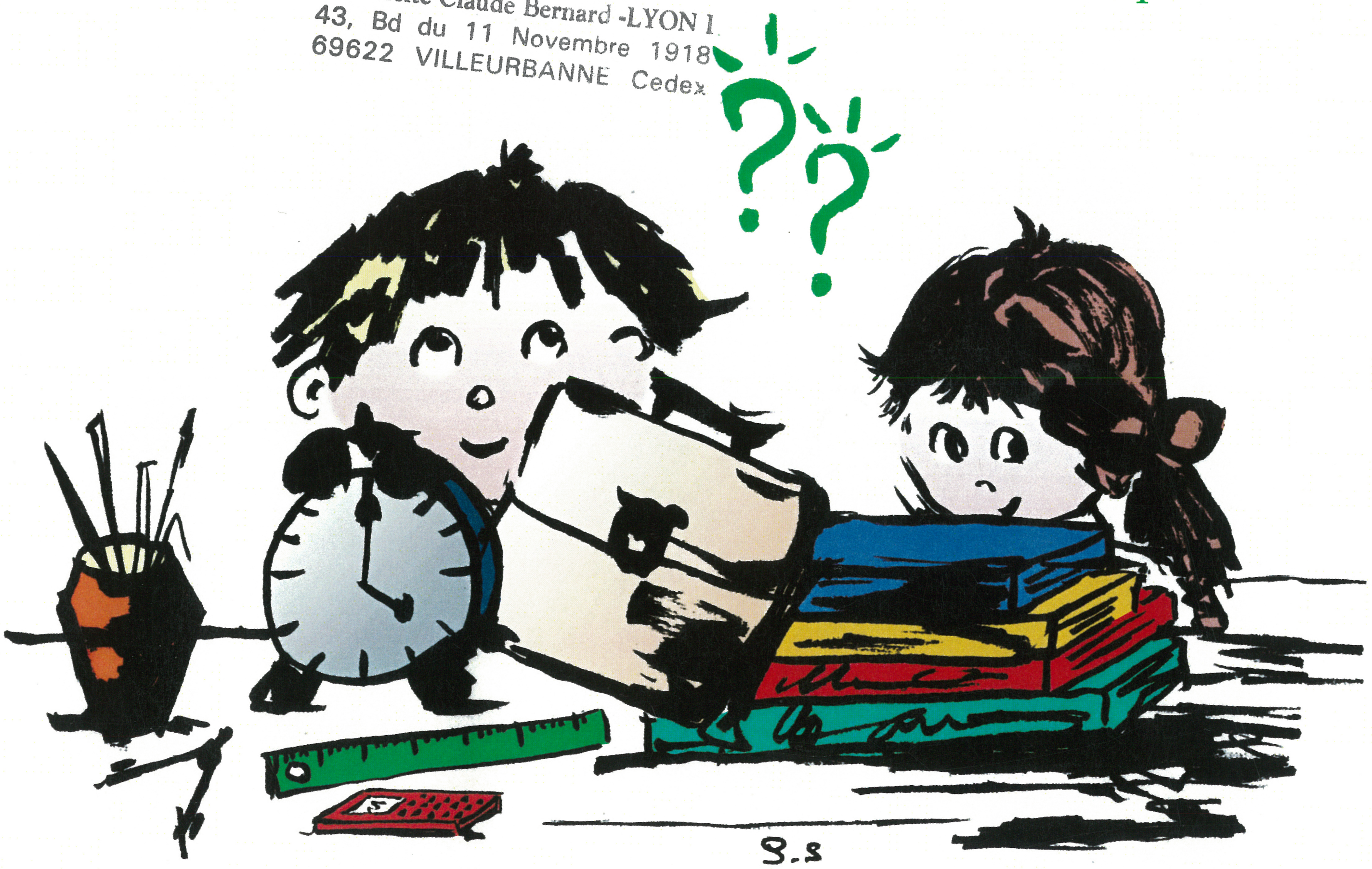
Les Publications de
l'IREM de BESANÇON

Rallye mathématique de Franche-Comté 2005

Groupe RALLYE



Presses universitaires de Franche-Comté

Illustration de couverture : *Sylvie Dontenwill*

Rallye mathématique
de Franche-Comté 2005

*Les Publications de l'*IREM de BESANÇON

Directrice de collection **Hombeline Languereau**

Déjà paru aux Presses universitaires de Franche-Comté à l'intention des enseignants de mathématiques

Collection « Les Publications de l'IREM de Besancon »

Prends ton temps !
Groupe Élémentaire, ISBN 2-84867-137-8, 2006

La maternelle en jeux mathématiques
Bernard Bettinelli, ISBN 2-84627-025-2, 2006

Lois continues, test d'adéquation. Une approche pour non spécialiste
Groupe Probabilités & Statistique, ISBN 2-84867-101-7, 2005

De la sphère au plan
Groupes Lycée et Cartographie, ISBN 2-84867-098-3, 2005

Arithmétique en terminale S
Groupe Lycée, ISBN 2-84867-006-1, 2003

Savoirs, savoir-faire en analyse en terminale scientifique
Groupe Lycée, ISBN 2-84867-005-3, 2003

Collection « Didactiques », série « Mathématiques »

Maths en formes
Bernard Bettinelli, ISBN 2-84867-138-6, 2006

À l'école des probabilités
Bernard Courtebras, ISBN 2-84867-110-6, 2006

Publications en ligne

consultables en accès libre sur le site des Presses universitaires de Franche-Comté
http://presses-ufc.univ-fcomte.fr

Autour de la modélisation en probabilités
Commission inter-IREM « Probabilités et Statistique » sous la direction de Michel Henry

Les Presses universitaires de Franche-Comté bénéficient du soutien financier du Conseil régional de Franche-Comté et du ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche dans le cadre du contrat quadriennal.

ISBN 2-84867-154-8

IREM de Franche-Comté

Rallye mathématique *de Franche-Comté 2005*

Groupe RALLYE

Presses universitaires de Franche-Comté, 2006
diffusé par l'IREM de Franche-Comté

Les auteurs

Susana Barata, professeur agrégé au lycée Jacques Duhamel de Dole, est animatrice à l'IREM où elle participe aux activités du groupe « Rallye ».

Françoise de Labachelerie, professeur agrégé au lycée Jacques Duhamel de Dole, est animatrice à l'IREM où elle participe aux activités du groupe « Rallye ». Elle assure également la responsabilité des groupes de recherche « Mathématiques au lycée » et « Liaison mathématiques-sciences physiques au lycée ». Elle contribue aux travaux de la commission inter-IREM « Second cycle ».

Philippe Le Borgne, maître de conférence à l'IUFM de Franche-Comté, est animateur à l'IREM où il est responsable du groupe « Rallye ». Il participe également aux recherches sur les mathématiques à l'école élémentaires ainsi qu'aux commissions inter-IREM CORFEM (commission de recherche sur la formation des enseignants de mathématiques) et « Rallye ».

Michel Magnenet, professeur agrégé honoraire, est animateur à l'IREM où il participe aux activités du groupe « Rallye », des groupes de recherche « Mathématiques au lycée » et « Liaison mathématiques-sciences physiques au lycée ».

Jean-François Monnin, professeur certifié au collège Proudhon de Besançon, participe aux activités du groupe « Rallye » de l'IREM.

Alain Parmentelat, professeur agrégé au lycée Arbois-Poligny, est animateur à l'IREM où il participe aux activités du groupe « Rallye » ainsi qu'au groupe de recherche « Mathématiques au lycée ».

Maguy Piranda, professeur au collège Victor Hugo de Besançon, participe aux activités du groupe « Rallye » de l'IREM. Elle est également formatrice auprès de l'inspection pédagogique régionale de mathématiques.

Sandrine Rivière, professeur certifié au collège Georges Pompidou de Pouilley-les-Vignes, est animatrice à l'IREM où elle participe aux activités du groupe « Rallye ».

Action de l'IREM de Franche-Comté

avec le soutien financier

de l'Université de Franche-Comté, dans le cadre du plan quadriennal 2004-2007

de l'IUFM (Institut universitaire de formation des maîtres) de Franche-Comté

de la régionale de l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public) de Franche-Comté

du Conseil régional de Franche-Comté

du Conseil général du Doubs

avec les moyens horaires

du rectorat de l'académie de Besançon,

du ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (DGESco, Direction générale des enseignements scolaires)

de l'Université de Franche-Comté

La direction de la Valorisation de l'Université de Franche-Comté a pris en charge l'impression et le rectorat l'affranchissement pour diffuser cette brochure à tous les lycées et à tous les collèges de l'académie de Besançon.

Préface

Pour la troisième année, l'IREM de Franche-Comté organise son rallye mathématique en partenariat avec la communauté éducative (ministère, rectorat, inspection régionale de mathématiques, université, IUFM, lycées, collèges, APMEP) et les collectivités territoriales (Conseil régional de Franche-Comté, Conseil général du Doubs).

En résonance avec les préoccupations récurrentes du ministère, les actions « rallye » initiées il y a quelques années par le réseau des IREM visent à promouvoir la démarche de résolution de problèmes et plus généralement à motiver les élèves pour les études scientifiques.

De nombreux rallyes régionaux ont vu le jour en France. Ces rallyes sont l'occasion de permettre aux élèves d'une même classe de coopérer pour mener à bien une recherche en mathématique rédigée collectivement.

Parmi tous ces rallyes, le Rallye mathématique de Franche-Comté présente la spécificité de s'adresser aux classes de troisième et de seconde. Il favorise ainsi la liaison entre ces classes et permet leur comparaison. Ses épreuves présentent néanmoins quelques variantes afin d'être réinvesties avec efficience par le professeur de la classe.

Après une présentation des rallyes mathématiques, vous trouverez dans cette brochure, par chapitre, un énoncé de chaque problème des épreuves de qualification ou de finale suivi d'éléments de correction et d'analyse de productions d'élèves. Chaque chapitre se termine par des prolongements qui sont autant de pistes pour aider les enseignants à réinvestir les exercices dans le cadre standard de la classe.

La démarche scientifique utilisée met l'accent sur l'intérêt du travail coopératif. En quelque sorte « l'intelligence de la somme est supérieure à la somme des intelligences ». D'ailleurs mener à bien un rallye nécessite de multiples acteurs : les épreuves sont conçues par des professeurs de compétences complémentaires au sein de l'IREM bénéficiant de moyens horaires attribués par l'Université de Franche-Comté et le rectorat de l'académie de Besançon. L'IREM et la régionale de l'APMEP participent aux remboursements des frais de déplacements de ces professeurs, l'inspection pédagogique encourage les établissements à s'inscrire, l'IUFM, le Conseil régional de Franche-Comté et le Conseil général du Doubs contribuent à récompenser les élèves. Enfin la direction de la Valorisation de l'université de Franche-Comté et le rectorat apportent leur soutien pour faire parvenir un exemplaire de cette brochure à tous les établissements du second degré de Franche-Comté.

Pour conclure, qu'il me soit permis de remercier ici tous ceux qui collaborent à cette aventure et de vous souhaiter une bonne lecture de cette brochure.

Hombeline Languereau
Directrice de l'IREM
Université de Franche-Comté

Sommaire

Chapitre 1

Qu'est-ce qu'un rallye mathématique ?

Un rallye mathématique est une compétition entre classes. L'expérience des rallyes mathématiques s'est considérablement développée au point qu'aujourd'hui la plupart des académies en proposent. Généralement, ils sont organisés par les IREM. Une commission inter-IREM fédère d'ailleurs l'ensemble des actions « rallye ».

Cette brochure présente le Rallye Mathématique de Franche-Comté, compétition entre classes « entières » organisée par l'IREM de l'Université de Franche-Comté. Née il y a trois ans sous l'impulsion d'une dizaine d'animateurs de l'IREM, cette expérience a pour but de proposer un concours gratuit à l'ensemble des classes de troisième et de seconde de l'académie de Besançon.

I Le cadre du concours

1. Pourquoi les IREM se sont engagés dans les actions « rallye » ?

Nous pensons que les mathématiques se font plus qu'elles ne s'apprennent et que l'activité de résolution de problèmes est non seulement une caractéristique essentielle de l'activité mathématique mais qu'elle constitue le moteur de tout apprentissage. Ce point de vue nous a guidé dans notre projet et se retrouve dans cette brochure, dans les choix effectués et dans les débats que nous souhaitons poursuivre. Aussi, nous espérons que le travail présenté ici permettra d'aider les enseignants à enrichir leur pratique, d'une part en exploitant le dispositif « Rallye » dans leur classe, d'autre part en tirant parti des situations de résolution de problèmes qu'il propose.

S'il est important que des occasions soient offertes à l'enseignant de faire vivre dans sa classe une telle approche des mathématiques, il ne serait pas concevable que seuls certains élèves en profitent. Les activités mathématiques présentées dans ce document permettent à tous les élèves de s'engager dans la recherche ; la plupart sont construites pour être pratiquées en groupes.

Ces principes vont dans le sens des programmes actuels. Ainsi par exemple le document d'accompagnement du programme de seconde précise que *« l'organisation de la classe doit permettre aux élèves d'expérimenter les diverses facettes de l'activité mathématique décrites dans l'introduction du programme. Certaines — "chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, expliquer oralement une démarche, rédiger au brouillon puis au propre, (...), accéder au plaisir de la découverte et à l'expérience de la compréhension" — renvoient à l'étude de situations et à la résolution de problèmes : le choix de ces situations et de ces problèmes doit être fait avec attention ; ils déterminent la qualité de l'activité scientifique menée dans la classe, légitiment l'introduction de nouveaux contenus et justifient ensuite leur efficacité. »*

2. L'organisation du concours

Le Rallye Mathématique de Franche-Comté est un concours entre classes entières. Il se déroule en trois épreuves — entraînement, qualification et finale —, réparties sur une année scolaire. Durant chaque épreuve, les classes doivent s'organiser pour résoudre des problèmes en une séance de 55 minutes afin de produire une seule fiche réponse par problème.

Lors de ce concours et notamment lors des épreuves de qualification et de finale, les élèves de la classe sont entièrement responsables des réponses apportées. On attend de la classe qu'elle sache produire une réponse unique, réponse qui sera jugée sur la rigueur de la démarche, la richesse des connaissances mises en œuvre, la clarté des justifications apportées. Pour garantir une véritable autonomie du groupe-classe, il est nécessaire que l'enseignant n'intervienne pas pendant les épreuves de qualification et de finale.

L'épreuve d'entraînement est proposée au mois de novembre. Elle est constituée de problèmes extraits des annales du concours. Envoyée dans tous les établissements de l'académie, cette série de problèmes permet aux classes intéressées de procéder à une expérimentation. Les résultats de cette épreuve ne sont pas pris en compte dans le concours. Il s'agit pour le professeur d'organiser une « simulation » des épreuves : cet essai lui permet d'évaluer les enjeux du rallye pour sa classe et de faire comprendre à ses élèves les règles du rallye. Le professeur est entièrement responsable de cette étape, il peut modifier s'il le souhaite la composition des sujets en utilisant les problèmes de rallye disponibles sur le site de l'IREM de Franche-Comté.

À la suite de cet essai, le professeur et ses élèves choisissent de s'inscrire à l'épreuve de qualification qui se déroule courant février. La finale organisée au mois d'avril ou de mai regroupe les 15 premières classes de chaque niveau. Les épreuves de qualification et de finale se déroulent au simultanément pour toute les classes inscrites.

Les épreuves sont constituées de neuf problèmes originaux. Les classes de troisième résolvent les six premiers et les classes de seconde les six derniers. Ainsi des élèves de niveaux différents sont amenés à travailler sur des exercices communs. Toutes les épreuves sont bâties sur le même schéma afin de rendre la phase d'entraînement vraiment efficace.

L'inscription au rallye est gratuite, mais la classe s'engage à envoyer sa production et les frais de reprographie sont à la charge de l'établissement.

3. L'organisation de la classe

La résolution des six problèmes par un unique élève est impossible. L'épreuve nécessite une organisation de la classe adaptée aux principes du rallye : des groupes doivent se constituer et se coordonner. De plus, le travail en groupes est à préconiser pour permettre à chaque élève de la classe de participer. Cette organisation de la classe modifie les règles habituelles du travail scolaire surtout lorsque celles-ci privilégient le travail individuel. Elle peut désorienter les élèves qui ont parfois du mal à travailler en équipe.

Lors de l'épreuve d'entraînement, le professeur peut choisir de provoquer d'emblée une organisation. S'il n'intervient pas, le risque est grand que les 55 minutes soient utilisées par les élèves pour s'organiser. S'il intervient, il peut uniquement former les groupes puis laisser les élèves se répartir les tâches. Plusieurs choix sont possibles : six groupes d'élèves résolvent chacun un exercice, plus de groupes d'élèves que d'exercices pour favoriser une confrontation entre groupes, six groupes d'élèves et un ou deux élèves coordinateurs...

Les phases de recherche, de débats, de justification et de rédaction doivent être suffisamment riches pour que tous les élèves puissent s'impliquer. Deux groupes peuvent travailler sur le même exercice à condition de savoir ensuite mutualiser leurs approches... parfois très différentes. Il y a toujours des décisions à prendre pour retenir la solution envoyée au jury pour chacun des problèmes.

Le rôle du professeur est essentiel pour adapter l'organisation de la classe à la recherche en groupe. L'épreuve d'entraînement contribue à la préparer à cette organisation particulière mais doit sans doute s'accompagner également d'un travail visant à sensibiliser les élèves au travail de groupe tout au long de l'année.

II Les enjeux pour l'élève

1. Participer à une activité mathématique collective

Comme nous l'avons souligné, les problèmes de rallye ont une approche non traditionnelle. Une réponse, même partielle, implique la mobilisation de connaissances mathématiques qui doivent être donc disponibles... La démarche n'étant pas donnée, il est fréquent de voir un élève, ou un groupe d'élèves, abandonner une méthode après l'avoir expérimentée et l'avoir jugée peu fructueuse puis se relancer dans une autre démarche peut être initiée par un élève du groupe. Ce type d'épreuve permet donc de provoquer chez les élèves des démarches d'essais-erreurs, de tâtonnements, d'expérimentations, démarches qui sont souvent coûteuses en effort et en temps. Pour cette raison, la probabilité qu'un seul élève réponde à l'ensemble des problèmes en une heure est très faible. Cependant certains problèmes sont choisis de façon à ce que tous les élèves, y compris les plus faibles, puissent être impliqués.

Les exercices qui paraissent les plus faciles à aborder sont ceux qui proposent une expérimentation immédiate. Dans le problème *« Somme de nombres »* de la qualification , l'élève peut se lancer immédiatement dans une recherche ; de même dans le problème *« L'enveloppe »* de la finale l'élève peut facilement s'engager dans des constructions géométriques simples. Les élèves peuvent ainsi repérer des problèmes qui leur semblent plus facile à appréhender et s'« intéresser » à la résolution. Ceci nécessite peut-être une lecture collective des épreuves...

Les chemins à parcourir pour élaborer une procédure de résolution paraissent parfois tortueux aux élèves... et c'est sans doute par un travail de groupe — et éventuellement en s'aidant des échanges inter-groupes — qu'il est souvent possible d'avancer. Cet aspect montre l'impact positif du travail en commun, et de la confrontation de différents points de vue. Le travail en groupes paraît donc le mieux adapté pour réussir une épreuve de rallye. Cependant, les élèves qui ne souhaiteraient pas s'investir dans un travail collectif peuvent participer. Toutefois leur travail sera soumis à la critique de leurs camarades lors de la réponse commune de la classe. Il revient sans doute à l'enseignant de faire en sorte que la classe soit prête pour le jour de l'épreuve. Pour cela, il peut proposer la mise en place d'une organisation qui permette à chacun de travailler dans les dispositions qui lui sont les plus favorables.

2. Être motivé par des problèmes posés sous forme de jeux, de défis

Les problèmes du Rallye mathématique de Franche-Comté sont des problèmes originaux créés par les membres du groupe Rallye. Précisons les principaux critères retenus dans la construction des énoncés :
- l'énoncé doit être facile à comprendre ;
- une première expérimentation et plusieurs pistes de recherche doivent être facilement accessibles aux élèves ;
- la résolution du problème met en œuvre plusieurs démarches de résolution ;
- les démarches utilisées mobilisent des connaissances mathématiques assez riches et susceptibles d'être réinvesties en dehors de la compétition.

La possibilité de faire des essais, d'expérimenter, voire de manipuler offre aux problèmes de rallye un caractère ludique propre aux jeux mathématiques (Trouillot, Richard, Faradji, Le Borgne, 2005) et à même de motiver les élèves.

Les problèmes de rallye possèdent des points communs avec les problèmes ouverts. L'intérêt, pour les élèves et pour les professeurs, de la pratique du problème ouvert a été montré depuis plus d'une trentaine d'année notamment par les travaux menés par l'IREM de Lyon. Rappelons quelques principes. L'énoncé d'un problème ouvert est court, compréhensible par tous, sans indication de méthode ou de solution. La pratique du « problème ouvert » en classe vise à permettre aux élèves de s'engager dans une démarche scientifique, de faire des essais, d'émettre des conjectures, de les tester et de prouver (Charnay, 1992). Au niveau de la forme de l'énoncé, les problèmes de rallye n'induisent pas de méthode de résolution. Si plusieurs questions peuvent être posées dans un même problème, elles ne fournissent pas une étape dans la résolution. Au niveau des intentions pédagogiques, il s'agit dans le cas d'un rallye comme dans le cas de la pratique du problème ouvert de permettre aux élèves de mettre en place une démarche scientifique mais la phase de débat, sous contrôle direct de l'enseignant dans le cas de la pratique du problème ouvert (Arsac, Germain, Mante, 1991), se réalise en autonomie lors des épreuves de rallyes.

Les problèmes de rallye s'appuient, le plus souvent, sur le traitement de situations inhabituelles. En conséquence, la modélisation mathématique de ces situations et leur résolution apparaît comme une sorte de défi.

3. Vivre des situations d'argumentation et la communication au sein d'une classe

La résolution d'une série de problèmes par une classe entière permet aux élèves de s'engager dans un travail d'équipe : il faut se répartir les tâches de recherche et de rédaction. Cet aspect permet d'impliquer le plus d'élèves possible, de mettre à profit leurs compétences complémentaires et de les valoriser dans la réalisation d'un projet commun.

Comme nous l'avons déjà remarqué, il est vraisemblable qu'un élève seul ne puisse produire une réponse à l'ensemble des problèmes d'une épreuve. Il faut donc coopérer pour aboutir, ce qui nécessite un débat au sein de la classe. La complexité des procédures et des démarches « oblige » les élèves résolvant un même problème à débattre et échanger sur la validité des propositions de chacun.

4. Permettre la confrontation entre classes de troisième et de seconde

Des problèmes communs étant proposés aux classes de troisième et de seconde, le rallye nous offre la possibilité, encore peu exploitée jusqu'à présent de faire une étude comparative des productions des élèves de troisième et de seconde.

III La place de l'enseignant

1. Pendant les épreuves

Pour que le rallye puisse fonctionner de manière équitable entre les classes participantes, il faut bien entendu que le professeur n'intervienne pas durant les épreuves de qualification et de finale : ni dans la gestion de la classe (constitution des groupes en fonction des sujets), ni dans le contenu (pas de piste proposée, pas de jugement sur la validité mathématique ni sur la rédaction).

En revanche, l'enseignant dispose de moments privilégiés pour observer ses élèves et retenir certaines démarches afin de les réinvestir dans le cadre habituel de la classe.

La participation au rallye peut modifier le fonctionnement habituel de la classe en mettant en place un nouveau contrat dans lequel l'autonomie des élèves est considérablement renforcée. L'absence d'aide fournie par l'enseignant rend les élèves totalement responsables de leurs réponses. Non seulement ceux-ci sont les seuls acteurs de la production scientifique de la classe, mais en plus, ils doivent s'organiser ensemble pour présenter une seule solution par exercice.

2. En dehors des épreuves

L'enseignant peut puiser dans les épreuves de rallye pour étoffer les situations de recherches qu'il propose à ses élèves. Elles leur donnent l'occasion d'exercer leur esprit d'initiative, de les former au débat, à l'échange de procédures, à la mise en œuvre de démarches originales que l'enseignant pourra valoriser et réexploiter par la suite. Les productions obtenues lors des épreuves (comme par exemple celles fournies dans cette brochure) sont des sources d'activités intéressantes pour former l'esprit critique des élèves : on peut leur demander de les expliquer, de repérer ce qui est vrai, ce qui est faux, d'améliorer l'efficacité des procédures, de rédiger des solutions ... L'utilisation des productions des groupes d'élèves s'apparente au travail effectué dans la pratique des narrations de recherche (Sauter, 1998).

On peut également utiliser certains problèmes de rallye pour introduire des notions mathématiques, en réinvestir dans des situations complexes, en faire fonctionner dans un registre inhabituel...

IV Le fonctionnement à l'IREM de Franche-Comté

1. Le groupe

Le groupe « Rallye » de l'IREM de Franche-Comté est constitué d'une dizaine d'enseignants de l'académie qui mutualisent des compétences multiples et complémentaires en vue de mener à bien le concours : conceptions des sujets, diffusion dans les établissements, classement des copies des épreuves de qualification et de finale, remise des prix, analyse des productions d'élèves, rédaction de cette brochure.

Le groupe est constitué d'un maître de conférences en mathématiques qui apporte son savoir faire dans le domaine théorique, d'enseignants de collège et de lycée qui apportent leur connaissance des classes, de professeurs retraités qui apportent leur disponibilité. La plupart de ces enseignants sont également formateurs en mathématiques que ce soit dans le cadre de l'IUFM, de l'IREM ou de l'inspection pédagogique. Ils ont en commun le désir d'approfondir leur réflexion pédagogique et de partager leur expérience avec la communauté mathématique.

2. Les participants

En 2005, 68 classes de collège et 52 classes de lycée ont participé au rallye. Depuis 2003, date de création du rallye en Franche-Comté, la participation est en augmentation.

Les quatre meilleures classes de chaque niveau sont récompensées. La remise des lots s'effectue dans l'établissement de la classe afin de minimiser le coût des déplacement (tant horaire que financier) en présence du professeur de la classe, du chef d'établissement, du directeur de l'IREM, du responsable du groupe « rallye », d'un IA-IPR de mathématique dans la mesure du possible.

3. Les perspectives

L'objectif du groupe « rallye » est d'amener toujours plus de classes à participer, d'accroître la production des documents d'accompagnement (brochure papier ou mise en ligne). L'intérêt pour ce concours et la demande venant de collègues d'élargir les niveaux concernés à l'ensemble des niveaux du collège ont amené l'IREM à être un partenaire de l'ARMT, l'Association Rallye Mathématique Transalpin (Grugnetti, Jaquet, 2006) qui propose des épreuves du CM2 à la classe de quatrième.

V Les épreuves

La formulation des énoncés peut être améliorée mais nous avons choisi de laisser la version originale afin de ne pas modifier la perception qu'en ont eue les élèves.

Chaque épreuve est composée de 9 problèmes. Les exercices numérotés de 1 á 6 sont proposés aux élèves de troisième et ceux de 4 á 9 aux élèves de seconde.

1. Sujet de qualification 2005

Exercice 1 : « Symétrie »

On choisit d'écrire les dix chiffres du système décimal de la manière suivante :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

L'écriture « 2005 » possède un axe de symétrie.

Quels nombres entiers de 4 chiffres possèdent deux axes de symétrie ?

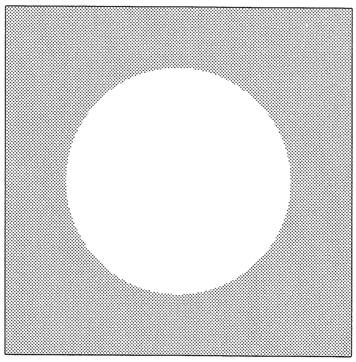
Exercice 2 : « Doseur à spaghetti »

Le dessin ci-contre représente un doseur à spaghetti.

Le nombre de spaghetti que l'on peut passer ensemble dans le trou donne la quantité nécessaire pour le nombre de personnes correspondant.

Le disque dessiné correspond à la ration moyenne pour 2 personnes. Son rayon est 1,5 cm.

Dessiner le disque correspondant à la ration pour 5 personnes et justifier.



Exercice 3 : « Entraînement de tennis »

Au club Lyrale, un super lanceur de balles permet aux joueurs de s'entraîner. Pour les débutants, il lance des balles de tennis à raison de 5 par minute ou de 7 par minute. Il fonctionne automatiquement un nombre entier de minutes à chacune des deux vitesses.

Quelles sont les différentes possibilités offertes à Philippe sachant qu'il souhaite renvoyer 170 balles ?

Exercice 4 : « La figure manquante »

M. Géo Maîtrie est professeur de mathématiques et, dans le livre de ses élèves, il s'intéresse à un exercice corrigé de géométrie où l'on demande de calculer le périmètre et l'aire d'une figure.

Mais l'éditeur a commis un oubli : la figure est manquante !

M. Maîtrie a alors l'idée de demander à sa classe d'essayer de reconstituer la figure à partir des réponses, sachant que les élèves ne disposent que d'une équerre graduée uniquement tous les centimètres et d'un compas.

Le professeur ne s'attendait pas à une telle diversité de réponses, suivant que les élèves respectent une des deux conditions ou toutes les deux.

À votre tour :

A. Pouvez-vous dessiner une figure dont le périmètre mesure $(3\pi + 8)$ centimètres ?

B. Sauriez-vous en construire une dont l'aire vaut 5π cm^2 ?

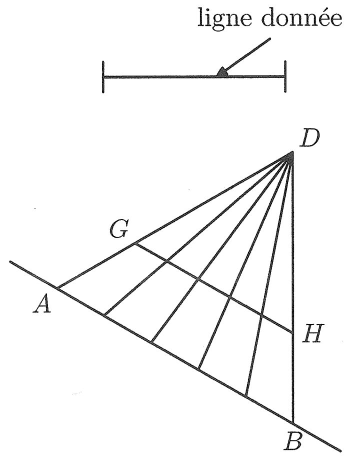
C. Enfin, pourriez-vous réunir ces deux conditions sur une seule et même figure ?

Exercice 5 : « Partage de segments »

Dans un ouvrage de géométrie pratique datant de 1841, on peut lire :

« Que faut-il faire pour diviser une droite en autant de parties égales que l'on veut, par exemple en cinq parties ? » :

« Tirer une droite indéfinie AB, marquer autant de parties égales, prises arbitrairement, que la question l'exige ; prendre leur longueur AB et de cette ouverture de compas et des points A et B, décrire des arcs qui se coupent en D ; joindre par des droites D à tous les points de section de la ligne AB ; prendre ensuite la longueur de la ligne donnée et la porter de D en G et de D en H, et joindre les points G et H ; les segments de cette dernière ligne sont égaux au cinquième de la droite donnée. »



N.B. : Pour les auteurs anciens, « ligne », ou « droite », désigne ce que nous nommons segment de droite, alors qu'une droite actuelle est désignée par « droite indéfinie ».

D'après un article paru dans la revue PLOT n° 108.

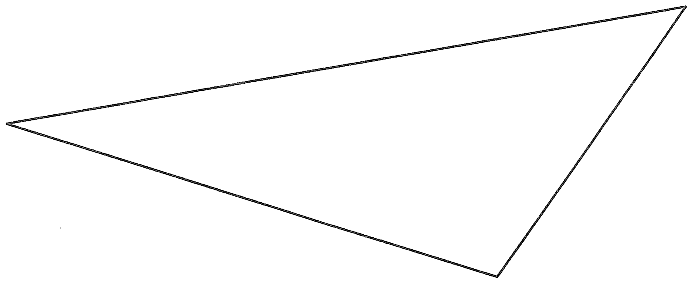
En reprenant cette méthode, partagez un segment donné de 10 centimètres en 7 parties égales.

Vous justifierez que cette méthode répond bien au problème posé.

Exercice 6 : « Instrument original »

On dispose, comme unique outil de construction, d'un triangle gabarit.

Il s'agit d'un triangle cartonné que l'on pourra reproduire à l'aide du modèle ci-dessous.



Avec cet unique instrument, sauriez-vous tracer une hauteur dans un triangle ABC quelconque ?

Vous détaillerez les constructions sur la fiche réponse en présentant les différentes étapes sur les dessins proposés, à la manière d'une bande dessinée.

Exercice 7 : « Jeu du cube »

Julien a inventé un nouveau jeu qu'il a baptisé « le jeu du cube ».

Pour jouer, il faut :
- un cube dont les arêtes mesurent un centimètre exactement ;
- une grande feuille blanche posée sur une table, sur laquelle sont marquées deux points A et B.

En voici les règles :
- au départ, il faut faire coïncider l'un des sommets du cube avec le point A ;
- le cube, posé sur la table, peut pivoter de 90° autour d'une de ses arêtes ;
- on fait pivoter le cube un certain nombre de fois, en restant toujours en contact avec la table par une face ou par une arête ;
- le trajet sera terminé si l'un des sommets coïncide avec B.

Julien a préparé trois feuilles blanches avec les trois cas suivants :

1 - $AB = \sqrt{49}$ 2 - $AB = \sqrt{29}$ 3 - $AB = \sqrt{23}$

L'unité est le centimètre.

Sauriez-vous jouer ?
Dans les trois cas, vous dessinerez, quand il existe, un trajet possible du cube pour aller de A à B. Si ce n'est pas possible, expliquez pourquoi.

Exercice 8 : « Somme de nombres »

On considère les cinq chiffres 1, 2, 3, 4 et 5.

Calculer la somme de tous les nombres à cinq chiffres que l'on peut écrire avec ces cinq chiffres sans répétition.

Exercice 9 : « Mouche en boîte »

On étudie la trajectoire d'une mouche à l'intérieur d'une boîte vitrée.

La mouche part d'un coin A de la boîte vers un autre coin B, avec un changement de direction en un point M.

Sa trajectoire est rectiligne de A vers M, puis de M vers B.

On a représenté, sur la feuille ci-jointe, la boîte en perspective cavalière, et placé les points N et T qui sont les projections orthogonales du point M respectivement sur la face supérieure et sur la face droite de la boîte.

