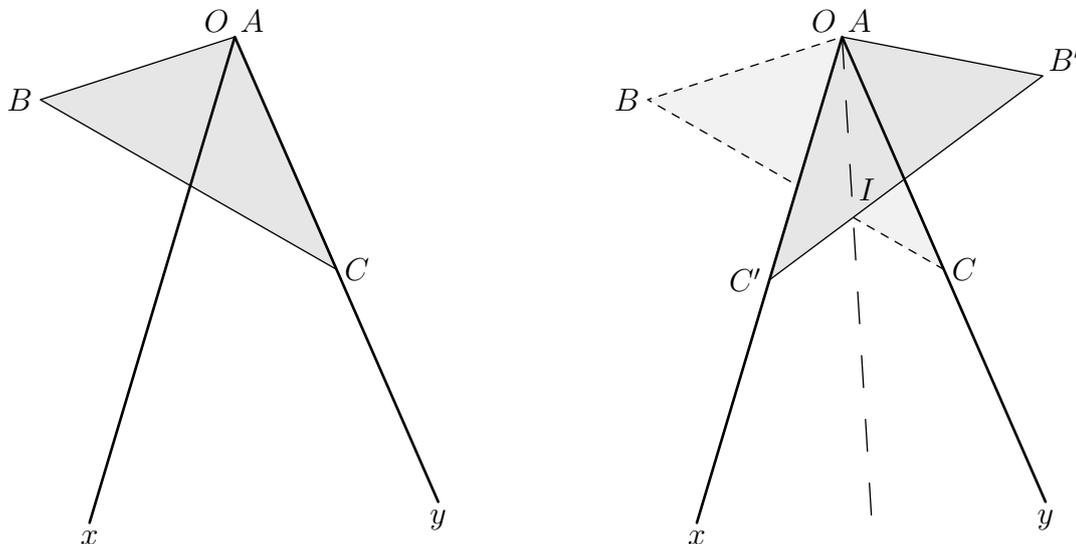


Puis on trace  $C'$ , symétrique de  $C$  par rapport à  $(d)$ .



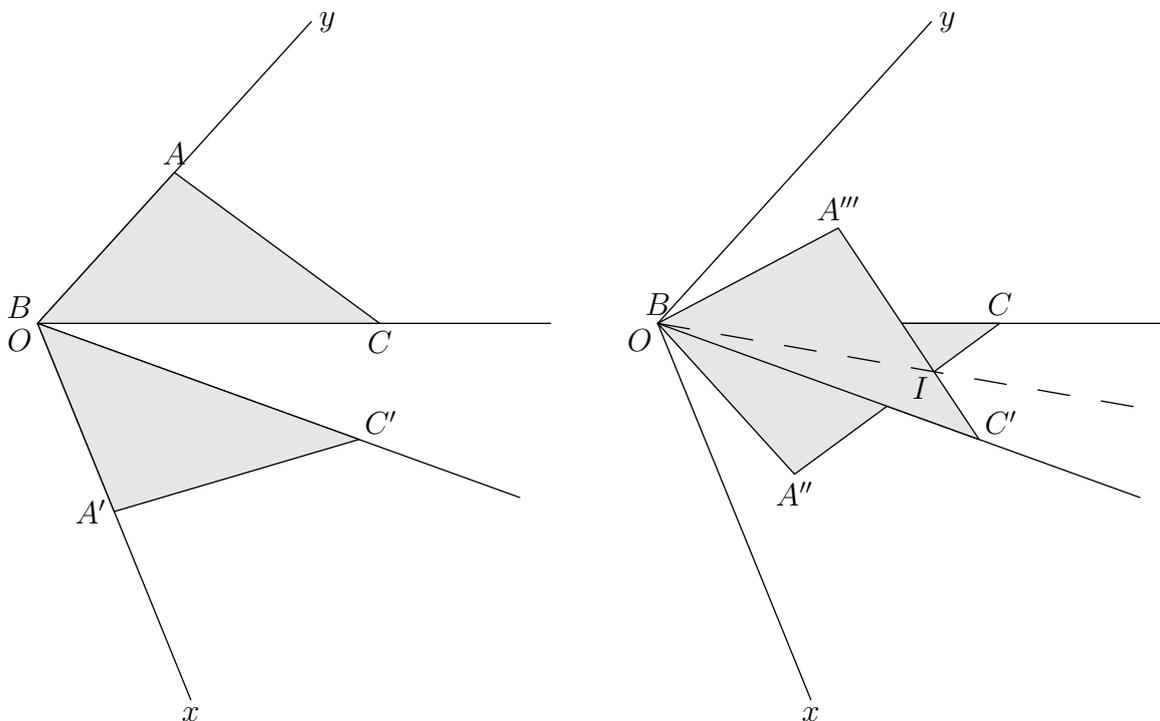
## 5 Tracer la bissectrice d'un secteur angulaire donné

- I. La mesure de l'angle est inférieure à la plus grande des mesures des angles du triangle gabarit