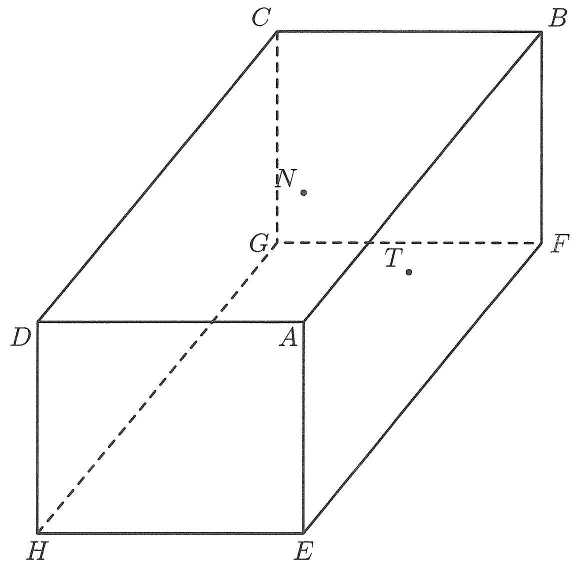
On obtient donc une droite (MN) perpendiculaire à la face $(ABCD)$ et une droite (MT) perpendiculaire à la face $(AEFB)$.

On a représenté également en vraie grandeur ces deux faces et placé les points N et T.

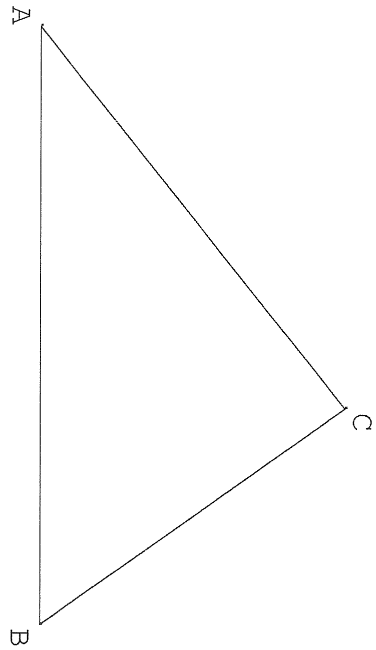
- Placez le point M sur le dessin en perspective cavalière (la feuille suivante fait office de feuille réponse).
- Dessinez, au verso de la feuille réponse, en vraie grandeur, la trajectoire de la mouche (triangle ABM).

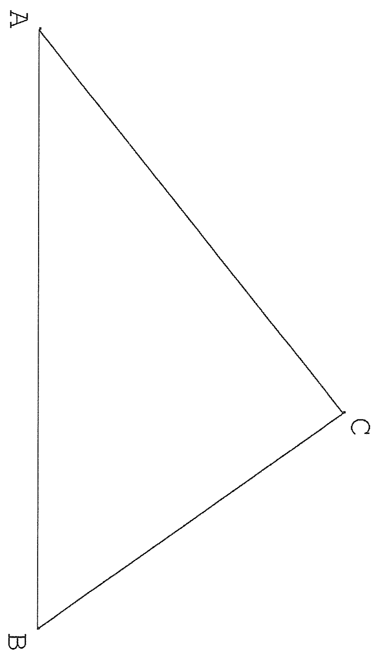
Réplique réduite de la boîte :

(perspective et vues des faces en vraies grandeurs sur la fiche réponse)



Rallye mathématique : suite de l'exercice 6 (fiche réponse)





Rallye mathématique : suite de l'exercice 7 (fiche réponse)

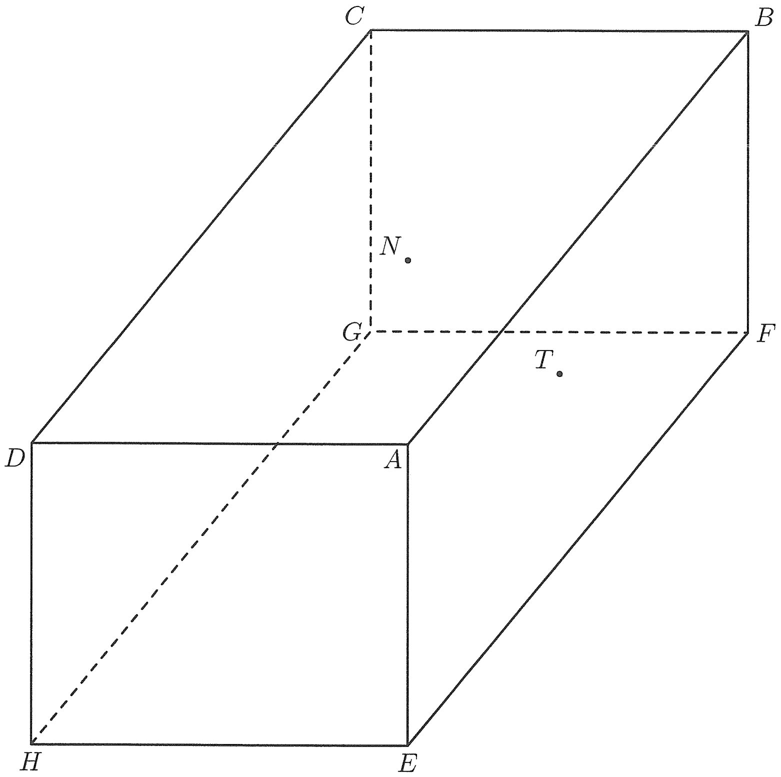
Cas $AB = \sqrt{49}$:

Cas $AB = \sqrt{29}$:

Cas $AB = \sqrt{23}$:

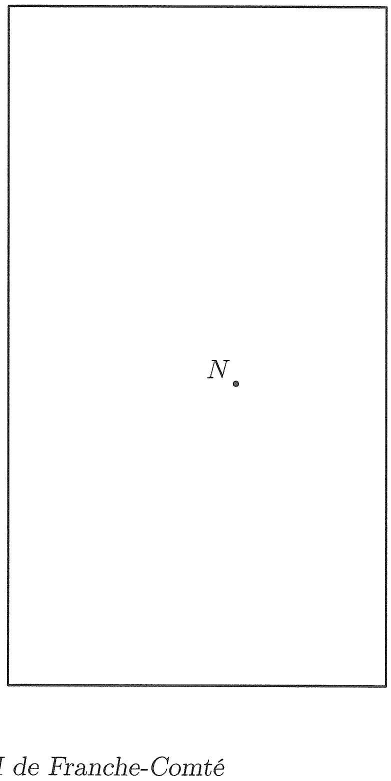
Rallye mathématique : suite de l'exercice 9 (fiche réponse)

Voici la perspective cavalière (où vous placerez le point M) :

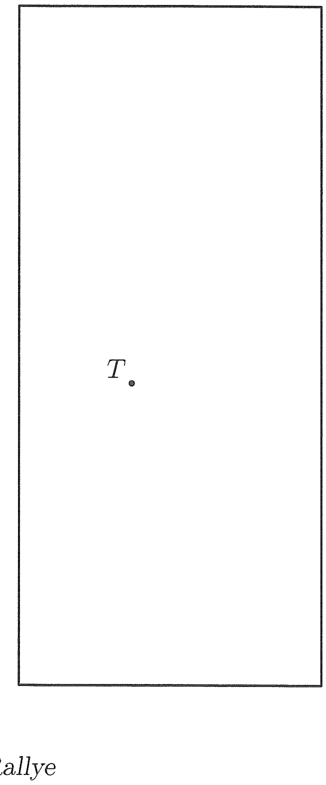


Voici les vues de dessus et de droite en vraie grandeur :

face de dessus :



face de droite :



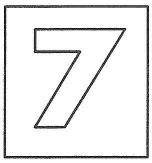
2. Épreuves de finale 2005

Exercice 1 : « Le parking »

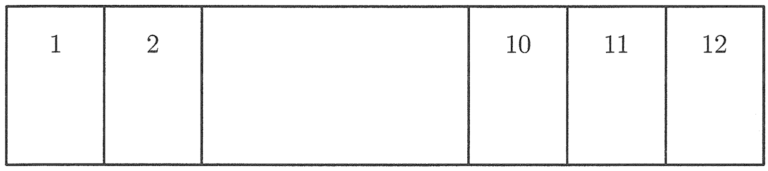
Les travaux de construction de la jolie résidence « les pins »s'achèvent. Chaque appartement dispose d'une place de parking attitrée. Didier, qui est peintre, a été sollicité pour peindre sur chaque place le numéro de l'appartement correspondant. Météo France annonçant l'arrivée imminente d'une semaine de mauvais temps, avec beaucoup de pluie, Didier se résout à faire le travail en deux jours.

Sachant qu'il évalue à deux minutes le temps de placer un des dix pochoirs disponibles et de peindre le chiffre correspondant, Didier calcule qu'il terminera sa première journée en réalisant le numéro 84. La moitié du temps de travail sera donc effectuée.

Pouvez-vous déterminer la durée du travail de Didier et le nombre d'appartements de la résidence « les pins » ?



Le pochoir est une toile où le trou fait apparaître le chiffre à représenter.
Ci-dessus le pochoir du « sept ».



Voici un extrait de la première rangée du parking après le travail de Didier.

Exercice 2 : « L'enveloppe »

On se donne un point A sur un cercle (C) de centre O. Construire le point A_1, image de A par la rotation de centre O, d'angle 70° dans le sens des aiguilles d'une montre, puis construire A_2, image de A_1 par cette même rotation, puis A_3, image de A_2 par la même rotation. On définit de la même façon les points A_4, etc. Si on trace ensuite les segments $[AA_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ etc., combien de segments pourra-t-on tracer ?

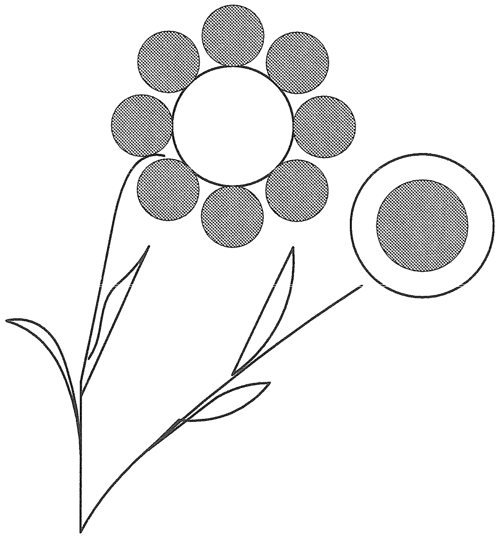
Exercice 3 : « Harmonie »

Mikello, un artiste bisontin, désire créer pour sa prochaine exposition, un couple de fleurs stylisées en métal, qu'il nommera « harmonie ».

En voici la description :

- la fleur de gauche est constituée d'un disque central de diamètre 4 cm et de 8 disques tangents, également répartis, de rayon 1 cm ;
- la fleur de droite est constituée de deux disques concentriques ;
- les aires colorées (grisées) de chacune des fleurs sont égales ;
- les aires non colorées (blanches) de chacune des fleurs sont égales ;
- les tiges seront réalisées avec des fils métalliques de diamètre 4 mm.

Mikello a réalisé le modèle ci-contre, qui malheureusement n'est pas à l'échelle. Construire en vraie grandeur chacune des deux fleurs, sans les tiges. Les seuls instruments disponibles sont le compas, l'équerre et la règle graduée tous les centimètres. Préciser les calculs effectués.



Exercice 4 : « Demi-journée de sport »

L'animateur sportif demande aux 24 garçons internes du lycée de se mettre en rangs. Ils forment alors 6 lignes et 4 colonnes. On suppose que les garçons sont tous de taille différente : de 165 cm à 188 cm. Il sélectionne alors le plus grand de chaque ligne pour un tournoi de basket-ball et le plus petit de chaque colonne pour une journée d'équitation.

A. Un même élève peut-il être sélectionné à la fois comme basketteur et comme cavalier ?

B. Un cavalier peut-il être plus grand qu'un basketteur ?

Justifiez vos réponses.

Exercice 5 : « Les nombres palindromes »

Un nombre palindrome peut se lire de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche, par exemple 2 002, 747, 55 sont des nombres palindromes.

S'ils sont simples à fabriquer dans notre système de numération, la recherche peut se compliquer dans d'autres systèmes.

Donnez les palindromes formés de trois symboles en numération romaine.

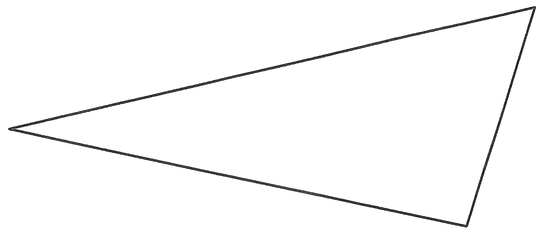
Rappel : en numération romaine, les symboles I, V, X, L, C, D, M représentent les nombres 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1 000. Nous appellerons ces symboles chiffres romains.

Les principes de numération des entiers naturels sont les suivants :

- Un chiffre romain placé à droite d'un chiffre plus grand ou égal s'ajoute à celui-ci.
  Exemple : XV représente 15, $CXXI$ représente 121
- Un chiffre romain placé à gauche d'un chiffre supérieur se retranche de celui-ci.
  Exemple : IX représente 9, XL représente 40
- La numération romaine est un système décimal et l'écriture d'un entier est unique.
  Exemples : 2 004 s'écrit $MMIV$
  $495 = 400 + 90 + 5$ *donc* 495 *s'écrit $CDXCV$ (et non pas VD qui n'est pas autorisé)*
- Chacun des symboles V, L, D ne peut apparaître qu'une fois dans l'écriture d'un nombre.
  Exemple : 150 s'écrit CL et non pas LLL.

Exercice 6 : « Instrument original : le retour ! »

On dispose du triangle gabarit, comme unique outil de construction. On rappelle qu'il s'agit d'un triangle cartonné que l'on pourra reproduire à l'aide du modèle ci-contre. Avec cet unique gabarit, tracez le segment $[AB]$ dont les extrémités sont précisées sur la feuille réponse.



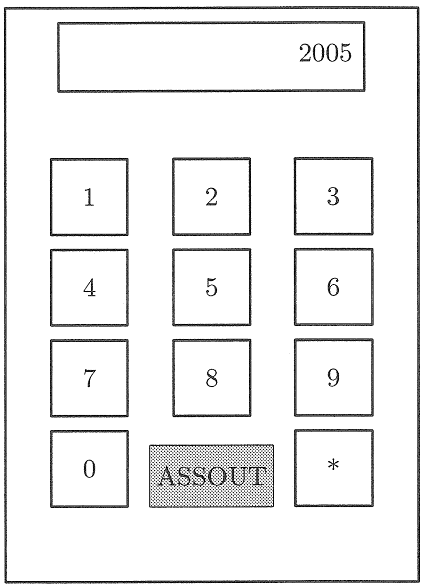
Vous détaillerez les constructions sur la fiche réponse en présentant les différentes étapes sur les dessins proposés, à la manière d'une bande dessinée.

Attention, vous ne pouvez ni écrire sur le gabarit, ni le plier, mais il peut vous servir de règle.

Exercice 7 : « La touche étoile »

La machine ASSOUT, représentée ci-dessous ne dispose que d'une touche opératoire notée *

La touche *, suivie d'un entier naturel, ajoute la somme et le produit de cet entier et de l'entier affiché à l'écran. Par exemple, si 2 est affiché à l'écran, la séquence de touches *3 déclenche le calcul :
$2 * 3 = (2+3) + (2 \times 3) = 5 + 6 = 11$. Ce nombre 11 est alors affiché à l'écran.
Jules et Jim disposent chacun d'une machine ASSOUT, qui quand on l'allume, affiche 0 à l'écran.
Le but du jeu est d'atteindre 2 005.
Jules allume sa machine, puis tape *, puis un entier naturel non nul. Le nombre 2 005 apparaît à l'écran et Jules gagne en une fois.
Jim allume sa machine, puis tape *, puis un entier naturel non nul. Il obtient un nombre inférieur à 2 005. Il retape *, puis un autre entier naturel non nul et obtient alors 2 005. Jim gagne en deux fois.

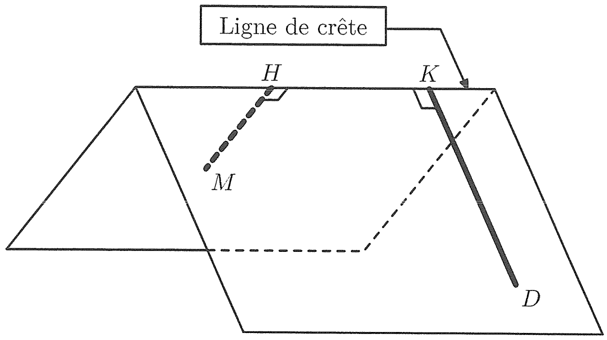


On demande tous les choix possibles de Jules pour gagner en une fois et tous les choix de Jim pour gagner en deux fois.

Exercice 8 : « Rallye randonnée »

Damien et Sophie préparent une des étapes du rallye randonnée du 1er juin 2005. Les randonneurs partiront du village de Der pour rejoindre le village de Montalenvers. Il faudra franchir la colline et cela, en suivant le chemin le plus court à travers champs.

Après repérage, Damien a réalisé le croquis ci-contre.



Aidez Damien et Sophie à placer la balise B sur la ligne de crête qui leur permettra de réaliser leur parcours.

Les distances connues, exprimées en kilomètres, sont : $DK = 9$, $KH = 5$ et $HM = 6$.

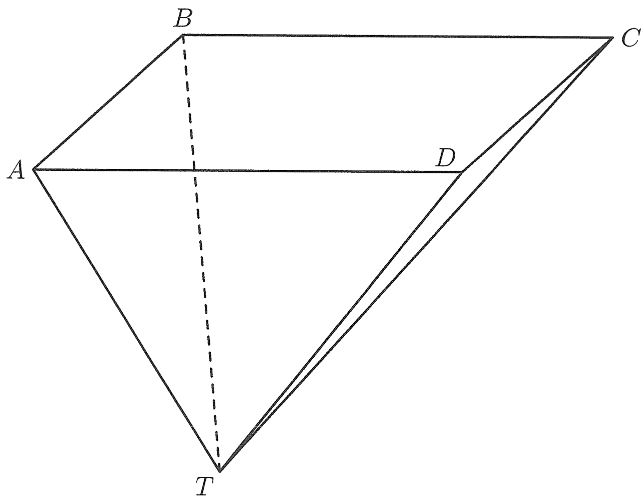
Exercice 9 : « Repérage de trésor »

En mer Méditerranée, quatre barges d'exploration sont disposées en rectangle.

De la première barge A, on détecte l'épave du navire contenant le trésor à 1 160 mètres.

De la deuxième barge B, on détecte l'épave du navire contenant le trésor à 1 524 mètres.

De la troisième barge C, on détecte l'épave du navire contenant le trésor à 1 600 mètres.



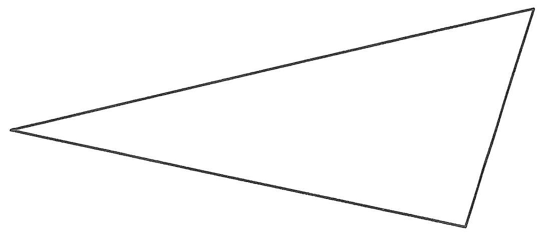
À quelle distance de la quatrième barge D se trouve l'épave du navire contenant le trésor ?

Rappel : barge = bateau à fond plat.

On pourra utiliser la figure ci-dessus où T représente l'emplacement du trésor.

Fiche réponse de l'exercice 6

Le gabarit :



A B

A B

A B

Chapitre 2

Épreuves de qualification 2005

I Symétries

1. Énonce

On choisit d'écrire les dix chiffres du système décimal de la manière suivante :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

L'écriture « 2005 » possède un axe de symétrie.

Quels nombres entiers de 4 chiffres possèdent deux axes de symétrie ?

2. Analyse *a priori*

Analyse de la tâche

- Déterminer les axes de symétrie ;
- Repérer les chiffres qui ont un axe de symétrie « horizontal » ;
- Parmi ceux-ci, repérer ceux qui se correspondent par une symétrie d'axe « vertical » ;
- Écrire des nombres avec ces chiffres pour obtenir toutes les solutions au problème posé.

Ce problème donne l'occasion d'un travail sur la symétrie axiale et sur les nombres à quatre chiffres. Bien entendu, il faut savoir que dans un nombre à quatre chiffres, le premier chiffre est différent de zéro.

La symétrie axiale étant étudiée en classe de sixième, l'énoncé de cet exercice est accessible à tous les élèves du second degré. Les élèves peuvent tous s'engager dans une procédure de résolution et confronter leurs solutions car il est assez facile d'obtenir une réponse partielle.

Le choix des variables

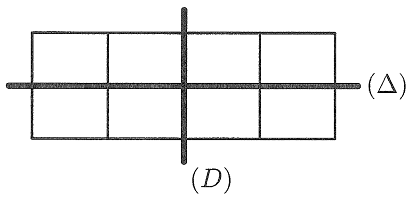
Le choix d'un nombre pair de chiffres a pour but d'éviter une complexité supplémentaire. En effet, avec un nombre impair de chiffres par exemple, le chiffre central doit présenter la particularité de posséder un axe de symétrie « vertical ». Notre idée initiale était de demander les nombres entiers de quatre chiffres possédant au moins un axe de symétrie, mais il y en avait trop !

La résolution s'effectue essentiellement dans le cadre géométrique. Les justifications ne sont pas demandées.

3. Démarche possible

Les chiffres utilisés sont 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

a. Compte-tenu des écriture des chiffres proposées, seules les symétries orthogonales d'axe « horizontal »et d'axe « vertical »sont à prendre en compte. Notons $S_{(D)}$ et $S_{(\Delta)}$ les symétries axiales utilisées :



b. Parmi les chiffres utilisés, 0 1 3 8 sont les seuls ayant l'axe de symétrie (Δ).

c. Parmi les chiffres précédents, 0 1 8 sont les seuls qui sont transformés en un chiffre utilisé par la symétrie d'axe (D). Les chiffres 0 1 8 sont donc les seuls qui ont pour axes de symétrie (D) et (Δ).

Conclusion : Les six nombres entiers de quatre chiffres possédant deux axes de symétrie sont :

1001 1111 1881 8008 8118 8888

4. Analyse de productions

Les démarches proposées par les élèves sont dans l'ensemble proches de celle que nous attendions. Ils ont éliminé les chiffres qui ne possèdent pas d'axe de symétrie « horizontal », puis le chiffre trois qui ne peut apparaître dans un nombre de quatre chiffres possédant un axe de symétrie « vertical ». Il ne reste que trois chiffres possibles : 0, 1 et 8.

Certains groupes ont considéré qu'un nombre de quatre chiffres pouvait commencer par 0 et ont donc trouvé des solutions supplémentaires. Ces réponses ont été étudiées.

D'autres n'ont pas considéré le nombre dans son ensemble mais comme deux nombres de deux chiffres juxtaposés, considérant donc que 8 852 possédait deux axes de symétrie, l'un pour 88 et l'autre pour 52.

Le taux de réussite est conforme à nos attentes : 83 % des classes ayant participé ont donné la bonne réponse.

5. Prolongements

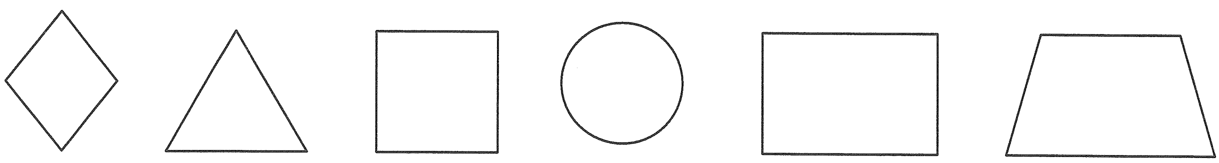
- On constate (ou l'on démontre) que les nombres obtenus ont tous un centre de symétrie. Existe-t-il des nombres à quatre chiffres possédant un centre de symétrie, mais pas d'axe de symétrie ?
- Chercher les nombres à quatre chiffres ayant un seul axe de symétrie « vertical ».

  Parmi les chiffres utilisés, 0 1 2 5 8 sont les seuls qui sont transformés en un chiffre par la symétrie d'axe (D).
  Les nombres à quatre chiffres ayant l'axe de symétrie « vertical » sont donc :

1001	1111	1251	1881	1521
2005	2115	2255	2885	2525
5112	5252	5522	5882	5002
8008	8118	8258	8528	8888

- Reprendre l'énoncé du problème du rallye, et comparer l'efficacité de la démarche selon que l'on commence par étudier le cas de l'axe de symétrie « vertical » ou « horizontal ».
- Reprendre le même exercice avec un nombre à cinq chiffres. Dans ce cas, il suffit, à partir des six solutions de l'exercice du rallye, d'ajouter comme chiffre central un chiffre admettant les deux axes de symétrie (D) et (Δ), c'est-à-dire 0 1 ou 8. Le problème admet alors 18 solutions.
- Remplacer les chiffres par des lettres, par un mélange de chiffres et de lettres, ou bien par des figures géométriques. Cette dernière proposition permet de revoir les axes de symétrie des figures usuelles.

  Voici quelques exemples de figures géométriques intéressants :



II Doseur à spaghetti

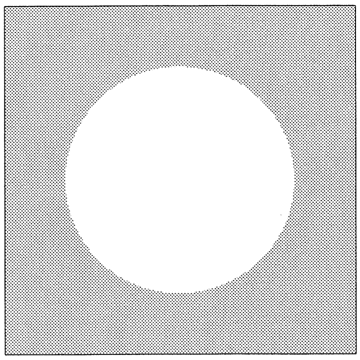
1. Énoncé

Le dessin ci-contre représente un doseur à spaghetti.

Le nombre de spaghetti que l'on peut passer ensemble dans le trou donne la quantité nécessaire pour le nombre de personnes correspondant.

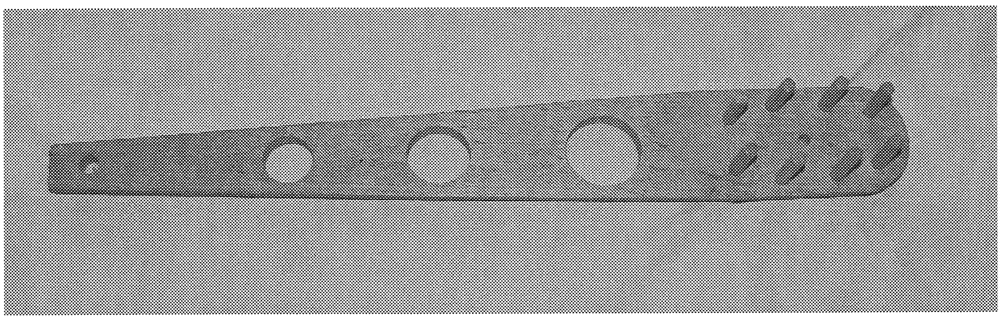
Le disque dessiné correspond à la ration moyenne pour 2 personnes. Son rayon est 1,5 cm.

Dessiner le disque correspondant à la ration pour 5 personnes et justifier.



2. Analyse *a priori*

Tout d'abord, ces doseurs sont présents dans le commerce, mais ceux que nous avons rencontrés sont faux ! Le trou pour deux personnes ne permet pas de laisser passer deux fois plus de spaghetti que celui pour une personne. Voici une photographie d'un doseur à spaghetti :



Derrière l'habillage alimentaire de l'énoncé, c'est la notion de proportionnalité qui est essentielle dans cet exercice. Toutefois, sa résolution dépend de la réponse à la question suivante : le nombre de personnes correspondant au doseur est-il proportionnel au rayon, au diamètre, à la circonférence, à l'aire du disque central ? Bien entendu, le nombre de personnes est proportionnel à l'aire, ce qui complique le calcul du rayon.

Enfin, la tâche demandée consiste à passer de 2 à 5 personnes, ce qui est plus difficile que de passer de 1 à 5 personnes. Nous pensons néanmoins que les élèves utiliseront comme intermédiaire « le doseur pour une personne ». Nous faisons abstraction de l'appétit des convives et de la longueur des spaghetti.

La dimension du carré n'a pas d'importance. Dans le doseur photographié ci-dessus, le rayon est de 1,5 cm, comme sur le dessin. le choix d'une valeur simplifie le calcul littéral. De plus, une valeur approchée obtenue après un calcul exact du rayon facilite la construction finale.

3. Solution

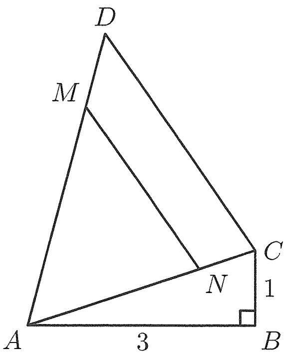
La quantité de spaghetti est proportionnelle à l'aire du disque du doseur.

Pour une personne, le disque de rayon r vérifie : $\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(1{,}5)^2$.

Pour cinq personnes, le disque doseur a pour rayon R satisfaisant l'équation $\pi R^2 = 5\,\frac{1}{2}\,\pi 1{,}5^2$, soit $R = \frac{3}{4}\sqrt{10}$.

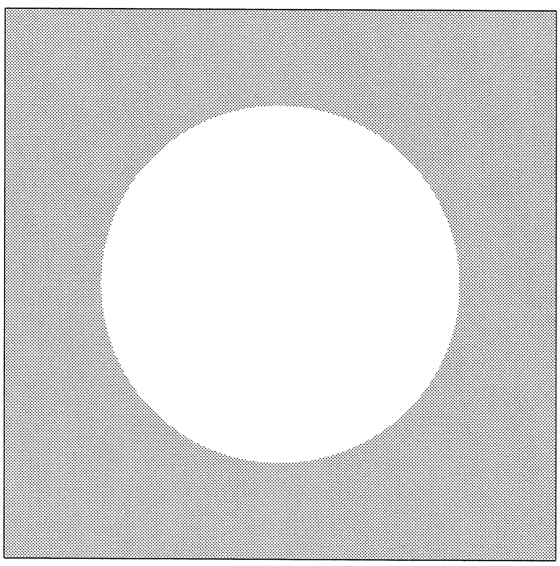
Ainsi le disque doseur pour cinq personnes a pour rayon $\frac{3}{4}\sqrt{10}$, soit environ 2,37 cm.

Remarque : dans l'énoncé, seul le dessin était demandé (sous entendu approximatif), mais la construction peut également être réalisée à la règle et au compas en utilisant les théorèmes de Pythagore et de Thalès :



$AB = 3$
$BC = 1$
$AC = \sqrt{10}$
$AD = 4$
$AM = 3$, d'où $AN = \frac{3}{4}\sqrt{10}$
Donc : $AN = R$.

Réponse à la question (l'échelle est donnée par la figure ci-dessus)



4. Analyse de productions

Le rôle de la proportionnalité dans cet exercice n'a échappé à personne. Cependant, 43 des 64 classes en compétition (environ 67 %) ont admis la proportionnalité entre le nombre de personnes et le rayon du disque :

Si pour la ration de deux personnes, le rayon du disque est de 1,5 cm,
alors le rayon du cercle, pour 1 personne est $\frac{1,5}{2} = 0,75$ cm
j'utilise un tableau de proportionnalité :

nombres de personnes	2	1	5
rayon disque	1,5	0,75	3,75

$\times 0,75$

Pour 5 personnes, le rayon du disque est de 3,75 cm.

L'usage du coefficient de proportionnalité 2,5 est loin d'être systématique ! Peut-être a-t-il semblé plus naturel aux élèves de « chercher » une relation de proportionnalité entre le nombre de personne et une caractéristique du cercle, plutôt qu'une relation de proportionnalité entre les nombres de personnes (passage de 2 à 5, en multipliant par 2,5).

Certaines classes déterminent l'aire du disque pour une personne avant de conclure pour cinq personnes. D'autres passent de deux à quatre personnes, puis de deux à une personne pour conclure avec cinq personnes $(4 + 1)$.

Par hypothèse le rayon est de 1,5 cm.
Donc l'aire d'un disque : $\pi \times R^2 = 3,14 \times 1,5^2$
$= 7,065$
Donc pour deux personnes l'aire du disque du dessert
est de 7,065 cm²
Alors pour quatre personnes : $7,065 \times 2 = 14,13$.
Pour 1 personnes on fait : $7,065 \div 2 = 3,5325$
Et pour 5 personnes on fait : $3,5325 + 14,13 = 17,6625$
Donc l'aire du disque pour 5 personnes est de 17,6625 cm²
Aire $= \pi R^2$
$\frac{\text{Aire}}{\pi} = R^2$ alors $\frac{17,6625}{3,14} = 5,625$
$R^2 = 5,625$ cm² donc $R = \sqrt{5,625} \simeq 2,3717$
Donc le rayon du cercle pour cinq personnes est de $\sqrt{5,625}$ cm
et d'environ 2,37 cm.

Peu de productions mettent en évidence la relation littérale $5\dfrac{\pi r^2}{2} = \pi R^2$, soit $R^2 = 2{,}5r^2$, qui permet d'éviter d'approximer π.

Nous notons également que le calcul exact fait figure d'exception. Seules deux classes trouvent la valeur exacte $\sqrt{5{,}625}$ du rayon, les autres utilisent des valeurs approchées à chaque étape, suffisamment fines toutefois pour le disque final ait un rayon de 2,4 cm, ce qui est une approximation acceptable.

Une solution originale pour terminer : la classe a reconnu qu'il fallait procéder à un agrandissement de coefficient $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ pour passer du doseur de l'énoncé à celui que l'on voulait construire (avec malheureusement une erreur de calcul final).

On remarque ci-dessous que les élèves sont conscients de la diversité des appétits et qu'il s'agit de procéder à une modélisation.

On sait que pour une ration moyenne de deux personnes le rayon du doseur est de 1,5 cm
Afin de trouver la ration pour 5 personnes, nous utilison le coefficient de proportion-
-nalité. Il nous faut donc calculer le
coefficient : $k^2 = \dfrac{5}{2}$.

Donc $k = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$

C'est un agrandissement. Nous cherchons le rayon du grand disque :
$1{,}5 \times \sqrt{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{1{,}5\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \simeq 3{,}4$

5. Prolongements

Une classe a d'elle même proposé un prolongement puisque l'aire du cadre rectangulaire de nouveau doseur a elle aussi été évaluée. On pourrait déjà proposer la construction exacte du disque à la règle et au compas.

Le même problème pourrait être envisagé pour :
- un doseur à spaghetti dont le trou est un triangle équilatéral, un carré ou un rectangle dont la longueur est le double de la largeur ;
- un doseur à lentilles qui pourrait être une boule creuse, un cube, un cylindre ou un cône de hauteur constante. On peut aussi s'intéresser au doseur à glace ...

III Entraînement de tennis

1. Énoncé

Au club Lyrale, un super lanceur de balles permet aux joueurs de s'entraîner.

Pour les débutants, il lance des balles de tennis à raison de 5 par minute ou de 7 par minute.

Il fonctionne automatiquement un nombre entier de minutes à chacune des deux vitesses.

Quelles sont les différentes possibilités offertes à Philippe sachant qu'il souhaite renvoyer 170 balles ?

2. Analyse *a priori*

Les différentes possibilités offertes à Philippe sont nécessairement des nombres entiers. Ce problème d'arithmétique peut se traiter soit algébriquement par une mise en équation, soit par exhaustion en dressant un tableau de multiples de cinq et un tableau de multiples de sept ; il suffit alors de repérer les cas où la somme d'un nombre de la première série et d'un nombre de la seconde est égale à 170.

De façon encore plus simple, on peut aussi répondre par des essais successifs sans faire d'analyse mettant en œuvre les multiples de 5 et de 7. Dans ce cas, on fixe $x = 0$ et on trouve la valeur de y correspondante (si elle est entière on a une solution). Puis on regarde pour $x = 1$, etc. Jusqu'à $x = 35$ et on s'aperçoit qu'à partir de ce moment les valeurs de y sont négatives donc inutilisables...

Nous nous attendons à une mise en équation suivie d'essais.

Le choix des inconnues semble naturel, x pour le nombre de minutes de fonctionnement à la vitesse de 5 balles par minute et y pour le nombre de minutes de fonctionnement à la vitesse de 7 balles par minute. Il s'agit alors de résoudre l'équation : $5x + 7y = 170$, où x et y sont des entiers. Les élèves ne sont pas accoutumés à résoudre une équation à deux inconnues, ils doivent donc prendre des initiatives. Nous nous attendons ensuite à deux procédures :

- Encadrer x et y puis lister les cas possibles : x est nécessairement inférieur ou égal à $\dfrac{170}{5}$, soit inférieur ou égal à 34, et y est nécessairement inférieur ou égal à $\dfrac{170}{7}$, soit inférieur ou égal à 24.

  Par ailleurs, y étant un multiple de 5, le nombre de cas à étudier est limité. Parmi les cinq valeurs possibles de y, les élèves doivent alors calculer les valeurs de x qui satisfont l'équation, et vérifier qu'elles sont entières.
- Chercher les points à coordonnées entières de la droite d'équation $y = \dfrac{170-5x}{7}$, ou bien $x = \dfrac{170-7y}{5}$, puis procéder par balayage. Les élèves peuvent reconnaître l'équation d'une droite ; le problème se ramène alors à déterminer les points à coordonnées entières et positives de la droite d'équation : $y = \dfrac{170-5x}{7}$ par essais successifs ou par lecture graphique.

Comme il n'est pas demandé *une* possibilité, mais l'ensemble de *toutes* les possibilités, les élèves ne peuvent pas se contenter de trouver quelques solutions par tâtonnement, mais doivent, après ces tâtonnements éventuels, mettre en place un algorithme qui leur permette de les déterminer toutes.

La difficulté de cet exercice ne réside pas dans sa mise en équation, mais dans la résolution de cette dernière dans l'ensemble des entiers naturels. Nous faisons la même remarque dans l'exercice de la finale « la touche étoile ».

Nous avons choisi les nombres 5 et 7, d'une part parce qu'ils sont premiers entre eux et que l'on s'assure ainsi de l'existence d'une famille de solutions au moins dans l'ensemble des entiers relatifs (voir la partie prolongements pour un rappel concernant l'étude des équations $ax + by = c$ en terminale S), et d'autre part parce qu'ils sont dans le domaine numérique familier et permettent ainsi de faire les calculs mentalement.

Enfin, le nombre 170 a été choisi de façon à obtenir un nombre « raisonnable » de solutions.

3. Solution

Soit x le nombre de minutes de fonctionnement à la vitesse de 5 balles par minute, y le nombre de minutes de fonctionnement à la vitesse de 7 balles par minute.

D'après l'énoncé, x et y satisfont la relation $5x + 7y = 170$, soit $5x = 170 - 7y$. Donc y est un multiple de 5.

y	0	5	10	15	20	25
x	34	27	20	13	6	-5
Durée en min	34	32	30	28	26	

Conclusion : Philippe a cinq possibilités. Il peut jouer :

- 34 minutes à raison de 5 balles par minute ;
- 27 minutes à raison de 5 balles par minute et 5 minutes à raison de 7 balles par minute ;
- 20 minutes à raison de 5 balles par minute et 10 minutes à raison de 7 balles par minute ;
- 13 minutes à raison de 5 balles par minute et 15 minutes à raison de 7 balles par minute ;
- 6 minutes à raison de 5 balles par minute et 20 minutes à raison de 7 balles par minute.

4. Exemples de productions

Sur soixante réponses, vingt-quatre sont correctes et neuf sont incomplètes. Dans ces trente-trois réponses, on observe l'utilisation d'un algorithme. Les autres productions restent sous forme d'essais partiels. La relation $5x + 7y = 170$ qui est citée deux fois n'a été exploitée qu'une seule fois pour donner les solutions.

Quelques productions de classes de troisième

a. Un extrait : « $170 = [(x \times 5) + (y \times 7)]$
Pour pouvoir trouver 170, il faut multiplier 7 par un multiple de cinq (5, 10, 15, 20) pour pouvoir additionner avec ces deux nombres-ci un multiple de cinq. »

b. Une production sans équation :

Je trouve les différentes possibilités offertes à Philippe:

1) $170 \div 5 = 34$ soit 34 min
Donc, à une vitesse de 5 balles par minute, il faut 34 minutes pour renvoyer 170 balles.

2) $(100 \div 5) + (70 \div 7) = 20 + 10 = 30$ soit 30 min.
Donc, en renvoyant les balles à la vitesse de 5 balles par minutes pendant 20 min et pendant 10 min avec la vitesse de 7 balles par minutes, on renvoit 170 balles.

3) $(140 \div 7) + (30 \div 5) = 20 + 6 = 26$ soit 26 min.
Donc, en renvoyant les balles à la vitesse de 7 balles par minutes pendant 20 min et pendant 6 min avec la vitesse de 5 balles par minutes, on renvoit 170 balles.

4) $(35 \div 7) + (135 \div 5) = 5 + 27 = 32$ soit 32 min.

5) $(105 \div 7) + (65 \div 5) = 15 + 13 = 28$ soit 28 min.

c. Une production avec recherche numérique et tableau :

On veut calculer le temps qu'il faut à la machine pour lancer 170 balles à la vitesse de 5 balles par minute

On a les données suivantes:

5 balles / 1 min

170 balles / x

x = temps en minute.

avec les produits en croix on a calculer:

$$\frac{170 \times 1}{5} = x$$

$$x = \boxed{34 \text{ min}}$$

a partir des calcules suivants :

$34 \times 5 + 0 \times 7 = 170$
$27 \times 5 + 5 \times 7 = 170$
$20 \times 5 + 10 \times 7 = 170$
$13 \times 5 + 15 \times 7 = 170$
$6 \times 5 + 20 \times 7 = 170$

on a constituer un tableau

5 balles/min	34	27	20	13	6
7 balles/min	0	5	11	15	20

5. Prolongements

La résolution d'équations du type « $ax + by = c$ », dans l'ensemble des entiers relatifs, dans le cas où c est le $PGCD$ de $|a|$ et $|b|$ s'étudie en terminale S, en spécialité. Le cas où c est un multiple de ce $PGCD$ s'en déduit alors aisément. Pour des compléments d'information, on pourra donc se référer à un manuel de terminale S spécialité (programme 2002). Bien entendu, la mise en œuvre des outils de terminale n'était pas attendue ici.

Voici ci-dessous un résumé de la démarche utilisée en terminale S.

Dans le cas particulier où c est le $PGCD$ de $|a|$ et $|b|$, l'équation $ax + by = c$ admet une infinité de solutions ;

- on en trouve une solution particulière (x_0, y_0) en utilisant l'algorithme d'Euclide ; l'équation équivaut alors à : $ax + by = ax_0 + by_0$;
- l'utilisation du théorème de Gauss permet alors de déterminer l'ensemble des solutions.

Dans le cas où c est un multiple du $PGCD$ de $|a|$ et $|b|$ noté g, l'équation $ax + by = c$ admet aussi une infinité de solutions.

En notant $c = k \times g$ et (x_0, y_0) une solution particulière de $ax + by = g$, alors (kx_0, ky_0) est une solution particulière de $ax + by = c$. L'utilisation du théorème de Gauss permet alors de déterminer l'ensemble des solutions.

Enfin, dans les cas où le $PGCD$ de $|a|$ et $|b|$ ne divise pas c, l'équation $ax + by = c$ n'admet aucune solution.

Exemple : soit à résoudre $30x - 45y = 25$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Le $PGCD$ de 30 et 45 est égal à 15, et 25 n'est pas un multiple de 15.

Si cette équation admettait une solution (x_0, y_0), alors $30x_0 - 45y_0$ serait un multiple de 3. Or 25 n'est pas un multiple de 3. Donc cette équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Variante 1 : En classe, l'enseignant peut reprendre le même exercice en choisissant des nombres premiers entre eux, autres que 5 et 7 ; par exemple 17 et 31.

Variante 2 : L'enseignant peut proposer un exercice dont la résolution demande le même type de raisonnement.

IV La figure manquante

1. Énoncé

M. Géo Maîtrie est professeur de mathématiques et, dans le livre de ses élèves, il s'intéresse à un exercice corrigé de géométrie où l'on demande de calculer le périmètre et l'aire d'une figure.

Mais l'éditeur a commis un oubli : la figure est manquante !

M. Maîtrie a alors l'idée de demander à sa classe d'essayer de reconstituer la figure à partir des réponses, sachant que les élèves ne disposent que d'une équerre graduée uniquement tous les centimètres et d'un compas.

Le professeur ne s'attendait pas à une telle diversité de réponses, suivant que les élèves respectent une des deux conditions ou toutes les deux.

À votre tour :

A. Pouvez-vous dessiner une figure dont le périmètre mesure $(3\pi + 8)$ centimètres ?

B. Sauriez-vous en construire une dont l'aire vaut $5\pi\ cm^2$?

C. Enfin, pourriez-vous réunir ces deux conditions sur une seule et même figure ?

2. Analyse *a priori*

Cet exercice porte sur le calcul d'aires et de périmètres. Mais contrairement aux exercices traditionnels où l'on demande de calculer le périmètre et l'aire d'une figure donnée, il s'agit ici de la démarche inverse, proposer une figure dont on donne le périmètre et/ou l'aire.

On note l'importance des instruments autorisés, l'équerre graduée ne permet de tracer que des segments de longueur un nombre entier de centimètres. Les élèves doivent alors faire appel aux formules qu'ils connaissent, et sont obligés de bien distinguer les notions d'aire et de périmètre.

À la première question, $3\pi + 8$ ne rappelle aucune formule connue ; la compréhension de la notion de périmètre est alors indispensable pour pouvoir imaginer une figure satisfaisant à la condition. Le nombre 8 peut faire penser à des polygones tandis que la présence du nombre π incite plutôt les élèves à penser au cercle ou au disque. Il s'agit de « mélanger » les deux : les élèves peuvent faire des essais, puis par agrandissement ou réduction aboutir à une solution convenable.

L'unité est le centimètre, car c'est l'unité familière aux élèves dans ce type de situation (car plus pratique sur une feuille de papier). De plus les nombres 3 et 8 ont été choisis parce qu'ils sont entiers, et que la règle n'est graduée que tous les centimètres.

Le problème est ouvert, et laisse aux élèves la possibilité de prendre des initiatives, d'effectuer des essais. Le grand nombre et la diversité des solutions possibles permettent des échanges et la mise en place d'un débat sur la validité des figures proposées.

À la deuxième question, 5π fait penser à la formule donnant l'aire d'un disque : πR^2. Il suffit alors de construire un disque de rayon $\sqrt{5}$ et le problème se ramène alors à la construction d'un nombre de la forme $\sqrt{n}$, n étant un entier naturel.

Contrairement à la première question où seul un dessin était demandé, on attend ici une construction précise et justifiée avec les instruments autorisés par l'énoncé et non un croquis avec annotations tracé sans forcément utiliser les instruments.

La construction d'un segment de longueur $\sqrt{5}$ peut se faire de différentes façons : l'utilisation du théorème de Pythagore sera sans doute la méthode la plus utilisée par les élèves, mais d'autres méthodes sont envisageables (voir Rallye Mathématique de Franche-Comté, 2004).

Le disque de rayon $\sqrt{5}$ n'est pas la seule solution de ce problème, bien d'autres figures conviennent, et là aussi, comme à la première question, les élèves peuvent laisser libre cours à leur imagination.

La dernière question est beaucoup plus délicate : il s'agit de trouver une figure réunissant les deux conditions précédentes. Les élèves sont amenés à chercher des figures d'une certaine forme, et à en trouver les dimensions. Il faut procéder par essais.

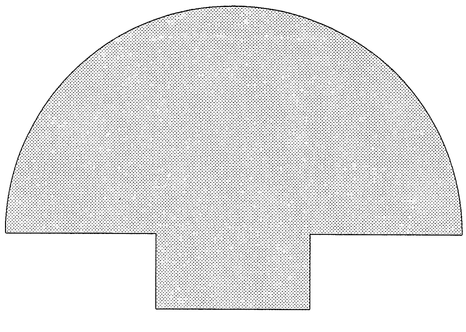
Les contenus de cet exercice sont au programme de cinquième : il est abordable avec des valeurs numériques plus simples, mais il nous semble plus raisonnable de le proposer à partir de la quatrième.

Cet énoncé pose le problème du sens à donner au mot « figure ». *(Voir quelques cas de figures « discutables » dans les propositions des élèves).*

3. Exemples de solutions

a. À chaque fois que les élèves ont rencontré π, c'est à propos du cercle mais ce n'est pas systématique comme nous le verrons dans les prolongements.

Périmètre $3\pi + 8$:

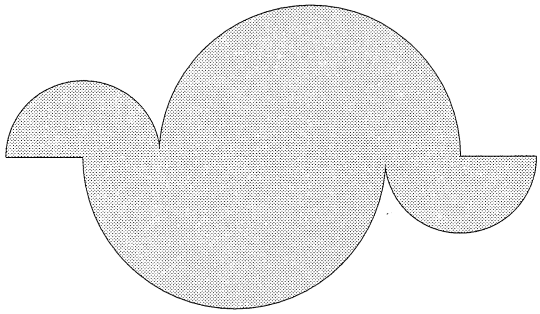


Un demi-cercle de rayon 3 cm, deux segments de longueur 1 cm et trois segments de longueur 2 cm

b. La présence de π dans l'expression suggère des figures composées de disques ou d'arcs de disques...

Aire 5π :

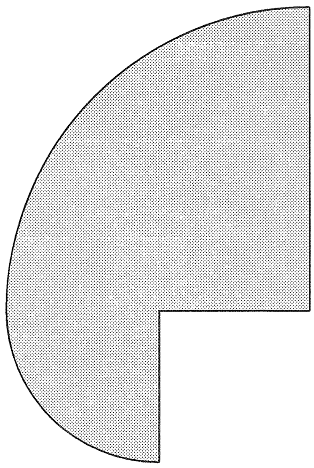
Deux demi-disques de rayon 2 cm et deux demi-disques de rayon 1 cm :



c. Figure réunissant les deux conditions sur l'aire et le périmètre

Aire 5π et périmètre $3\pi + 8$:

Un quart de disque de rayon 4 cm, un quart de disque de rayon 2 cm,
deux segments de 2 cm et un segment de 4 cm :



4. Analyse de productions

Comme on peut s'en rendre compte ci-dessous, les élèves n'ont pas manqué d'imagination pour proposer des solutions variées pour les deux premières questions.

Les productions d'élèves ne sont pas toujours reproduites à l'échelle.

Propositions de figures de périmètre $3\pi + 8$

– Des associations d'idées qui mènent à une solution exacte :

$3\pi + 8$

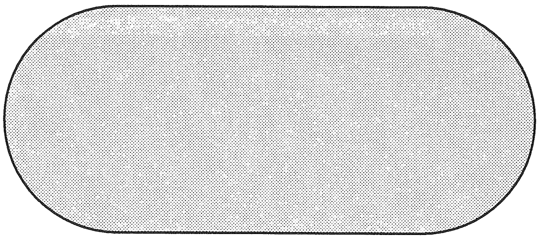
Si 3π alors il y a un cercle.

Si 8 alors il y a une figure autre qu'un cercle.

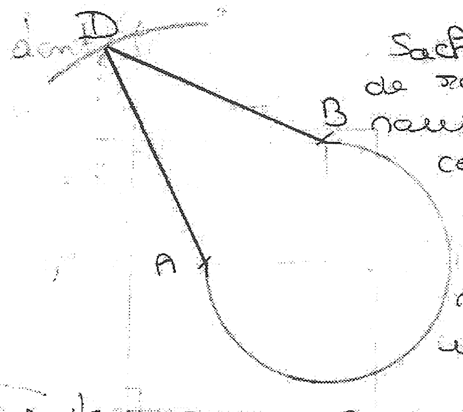
Donc $\frac{8}{2} = 4$ (pour la longueur) cm

$\frac{3\pi}{2} = 1{,}5$ pour le rayon cm

Dans cette question, il n'était pas exigé de justification, les élèves ont néanmoins souvent élaboré une argumentation intéressante qui suffit à expliciter leur démarche.

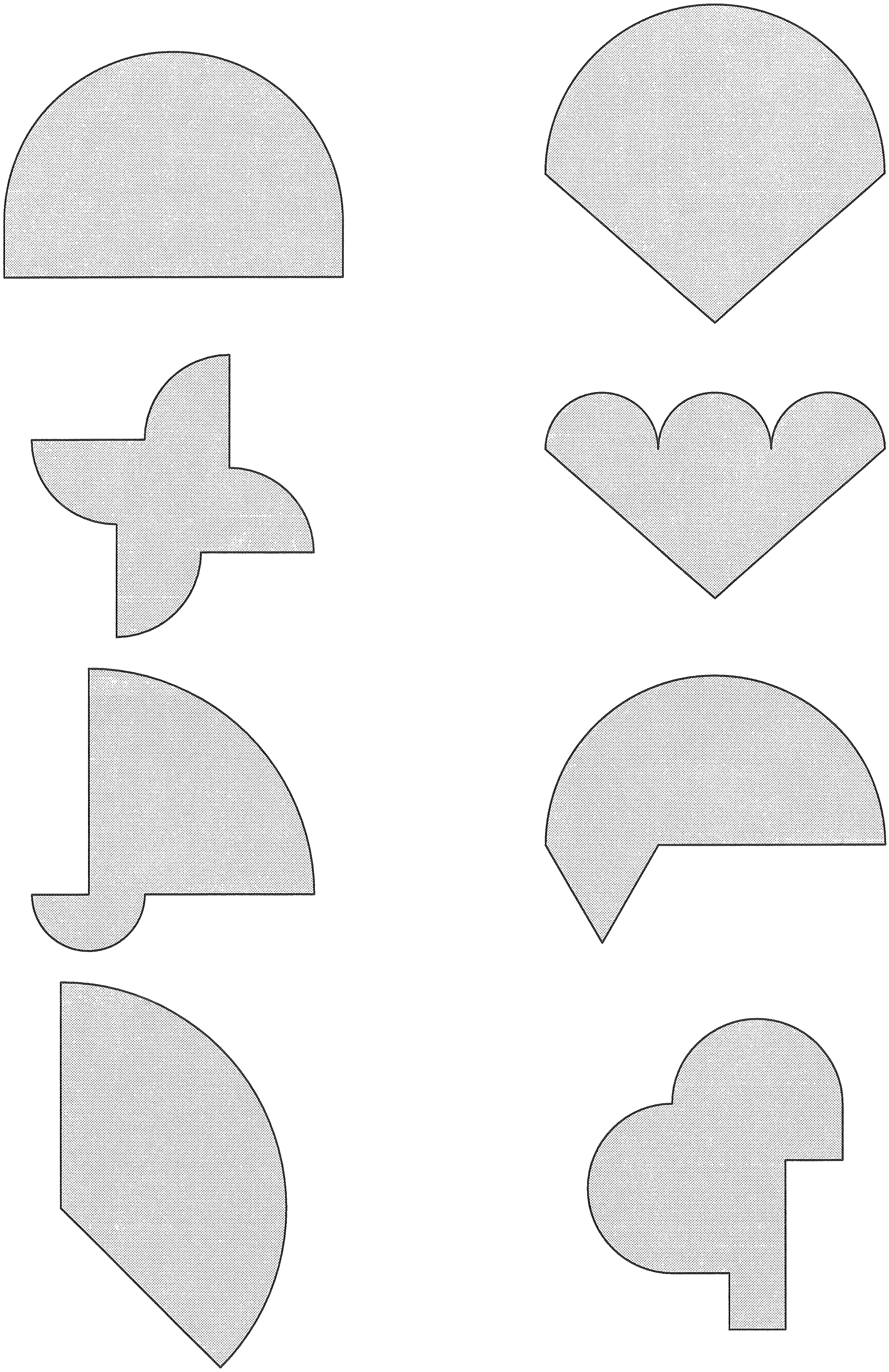


1)



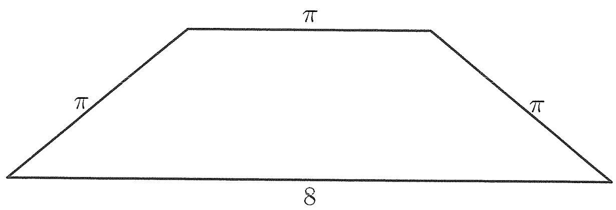
Sachant qu'un cercle de 2cm de rayon et a un perimetre de 4π nous prenons donc les 3/4 de ce cercle parce que $4 \times 3/4 = 3$ donc premiere partie de la figure fait 3π. Sachant qu'il nous reste 8cm nous prenons une cartement de 4cm que nous plaçons en A et B pour tracer l'arc qui se coupe en D et comme AD = DB = 4 nous obtenons au perimetre existant 8cm.

– Exemples de productions



– Des solutions non attendues :

La réponse présente implicitement une construction de π avec les instruments autorisés (bien sûr, π n'est pas constructible à la règle et au compas !)



Une proposition avec seulement un cercle et une simplification personnelle

a1) Calcul du rayon : $r1$

$2\pi r1 = 3\pi + 8$

$r1 = \dfrac{3\pi + 8}{2\pi}$

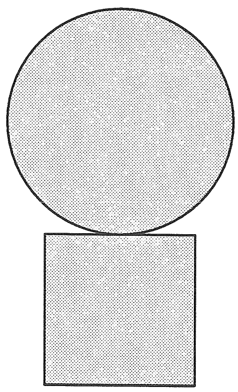
$r1 = \dfrac{3+8}{2}$

$r1 = \dfrac{11}{2}$

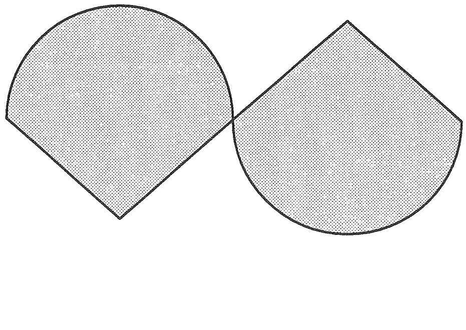
$r1 = 5{,}5$ cm

– Des solutions discutables selon le sens donné au mot figure (connexe par arc avec une frontière croisée).

Tout d'abord, nous avons vu π dans la formule donc nous avons pensé au cercle. La formule utilisée pour calculer le périmètre d'un cercle est de : $2 \times R \times \pi$ donc nous en avons conclu que 3 est le périmètre du cerle donc le rayon est de 1,5 cm. Nous avons construit le cercle de rayon 1,5 cm. Nous avons construit un carré ABCD de 2 cm de coté dont [AD] est la tangente du cercle $\mathcal{C}$.

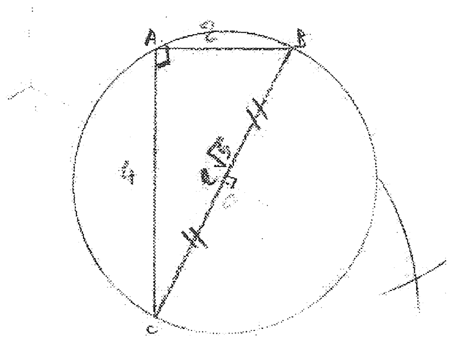


Une autre solution discutable :



Propositions de figures d'aire 5π

b)



Pour avoir une figure dont l'aire est 5π, il faut que le rayon
un cercle
du cercle soit égal à $\sqrt{5}$ car $5\pi = \pi r^2$
$5 = r^2$
$\sqrt{5} = r$
Donc le diamètre de ce cercle est égal à $2\sqrt{5}$.
Soit un triangle rectangle dont les deux côtés adjacents soient égals
à : - l'un 2cm
- l'autre 4cm.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

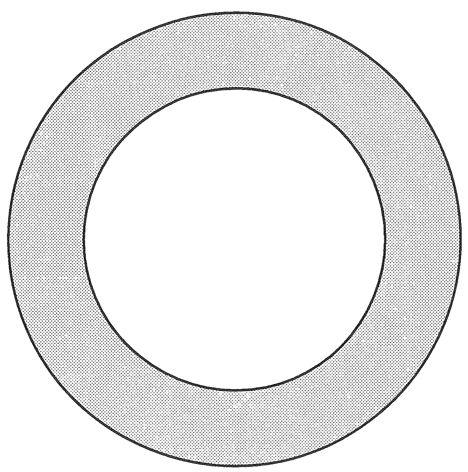
$AB^2 + AC^2 = BC^2$
$2^2 + 4^2 = BC^2$
$20 = BC^2$
$\sqrt{20} = BC$

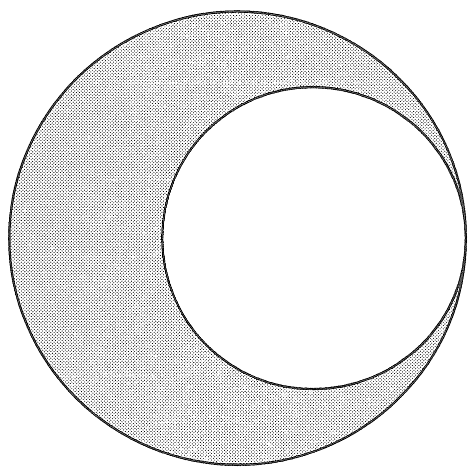
Donc $BC = 2\sqrt{5}$

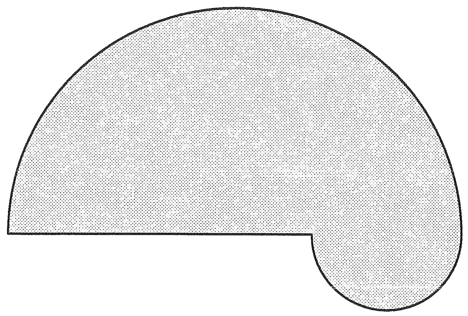
Le rayon du cercle est égal à $\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

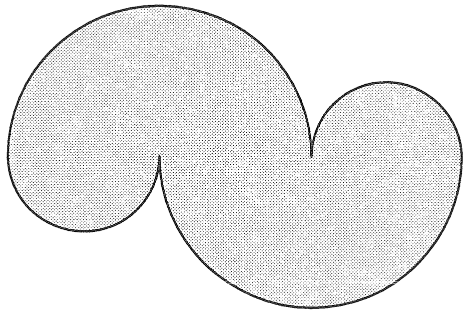
$\sqrt{5}^2 \times \pi = 5\pi$

Autres propositions trouvées dans les copies









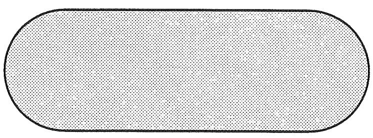
Deux propositions à discuter :

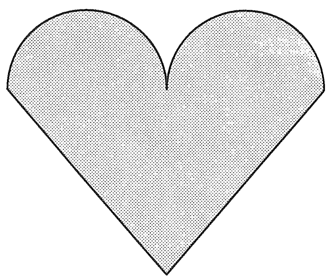
- une classe a proposé une sphère de rayon $\sqrt{1{,}25}$;
- une autre a dessiné une ellipse (ou un « ovale » ?) d'axes de mesures respectives 5 et 4. L'aire d'une telle ellipse est effectivement égale à 5π.

5. Prolongements

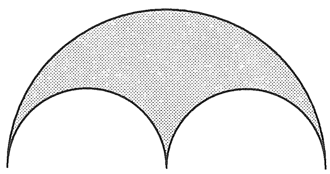
Rechercher des figures de forme imposée avec les mêmes conditions.

Trouver les mesures des figures ayant les formes proposées ci-dessous sachant que leur périmètre est égal à $3\pi + 8$.



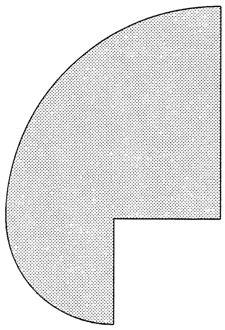


Trouver les mesures d'une figure semblable à la figure ci-contre pour que son aire soit égale à 5π.



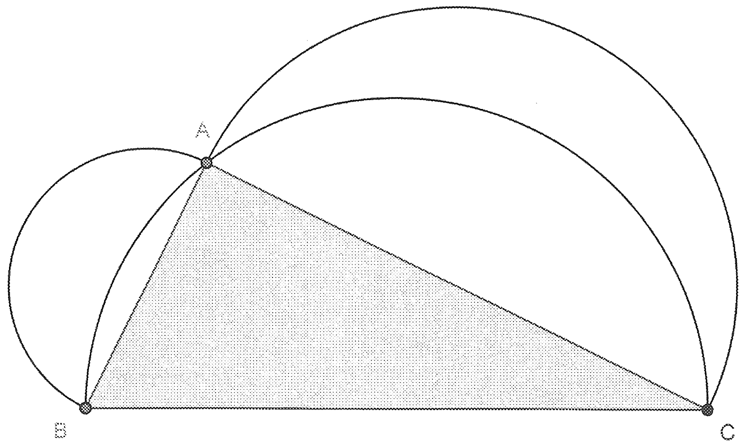
Une figure ayant une des formes précédentes peut-elle vérifier les deux conditions à la fois ?

Trouver les mesures d'une figure semblable à celle ci-contre pour que son périmètre soit égal à $3\pi + 8$ et son aire à 5π.



Étude de *lunules* : « des cercles sans π »

Hippocrate de Chios a construit la figure suivante : le triangle ABC est rectangle en A. Les surfaces comprises entre le demi cercle BAC de diamètre $[BC]$ contenant A et les demi-cercles de diamètre $[BA]$ et $[BC]$ extérieurs au triangle sont appelées lunule d'Hippocrate. La somme des mesures des aires des deux lunules est égale à la mesure de l'aire du triangle ABC. Pourtant π n'intervient pas dans l'expression de l'aire. Il faut donc se méfier des *a priori* !



V Partage de segment

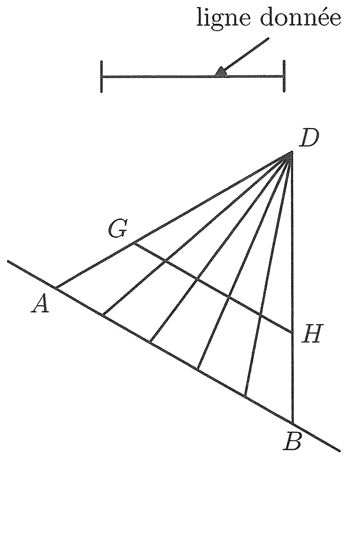
1. Énoncé

Dans un ouvrage de géométrie pratique datant de 1841, on peut lire :

« Que faut-il faire pour diviser une droite en autant de parties égales que l'on veut, par exemple en cinq parties ? » :

« Tirer une droite indéfinie AB, marquer autant de parties égales, prises arbitrairement, que la question l'exige ; prendre leur longueur AB et de cette ouverture de compas et des points A et B, décrire des arcs qui se coupent en D ; joindre par des droites D à tous les points de section de la ligne AB ; prendre ensuite la longueur de la ligne donnée et la porter de D en G et de D en H, et joindre les points G et H ; les segments de cette dernière ligne sont égaux au cinquième de la droite donnée. »

N.B. : Pour les auteurs anciens, « ligne », ou « droite », désigne ce que nous nommons segment de droite, alors qu'une droite actuelle est désignée par « droite indéfinie ».



D'après un article paru dans la revue PLOT n° 108 (Plane H., 2003).

En reprenant cette méthode, partagez un segment donné de 10 centimètres en 7 parties égales.

Vous justifierez que cette méthode répond bien au problème posé.

2. Analyse *a priori*

L'originalité de ce problème réside dans la nature de la tâche proposée : il ne s'agit pas d'un problème « ouvert », ici l'habillage et la forme de l'énoncé revêtent une importance capitale. L'enjeu est la compréhension d'une méthode à partir d'un texte historique et sa reformulation à l'aide du vocabulaire actuel. L'élève doit chercher le rôle des objets géométriques en jeu dans la construction proposée, il y a donc bien un travail de recherche à effectuer mais de nature moins traditionnelle que dans les autres problèmes du rallye.

Cet exercice débute par un énoncé extrait d'un manuel scolaire du XIXe siècle. Il s'agit de le lire, de le comprendre et de l'analyser. Il est indispensable de s'approprier le vocabulaire « ligne », « droite » et « droite indéfinie » pour comprendre puis appliquer la méthode décrite pour partager un segment. Le texte peut paraître un peu long mais il semble intéressant pour montrer la nécessité d'un vocabulaire précis pour décrire une construction géométrique.

Après la phase de précision lexicale, vient la consigne en elle-même, « partager un segment de 10 cm en 7 parties égales ». Il s'agit d'une application du théorème de Thalès (alors nommé théorème des lignes proportionnelles), et peut être abordé dès la classe de troisième.

Puis vient la justification qui doit commencer par prouver que $[GH]$ mesure 10 cm en démontrant que les triangles ADB et DGH sont équilatéraux (ADB par report de mesure de $[AB]$ et DGH comme triangle isocèle ayant un angle de 60°).