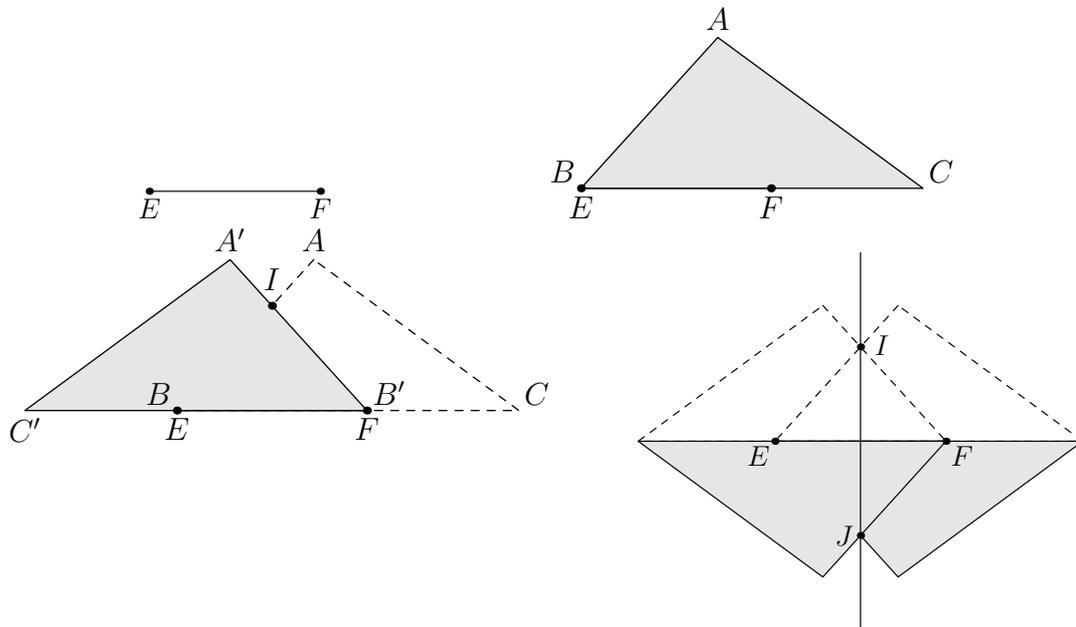
- II. La mesure de l'angle est supérieure à la plus grande des mesures des angles du triangle gabarit

On se ramène au cas précédent en traçant un angle intermédiaire.



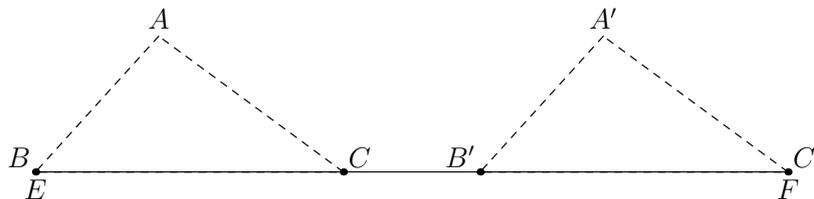
## 6 Tracer la médiatrice d'un segment donné

- I. Le segment a une longueur inférieure à la plus grande longueur des côtés du triangle gabarit



- II. Le segment a une longueur supérieure à la plus grande longueur des côtés du triangle gabarit

On se ramène au cas précédent en traçant deux points intermédiaires.



## 7 Quelques exercices de tracés à l'aide du seul triangle gabarit

1. Tracer les hauteurs d'un triangle donné (voir exercice 6 de la qualification 2005).
2. Tracer les médianes d'un triangle donné.
3. Tracer les bissectrices d'un triangle donné.
4. Tracer les médiatrices d'un triangle donné.
5. Deux points  $M$  et  $O$  étant donnés, tracer le symétrique de  $M$  par rapport à  $O$ .
6. Deux points étant donnés, tracer le segment dont les extrémités sont ces deux points.
7. Deux points  $A$  et  $B$  étant donnés, tracer un carré dont l'un des côtés est le segment  $[AB]$ .
8. Deux points  $A$  et  $B$  étant donnés, tracer un carré dont une diagonale est le segment  $[AB]$ .



Presses Universitaires de Franche-Comté  
Université de Franche-Comté  
2 Place Saint-Jacques  
25030 BESANCON CEDEX  
Tél : 03 81 66 59 70  
Courriel : [pufc@univ-fcomte.fr](mailto:pufc@univ-fcomte.fr)  
Site web : <http://pufc.univ-fcomte.fr>

Maquette et mise en page François Pétiard (IREM)

Imprimerie : Reprographie du  
Département de Mathématiques

Dépôt légal 2<sup>e</sup> trimestre 2006

**Institut de Recherche sur  
l'Enseignement des Mathématiques  
de Franche-Comté**

Département de Mathématiques. UFR Sciences et Techniques.

16 route de Gray. 25030 BESANCON CEDEX

Tél. : 03 81 66 62 25 - Fax : 03 81 66 62 34

Courriel : [iremfc@math.univ-fcomte.fr](mailto:iremfc@math.univ-fcomte.fr)

Site web : <http://www-irem.univ-fcomte.fr>