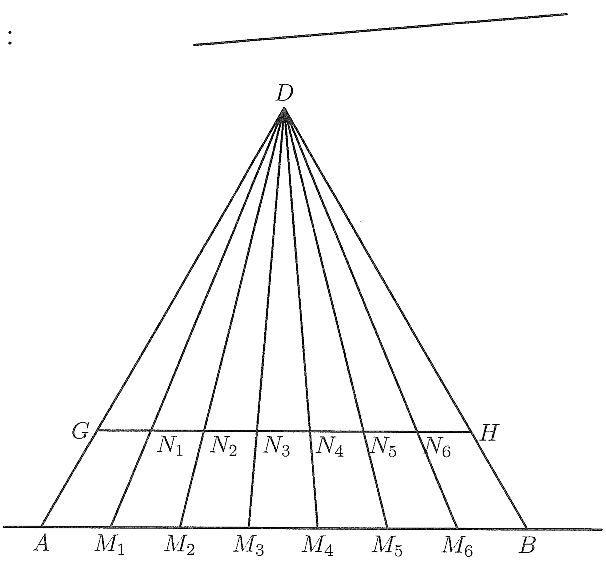
Ensuite, il faut prouver que les droites (GH) et (AB) sont parallèles (plusieurs méthodes : réciproque du théorème de Thalès, angles...).

Enfin, il reste à montrer que $[GH]$ est bien partagé en 7 segments de même longueur en utilisant le théorème direct de Thalès.

La compréhension du texte et la construction ne devraient pas présenter de difficultés pour les élèves. Nous nous attendons à plus de difficultés pour la démonstration.

3. Solution *(la figure n'est pas en vraie grandeur)*

Ligne donnée de 10 cm :



Sur une droite, on marque à partir de A, 7 segments consécutifs de même longueur. Ces segments doivent être de mesure « assez grande » : la longueur choisie doit être supérieure à $\frac{10}{7}$ cm pour que la figure soit réalisable.

Les cercles de rayon AB, l'un de centre A, l'autre de centre B, se coupent en D.

Le triangle ABD est donc un triangle équilatéral.

Le cercle de rayon 10 cm et de centre D coupe $[AD]$ en G et $[BD]$ en H.

Le triangle DGH est isocèle en D. De plus, l'angle D mesure 60° donc DGH est un triangle équilatéral, d'où $GH = 10$ cm.

Puisque les angles en G et en A sont des angles correspondants égaux, les droites (GH) et (AB) sont parallèles.

Ainsi $[GH]$ est partagé en 7 segments par les droites (DM_1), (DM_2), ...

Dans les triangles DGH et DAB on a : $\dfrac{DG}{DA} = \dfrac{GH}{AB}$ (1)

Dans les triangles DGN_1 et DAM_1, $(GN_1)//(AM_1)$ donc $\dfrac{DG}{DA} = \dfrac{GN_1}{AM_1} = \dfrac{DN_1}{DM_1}$ (2)

(1) et (2) donnent : $GN_1 = \dfrac{AM_1}{AB} \times 10$, d'où $GN_1 = \dfrac{10}{7}$.

On montre de même que : $N_1N_2 = N_2N_3 = \cdots = N_6H = \dfrac{10}{7}$.

Le segment $[GH]$ est ainsi partagé en 7 segments de même longueur, reportés sur la ligne donnée.

4. Exemples de productions

Comme attendu, la majorité des classes a effectué un tracé correct. Cependant la plupart des justifications sont incomplètes. Quelques classes ont choisi le cas particulier où $AB = 14$ cm mais, si cette mesure n'intervient pas dans la justification, cela ne nous a pas posé de problème.

Une solution correcte proposée par une classe de seconde utilisant la notion de triangles semblables :

• La méthode donnée nous indique que ABD est équilatéral
"prendre leur longueur AB et de cette ouverture de compas et des points A et B, décrivent des arcs qui se coupent en D".
• Elle nous apprend que le triangle GDH est équilatéral
"prendre ensuite la longueur de la ligne donnée et la porter de D en G et de D en H et joindre les points G et H".
• Donc les triangles ABD et GDH ont les même angles (tous égaux à 60°)
donc ils sont semblables.
Or les triangles semblables ont le même rapport de proportionnalité
exemple : $\frac{1}{7}$ de AB est proportionnel à $\frac{1}{7}$ de GH

Une solution correcte proposée par une classe de troisième :

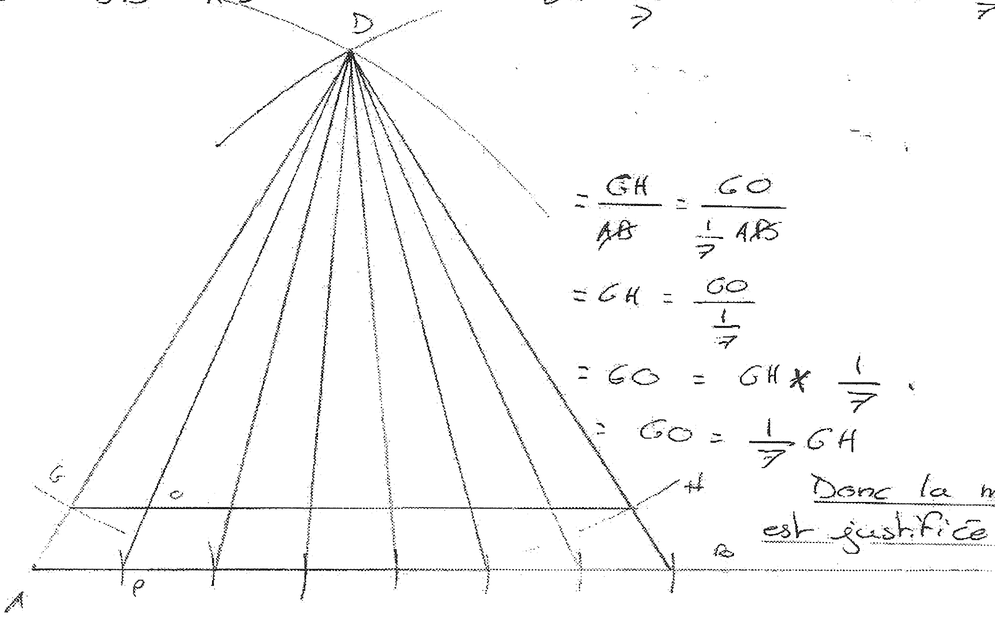
OAB et OGH sont des triangles équilatéraux.
Donc, tous leurs angles mesures 60°.
Or, Deux angles correspondants égaux déterminent des droites parallèles.
Donc (GH) // (AB).

DAP est un triangle. G ∈ [DA]. O ∈ [DP]. (GO) // (AP).
D'après Thalès, on a :

$\frac{DG}{DA} = \frac{DO}{DP} = \frac{GO}{AP}$ donc $\frac{GO}{\frac{1}{7}AB}$

DAB est un triangle. G ∈ [DA]. H ∈ [DB]. (GH) // (AB)
D'après Thalès, on a :

$\frac{DG}{DA} = \frac{DH}{DB} = \frac{GH}{AB}$ or comme $\frac{DG}{DA} = \frac{GO}{\frac{1}{7}AB}$ alors $\frac{GH}{AB} = \frac{GO}{\frac{1}{7}AB}$



$= \frac{GH}{\cancel{AB}} = \frac{GO}{\frac{1}{7}\cancel{AB}}$

$= GH = \frac{GO}{\frac{1}{7}}$

$= GO = GH \times \frac{1}{7}$.

$= GO = \frac{1}{7} GH$

Donc la méthode est justifiée.

5. Prolongements

- **Variante** : Un segment $[AB]$ étant donné, construire un point M de $[AB]$ tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{7}$.
- **Travail à partir d'un autre texte historique**

  En respectant l'orthographe de l'époque, nous donnons ici un exemple de construction extrait du savoureux livre de Leblond (1767) : *« L'arithmétique et la géométrie de l'officier contenant la théorie et la pratique de ces deux sciences, appliquées aux différens emplois de l'Homme de guerre »* .

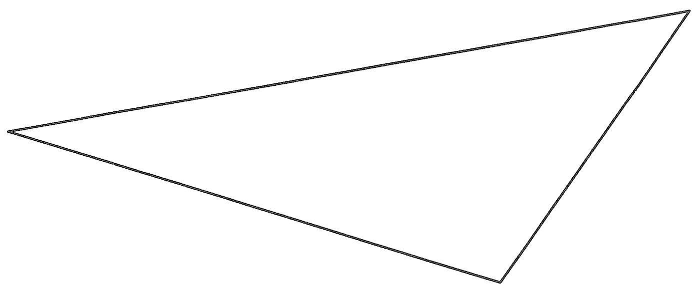
169. Prolonger une ligne droite AB sur le terrein au-delà d'un obstacle X qui le rencontre dans la direction de cette ligne (sic)
On suppose qu'il faut prolonger la ligne AB sur le terrein, au delà de l'obstacle X, qui empêche de planter des piquets ou jalons dans le prolongement de AB.
Résolution
On élevera au point B la perpendiculaire BC ; ou, ce qui est la même chose, on fera l'angle droit ABC, dont le côté BC aura toute la longueur nécessaire pour passer la largeur de l'obstacle X. On fera au point C un angle droit BCD avec le côté BC. Le second côté CD de cet angle sera pris de la longueur dont il sera besoin pour passer l'obstacle. Supposons que cette longueur soit CD : au point D, on fera un angle droit CDE, dont le côté DE soit égal à CB. Enfin, au point E sur DE, on fera l'angle droit DEH, son côté EH donnera le prolongement de la ligne AB, & la partie BE sera égale à CD.

VI Instrument original

1. Énoncé

On dispose, comme unique outil de construction, d'un triangle gabarit.

Il s'agit d'un triangle cartonné que l'on pourra reproduire à l'aide du modèle ci-dessous.



Avec cet unique instrument, sauriez-vous tracer une hauteur dans un triangle ABC quelconque ?

Vous détaillerez les constructions sur la fiche réponse en présentant les différentes étapes sur les dessins proposés, à la manière d'une bande dessinée.

2. Analyse *a priori*

L'utilisation du triangle gabarit permet de tracer des segments de droite, des perpendiculaires à une droite donnée passant par un point donné, des médiatrices de segments donnés, des parallèles à une droite donnée. Les problèmes de constructions élémentaires à l'aide du triangle gabarit font l'objet d'un article publié par le goupe « Rallye » dans la revue en ligne *Mathématiques vivantes* n° 71 consultable sur le site de l'IREM de Franche-Comté.

Le triangle gabarit est un outil inhabituel pour les élèves ; ceux-ci savent qu'un compas sert à reporter des longueurs, une équerre à tracer des angles droits, mais le premier contact avec un triangle gabarit peut les laisser perplexes. Que peut-on faire avec un triangle gabarit ? La réponse n'est pas évidente. Par exemple, le fait qu'il soit cartonné est précisé pour éviter que les élèves ne le plient et ainsi l'utilisent comme équerre. On considère implicitement qu'il est interdit de faire des marques sur le triangle gabarit.

Un seul triangle gabarit est proposé, mais il peut être utilisé plusieurs fois : on peut s'attendre à ce que les élèves utilisent plusieurs triangles cartonnés au cours de leur recherche, mais dans la réponse, on attend une solution utilisant un seul gabarit. Celui-ci permet de tracer des triangles isométriques en effectuant le contour au crayon.

Le triangle gabarit peut être utilisé comme règle mais aussi comme figure combinée avec une figure isométrique directe ou inverse obtenue à l'aide des transformations vues en collège : translation, symétrie orthogonale, rotation, symétrie centrale.

Ici, il s'agit de tracer la hauteur issue de A du triangle ABC.

a) Une hauteur est une droite passant par un point perpendiculaire au côté opposé.
- Placer le gabarit de sorte que l'un des côtés soit contenu dans la droite (BC) et qu'un autre contienne le point A. Ceci est possible dans le cas particulier des triangle et gabarit fournis pour l'épreuve de rallye puisque le gabarit peut « toucher » à la fois le coté $[BC]$ et le point A. Dans un cas général, la construction demandée est également possible en utilisant des constructions intermédiaires.
- Retourner le gabarit pour réaliser une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par ce point A.
- L'intersection de deux côtés homologues donne un deuxième point invariant.

b) Une hauteur peut être aussi considérée comme la médiatrice d'un segment.

Soient deux points T et U équidistants de A, situés sur (BC). La médiatrice du segment $[TU]$ passe par A. *(Voir la construction d'une médiatrice avec un triangle gabarit)*

Si la droite (BC) est trop « loin » de A, on pourra tracer une parallèle à (BC) plus proche de A en utilisant le glissement du gabarit sur la droite (BC).

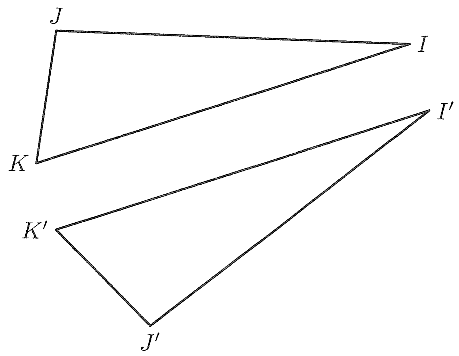
Nous nous attendons à ce que cet exercice déstabilise les élèves, mais nous le trouvons intéressant par son originalité et par l'analyse qui doit précéder la construction. Les élèves qui construisent une médiatrice avec un compas n'ont peut-être pas toujours conscience des propriétés de la médiatrice justifiant cette construction. Mais ici, nous nous attendons à ce que les élèves commencent par s'interroger sur la définition ou les propriétés de l'objet à construire avant de se lancer dans la construction.

Le mot construction n'a pas non plus le sens habituel : le travail attendu est la représentation dans différentes positions du triangle qui permet d'obtenir au final le tracé de la hauteur.

Pour que cet exercice présente davantage d'intérêt, nous avons choisi de réinvestir cet instrument dans un problème de construction en finale.

3. Tracé de la hauteur de ABC issue de C

Le triangle gabarit peut avoir deux positions dans le plan : direct IJK ou $I'J'K'$:



Solution :

Fig.1 : (JK) coïncide avec (AB), $[IJ]$ contient C.

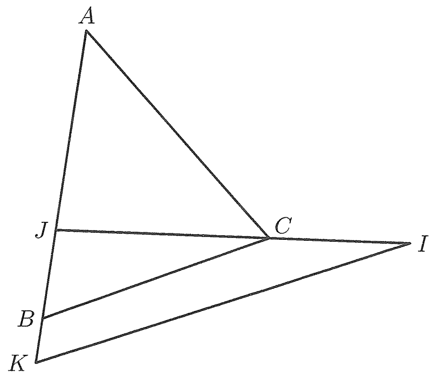
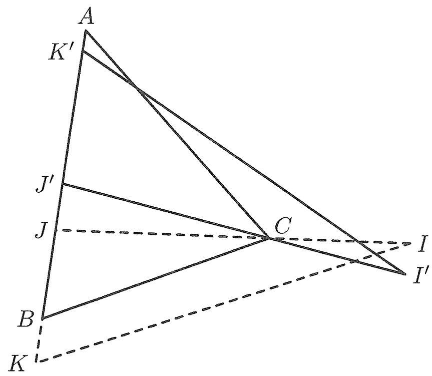
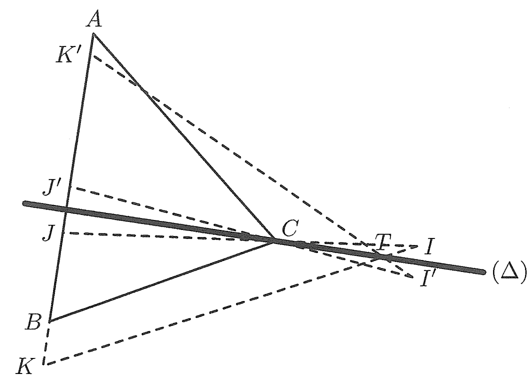


Fig.2 : $J'K'$ coïncide avec (AB), $[I'J']$ contient C.



Soit (Δ) la droite passant par C perpendiculaire à (AB).
L'image de (AB) est (AB) par la symétrie d'axe (Δ).
CJK et $CJ'K'$ sont isométriques, d'où $CJ = CJ'$.
L'image de J par $S_{(\Delta)}$ est J'.
$I'J'K'$ est le symétrique de IJK par rapport à (Δ) d'où $[KI]$ a pour image $[K'I']$.
Les deux segments $[KI]$ et $[K'I']$ se coupent sur (Δ) en T. (TC) est donc la droite (Δ).



(Δ) est la hauteur issue de C du triangle ABC

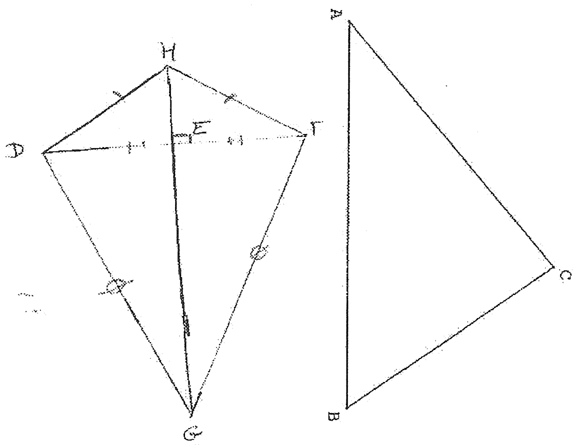
La justification du fait que la droite (Δ) est effectivement la hauteur du triangle ABC issue de C n'est pas demandée dans l'exercice. L'utilisation de triangles isocèles la permet.

4. Exemples de productions

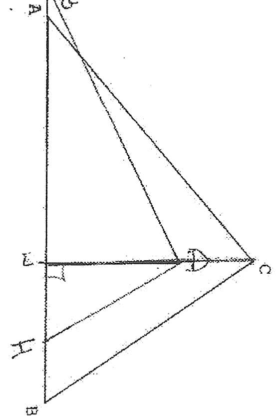
Cet exercice est commun aux classes de troisième et de seconde. Six classes de troisième sur soixante-quatre et sept classes de seconde sur cinquante-deux ont donné des réponses satisfaisantes.

Cet exercice a surpris un grand nombre d'élèves, ce que nous avons observé dans les classes des collègues du « groupe Rallye ». Les productions montrent que les élèves ont néanmoins fait preuve d'initiative en utilisant plusieurs triangles gabarits ou en pliant le triangle gabarit pour obtenir un angle droit. Cette démarche n'était pas attendue, mais la consigne n'est peut-être pas assez explicite.

Recherche d'une perpendiculaire et translation au jugé (classe de seconde)



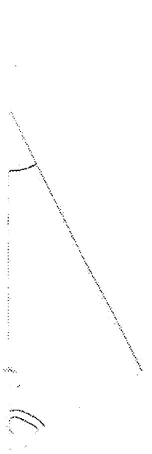
On trace à l'aide du gabarit deux triangles de façon à ce qu'ils soient symétriques. En reliant les sommets, on a donc deux droites perpendiculaires d'après la symétrie orthogonale. Par conséquent, (DE) est perpendiculaire la hauteur du gabarit issue du sommet D.

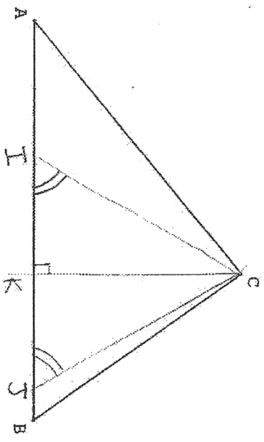


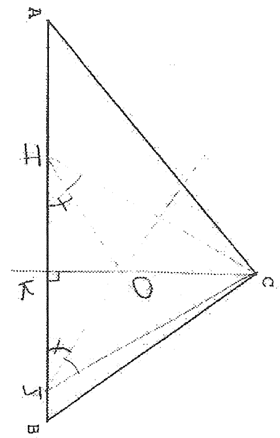
On fait coulisser le gabarit en confondant la droite (GH) à (AB) de façon à obtenir C dans le prolongement de (ED). Par conséquent, on obtient (EC) perpendiculaire à (AB) car (GH) est perpendiculaire à (ED).

D'où (EC) est la hauteur du triangle ABC issue de C.

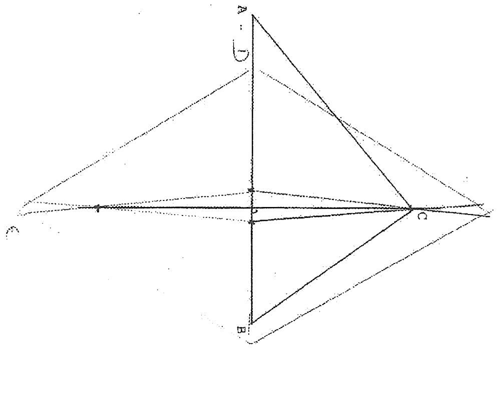
Autres productions (classes de seconde)

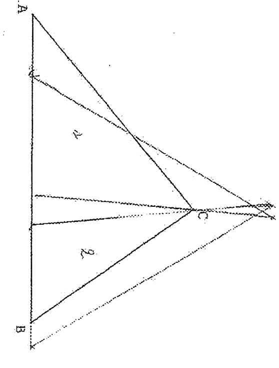






- K est équidistant de I et de J
- C est équidistant de I et de J
- $\widehat{CJK}$ et $\widehat{CIK}$ sont égaux.
- (CK) est la médiatrice de [IJ] donc tous les points appartenant à cette droite sont equidistants de I et de J.
- Donc O est équidistant de I et de J.
- OR les triangles ICJ et IOJ sont isocèles donc (CK) leur médiatrice coupe le segment [IJ] en sont milieu et perpendiculairement.
- Comme (CK) est perpendiculaire à [IJ] et [IJ] et [AB] sont confondus. Alors (CK) passe par le sommet C et coupe perpendiculairement [AB] donc (CK) est la hauteur de ABC.





5. Prolongements

- Réinvestissement de techniques de constructions élémentaires

  Soit un triangle ABC tel que $AB = 10$, $CA = 8$, $BC = 15$, et soit un triangle gabarit IJK tel que $IJ = 2$, $JK = 5$, $IK = 6$.

  Construire le symétrique de l'orthocentre du triangle ABC par rapport à (BC).

- Problème ouvert

  Deux points étant donnés, construire le segment d'extrémités ces deux points à l'aide d'un triangle gabarit, dont la mesure du plus grand des côtés est strictement inférieure à la mesure de la longueur du segment à construire.

VII Jeu du cube

1. Énoncé

Julien a inventé un nouveau jeu qu'il a baptisé « le jeu du cube ».

Pour jouer, il faut :
- un cube dont les arêtes mesurent exactement un centimètre,
- une grande feuille blanche posée sur une table, sur laquelle sont marqués deux points A et B.

En voici les règles :
- au départ, il faut faire coïncider l'un des sommets du cube avec le point A,
- le cube, posé sur la table, peut pivoter de 90° autour d'une de ses arêtes,
- on fait pivoter le cube un certain nombre de fois, en restant toujours en contact avec la table par une face ou par une arête,
- le trajet est terminé si l'un des sommets coïncide avec B.

Julien a préparé trois feuilles blanches avec les trois cas suivants :

1 - $AB = \sqrt{49}$ 2 - $AB = \sqrt{29}$ 3 - $AB = \sqrt{23}$

L'unité est le centimètre.

Sauriez-vous jouer ?
Dans les trois cas, vous dessinerez, quand il existe, un trajet possible du cube pour aller de A à B. Si ce n'est pas possible, expliquez pourquoi.

2. Analyse *a priori*

L'énoncé est un peu long. Il s'agit de bien comprendre les règles du jeu.

Deux points sont essentiels :
- l'un des sommets du cube coïncide avec le premier point A puis sous certaines conditions avec le point B après différentes rotations.
- le mouvement du cube est à analyser soigneusement : la rotation de 90° s'effectue soit autour d'une arête qui reste seule en contact avec la table (type 1), soit autour d'une arête verticale (type 2), et dans ce cas une face reste en contact avec la table.

La notion de rotation dans l'espace n'est pas étudiée dans le secondaire. Cependant, cette notion est intuitive et les propriétés s'y rattachant peuvent être disponibles chez nos élèves.

Les différentes rotations de type 1 et de type 2 permettent de réaliser un quadrillage sur la feuille blanche. Le trajet sera donc possible dès que chacun des deux points coïncident avec un nœud du quadrillage précédent. Pour résoudre ce problème, une première conjecture peut être formulée géométriquement ; le quadrillage étant tracé, A sur un nœud de celui-ci, on trace le cercle de centre A et de rayon AB, et il suffit alors de repérer s'il existe au moins un nœud de ce quadrillage sur le cercle.

Ce problème peut être transposé ainsi : étant donné deux points A et B, trouver une orientation du quadrillage telle que A et B coïncident avec des nœuds de celui-ci ; ceci nécessite un passage du géométrique au numérique ; il s'agit alors de décomposer un entier en la somme de deux carrés de deux entiers.

Nous avons choisi les valeurs numériques pour les raisons suivantes :
- $\sqrt{49}$ étant entier, c'est un cas simple qui permet de s'approprier la règle du jeu.
- la décomposition de 29 en une somme de carrés de deux entiers est assez simple et ne constitue pas un obstacle supplémentaire.
- 23 ne peut s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers.

On attend une justification du fait que 23 ne peut s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers, en procédant par exemple par exhaustion (voir solution).

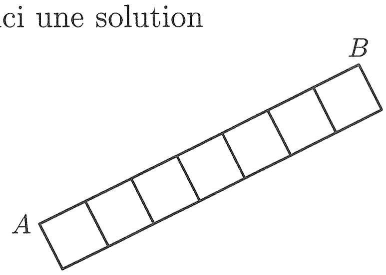
3. Solution

En faisant pivoter un cube autour de ses arêtes dans les conditions indiquées, on construit un quadrillage du plan.

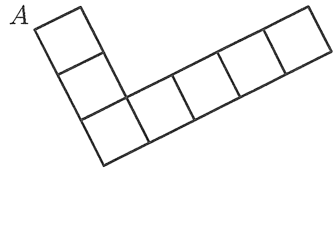
A est un sommet de ce quadrillage.

La position finale est réalisée si et seulement si B est un nœud du quadrillage.

- Si $AB = \sqrt{49}$ $\quad(AB = 7)$, voici une solution



- Si $AB = \sqrt{29}$, un déplacement dans une direction ne suffit plus, cherchons un déplacement utilisant deux directions : puisque $29 = 25 + 4$, A et B peuvent être interprétés comme les sommets d'un triangle rectangle.



– Si $AB = \sqrt{23}$, tentons de reproduire la démarche précédente, en essayant de décomposer 23 comme somme de deux carrés d'entiers.
Recherche de deux entiers x et y tels que $23 = x^2 + y^2$:

x	x^2	$23 - x^2$	y entier ?
0	0	23	non
1	1	22	non
2	4	19	non
3	9	14	non
4	16	7	non

Pour x supérieur ou égal à 5, il est clair qu'aucun entier y ne peut satisfaire l'équation. Ainsi 23 ne peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers, le point B ne pourra donc pas être situé sur un nœud du quadrillage. En conclusion, le problème posé n'a pas de solution.

4. Exemples de productions

Nous constatons que la majorité des élèves ont bien compris les consignes. La moitié des productions donnent un résultat très satisfaisant. Les deux premières situations sont immédiates ; en revanche, pour le troisième cas, l'impossibilité de décomposer 23 en somme de deux carrés d'entiers n'est pas explicitée correctement.

Une production satisfaisante malgré une erreur de formulation :

Justification :

Pour $AB = \sqrt{49}$: On fait pivoter 7 fois le cube sur une ligne droite pour aller de A vers B..

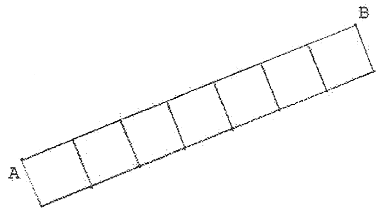
Pour $AB = \sqrt{29}$: Pour trouver le trajet du cube il faut appliquer le théorème de Pythagore car celui-ci est le seul qui utilise les racines carrées dans son calcul. On considère que AB est l'hypoténuse de ABC rectangle en C. Etant donné que $AB = \sqrt{29}$ on peut dire que $AB^2 = 29$ donc $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Comme $AB^2 = 29$ on a $AC^2 = 5^2$ et $BC^2 = 2^2$ ce qui donne $25 + 4 = 29$ donc $AB = \sqrt{5^2} = 5$ et $BC = \sqrt{2^2} = 2$. Le cube pivote une fois de 5 et puis de 2.

Pour $AB = \sqrt{23}$: Ce n'est pas possible car aucune somme de 2 racines carrées est égale à 23.

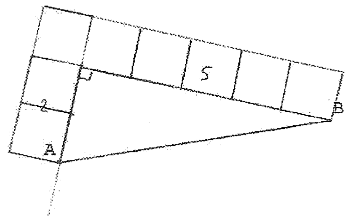
$1^2+1^2=2$	$2^2+2^2=8$	$3^2+3^2=18$	$4^2+4^2=32$
$1^2+2^2=5$	$2^2+3^2=13$	$3^2+4^2=25$	
$1^2+3^2=10$	$2^2+4^2=20$		
$1^2+4^2=17$	$2^2+5^2=29$		

Une production avec des représentations géométriques, dans laquelle le cas $AB = \sqrt{23}$ est incomplet :

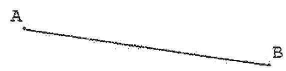
Cas $AB = \sqrt{49}$:



Cas $AB = \sqrt{29}$:



Cas $AB = \sqrt{23}$:



IM POSSIBLE.

On ne sait tracer un triangle rectangle d'hypoténuse $AB = \sqrt{23}$ car les sommes inférieures à 23 de 2 carrés parfaits sont :

$1^2 + 1^2 = 2$	$2^2 + 2^2 = 8$
$1^2 + 2^2 = 5$	$2^2 + 3^2 = 13$
$1^2 + 3^2 = 10$	$2^2 + 4^2 = 20$
$1^2 + 4^2 = 17$	$2^2 + 5^2 = 29$
$1^2 + 5^2 = 26$	

Aucun des résultats n'est égal à 23.

5. Prolongements

Variante 1 : étant donné un quadrillage et un cercle dont le centre est un nœud de celui-ci, déterminer une condition sur le rayon pour que le cercle contienne au moins un nœud du quadrillage.

Variante 2 : à la place d'un cube, utiliser un tétraèdre régulier pivotant autour d'une arête située dans le plan de la feuille.

Autre prolongement : pour la décomposition d'un entier en somme de carrés, se référer à la brochure PLOT n° 108.

VIII Somme de nombres

1. Énoncé

On considère les cinq chiffres 1, 2, 3, 4 et 5.

Calculer la somme de tous les nombres à cinq chiffres que l'on peut écrire avec ces cinq chiffres sans répétition.

2. Analyse *a priori*

En ce qui concerne les consignes de l'énoncé et le choix des chiffres :
- les nombres où interviendrait plusieurs fois le même chiffre (comme 12 512) ont été délibérément exclus afin de garder un nombre de solutions plus facilement dénombrable et une somme raisonnable,
- l'emploi du chiffre 0 a été écarté afin d'éviter tout questionnement sur la légitimité ou non de certaines écritures,
- le choix des chiffres, quant à lui, vise à rendre les calculs les plus simples possibles. Dans un premier temps, nous avions pensé à 5, 6, 7, 8 et 9, mais cela alourdissait inutilement les additions, pouvait multiplier les erreurs et rebuter d'emblée les élèves ;
- le choix de nombres à cinq chiffres repose sur une volonté d'avoir une liste suffisamment longue de nombres pour obliger les élèves à construire une méthode de dénombrement.

Pour résoudre cet exercice, nous écrivons *abcde* tout entier à cinq chiffres. Sa valeur est $a \times 10^4 + b \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10^1 + e \times 10^0$ où $\{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e\} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$. Ainsi $5\,!$ nombres sont possibles, soit 120.

Chacun des chiffres 1, 2, 3, 4 et 5 a le même nombre d'apparitions aux emplacements tenus par les paramètres a, b, c, d et e, soit 24 (120/5 ou $4\,!$) : pour a par exemple, il y a 24 nombres commençant par 1, 24 par 2, 24 par 3, 24 par 4 et 24 par 5 ; même chose pour b, c, d et e.

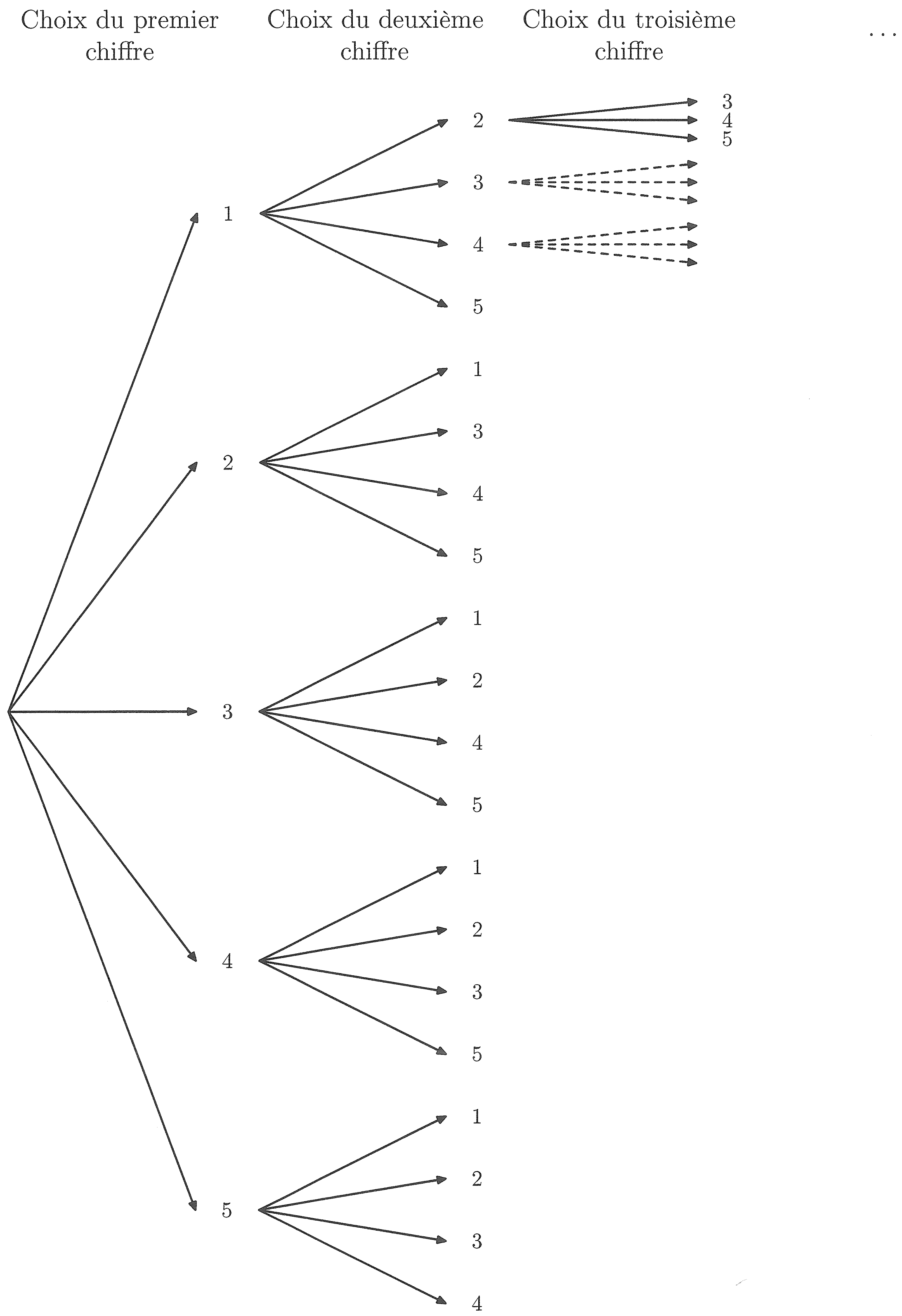
Alors la somme demandée est égale à :

$(24 \times 1 + 24 \times 2 + 24 \times 3 + 24 \times 4 + 24 \times 5)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 360 \times 11\,111$, soit 3 999 960.

Les élèves ont l'habitude d'utiliser les propriétés du système décimal depuis le primaire mais n'en maîtrisent pas l'écriture littérale. Elle n'est donc pas attendue, mais l'exercice a été choisi aussi pour tous les éventuels prolongements qu'il permet autour de cette méthode.

Nous nous attendons donc plutôt à ce que les élèves commencent par faire une liste exhaustive des nombres possibles, se rendent compte du nombre important de possibilités, et cherchent à faire des regroupements astucieux ou à utiliser les règles du système décimal sans vraiment les formuler.

L'étape intermédiaire qui consiste à dénombrer le nombre de solutions est également attendue. Un schéma comme ci-dessous permet d'expliciter la démarche, schéma que l'on retrouvera dans le cadre du dénombrement dans les classes ultérieures.


Choix du premier chiffre
Choix du deuxième chiffre
Choix du troisième chiffre
...

3. Solution

Nous proposons maintenant une démarche plus proche de celle que nous attendons des élèves.

Soit les chiffres 1, 2, 3, 4, 5. On forme des nombres à cinq chiffres avec ces cinq chiffres. Il y en a 120, distincts deux à deux.

Imaginons ces nombres écrits les uns en dessous des autres, les chiffres correspondant à la même unité formant une colonne. Effectuons la somme des unités, des dizaines, des centaines, des unités de mille et des dix mille. Dans chaque colonne, nous retrouvons les mêmes chiffres à une permutation près.

Somme des unités : cette colonne est rangée de telle sorte que le chiffre des unités soit respectivement 1, 2, 3, 4, 5. Si le chiffre des unités est 1, on a 24 possibilités de placer 2, 3, 4, 5. Si le chiffre des unités est 2, on a 24 possibilités de placer les autres chiffres, de même pour 3, 4, 5.

La somme des unités est donc $24 \times 1 + 24 \times 2 + 24 \times 3 + 24 \times 4 + 24 \times 5$, soit 360.

Somme des dizaines : en organisant les nombres d'une façon analogue, la somme des chiffres des dizaines est 360.

De même, la somme des chiffres des centaines est 360 ;

la somme des chiffres des unités de mille est 360 ;

et celle des dix mille est 360.

Le nombre cherché est donc $360 \times (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1)$.

La somme de tous les nombres à cinq chiffres respectant les contraintes est 3 999 960.

4. Analyse de production

La démarche qui figure dans les trois-quarts des copies consiste à énumérer tous les nombres possibles en les regroupant avec méthode (ceux qui commencent par 1, 2, ...). Il n'y a plus alors qu'à vérifier le résultat, les erreurs de calculs ont été fréquentes. L'une d'entre elles sort du lot par sa disproportion au niveau de l'ordre de grandeur : 14 022 385 160.

Dans la majorité des résolutions apparaît le dénombrement des nombres à cinq chiffres. Il existe deux méthodes pour dénombrer tous les nombres à cinq chiffres réalisables. On peut résumer ces méthodes par les extraits de copies suivants :

Méthode 1 :

« Nous avons décomposé tous les nombres commençant par les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5 que l'on a regroupé en 5 familles (celles commençant par 1, puis par 2, ...).

Pour chacune de ces 5 familles, il y a 24 nombres. Donc $5 \times 24 = 120$. »

Méthode 2 :

« *Pour le premier chiffre, on a 5 choix, pour le deuxième, on a plus que 4 choix, pour le troisième, on a plus que 3 choix, pour le quatrième, on a plus que 2 choix et pour le dernier chiffre, on a un seul choix (car chaque chiffre sera déjà apparu précédemment).*

On a donc $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$*, c'est-à-dire 120 chiffres possibles.* »

Cette dernière méthode, propre au dénombrement de listes, n'a pas encore été introduite en seconde mais apparaît dans quelques copies.

En ce qui concerne le calcul même de la somme, une autre démarche se retrouve dans un petit nombre de copies. Elle consiste à regrouper les nombres par deux, l'un étant le complément à 66 666 de l'autre, comme par exemple 24 531 et 42 135.

Extrait 1 :

« *En regroupant les 120 nombres par paires, nous obtenons au final 60 solutions.*

$12\,345 + 54321 = 666\,666$.

En additionnant le plus petit nombre des 120 avec le plus grand, nous obtenons comme nombre de référence 66 666.

Les 120 nombres s'additionnent par 2 pour obtenir la somme de 66 666. [. . .]

Comme nous avons 60 solutions, nous multiplions 66 666 par 60, ce qui donne 3 999 960. »

Extrait 2 :

« *On fait la moyenne du plus petit et du plus grand nombre que l'on peut former :* $(12\,345 + 54\,321)/2 = 33\,333$.

La somme de tous les nombres que l'on peut former avec le nombre 12 345 est : moyenne des extrémités des nombres que l'on peut former $\times$ *nombres de combinaisons possibles :*

$33\,333 \times 120 = 3\,999\,960$. »

À la lecture de cette copie, on peut s'interroger sur la connaissance ou non de la méthode qui permet de calculer la somme des n premiers entiers naturels. Les élèves ont peut-être transposé cette méthode à ce problème, sans en vérifier la validité (théorème en acte). Il pouvait s'agir d'un réinvestissement d'une méthode pour résoudre un problème posé lors des épreuves d'entraînement « château de carte ».

Un autre regroupement par 5 est également intéressant (attention, la rédaction comporte une erreur, il y a en fait 24 séries et non 5) :

« *Il y a 120 possibilités de nombres. Nous les avons divisés en 5 séries de ce type : 12 345, 23 451, 34 512, 45 123, 51 234.*

La somme des nombres de ces séries est 166 665.

Donc pour obtenir le total on effectue l'opération suivante : $166\,665 \times 5 = 3\,999\,960$. »

Le total est juste mais le calcul effectué est $166\,665 \times 24$.

Il n'y a pas d'explications complémentaires, on suppose donc que les élèves considèrent qu'ils prennent les 24 nombres commençant par 1 et les associent avec les quatre permutations circulaires de leurs chiffres.

On peut également citer ce calcul montrant une certaine maîtrise du système décimal :

« $(15\times10^4\times24)+(30\times10^3\times15)+(15\times10^2\times30)+(15\times10^1\times30)+(15\times10^0\times30) = 4\ 099\ 950.$ »

Le raisonnement est bon puisque $1+2+3+4+5 = 15$, il est juste regrettable que le nombre 30 se soit substitué au nombre 24 dans la suite du calcul !

En conclusion, cet exercice a inspiré les élèves, quasiment toutes les copies comportaient une réponse. Les démarches employées, que ce soit pour le dénombrement ou le calcul de la somme, ont été intéressantes et ont parfois réussi à surprendre par leur originalité.

5. Prolongements

- On considère les cinq chiffres 5, 6, 7, 8 et 9.
  Calculer la somme de tous les nombres à cinq chiffres que l'on peut écrire avec ces cinq chiffres, la répétition étant possible.
- On peut aussi proposer des exercices de numération tels qu'il en existe dans les manuels scolaires.

IX Mouche en boîte

1. Énoncé

On étudie la trajectoire d'une mouche à l'intérieur d'une boîte vitrée.

La mouche part d'un coin A de la boîte vers un autre coin B, avec un changement de direction en un point M.

Sa trajectoire est rectiligne de A vers M, puis de M vers B.

On a représenté, sur la feuille ci-jointe, la boîte en perspective cavalière, et placé les points N et T qui sont les projections orthogonales du point M respectivement sur la face supérieure et sur la face droite de la boîte.

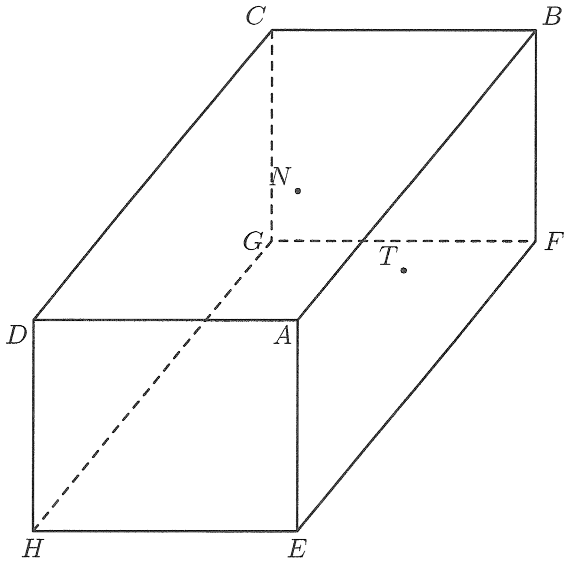
On obtient donc une droite (MN) perpendiculaire à la face $(ABCD)$ et une droite (MT) perpendiculaire à la face $(AEFB)$.

On a représenté également en vraie grandeur ces deux faces et replacé les points N et T.

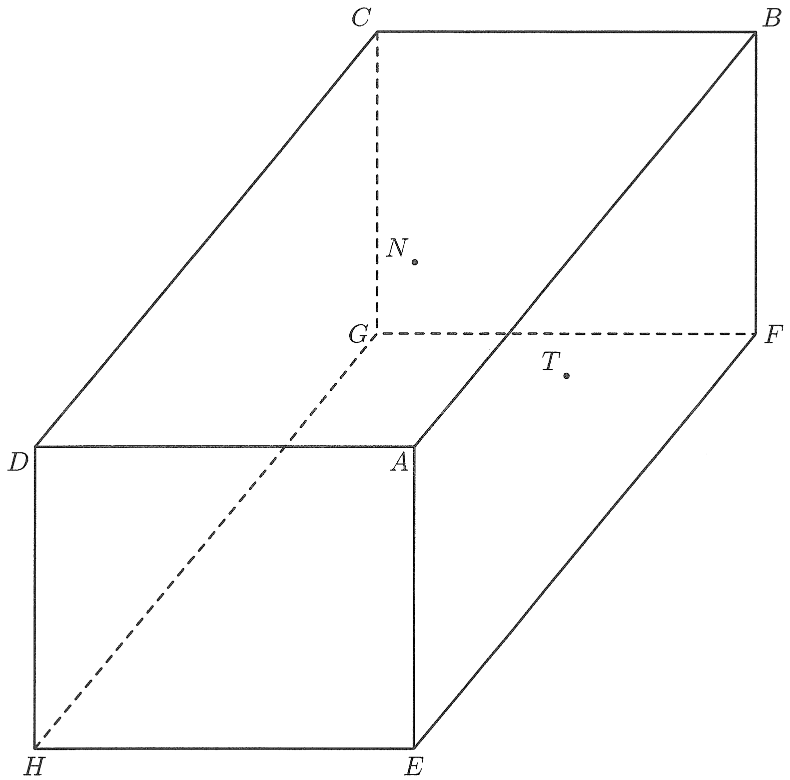
- Placez le point M sur le dessin en perspective cavalière (la feuille suivante fait office de feuille réponse).
- Dessinez, au verso de la feuille réponse, en vraie grandeur, la trajectoire de la mouche (triangle ABM).

Réplique réduite de la boîte :

(perspective et vues des faces en vraie grandeur sur la fiche réponse)

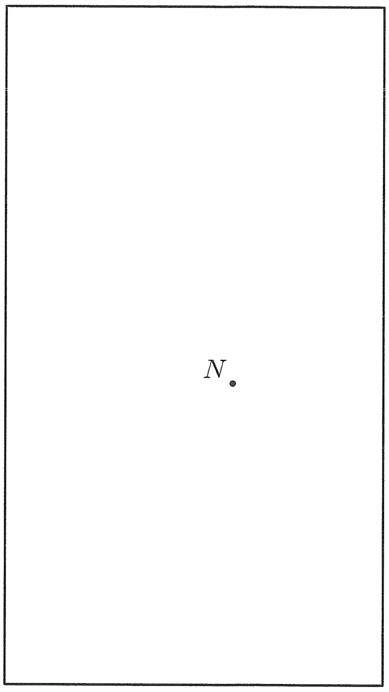


Voici la perspective cavalière (où vous placerez le point M) :

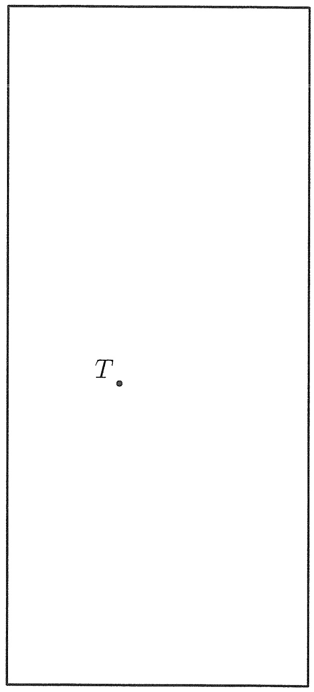


Voici les faces de dessus et de droite en vraie grandeur :

face de dessus :



face de droite :



2. Analyse *a priori*

Il s'agit d'un problème de géométrie dans l'espace qui demande une bonne compréhension des représentations en perspective. Il se résout dans le cadre géométrique, et aucune justification n'est demandée. Il est adapté aux connaissances et savoir-faire des élèves de seconde.

La première question exige une bonne lecture de la figure et la connaissance des propriétés que la perspective cavalière conserve ou non. Ainsi, le placement de M demande la traduction des relations d'orthogonalité de l'énoncé en relations de parallélisme, puisque la perspective cavalière ne conserve pas les angles, mais conserve le parallélisme. Les vues des faces du dessus et de droite ne sont pas utiles dans cette question.

La deuxième question exige de savoir quelles sont les distances conservées en perspective cavalière. Si AB est fournie par les figures planes associées, AM et MB seront déterminées comme hypoténuses de triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont connus. Il faut donc déterminer au préalable des relations d'orthogonalité et être capable d'extraire des figures planes d'une figure de l'espace.

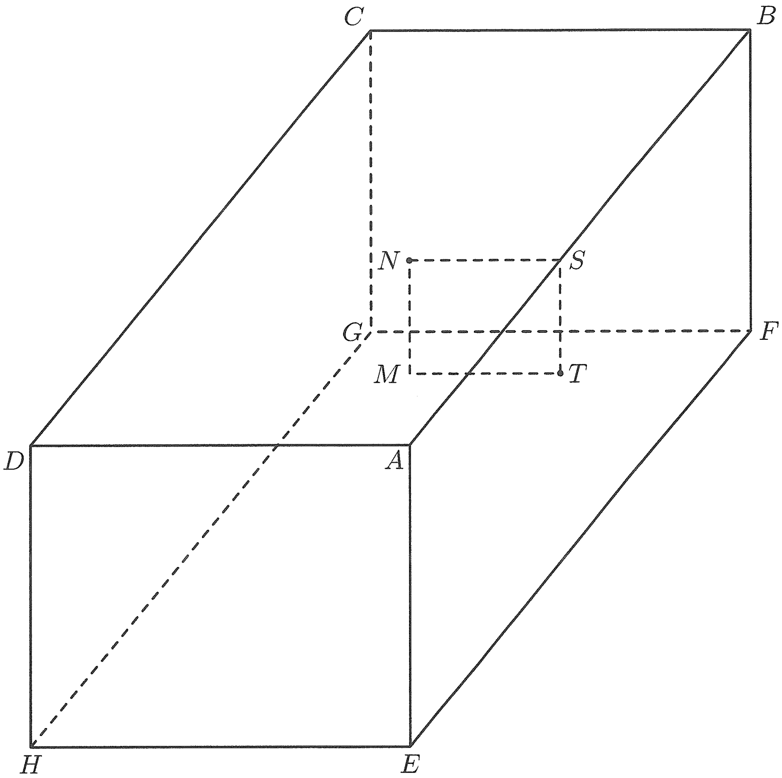
Les trois longueurs déterminées permettent alors le tracé du triangle cherché.

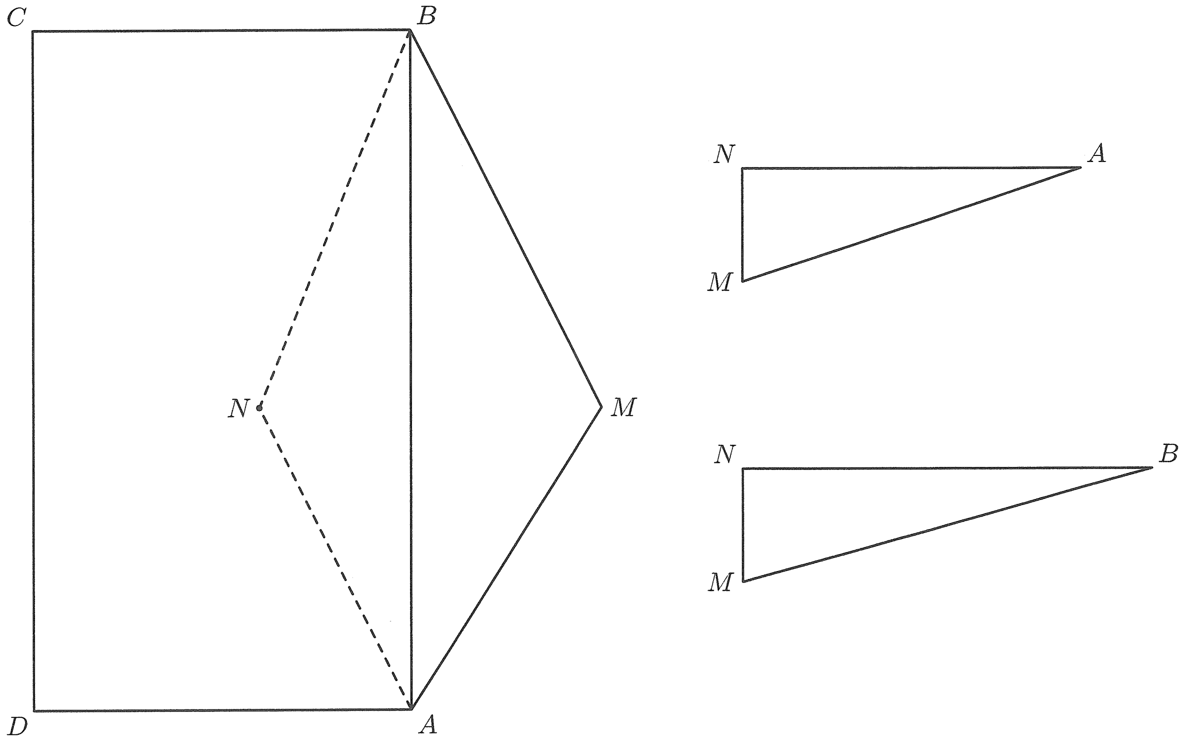
La notion de projection orthogonale n'est pas enseignée jusqu'en classe de seconde, c'est pourquoi des explications suffisantes ont été données dans l'énoncé.

3. Solution

Méthode 1 :

Le segment $[MN]$ est représenté en vraie grandeur dans le figure ci-contre, et les triangles AMN et BMN sont rectangles en N. On prend les distances AN et BN sur la face de dessus en vraie grandeur.
On trace les deux triangles rectangles AMN et BMN qui nous permettent d'obtenir les distances AM et BM et donc de tracer ABM.





Méthode 2 :

On peut démontrer que la hauteur issue de M dans le triangle AMB est la droite (MS) et on obtient directement la distance MS en vraie grandeur sur la perspective cavalière (plan frontal).

Il ne reste qu'à reporter cette distance sur la vue de dessus en vraie grandeur à l'aide de la position de S sur cette vue (S est le projeté orthogonal de N sur $[AB]$).

4. Analyse de production

Toutes les classes, sauf trois, ont pu répondre de manière correcte à la première question. Nous avons pu observer quelques tracés plus complets avec, par exemple, la section du parallélépipède par le plan (MNT), ou la position des intersections respectives de (MN) et (MT) avec les faces $(EFGH)$ et $(CDHG)$.

Notons que, sur le tracé en perspective, la droite (MN) se confond avec la droite (AN). Cette « malchance » nuit à la clarté de certaines figures.

L'expression « en vraie grandeur » n'a pas toujours été comprise. Ainsi certaines classes n'ont pas répondu à la question 2 et d'autres ont tracé le chemin demandé sur la figure en perspective.

Les élèves ont souvent eu l'idée d'utiliser l'orthogonalité et le théorème de Pythagore ; ceci était peut-être induit par le fait que des segments sont perpendiculaires... Ainsi, les distances AB, AN, BN, BT, AT ont été mesurées en cm sur les vues de dessus et de droite, plus rarement sur la figure en perspective. L'usage du compas a donc été limité à la construction finale du triangle AMB.

5. Prolongements

Un exercice analogue peut être proposé avec trois changements de direction :

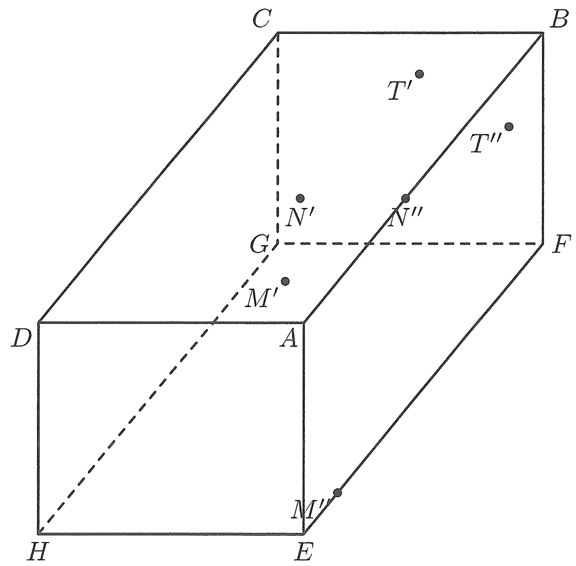
La mouche part de A pour arriver en B, en passant successivement par M, N et T. Entre ces points la trajectoire est rectiligne.

Les projetés orthogonaux de M, N et T sur la face de dessus sont respectivement M', N' et T'.

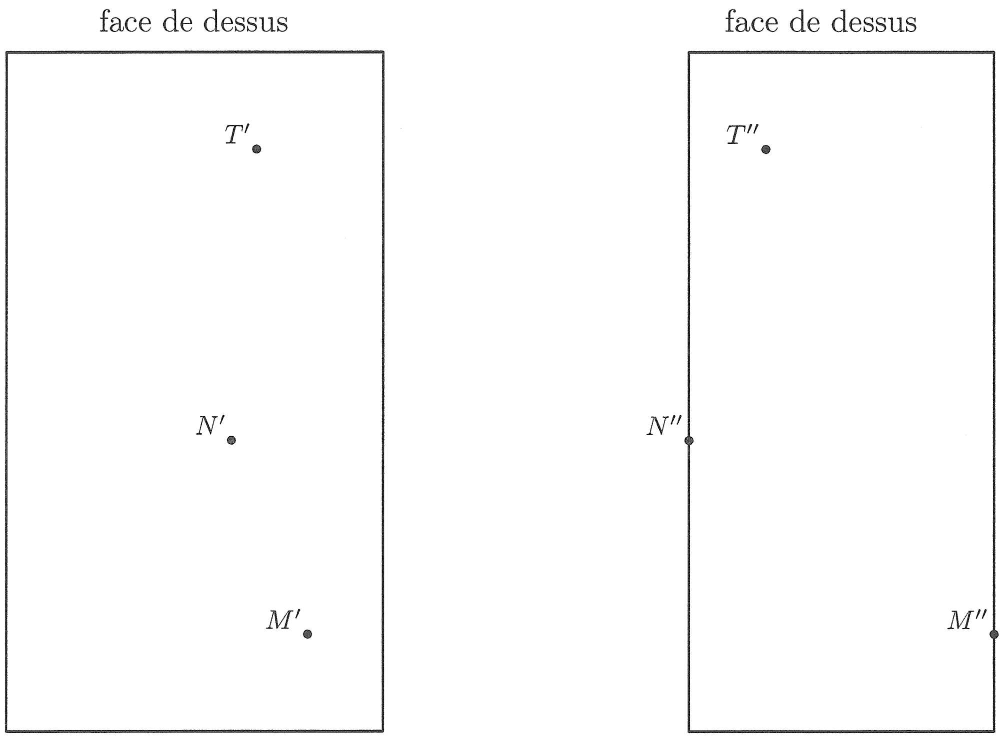
Les projetés orthogonaux de M, N et T sur la face de droite sont respectivement M'', N'' et T''.

Construire un segment dont la longueur est égale à celle de la trajectoire.

Dessin de la boîte en perspective cavalière

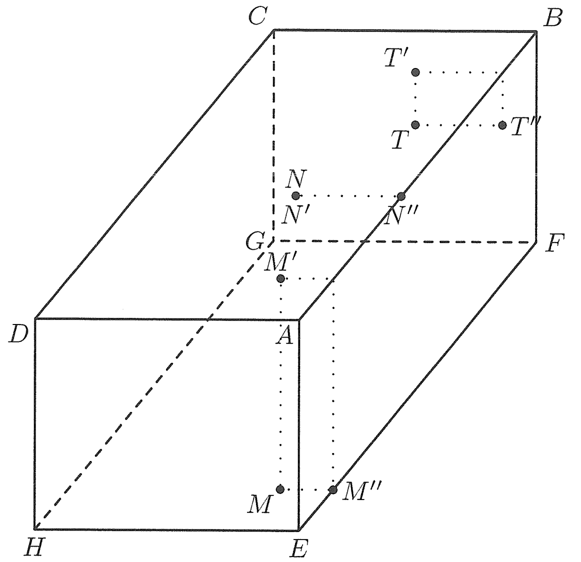


Voici les vues de dessus et de droite en vraie grandeur :



Des positions des points M'' et N'', on déduit que les points M et N appartiennent respectivement à la face de dessous et à la face de dessus de la boîte.

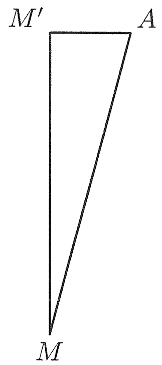
Pour une meilleure visualisation de la figure, on peut construire les M, N et T sur la figure en perspective cavalière.



La trajectoire est la réunion des segments $[AM]$, $[MN]$, $[NT]$ et $[TB]$.

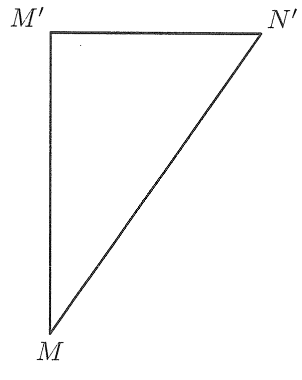
Tracé d'un segment de longueur AM :

On représente la longueur AM en se plaçant dans le triangle AMM' rectangle en M' : AM' est en vraie grandeur sur la face de dessus, et MM' est égale à la hauteur de la boîte.



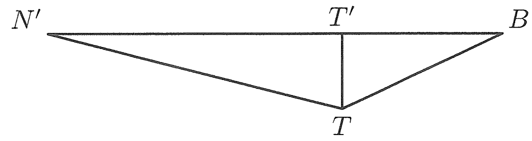
Tracé d'un segment de longueur MN (ou MN') :

On représente la longueur MN' en se plaçant dans le triangle $N'MM'$ rectangle en M' : $N'M'$ est en vraie grandeur sur la face de dessus, et MM' est égale à la hauteur de la boîte.



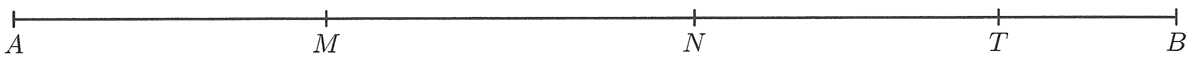
Tracés des segments de longueur NT (ou $N'T$) et TB :

On représente la longueur $N'T$ en se plaçant dans le triangle $N'T'T$ rectangle en T' : $N'T'$ est en vraie grandeur sur la face de dessus, et $T'T$ (en vraie grandeur dans la vue en perspective cavalière) est égale à $T''T_1$, où T_1 est l'intersection de $[AB]$ et de la parallèle à (BF) passant par T''. La longueur $T''T_1$ apparaît en vraie grandeur sur la face de droite.



On représente la longueur TB en se plaçant dans le triangle $BT'T$ rectangle en T' : $T'B$ est en vraie grandeur sur la face de dessus, $T'T$ est déjà représenté.

Le segment $[AB]$ représenté ci-dessous a pour longueur celle de la trajectoire :



Remarque : la trajectoire de la mouche n'est pas plane. En effet, si elle était plane, elle serait contenue dans le plan contenant A, B et N, c'est à dire le plan contenant la face de dessus. Or le point M n'appartient pas à ce plan.

Chapitre 3

Sujet de finale 2005

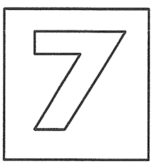
I Le parking

1. Énoncé

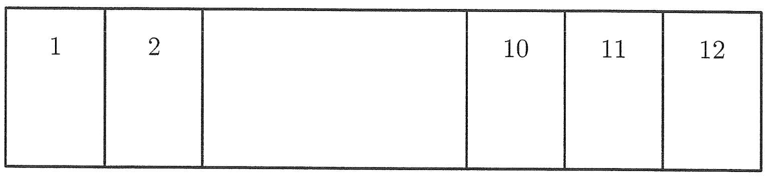
Les travaux de construction de la jolie résidence « les pins » s'achèvent. Chaque appartement dispose d'une place de parking attitrée. Didier, qui est peintre, a été sollicité pour peindre sur chaque place le numéro de l'appartement correspondant. Météo France annonçant l'arrivée imminente d'une semaine de mauvais temps, avec beaucoup de pluie, Didier se résout à faire le travail en deux jours.

Sachant qu'il évalue à deux minutes le temps de placer un des dix pochoirs disponibles et de peindre le chiffre correspondant, Didier calcule qu'il terminera sa première journée en réalisant le numéro 84. La moitié du temps de travail sera donc effectuée.

Pouvez-vous déterminer la durée du travail de Didier et le nombre d'appartements de la résidence « les pins » ?



Le pochoir est une toile où le trou fait apparaître le chiffre à représenter.
Ci-dessus le pochoir du « sept ».



Voici un extrait de la première rangée du parking après le travail de Didier.

2. Analyse *a priori*

L'exercice, aussi bien pour les données que pour les réponses aux questions, n'utilise que des entiers naturels.

Les deux réponses reposent sur le même calcul préliminaire, celui du nombre de chiffres peints le premier jour. Parmi ces 84 numéros, puisque 9 ont un seul chiffre, 75 en ont deux.

Si l'on veut obtenir le nombre d'entiers dans l'intervalle [10 ; 84] directement, on se retrouve confronté à la difficulté classique liée aux intervalles : cette difficulté se rencontre également dans l'exercice suivant page 75.

Une fois le nombre de chiffres peints le premier jours, les questions sont indépendantes et peuvent alors être traitées dans l'ordre de son choix.

La question de la durée du temps de travail est un problème de proportionnalité. La deuxième question est un problème de dénombrement. Il faut trouver le nombre d'appartements dont le numéro comporte trois chiffres, puis conclure en surmontant la même difficulté que dans le calcul préliminaire, à savoir que dans l'intervalle [100 ; 142], on trouve 43 entiers.

En remarquant que le nombre d'appartements est inférieur à $2\times 84 = 168$, un élève peut aussi se représenter le travail de Didier sur le papier pour déterminer le nombre d'appartements.

3. Solution

Le premier jour, Didier peint 9 chiffres (correspondants aux 9 premiers appartements), puis $2 \times (84 - 9) = 150$ chiffres (correspondants aux appartements dont les numéros sont compris entre 10 et 84).

Ainsi, Didier peint 159 chiffres le premier jour, ce qui constitue la moitié de son travail. Son temps total de travail est donc de $2 \times (2 \times 159)$, soit 636 minutes.

Didier travaille donc 10 heures et 36 minutes.

Le deuxième jour, Didier peint aussi 159 chiffres. Jusqu'au numéro 99, chaque nombre comporte 2 chiffres, ainsi il peint $2\times(99-84)$ soit 30 chiffres correspondants aux appartements dont le numéro va de 85 à 99.

Les $159 - 30 = 129$ chiffres restants correspondent donc à $129/3 = 43$ appartements dont le numéro comporte 3 chiffres. Ces appartements portent donc les numéros 100, 101, 102, ..., 142.

La résidence « Les Pins » compte donc 142 appartements.

4. Analyse de productions

Remarquons d'abord que toutes les classes ont proposé une réponse à chacune des deux questions et ont donc été en mesure de s'approprier le problème.

Nous avons lu 8 solutions correctes, parfois très bien rédigées, soit un taux de réussite de 44 %.

Les classes ont toutes raisonné correctement pour la recherche du temps.

Nous avons constaté une erreur de calcul, un arrondi (318 minutes arrondies à 320) qui n'avait pas lieu d'être et un calcul fait à l'aide d'un nombre d'appartements erroné.

Le nombre d'appartements n'a été fourni que par les huit classes citées précédemment.

Une classe a commis une erreur de raisonnement en admettant une situation de proportionnalité et trouve 168 (le double de 84) appartements. Les autres résultats erronés, comme 143 ou 145, indiquent plutôt une erreur d'indexation ou de dénombrement. Citons par exemple :

99 − 10 = 89 *nombres à deux chiffres ;*

100 − 84 = 16 *nombres à deux chiffres à peindre le deuxième jour ;*

43 nombres à trois chiffres, donc le dernier appartement est le n° 143

Voici un exemple de réponse dont la rédaction témoigne du souci de communiquer la démarche élaborée par le groupe.

Le parking

Calcul de la durée du temps de travail :

Le 1er jour, il fait 84 appartements. Sachant qu'il y a des numéros d'appartements à 1 chiffre et à 2 chiffres.

Nombre d'appartements à 1 chiffre : 9
Nombre d'appartements à 2 chiffres : 84 - 9 = 75

Pour peindre un chiffre, le peintre met 2 minutes.
Donc :

$9 \times 2 + 75 \times 4 = 18 + 300$
$= 318$

La durée du temps de travail du premier jour est de 318 minutes, soit 5h 18 min, donc, comme il a la même durée de travail les deux jours, il travaille en tout 636 min, soit 10h 36 min.

Calcul du nombre d'appartements :

Le 2ème jour, il travaille 318 min. Il fait des numéros d'appartements à 2 et 3 chiffres, donc pour lesquels il met 4 et 6 min. Il reste 99 - 84 = 15 numéros d'appartements à deux chiffres.

x = nombre de numéros d'appartements à 3 chiffres.

$318 = 15 \times 4 + x \times 6$
$318 = 60 + 6x$
$318 - 60 = 6x$
$258 = 6x$
$\frac{258}{6} = x$
$43 = x$

Donc, il a peint 43 + 15 = 58 numéros d'appartements le deuxième jour. En tout :

58 + 84 = 142

Il y a donc 142 appartements dans cette résidence.

5. Prolongements

Didier a un apprenti nommé Fabien qui travaille deux fois moins vite que lui. Fabien met donc 4 minutes pour réaliser un chiffre. Les deux peintres décident de commencer tôt pour achever le travail en une journée.

Pour ne pas se gêner, ils décident que le peintre commençant une dizaine l'achève, puis commence la première nouvelle dizaine qui se présente.

Ainsi, Fabien commence à peindre les numéros de 1 à 9 pendant que Didier commence à peindre de 10 à 19.

On demande : Qui peindra le numéro 47 ? Qui peindra le numéro 143 ? Qui aura peint le plus de numéros ? Qui aura travaillé le plus longtemps ?

II L'enveloppe

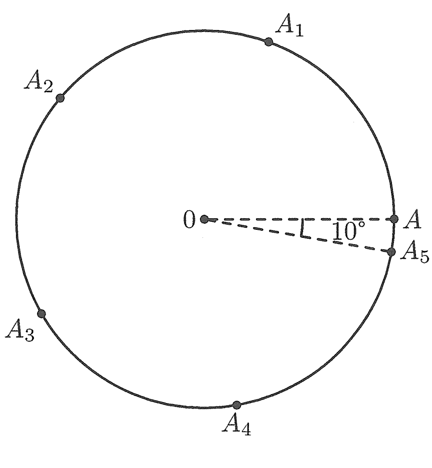
1. Énoncé

On se donne un point A sur un cercle (C) de centre O. Construire le point A_1, image de A par la rotation de centre O, d'angle 70° dans le sens des aiguilles d'une montre, puis construire A_2, image de A_1 par cette même rotation, puis A_3, image de A_2 par la même rotation. On définit de la même façon les points A_4 etc. Si on trace ensuite les segments $[AA_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ etc, combien de segments pourra-t-on tracer ?

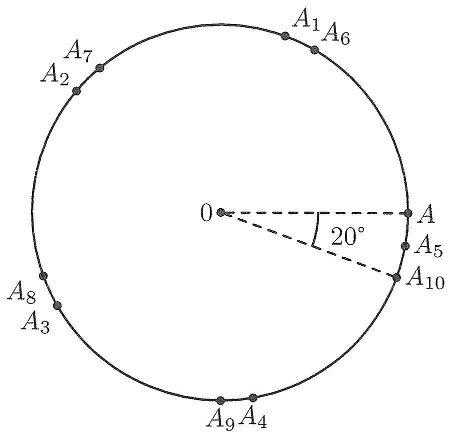
2. Analyse *a priori*

Cet exercice commence par des constructions géométriques, simples dès lors que l'on connaît la notion de rotation, qui est abordée au collège dès la classe de troisième. Néanmoins, compte tenu de sa complexité, le tracé à la main point par point de la figure complète ne sera sans doute pas suffisant pour répondre à la question, et un passage par le numérique, ou une construction plus organisée de la figure, semblent incontournables.

Les élèves peuvent par exemple repérer qu'après avoir placé les cinq premiers points de la figure, on obtient un « décalage » de 10°, c'est-à-dire que l'angle $\widehat{AOA_5}$ mesure 10° .



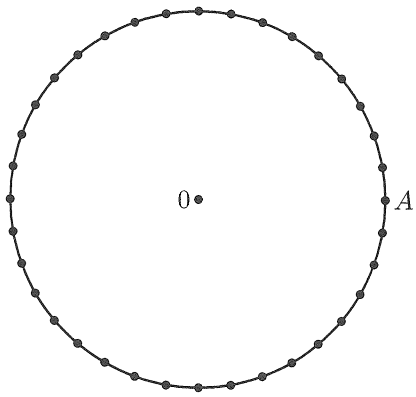
De même, on aura $\widehat{AOA_{10}} = 20$:



Ainsi de suite, jusqu'à $\widehat{AOA_{35}} = 70$. On aura alors $A_{36} = A$. À partir de A_{36}, les points obtenus par rotation de 70° autour de O sont confondus avec des points déjà construits précédemment.

Des élèves soigneux peuvent, après avoir repéré que les points qui interviennent dans la construction sont placés « tous les 10° » sur le cercle, commencer par tracer à l'aide du rapporteur des points situés « tous les 10° », puis placer A_1, A_2, etc ...

Ils retrouvent alors facilement le résultat obtenu précédemment.



La construction de points différents s'arrête à A_{35}, on obtient donc 36 points différents. Il reste alors à déduire le nombre de segments différents qui peuvent être tracés. Il suffit alors de les tracer ou de constater qu'il y en a autant que de points différents. Il n'y a pas ici de difficulté de type « piquets et intervalles ».

La définition du $PPCM$ n'étant pas enseignée au collège, on n'attend pas son utilisation.

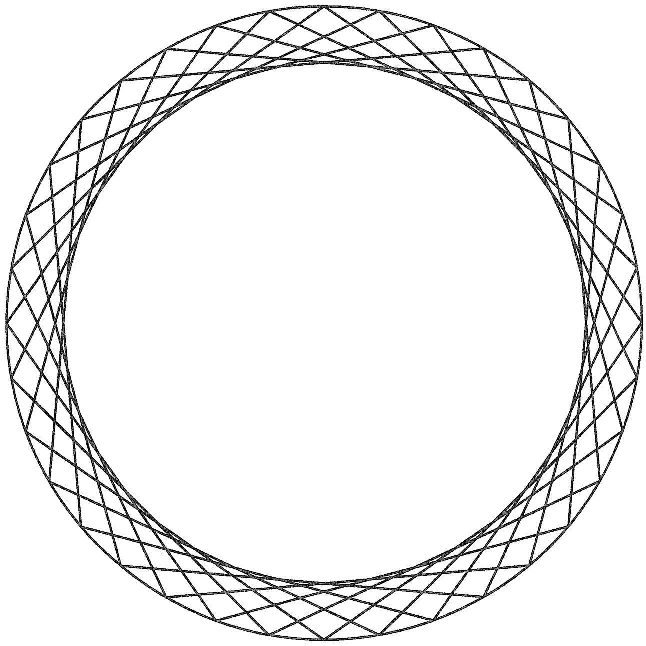
3. Solution

Puisque $360 = 5 \times 70 + 10$ et $360 = 10 \times 36$, donc le point A est à l'extrémité du 36^{e} segment.

Vérification : $70 \times 36 = 2520$ et $360 \times 7 = 2520$.

Le plus petit multiple de 360, qui est aussi multiple de 70, est 2520. Ce que l'on peut vérifier avec la calculatrice en écrivant les multiples de 70 et 360.

La réponse est donc 36.



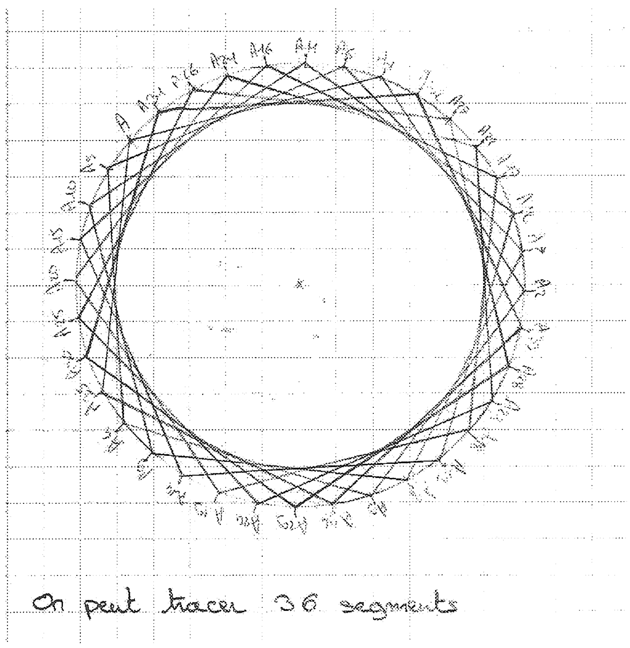
4. Analyse de productions

8 résultats proposés sont exacts et 10 sont faux.

Certains groupes utilisent une méthode exhaustive : ils placent tous les points sur une figure, ou bien font tous les calculs d'angles au centre.

Deux exemples de solutions satisfaisantes :

Avec figure :



Sans figure :

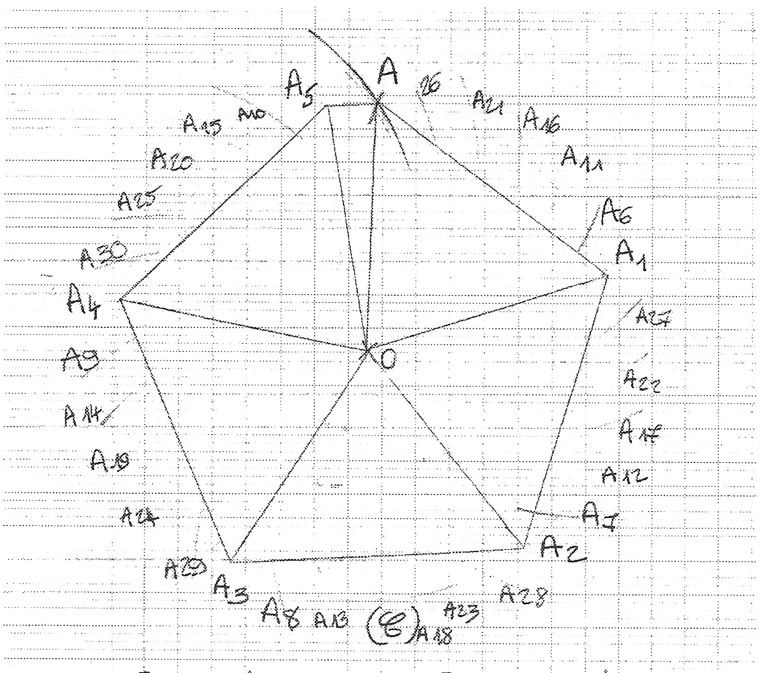
L' Enveloppe

Il faut faire 7 tours pour arriver au point A_{36}.
Donc on pourra tracer 36 segments.

Le dernier $A_{36} = A$
Donc le dernier segment tracé est $[A_{35}A]$

$\boxed{A} \to 0°$	$A_{21} \to 30°$
$A_1 \to 70°$	$A_{22} \to 100°$
$A_2 \to 140°$	$A_{23} \to 170°$
$A_3 \to 210°$	$A_{24} \to 240°$
$A_4 \to 280°$	$A_{25} \to 310°$
$A_5 \to 350°$	$A_{26} \to 20°$
$A_6 \to 60°$	$A_{27} \to 90°$
$A_7 \to 130°$	$A_{28} \to 160°$
$A_8 \to 200°$	$A_{29} \to 230°$
$A_9 \to 270°$	$A_{30} \to 300°$
$A_{10} \to 340°$	$A_{31} \to 10°$
$A_{11} \to 50°$	$A_{32} \to 80°$
$A_{12} \to 120°$	$A_{33} \to 150°$
$A_{13} \to 190°$	$A_{34} \to 220°$
$A_{14} \to 260°$	$A_{35} \to 290°$
$A_{15} \to 330°$	$A_{36} \to 0° \to \boxed{A}$
$A_{16} \to 40°$	
$A_{17} \to 110°$	
$A_{18} \to 180°$	
$A_{19} \to 250°$	
$A_{20} \to 320°$	

Un exemple qui conduit à un résultat faux : les calculs d'angles ne sont pas effectués et le tracé est imprécis.



On peut tracer 31 segments.

Certains groupes proposent un raisonnement plus algébrique :

5 x 70 = 350

Le point A_5 est situé à 10° de A dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

tous les cinq points, il y a un décallage de 10° par rapport à A

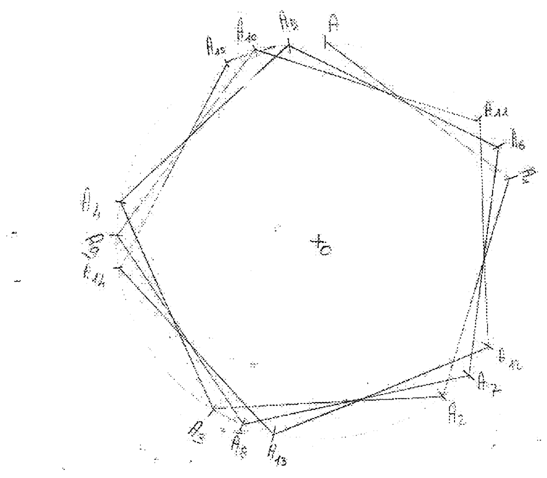
Au départ on a un angle de 70°, on enlève 10° tous les cinq points. 70 : 10 = 7

7 tours sont nécéssaires pour retomber sur A

7 x 5 = 35

35 points donc A_{36} est non distinct de A.

on obtient donc 36 segments.



etc ...

Le cercle mesure 360°.

Tout les 70°, nous plaçons des points sur ce cercle

mais a chaques tours nous perdons 10° (5 x 70 = 350 ; 360 - 350 = 10)

Nombres de segments

$$\frac{360 \times 7}{70} = 36$$

Donc nous pourrons tracer 36 segments pour retomber sur le premier point A.

Des calculs qui conduisent à un résultat exact, sans que la démarche ne soit clairement rédigée : notons la présence d'une équation non justifiée. L'usage des approximations n'est pas contrôlé.

Démonstration:
le degré d'un cercle est 360°

$70x = 360$
$x = 5{,}142857\ldots$

$360 : 10 = 36$
$70 : 10 = 7$

$7 \times 5{,}142857\ldots$
$= 36$

Il y a 36 segments

Voici une production qui utilise le PPCM sans expliciter sa raison d'être :

On suppose que l'on arrête de compter le nombre de segment lorsque l'on retombe sur le point A.
Un cercle mesure 360 degrés. Nous cherchons le plus petit multiple commun de 360 et 70*.
Leur plus petit multiple commun étant 2520, on divise celui-ci par 70 pour connaître le nombre de segment
donc $\frac{2520}{70} = 36$
ainsi 36 est le nombre de segments qu'il faudra pour retomber sur le point A.

* 70 étant l'angle de rotation entre chaque points.

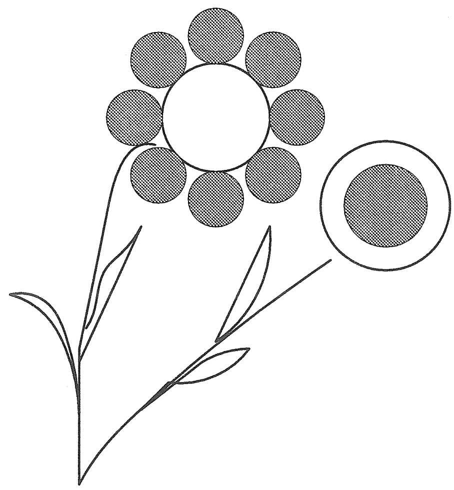
III Harmonie

1. Énoncé

Mikello, un artiste bisontin, désire créer pour sa prochaine exposition, un couple de fleurs stylisées en métal, qu'il nommera « harmonie ».

En voici la description :

- la fleur de gauche est constituée d'un disque central de diamètre 4 cm et de 8 disques tangents, également répartis, de rayon 1 cm ;
- la fleur de droite est constituée de deux disques concentriques ;
- les aires colorées (grisées) de chacune des fleurs sont égales ;
- les aires non colorées (blanches) de chacune des fleurs sont égales ;
- les tiges seront réalisées avec des fils métalliques de diamètre 4 mm.



Mikello a réalisé le modèle ci-contre, qui malheureusement n'est pas à l'échelle. Construire en vraie grandeur chacune des deux fleurs, sans les tiges. Les seuls instruments disponibles sont le compas, l'équerre et la règle graduée tous les centimètres. Préciser les calculs effectués.

2. Analyse *a priori*

Nous avons choisi cet exercice pour souligner la dimension esthétique de certaines constructions géométriques sans pour autant négliger le rôle des mathématiques pour les étudier. Le diamètre des fils métalliques est précisé, mais cette donnée inutile ne devrait pas perturber les élèves.

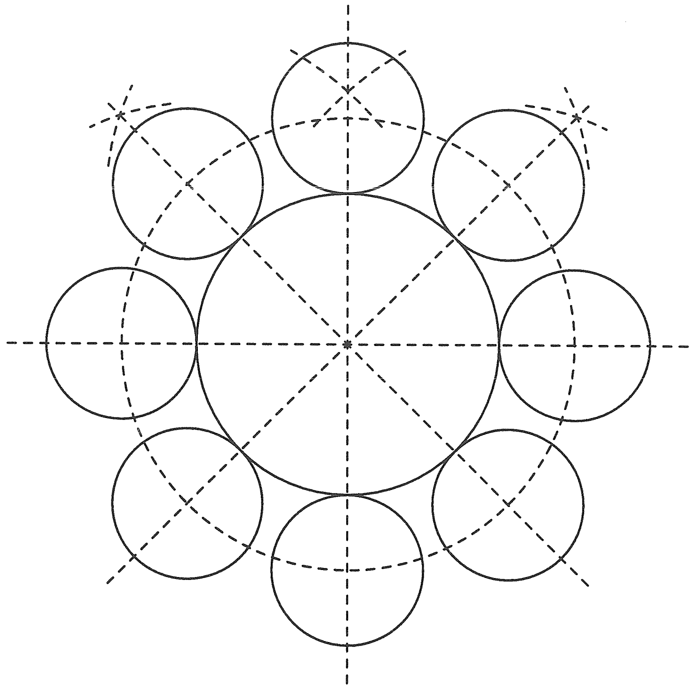
Pour résoudre cet exercice, il est nécessaire d'utiliser la formule de l'aire d'un disque, ce qui ne devrait pas poser de problème étant donné que les documents sont autorisés pendant l'épreuve. Il faut juste penser à y avoir recours. Puis, à partir de cette formule, il s'agit de calculer le rayon d'un disque connaissant son aire. Les différentes manipulations d'expressions algébriques risquent de poser des difficultés aux élèves.

Enfin, la construction de la fleur de droite nécessite de construire des segments de longueurs exactes $\sqrt{8}$ et $\sqrt{12}$. Les élèves doivent penser à utiliser le théorème de Pythagore, et se limiter aux seuls instruments autorisés (compas, équerre et règle graduée tous les centimètres).

3. Solution

Pour la fleur de gauche :

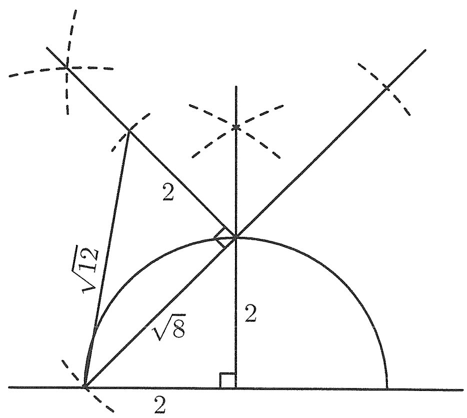
On utilise la règle graduée tous les centimètres et le compas pour construire :
- un cercle de rayon 2 cm ;
- 8 secteurs de 45 degrés ;
- 8 cercles de rayon 1 cm tangents au grand cercle.

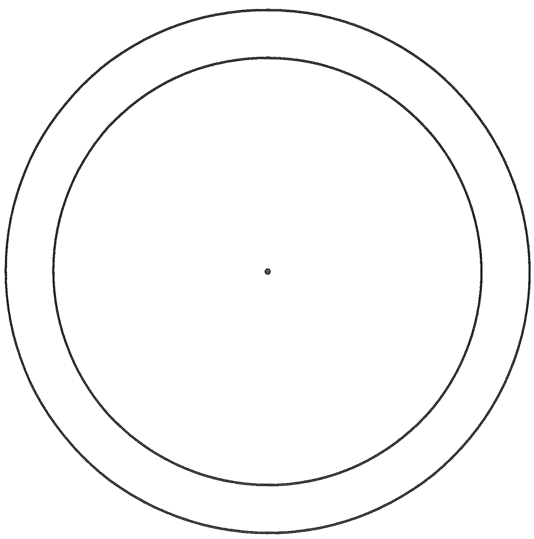


Pour la fleur de droite :

Soit r le rayon du disque central et R le rayon du grand disque.
On doit avoir :
Aire du disque central : $\pi r^2 = 8\pi$ donc $r^2 = 8$, $r = \sqrt{8}$, soit $r = 2\sqrt{2}$.

Aire de la couronne : $\pi(R^2 - r^2) = 4\pi$ donc $R^2 = 12$, $R = \sqrt{12}$, soit $R = 2\sqrt{3}$.





4. Analyse de productions

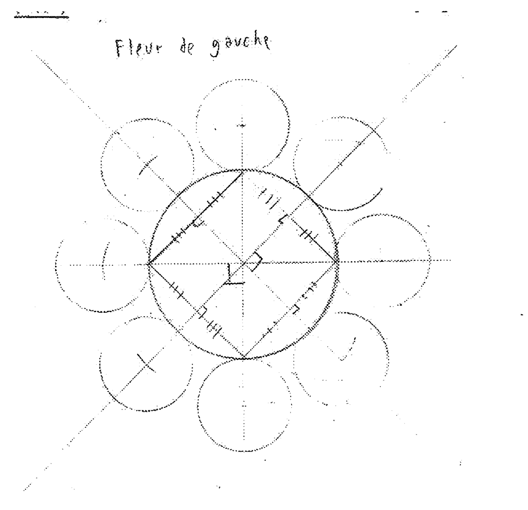
a. **Construction proposée pour la fleur de gauche :** les diamètres des disques étant donnés, la difficulté est d'expliquer et de rédiger comment répartir également les huit petits disques autour du grand.

Voici quelques exemples :

– division de 360° en 8 :

L'angle du rond est de 360° donc on divise 360° par 8 (pour les petits ronds)
360 : 8 = 45
On trace des angles droits dans le cercle et la bissectrice de chaque angles pour obtenir 45°.
Le centre de chaque petits ronds est l'intersection du cercle et de la bissectrice.

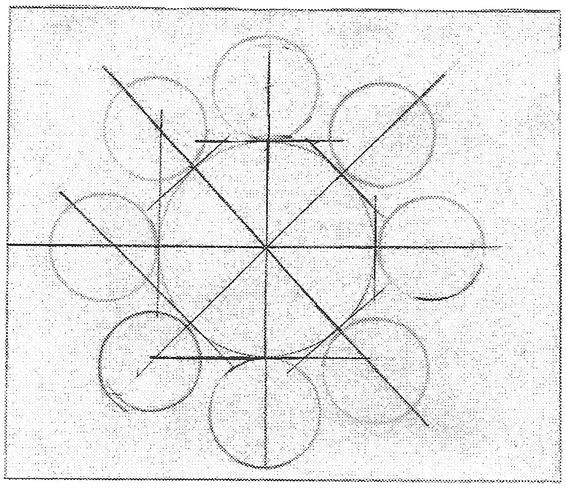
– tracé de diamètres perpendiculaires pour obtenir un carré inscrit puis tracé des médiatrices de ses côtés :



Pour la figure de gauche.

Pour tracer les petits cercles gris de la figure de gauche. On trace les deux diamètres perpendiculaires.
C'est un carré inscrit dans le cercle qui a pour sommets les points d'intersections entre le cercle et les diamètres précédemment tracés.
Puis on trace les médiatrices des côtés du carré obtenue on trace alors les cercles tangents au cercle central sur chaque médiatrice.

– des méthodes imprécises : calcul d'un écart entre les petits disques :

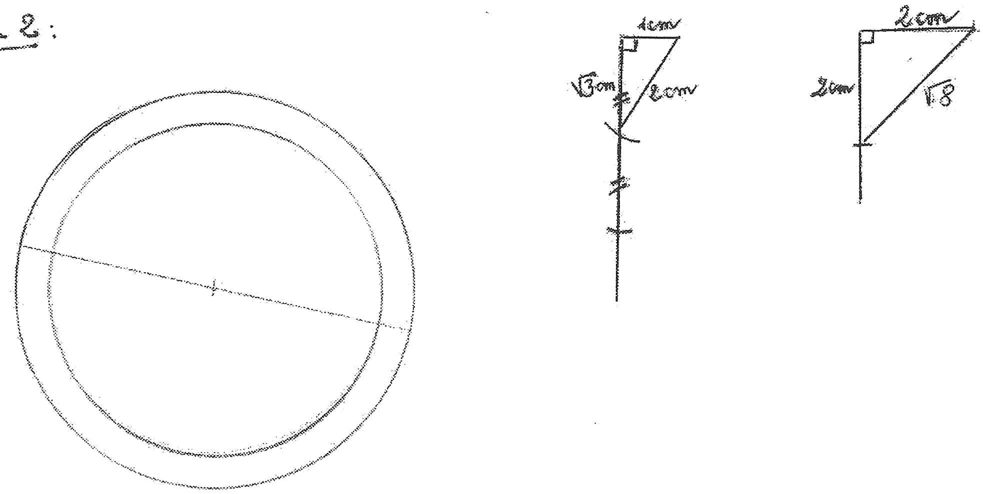


Par hypothèse. La fleur de gauche a pour diamètre 4 cm et les 8 petits disques ont pour rayon 1 cm.
Par hypothèse : Le périmètre d'un cercle P = 2πr
Donc (2 × π × 2) ÷ 8 = 1,57.
Donc environ 1,6 cm
Ce résultat est l'écart entre chaque petits cercles.
On a tracé des droites passant par le centre du grand cercle et tracer les tangentes par rapport à ses droites afin de trouver le centre de chaque petit cercle

b. **Constructions proposées pour la fleur de droite.** Le raisonnement étant moins immédiat, la réussite a été moins importante.

– une production correcte :

Fleur 2 :

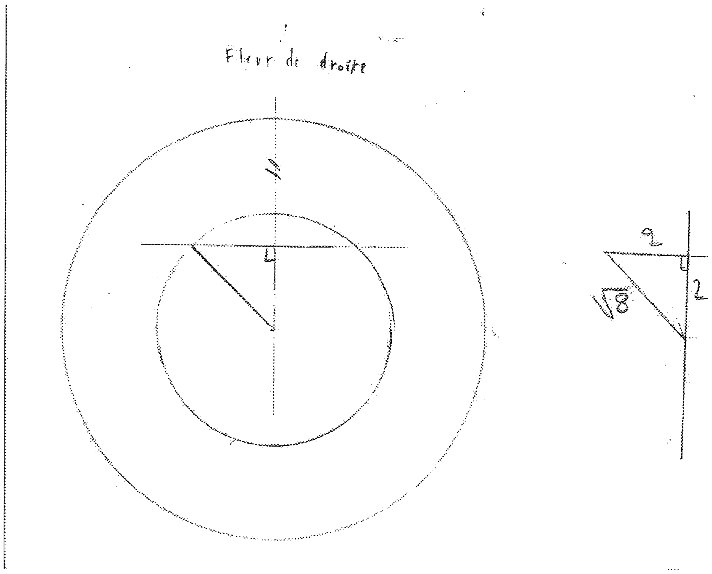


– avec des valeurs approchées :

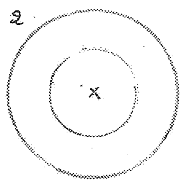
l'aire du rond gris de la fleur de droite et égal à la somme des 8 petits rond de la fleur de gauche
donc l'aire du rond gris de la fleur de droite est
$8 \times \pi \times 1^2 = 8 \times \pi$ cm² donc $\pi \times r^2 = 8 \times \pi$
$r^2 = \frac{8 \times \pi}{\pi}$ $r^2 = 8$ $r = \sqrt{8}$ $r \approx 2,82$
l'aire de la partie blanche de la fleur de gauche est égal à l'aire de la partie blanche de la fleur de droite, donc l'aire de la partie blanche de la fleur de droite est égal à $\pi \times 4$ cm²
l'aire du grand cercle de la fleur de droite est
$\pi \times 4 + 8 \times \pi = 12\pi$ cm²
donc
$\pi \times r^2 = 12\pi$
$r^2 = 12\frac{\pi}{\pi}$
$r^2 = 12$
$r = \sqrt{12}$
$r \approx 3,46$
le rayon du grand rond de droite est 3,46 cm

– construction correcte de $\sqrt{8}$ mais erreur pour la longueur $\sqrt{12}$: les élèves ont appliqué une règle de linéarité pour la fonction racine. Cette erreur est prototypique...

Aire du grand cercle de droite :
A = Aire de la partie grise + Aire de la partie blanche
A = 8π + 4π
A = 12π
Donc le rayon de ce cercle est $\sqrt{12}$.
$\sqrt{12} = \sqrt{8} + \sqrt{4}$
$\sqrt{12} = \sqrt{8} + 2$



– incompréhension du problème : constructions de deux cercles ayant les mêmes rayons que la fleur de gauche (1 cm et 2 cm)



Pour la fleur 2, on trace un cercle de rayon 1 cm et un autre cercle de rayon 2 cm en partant du même centre (cercles concentriques).

5. Prolongements

- Varier les diamètres des cercles pour avoir d'autres racines carrées à construire.
- Changer le nombre de pétales.
- Prolonger ce problème par une étude en classe sur le thème « Mathématiques et arts » par exemple à partir des œuvres de Mondrian, de Le Corbusier...

IV Demi-journée de sport

1. Énoncé

L'animateur sportif demande aux 24 garçons internes du lycée de se mettre en rangs. Ils forment alors 6 lignes et 4 colonnes. On suppose que les garçons sont tous de tailles différentes : de 165 cm à 188 cm. Il sélectionne alors le plus grand de chaque ligne pour un tournoi de basket-ball et le plus petit de chaque colonne pour une journée d'équitation.

A. Un même élève peut-il être sélectionné à la fois comme basketteur et comme cavalier ?

B. Un cavalier peut-il être plus grand qu'un basketteur ?

Justifiez vos réponses.

2. Analyse *a priori*

L'exercice proposé est un exercice de stratégie, qui fait appel à la logique.

Une lecture trop rapide de l'énoncé pourrait faire penser qu'un basketteur est forcément plus grand qu'un cavalier.

Les deux questions sont donc posées dans le but d'aider à mener un raisonnement cohérent en envisageant d'abord le cas d'égalité de taille (le basketteur et le cavalier ne font qu'une seule personne), puis le cas où le cavalier est plus grand que le basketteur.

En ce qui concerne la première question, l'explication peut être rapidement fournie par un exemple.

Pour cela l'élève doit pouvoir utiliser tout l'énoncé et notamment le fait que les tailles s'échelonnent de 165 à 188 cm (ce renseignement ayant été fourni justement pour faciliter la donnée d'un exemple à cette question).

En ce qui concerne la deuxième question, une rédaction plus complexe est attendue, faisant apparaître un raisonnement logique direct, ou un raisonnement par l'absurde, mais surtout mettant en évidence la disjonction de tous les cas.

La réponse à cette question nécessite *a priori* la référence au cas étudié dans la première question.

3. Solution

1. Oui, un élève peut être sélectionné à la fois comme basketteur et comme cavalier.

   Exemple : s'il mesure 170 cm et que :
   - dans sa ligne on trouve les tailles 169, 168, 165 : il sera le plus grand de la ligne,
   - dans sa colonne, on trouve les tailles 171, 173, 175, 180 et 185 : il sera le plus petit de sa colonne.

2. Non, un cavalier ne peut pas être plus grand qu'un basketteur.

   Procédons par disjonction de cas :

   Soit B un basketteur quelconque, de taille b, et C un cavalier de taille c.

   Le but est de démontrer que l'on ne peut pas avoir c supérieur à b, c'est-à-dire qu'un cavalier ne peut pas être plus grand qu'un basketteur.
   - Si le basketteur B et le cavalier C ne font qu'un, alors $b = c$ (ce cas est possible, cf. ci-dessus).
   - Si B et C sont deux personnes différentes, alors $b \neq c$ car toutes les tailles sont différentes.

   Distinguons trois cas :

   - Si B et C sont sur la même ligne, alors nécessairement $b > c$ (B est le plus grand de sa ligne).

   - Si B et C sont sur la même colonne, alors nécessairement $c < b$ (C est le plus petit de sa colonne).

– Si B et C ne sont ni sur la même ligne, ni sur la même colonne, notons x la taille de l'individu X se trouvant sur la même ligne que B et sur la même colonne que C.

  D'après les règles du jeu, on a : $b > x$ et $x > c$, on en déduit que : $b > c$.

		C	
	B	X	

Bilan : quel que soit le cas de figure, on a : $b \geqslant c$.

Conclusion : un cavalier ne peut pas être plus grand qu'un basketteur.

4. Analyse de productions

La première question n'a pas vraiment posé de problème, la plupart des élèves donne un exemple de positionnement des joueurs dans lequel un cavalier est aussi basketteur, sous forme de tableau 6×4 ou en donnant les valeurs numériques d'une ligne et d'une colonne.

Voici un exemple de réponse de lycéens :

1)

1m70	1m65	1m67	1m66
1m71	1m68	1m69	1m72
1m87	1m73	1m74	1m75
1m85	1m76	1m77	1m78
1m86	1m79	1m80	1m81
1m88	1m82	1m83	1m84

Sachant qu'il y a 24 garçons de taille différentes alors selon l'exemple ci-contre celui qui mesure 1m70 est bien le plus grand de sa ligne et le plus petit de sa colonne donc il est à la fois basketteur et cavalier.

En revanche, la deuxième question a soulevé davantage de difficultés, que ce soit au niveau du raisonnement ou de la rédaction de la solution. Les élèves de seconde ont paru un peu plus à l'aise que ceux de troisième.

Certains groupes ont répondu par l'affirmative, en donnant un exemple de taille de cavalier prétendument plus grand qu'un basketteur, sans se rendre compte de l'impossibilité de les positionner.

Voici un exemple d'argumentation : *« Supposons que dans une ligne, l'élève le plus grand mesure 1m75 et que dans une autre ligne l'élève le plus petit mesure 1m77 alors le cavalier sera plus grand que le basketteur. »*

En ce qui concerne ceux qui ont répondu par la négative, il y a différents degrés de rigueur dans la justification.

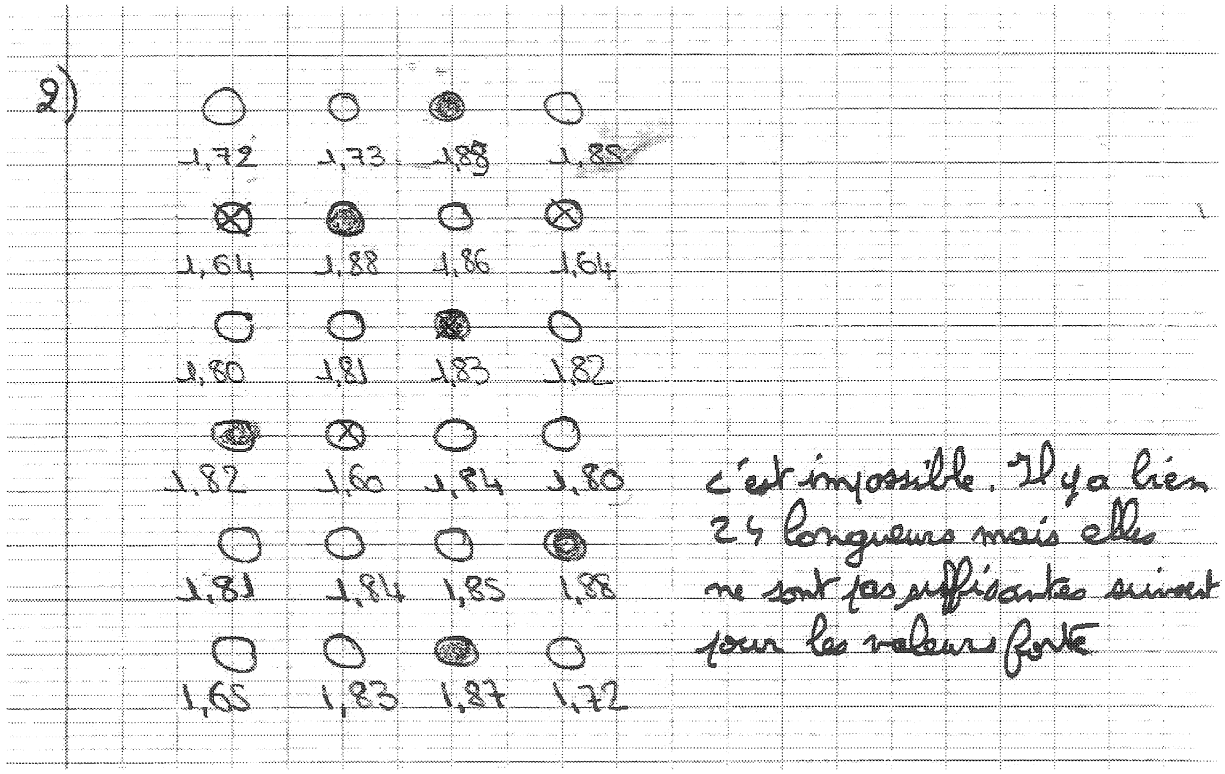
D'une part, il y a les explications plutôt succinctes :

« Non, car les joueurs de basket sont plus grands que les cavaliers. »

« Un cavalier ne peut être plus grand qu'un basketteur car étant donné que les basketteurs sont choisis en premier, le plus grand de chaque ligne sera déjà choisi ainsi que ceux de chaque colonne ».

En revanche, ce dernier groupe acceptait le fait qu'un cavalier puisse être aussi un basketteur, la chronologie du choix des joueurs n'intervenait donc pas dans leur première question.

D'autre part, il y a les groupes qui tentent une explication en donnant un cas particulier et qui expriment le fait que le positionnement des joueurs est impossible sauf dans le cas d'égalité. Voici un exemple où par ailleurs les élèves ne respectent pas toutes les consignes :



Enfin, on trouve les groupes qui tentent une démonstration plus générale :

Un exemple en collège :

2) Non un cavalier ne peut être plus grand qu'un baskette car un élève le plus petit de sa colone ne peut pas être plus grand qu'un élève le plus grand de sa ligne.

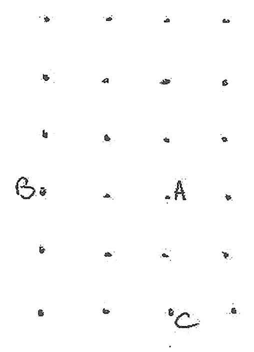
Si $a < b$; $a < e$
$a < c$; $a < f$
$a < d$; $a < G, M$
$a < S$ $a < M$

donc cavalier $> a$
car le cavalier $\geq b, c, d, e, f$

a	G	M	S
b	H	N	T
c	i	O	U
d	j	P	V
e	K	Q	W
f	L	R	X

Un exemple en lycée :

2/



B est le plus grand de la ligne ⇒ basketteur
C est le plus petit de sa colonne ⇒ cavalier

Pour que C soit plus grand que B, il faudrait que C soit plus grand que A, or ceci est impossible car si C était plus grand que A, il ne serait pas cavalier.

Les démonstrations se basent souvent sur une représentation, même partielle, sous forme d'un tableau 6×4, on peut noter que la ligne et la colonne considérées sont toujours positionnées « au bord » du tableau, mais le raisonnement produit reste valable pour les autres positions.

V Les nombres palindromes

1. Énoncé

Un nombre palindrome peut se lire de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche, par exemple 2 002, 747, 55 sont des nombres palindromes.

S'ils sont simples à fabriquer dans notre système de numération, la recherche peut se compliquer dans d'autres systèmes.

Donnez les palindromes formés de trois symboles en numération romaine.

Rappel : en numération romaine, les symboles I, V, X, L, C, D, M représentent les nombres 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1 000. Nous appellerons ces symboles chiffres romains.

Les principes de numération des entiers naturels sont les suivants :

- Un chiffre romain placé à droite d'un chiffre plus grand ou égal s'ajoute à celui-ci.
  Exemple : XV représente 15, $CXXI$ représente 121
- Un chiffre romain placé à gauche d'un chiffre supérieur se retranche de celui-ci.
  Exemple : IX représente 9, XL représente 40
- La numération romaine est un système décimal et l'écriture d'un entier est unique.
  Exemples : 2004 s'écrit $MMIV$
  $495 = 400 + 90 + 5$ *donc 495 s'écrit $CDXCV$ (et non pas VD qui n'est pas autorisé)*
- Chacun des symboles V, L, D ne peut apparaître qu'une fois dans l'écriture d'un nombre.
  Exemple : 150 s'écrit CL et non pas LLL.

2. Analyse *a priori*

Il s'agit d'un exercice sur les nombres écrits avec des symboles romains. Des numérations anciennes sont étudiées dès le cycle 3 de l'école primaire et sont d'excellents supports d'activités tout au long de la scolarité.

Les règles de la numération romaine ne sont pas les mêmes que celles de notre numération décimale ; elles s'appuient sur la base cinq et la base dix, et la lecture s'effectue aussi par soustraction. Toutefois, la parfaite connaissance de ces règles n'est pas nécessaire à la résolution du problème.

Toutes les écritures ne sont pas autorisées (par exemple VD n'est pas autorisé), et c'est sur cette particularité que doivent s'appuyer les élèves pour éliminer, parmi tous les palindromes possibles, ceux dont l'écriture n'est pas valide.

La difficulté essentielle de cet exercice réside dans la bonne compréhension de l'énoncé. Notamment, les palindromes attendus doivent être formés de symboles de la numération romaine.

Par exemple deux mille deux est palindrome dans la numération arabe puisqu'il s'écrit 2002, mais pas dans la numération romaine puisqu'il s'écrit $MMII$; de même trois mille est palindrome dans la numération romaine puisqu'il s'écrit MMM, mais pas dans la numération arabe puisqu'il s'écrit 3000. Il s'agit de rechercher des nombres dont l'écriture constitue un palindrome en numération romaine.

Remarque *a posteriori*

Lors de la construction du problème, on aurait pu s'attendre à ce que les élèves s'engagent dans la recherche de l'écriture romaine de palindromes en numération arabe. Nous n'avons alors pas anticipé cette confusion. Avec l'expérience, nous proposerions plutôt l'énoncé suivant :

« Un nombre est dit palindrome dans un système de numération s'il peut se lire de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche.

Par exemple deux mille deux est palindrome dans la numération arabe puisqu'il s'écrit 2 002, mais pas dans la numération romaine puisqu'il s'écrit MMII ; de même trois mille est palindrome dans la numération romaine puisqu'il s'écrit MMM, mais pas dans la numération arabe puisqu'il s'écrit 3 000.

Donnez les nombres dont les écritures en numération romaine sont des palindromes formés de trois symboles. »

3. Solution

Le raisonnement par exhaustion nous amène à la solution sans difficulté. S'agissant d'un palindrome (se lisant dans les deux sens) composé de 3 symboles, le premier et le dernier chiffres seront donc identiques.

Les symboles V, L, D ne pouvant apparaître qu'une seule fois, ceux-ci ne conviennent pas.

Il ne nous reste donc que quatre choix : I, X, C, M.

Entre deux symboles identiques, il est possible
- de placer le même symbole. Nous obtenons ainsi les palindromes III ; XXX ; CCC ; MMM.
- de placer un symbole de valeur inférieure pour autant que l'écriture soit autorisée : XIX (convient) ; XVX (ne convient pas) ; CIC (ne convient pas) ; CVC (ne convient pas) ; CXC (convient) ; CLC (ne convient pas) ; MIM (ne convient pas) ; MVM (ne convient pas) ; MXM (ne convient pas) ; MLM (ne convient pas) ; MCM (convient) ; MDM (ne convient pas).

Il existe donc sept possibilités d'écritures de palindromes avec trois chiffres romains ; nous précisons entre parenthèses leur écriture en numération arabe :

III (3) ; XIX (19) ; XXX (30) ; CXC (190) ; CCC (300) ; MCM (1 900) ; MMM (3 000).

4. Exemples de productions

Deux exemples de réponses exactes :

– Un exemple en collège : tous les cas possibles sont étudiés et présentés en tableau.

	I	V	X	L	C	D	M
I	III		XIX				
V							
X			XXX		CXC		
L							
C					CCC		MCM
D							
M							MMM

Pour que le nombre reste le même dans l'un ou l'autre sens de lecture, il faut qu'il soit composé de deux symboles identiques de chaque chaque côté et d'un dernier symbole au centre.
Grâce au tableau nous pouvons retrouver toutes les combinaisons possibles de symboles sous cette forme.
Il ne reste plus qu'à vérifier la cohérence des combinaisons et la liste est faite :
III ; XIX ; XXX ; CXC ; CCC ; MCM ; MMM.

– Un exemple en lycée

On élimine les possibilités commençant par V, L et D car ils ne peuvent apparaître qu'une fois dans un nombre
Il nous reste la triple répétition de I, X, M et C.

III (3)
XXX (30)
CCC (300)
MMM (3000)

Ainsi que l'addition de 2 mêmes puissances de 10 auxquelles on soustrait la puissance de 10 inférieure.

ex : $10^3 + 10^3 - 10^2$
M + M - C

donc MCM (1900)
CXC (190)
XIX (19)

Conclusion : les palindromes formés de trois symboles sont donc III ; XIX ; XXX ; CXC ; CCC ; MCM ; MMM

Liste organisée de tous les palindromes envisageables : certains groupes ont réalisé une telle liste sans éliminer les écritures non autorisées :

Les palindromes formés de trois symboles en numération romaine sont :

– III	– CIC	– MIM
– XIX	– CVC	– MVM
– XVX	– CXC	– MXM
– XXX	– CLC	– MLM
– XLX	– CCC	– MCM
– XCX	– CDC	– MDM
– XDX	– CMC	– MMM
– XMX		

Confusion au niveau de la compréhension de l'énoncé : on l'observe dans les deux exemples suivants.

– Les nombres obtenus s'écrivent bien avec trois symboles en numération romaine mais sont des palindromes en numération arabe.

Nous procédons par élimination.

111 = CXI
151 = CLI
515 = DXV
555 = DLV

– Le respect de la condition palindrome dans les deux systèmes aboutit pour les élèves à une impasse.

Les nombres palindromes romains seraient des nombres tels que : XCX
III
MIM... mais ces nombres ne sont pas palindromes quand on les écrit en chiffres arabes.

Si il faut remplir les deux conditions :
- palindromes en romain
- palindromes en chiffres arabes

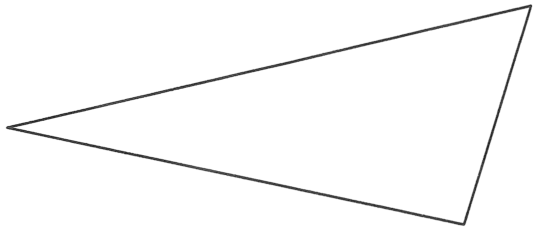
alors il n'existe pas de tels nombres.

On a essayé différentes combinaisons : 1001, 1221, 3003...
mais nous n'en avons pas trouvé qui s'écrivent avec seulement trois symboles romains.

VI Instrument original : le retour !

1. Énoncé

On dispose du triangle gabarit, comme unique outil de construction. On rappelle qu'il s'agit d'un triangle cartonné que l'on pourra reproduire à l'aide du modèle ci-contre. Avec cet unique gabarit, tracez le segment $[AB]$ dont les extrémités sont précisées sur la feuille réponse.



Vous détaillerez les constructions sur la fiche réponse en présentant les différentes étapes sur les dessins proposés, à la manière d'une bande dessinée.

Attention, vous ne pouvez ni écrire sur le gabarit, ni le plier, mais il peut vous servir de règle.

La fiche-réponse est fournie dans le second chapitre de la brochure.

2. Analyse *a priori*

Deux points A et B étant donnés, il s'agit de construire le segment $[AB]$.

La longueur du segment à construire étant supérieure à celle du plus grand côté du triangle gabarit, il est impossible de tracer ce segment en une seule étape avec ce gabarit. Il faut donc recourir à la construction de points intermédiaires, par exemple le milieu du segment.

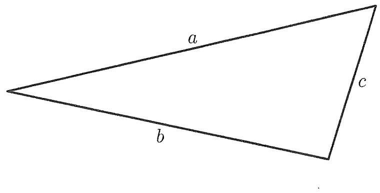
La solution proposée s'appuie sur les propriétés du centre d'un parallélogramme. D'autres solutions sont envisageables en mettant en œuvre des configurations différentes, par exemple l'utilisation de la droite des milieux dans un triangle (voir en annexe).

Le gabarit permet de tracer des droites passant par A, la direction de ces droites étant imposée par la position initiale du gabarit.

Les élèves n'ont pas l'habitude d'utiliser un triangle gabarit mais comme ils l'ont déjà utilisé lors de l'épreuve de qualifications, on peut s'attendre à plus d'aisance lors de l'épreuve finale.

3. Solution

Notons a, b et c les longueurs des côtés du triangle gabarit. Nous choisissons $c < b < a$. D'après les hypothèses de l'énoncé, nous remarquons que $a < AB < 2a$. Le fait que $AB < 2a$ est avéré par les dimensions des figures fournies.

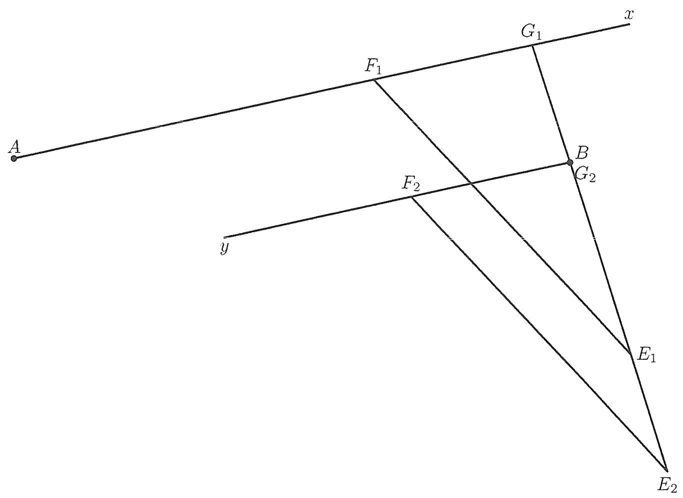


Tracer une demi-droite $[Ax)$ (voir la méthode *« utiliser le triangle gabarit comme une règle »* en annexe page 26).

Placer un côté du triangle gabarit sur $[Ax)$, puis le faire glisser jusqu'à ce qu'un autre côté passe par B *(position* $E_1F_1G_1$*)*. Tracer alors la droite (BG_1).

Tracer la demi-droite $[By)$ parallèle à $[Ax)$ et de sens contraire après avoir fait glisser la gabarit le long de $[BG_1]$ jusqu'à la position $E_2F_2G_2$.

Les demi-droites $[Ax)$ et $[By)$ sont symétriques par rapport au milieu O de $[AB]$.

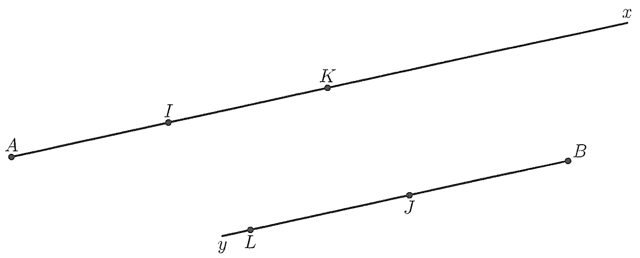


Placer I sur $[Ax)$ et J sur $[By)$ tel que $AI = BJ = c$.

I et J sont symétriques par rapport à O.

Placer K sur $[Ax)$ et L sur $[By)$ tel que $AK = BL = b$.

K et L sont symétriques par rapport à O.

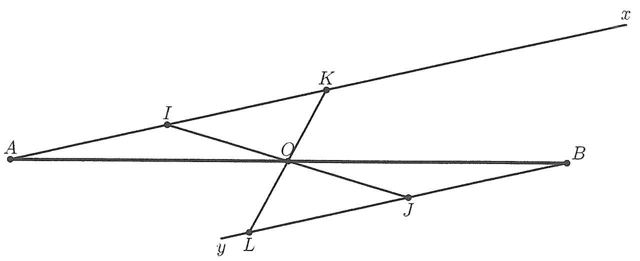


Joindre I et J, puis K et L.

$[IJ]$ et $[KL]$ se coupent en O milieu de $[AB]$.

Joindre A et O, puis B et O.

Remarque : la solution n'est pas unique.



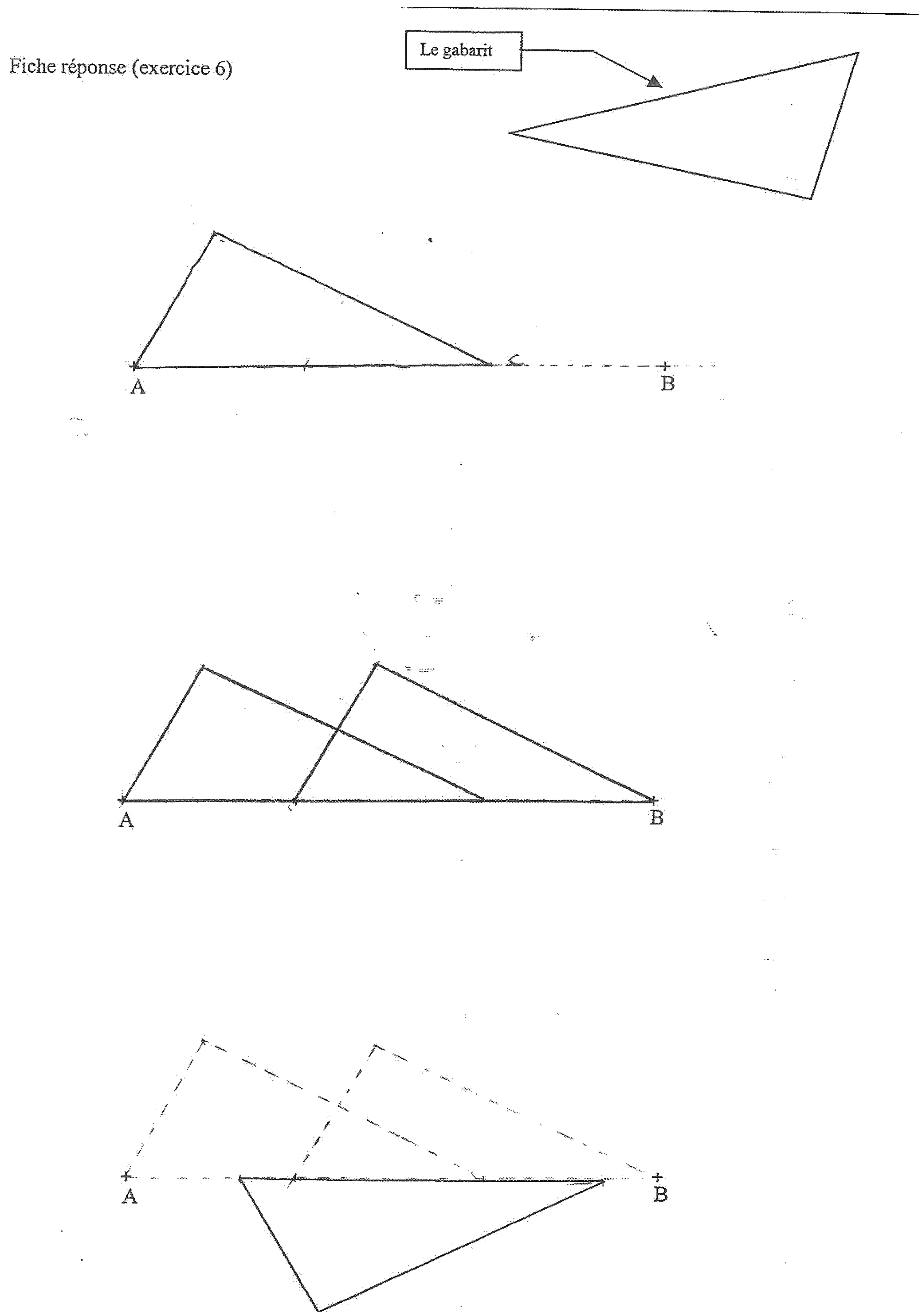
4. Analyse de production

Aucun groupe n'a produit de solution correcte. L'utilisation d'un triangle gabarit a posé de nombreux problèmes. Les élèves inventent facilement différentes configurations sans pouvoir, *a posteriori*, élaborer une justification. Les stratégies utilisées en classe de troisième sont peu différentes de celles des élèves de seconde.

Nous avons classé les productions en 5 types :

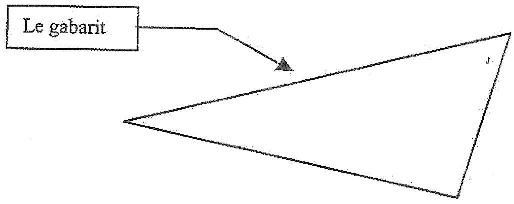
Type 1 : utilisation de plusieurs triangles gabarit (non respect de la consigne concernant l'unicité du gabarit) pour former une droite puis rotation de cette configuration.

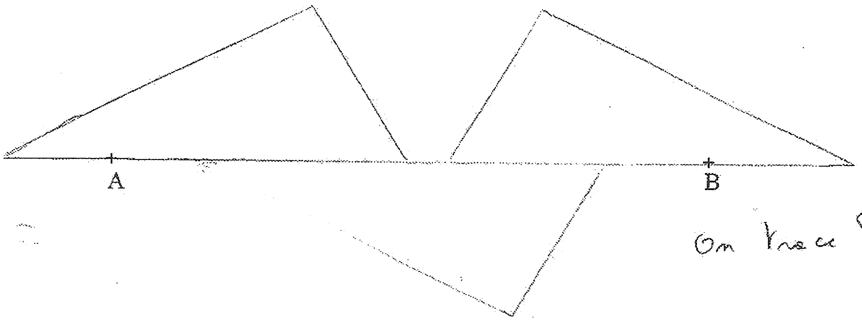
– *Un exemple en collège :*



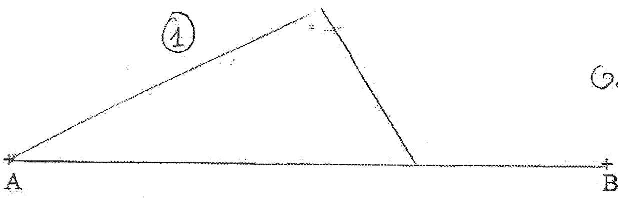
– *Un exemple en lycée :*

Fiche réponse (exercice 6)

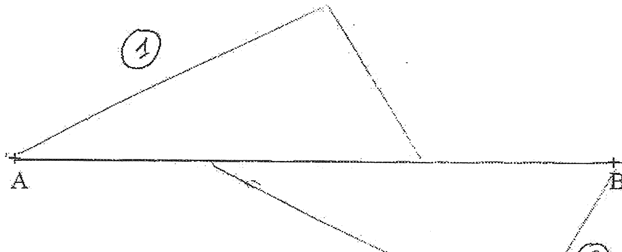




On trace la droite (AB)



On place le triangle 1 sur la droite

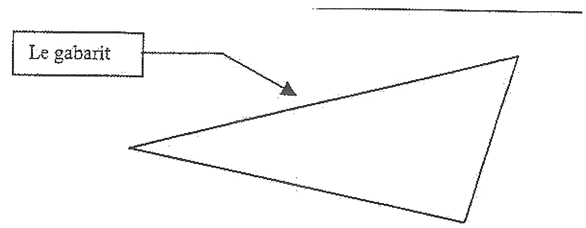


Puis on place le triangle 2 dans le prolongement pour arriver sur B avec l'un des sommets.

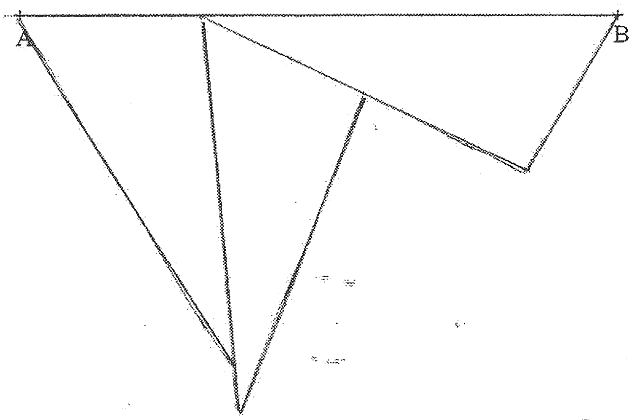
Type 2 : utilisation de plusieurs triangles gabarit (non respect de la consigne) pour former un segment en utilisant la somme des angles d'un triangle.

– *Un exemple en collège :*

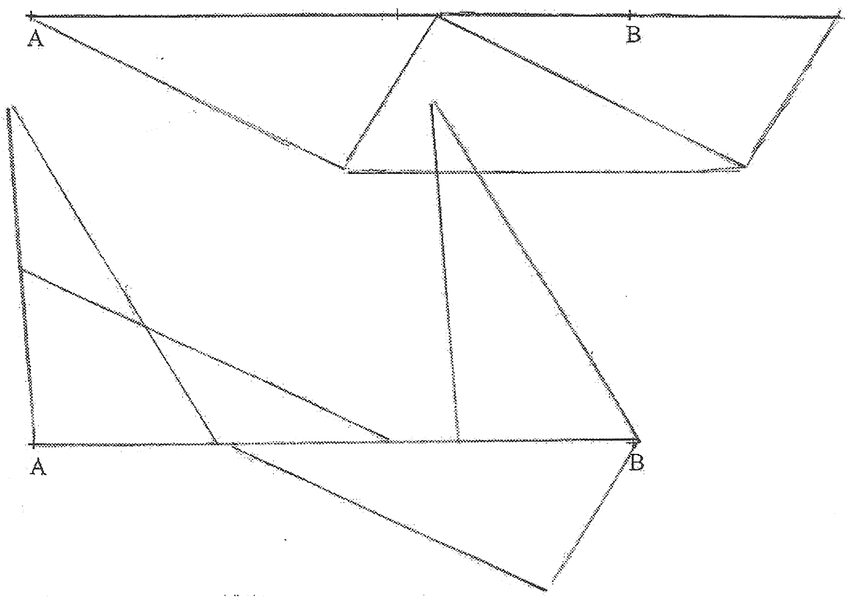
Fiche réponse (exercice 6)



On a prit les triangles qu'on a reporté comme ci-contre

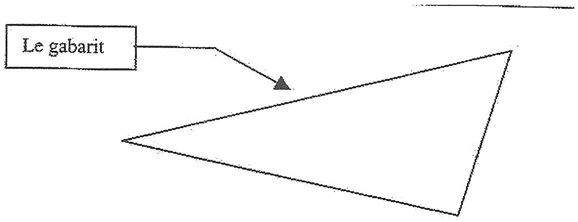


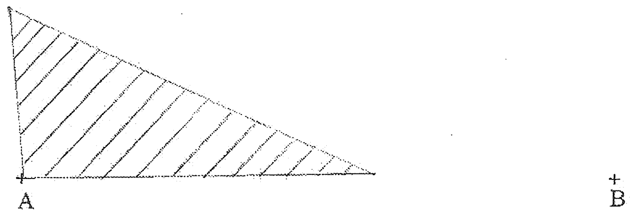
On additionne les angles 180° -> une droite

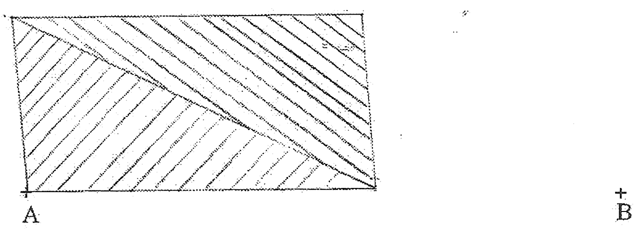


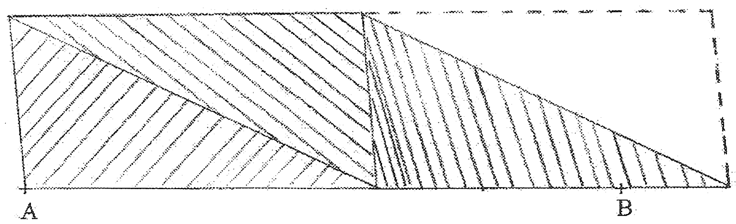
– *Un exemple en lycée :*

Fiche réponse (exercice 6)



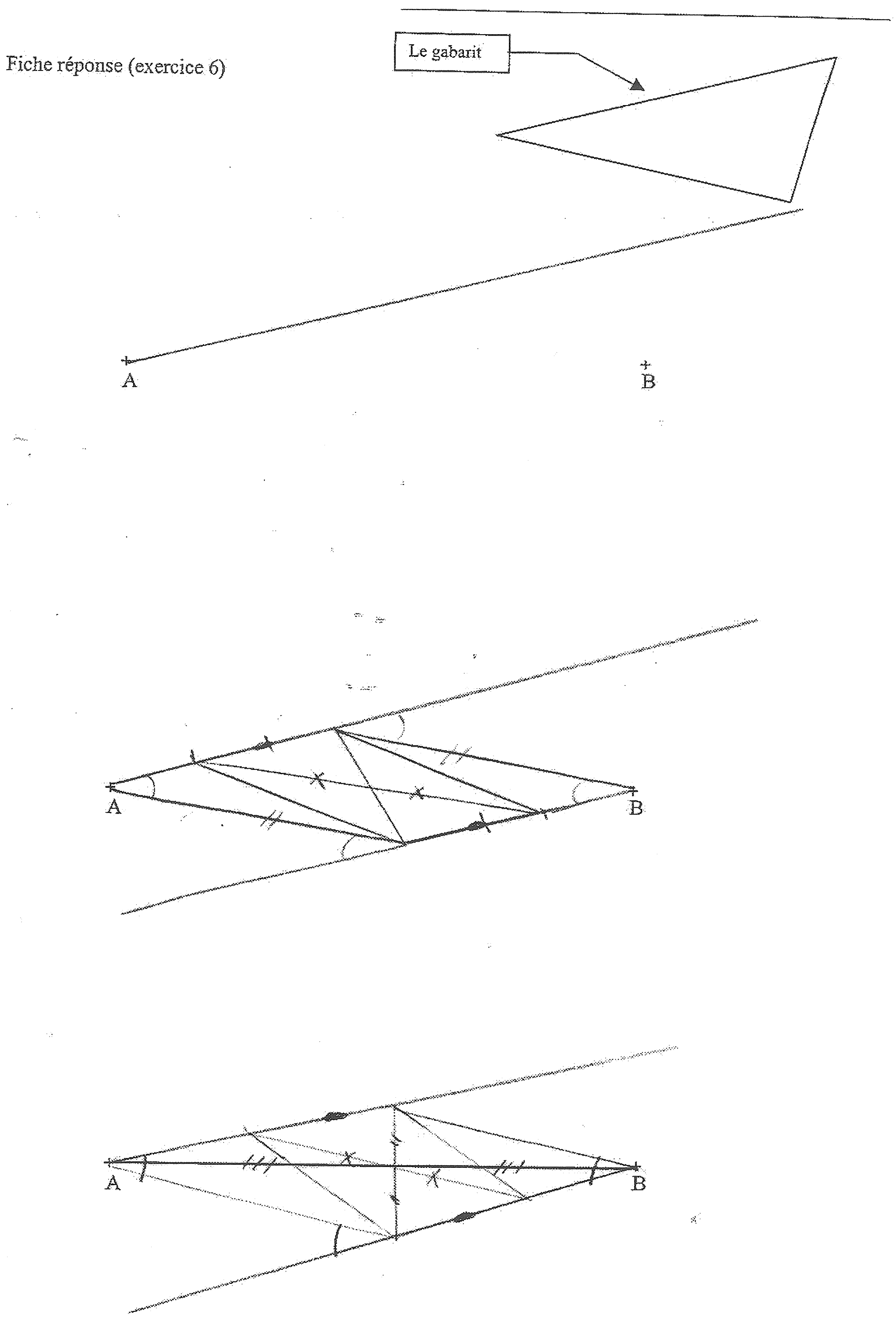






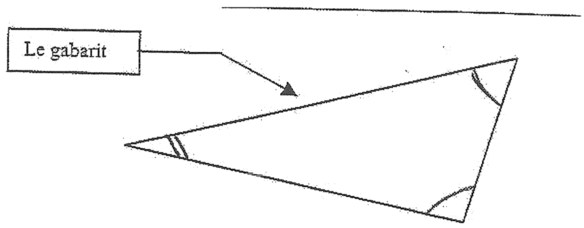
Type 3 : utilisation d'un point intermédiaire du segment $[AB]$. Cependant les différentes étapes ne sont pas explicitées. Certes la justification n'était pas demandée, mais à travers le film des étapes de tracés, il devrait être possible de repérer facilement la démarche.

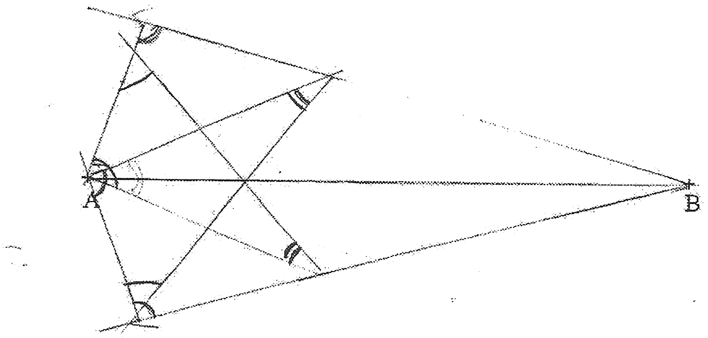
Une production d'un groupe d'élèves de troisième :



Type 4 : un tracé qui suppose un type de configuration, les deux droites tracées de part et d'autre de B sont symétriques par rapport à (AB)

Fiche réponse (exercice 6)



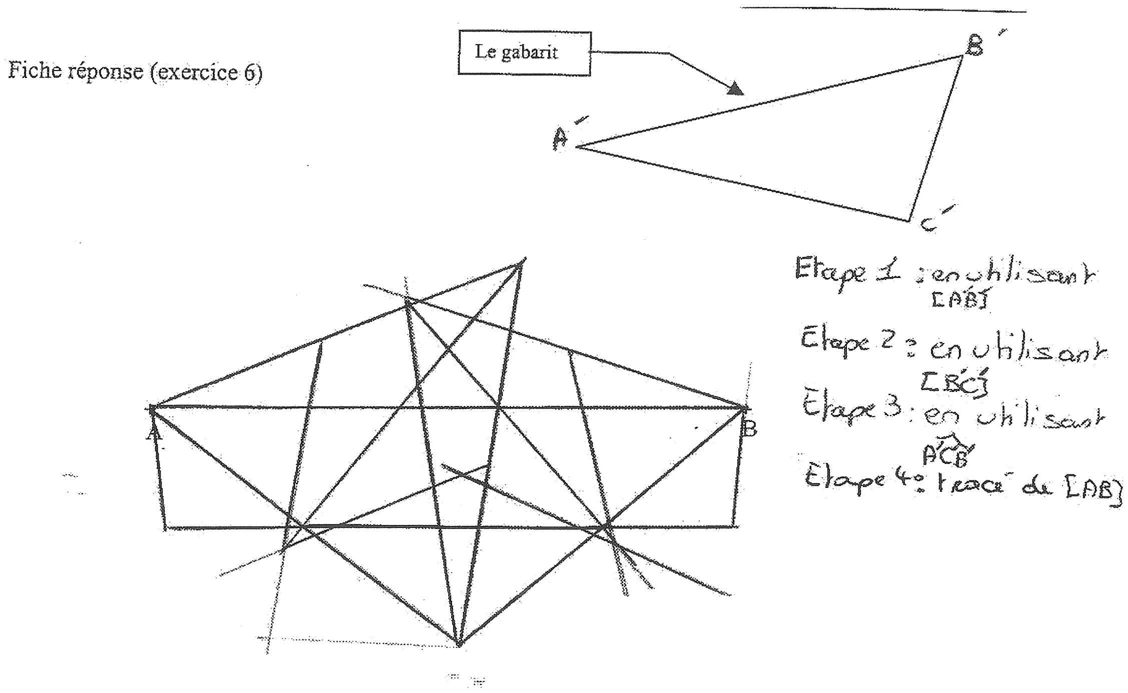


L'angle $\hat{B}$ est un angle quelconque, on trace deux droites de part et d'autres de B avec l'aide du gabarit. On relie A avec l'aide de l'angle orange, on reproduit ceci sur la 2nde droite. On réutilise l'angle orange depuis l'angle Â, appuyé contre la droite tracé précédemment.

+A +B

A partir du trait que l'on vient de tracer, reproduire l'angle bleu. Une intersection apparaît, on la relie avec les points A et B.

Type 5 : utilisation de différents tracés difficiles à comprendre



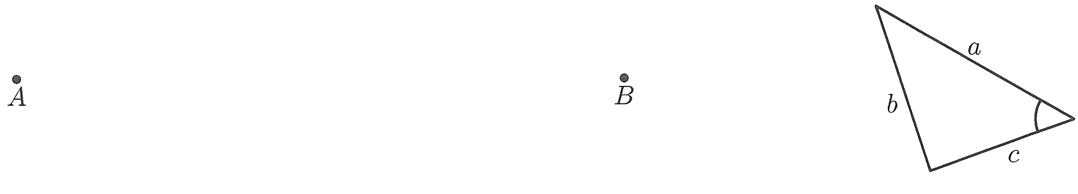
5. Prolongements

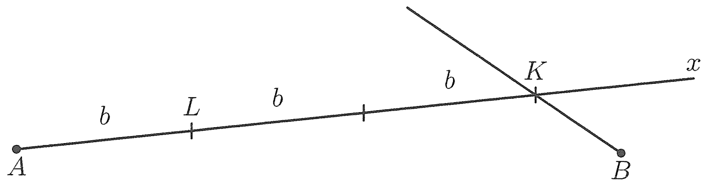
Dans le cas de l'exercice du rallye, on a : $a < AB < 2a$. La solution proposée ci-dessous est envisagée dans le cas où $AB > 2a$.

Dans ce cas, le tracé ne peut se réaliser en utilisant le milieu I de $[AB]$ car on a : $AI = \dfrac{AB}{2}$, $AI < a$. On peut remplacer le milieu de $[AB]$ par le point situé sur $[AB]$ au tiers de $[AB]$ à partir de A, si $\dfrac{AB}{3} < a$. Plus généralement, on choisit le plus petit des entiers n tels que $\dfrac{AB}{n} < a$.

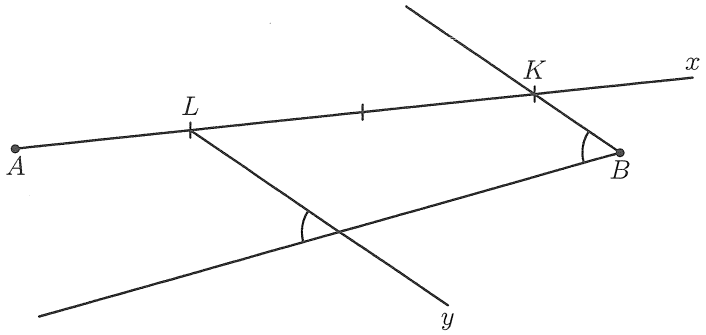
Film du tracé du point I de $[AB]$ tel que $AI = \dfrac{1}{3}AB$:

Les données :

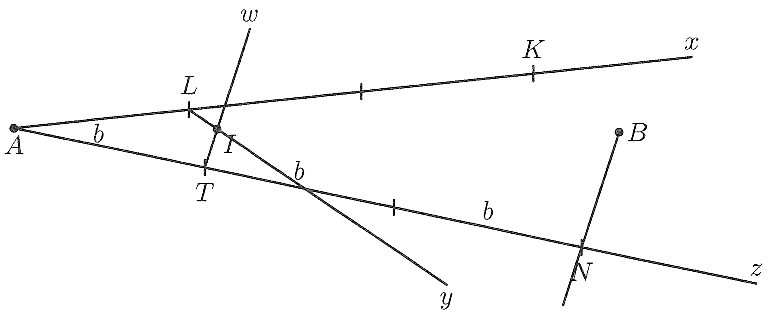




- Tracé d'une demi-droite $[Ax)$;
- Tracé de trois segments de même longueur ;



- Tracé de la parallèle à (BK) passant par L ;



- Tracé d'une demi-droite $[Az)$;
- Tracé d'une demi-droite $[Tw)$ parallèle à (NB) passant par T ;
- L'intersection de $[Tw)$ et de $[Ly)$ est le point I cherché.

Démonstration :

Il existe un seul point M de $[AB]$ tel que $AM = \dfrac{1}{3}AB$.

$[Ly)$ coupe $[AB]$ en J ; en utilisant le théorème de Thalès, on a $AJ = \dfrac{1}{3}AB$.

$[Tw)$ coupe $[AB]$ en Q ; en utilisant le théorème de Thalès, on a $AQ = \dfrac{1}{3}AB$.

D'après l'unicité du point M tel que $AM = \dfrac{1}{3}AB$, on peut affirmer que $M = Q = J$.

Or $J \in [Ly)$, d'où $M \in [Ly)$; et $Q \in [Tw)$ d'où $M \in [Tw)$.

Le point M est donc l'intersection de $[Tw)$ et de $[Ly)$, c'est le point I tracé précédemment.

Ce qui nous permet de tracer $[AI)$.

Les problèmes de constructions élémentaires à l'aide du triangle gabarit sont consultables dans la revue en ligne « Mathématiques vivantes » n° 71 et sur le site de l'IREM de l'université de Franche-Comté.

VII La touche étoile

1. Énoncé

La machine ASSOUT, représentée ci-dessous ne dispose que d'une touche opératoire notée *

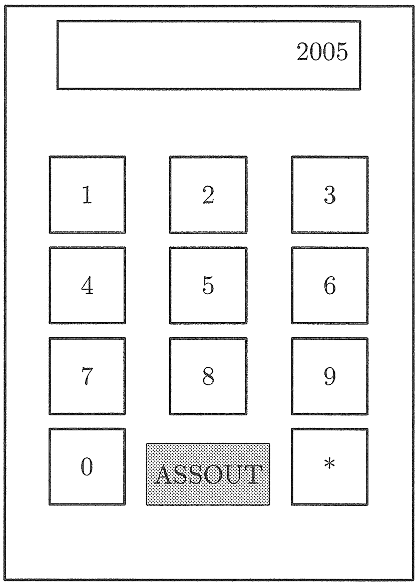
La touche *, suivie d'un entier naturel, ajoute la somme et le produit de cet entier et de l'entier affiché à l'écran.
Par exemple, si 2 est affiché à l'écran, la séquence de touches *3 déclenche le calcul :
$2 * 3 = (2 + 3) + (2 \times 3) = 5 + 6 = 11$. Ce nombre 11 est alors affiché à l'écran.

Jules et Jim disposent chacun d'une machine ASSOUT, qui quand on l'allume, affiche 0 à l'écran.

Le but du jeu est d'atteindre 2 005.

Jules allume sa machine, puis tape *, puis un entier naturel non nul. Le nombre 2 005 apparaît à l'écran et Jules gagne en une fois.

Jim allume sa machine, puis tape *, puis un entier naturel non nul. Il obtient un nombre inférieur à 2 005. Il retape *, puis un autre entier naturel non nul et obtient alors 2 005. Jim gagne en deux fois.



On demande tous les choix possibles de Jules pour gagner en une fois et tous les choix de Jim pour gagner en deux fois.

2. Analyse *a priori*

La première difficulté de cet exercice est la compréhension du fonctionnement de la machine ; les élèves pourront, pour commencer, tester quelques nombres. Ils devraient se rendre compte assez vite que pour tout entier naturel n, $0 * n = n$.

La seule façon possible de gagner en une seule fois est donc de taper 2 005.

Pour gagner en deux fois, on est amené à chercher des entiers naturels non nuls a et b tels que : $a + b + ab = 2\ 005$.

Les entiers a et b jouant le même rôle dans la formule, si un couple $(a\ ;\ b)$ est solution, le couple $(b\ ;\ a)$ l'est aussi. Il suffit donc de chercher les couples $(a\ ;\ b)$ avec $a \leqslant b$.

Il apparaît que a doit être inférieur à $\sqrt{2\ 005}$ (une démarche analogue est utilisée lorsque l'on s'intéresse à la primalité d'un nombre entier).

Si nous adoptons une démarche analytique, nous pouvons exprimer b en fonction de a. Il suffit de calculer b pour chacun des entiers de 0 à 44 (le plus grand entier inférieur à $\sqrt{2\ 005}$) et retenir les couples de valeurs entières. C'est un travail qui peut paraître fastidieux aux élèves, mais qui se fait aisément en utilisant le mode « table » de la calculatrice *(on peut se poser la question de la validité des résultats donnés par la calculatrice).*

Si nous adoptons une démarche arithmétique, nous pouvons factoriser : $a + b + ab = 2\ 005$ équivaut à $a + b + ab + 1 = 2\ 006$, soit $(a + 1)(b + 1) = 2\ 006$. le problème se ramène alors à la recherche des diviseurs de 2 006. Comme dans la recherche de la primalité d'un nombre entier, a est inférieur strictement à $\sqrt{2\ 006}$.

Cet exercice peut donc se résoudre en utilisant des outils d'analyse ou des outils d'arithmétique.

3. Solution

Possibilité de gagner en une fois :

Soit n l'entier naturel que tape Jules.

$0 * n = (0 + n) + 0 \times n$, soit, $0 * n = n$.

La seule façon que Jules a de gagner en une seule fois est donc de taper 2 005.

Possibilités de gagner en deux fois :

Soit a et b les deux entiers que tape successivement Jim.

Puisque $0 * a = a$ et que $a * b = a + b + ab$, la machine affiche 2 005 lorsque $a * b = a + b + ab = 2\ 005$ soit $(a + 1)(b + 1) = 2\ 006$. Les entiers naturels a et b étant non nuls, $a + 1$ et $b + 1$ sont des diviseurs de 2 006 supérieurs ou égaux à 2. Or $2\ 006 = 2 \times 17 \times 59$.

En conclusion, pour gagner en deux fois, Jim peut taper 1 puis 1002, ou 1002 puis 1, ou 16 puis 117, ou 117 puis 16, ou 33 puis 58, ou 58 puis 33. Il a donc six façons de gagner.

4. Analyse de productions

Les élèves n'ont l'habitude, ni de résoudre une seule équation à deux inconnues, ni de résoudre des équations dans l'ensemble des entiers naturels.

Sur 15 classes ayant fourni une réponse à cet exercice, 9 répondent correctement à la première question, après avoir traduit le problème par une équation ; 4 donnent la réponse exacte (« Jules n'a qu'une solution, il doit taper 2 005 »), mais se contentent de vérifier que 2 005 convient, sans prouver que c'est la seule possibilité offerte à Jules. Enfin deux groupes donnent une réponse erronée, conséquence sans doute d'une mauvaise compréhension de l'énoncé. On lit : $1 * 1\ 002 = 2\ 005$, sans précision sur ce que doit taper Jules.

La deuxième question a posé plus de difficultés aux élèves. 7 classes ont traduit le problème par une équation, mais n'ont pas réussi à la résoudre entièrement dans l'ensemble des entiers naturels.

Un exemple de réponse :

- Le Chiffre de base est zéro pour l'équation:

Soit x le nombre recherché

$0+x+0\times x=2005 \Leftrightarrow 0+x=2005 \Leftrightarrow x=2005$

Pour obtenir, en une seule fois, la valeur 2005 avec la touche *
la valeur de x sera de 2005

Jules n'aura qu'une solution pour obtenir 2005 en une seul fois avec sa méthode.

Comme précédemment, lorsque Jim allume son ASSOUT il a la valeur 0 par défaut. Z est le premier nombre tapé par Jim :

$0^*Z=0+Z+0\times Z=Z<2005$ D'où Z est un entier naturel

α est le $2^{ème}$ nombre tapé par Jim, entier naturel :

$Z^*\alpha=Z+\alpha+Z\times\alpha=2005$

$33^*58=33+58+33\times58=2005$, le couple (33 ; 58) marche.

$1^*1002=1\times1002+1+1002=2005$, le couple (1 ; 1002) marche aussi

Une classe a donné l'ensemble des solutions, sans toutefois donner des explications sur la démarche utilisée :

Pour Jules, 0 * 2005

Pour Jim, 0 * 16 et 16 * 117
0 * 117 et 117 * 16
0 * 33 et 33 * 58
0 * 58 et 58 * 33
0 * 1002 et 1002 * 1
0 * 1 et 1 * 1002

5. Prolongements

- Essayer de gagner en trois fois. La méthode arithmétique mise en œuvre précédement se généralise et s'avère alors très efficace : $(a*b)*c = (a+b+ab)*c = a+b+c+ab+ac+bc+abc$.
  Or $a+b+c+ab+ac+bc+abc = (a+1)(b+1)(c+1)-1$.
  D'où, $(a*b)*c = 2\ 005$ équivaut à $(a+1)(b+1)(c+1) = 2\ 006$.
  2 006 ne se décompose que d'une seule façon en un produit de trois facteurs supérieurs strictement à 1 (à l'ordre près). On obtient donc six triplets solutions :
  $(1\,;16\,;58)$, $(1\,;58\,;16)$, $(16\,;1\,;58)$, $(16\,;58\,;1)$, $(58\,;1\,;16)$ et $(58\,;16\,;1)$.

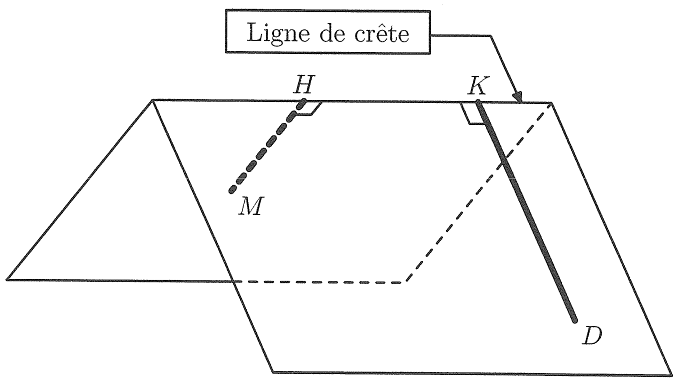
  On peut remarquer que $(a*b)*c = a*(b*c)$.
- Peut-on gagner en quatre fois ? En raisonnant comme précédemment, on montre que non.
- Le même problème peut être repris en remplaçant 2005 par un autre entier naturel N : le nombre de solutions dépendra du nombre de facteurs premiers obtenus dans la décomposition de $N+1$ (et de leur répétition éventuelles). Le problème devient alors un problème de dénombrement.
- Faire rechercher les propriétés de l'opération $*$ (commutativité, associativité, élément neutre, élément symétrique, sans utiliser le vocabulaire « savant ») et les comparer avec les propriétés de l'addition et de la multiplication...

VIII Rallye randonnée

1. Énoncé

Damien et Sophie préparent une des étapes du rallye randonnée du 1er juin 2005. Les randonneurs partiront du village de Der pour rejoindre le village de Montalenvers. Il faudra franchir la colline et cela, en suivant le chemin le plus court à travers champs.

Après repérage, Damien a réalisé le croquis ci-contre.



Aidez Damien et Sophie à placer la balise B sur la ligne de crête qui leur permettra de réaliser leur parcours.

Les distances connues, exprimées en kilomètres, sont : $DK = 9$, $KH = 5$ et $HM = 6$.

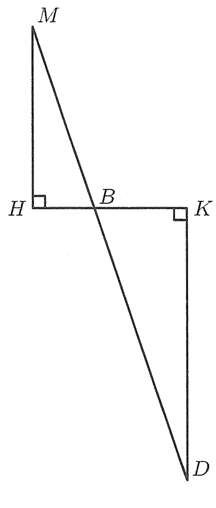
2. Analyse *a priori*

Il s'agit d'appréhender une situation simple de l'espace ; le schéma est facile à interpréter. Nous nous attendons à ce que les élèves se ramènent à un problème de géométrie plane et, transforment assez rapidement ce problème de recherche du plus court chemin dans l'espace en une recherche de plus court chemin dans le plan en « dépliant la colline ». La configuration de Thalès est alors facilement reconnaissable. Les nombres proposés sont choisis afin de faciliter la tâche calculatoire.

En choisissant judicieusement une inconnue et éventuellement un repère dans le plan, les élèves peuvent mettre en évidence une fonction. Le problème se ramène à en déterminer le minimum. Or l'étude de cette fonction n'est pas à la portée des élèves de seconde. Néanmoins, le tracé de sa courbe représentative permet aux élèves d'émettre une conjecture, mais elle reste une proposition non démontrable à leur niveau.

3. Solution

La « mise à plat » des deux pentes permet de repérer la position de B rendant le chemin minimal.



Le trajet le plus court est le segment $[MD]$ dont l'intersection avec (HK) est noté B.

La droite (HM) est parallèle à la droite (DK).

D'après le théorème de Thalès nous obtenons :
$\dfrac{HM}{KD} = \dfrac{BH}{BK}$, soit $\dfrac{6}{9} = \dfrac{5 - BK}{BK}$.
Ainsi $BK = 3$

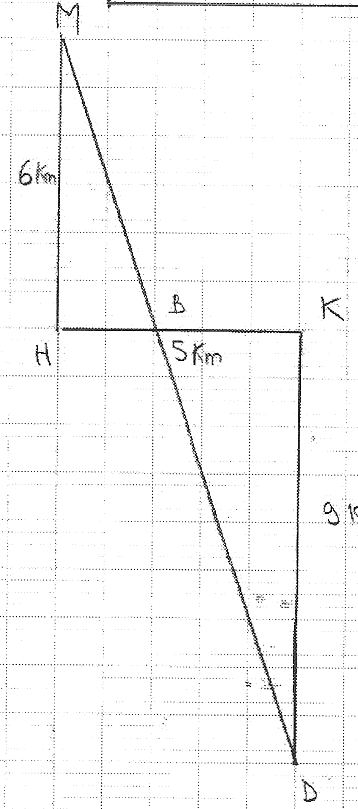
(une figure, à l'échelle, permet une vérification).

4. Analyse de productions

Huit copies sur quinze donnent une réponse exacte. Le passage à une représentation plane est utilisé à chaque fois avec mise en évidence d'une situation de Thalès.

– Une production correcte avec utilisation de Thalès en « papillon » :

Exercice n°8



Nous avons applati le plan.
Nous obtenons donc la figure ci-contre.
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles. Donc (MH) // (KD).
Soit B point d'intersection de (MD) et (HK).
Nous obtenons donc une situation de Thalès d'où :

$$\frac{MH}{KD} = \frac{HB}{BD} = \frac{HB}{BK} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

On en déduit que $HB = \frac{2}{3} BK$.

Or $BK = 5 - HB$.

Soit $HB = \frac{2}{3}(5 - HB)$

$HB = \frac{2 \times 5}{3} - \frac{2}{3} HB$

$1{,}5\ HB = 5 - HB$

$2{,}5\ HB = 5$

$HB = 2$ Km

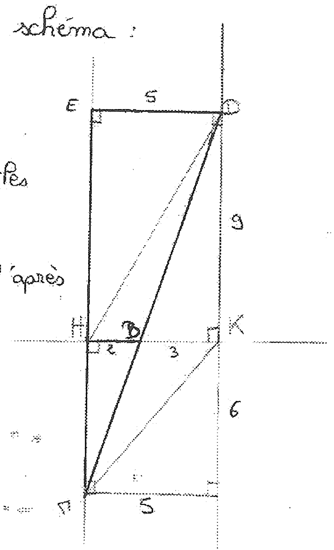
$HB + BK = HK$ d'où $BK = HK - HB$

$BK = 5 - 2 = 3$ Km

Donc on place la balise B à 3 Km de K sur la crête en direction de H.

– Une production correcte avec une autre configuration :

Représentation plane du schéma :
(0,5 cm pour 1 km)



Les droites (ED) et (HB) sont perpendiculaires à (EM) et parallèles entre elles.

Dans le triangle rectangle MED, d'après le théorème de Thalès :

$\frac{MH}{ME} = \frac{BH}{DE} \Rightarrow \frac{6}{15} = \frac{BH}{5}$

$\Rightarrow 6 \times 5 = 15 \times BH$

$\Rightarrow BH = \frac{30}{15}$

$\Rightarrow \boxed{BH = 2}$

Donc le parcours direct de Der à Montalenvers coupe la crête à 2 km du point H et donc à 3 km du point K.

Dans tous les cas où la réponse est exacte, le calcul de la longueur du chemin n'est pas réalisé.

– Deux réponses erronées avec calcul de la distance parcourue.

En passant par les bords :

• On veut calculer la distance DH grace à pytagore :

$DH^2 = DK^2 + KH^2$
$= 9^2 + 5^2$
$= 81 + 25$
$= 106$
$DH = \sqrt{106}$
$= 10,3$

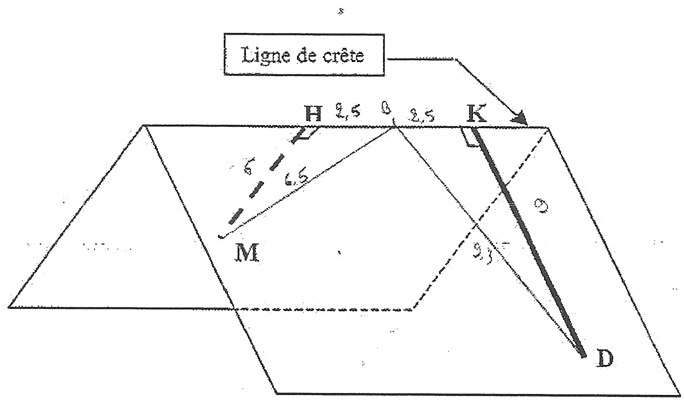
Ils doivent partir du village de Der (D) puis se rendre au point H où Damien et Sophie deposeront la balise ensuite ils se rendront au village de Montalenvers (M).

• On veut calculer la distance du trajet :

$DH + HM = 10,3 + 6$
$= 16,3$ km.

Damien et Sophie parcourt 16,3 km par le chemin le plus court.

En passant par le milieu :



$BD^2 = BK^2 + KD^2$
$= 9^2 + 2,5^2$
$= 87,25$
$\sqrt{BD} = \sqrt{87,25}$
$\approx 9,3$ km

$BM^2 = BH^2 + HM^2$
$= 2,5^2 + 6^2$
$= 42,25$
$\sqrt{BM} = \sqrt{42,25} = 6,5$ km

$9,3 + 6,5 = 15,8$ km.

En conclusion, les randonneurs feront 15,8 km afin d'arriver au village de Montalevers tout en suivant un parcours qui sera le plus court possible.

– Une production, unique, avec mise en évidence de la longueur du parcours en fonction de la position de la balise, mais comme prévu, l'expression algébrique n'est pas trop exploitée car compliquée.

Ils doivent placer la balise B à 3 km de K pour avoir la distance y la plus courte possible

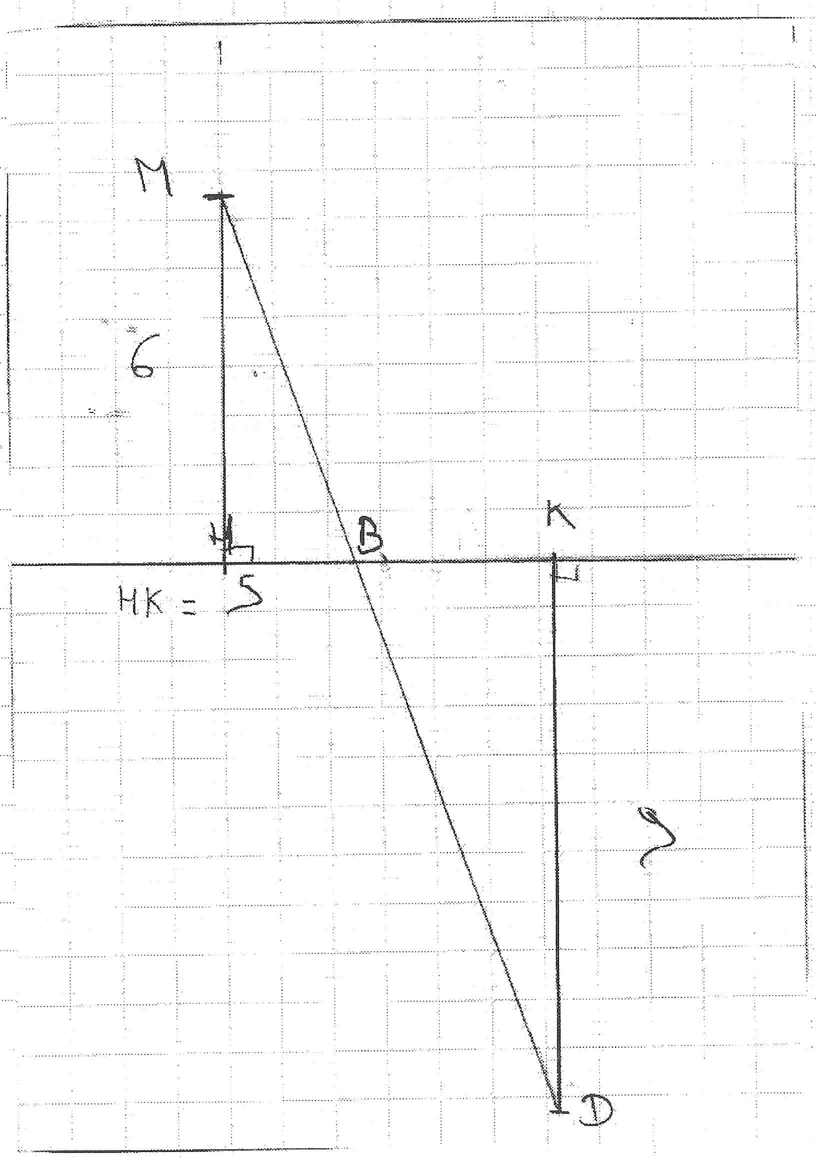
$y = \sqrt{9^2 + x^2} + \sqrt{6^2 + (5-x)^2}$

– Une réponse exacte, en observant un dessin à l'échelle :

le chemin le plus court entre deux points, est la ligne droite.

1cm -> 1 km

On a "applati" la colline

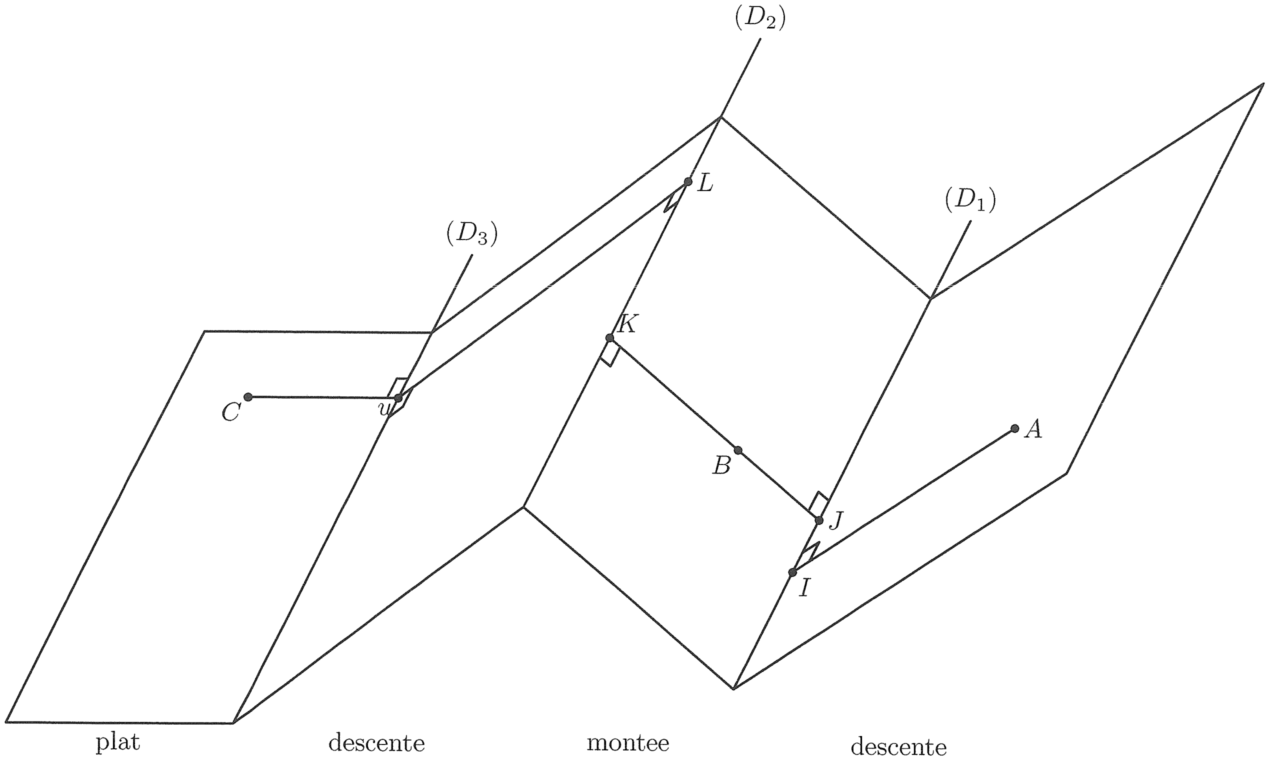


On constate après mesure que :
HB = 2
BK = 3

5. Prolongements

Énoncé

Damien et Sophie préparent une des étapes du rallye randonnée du plateau. Les randonneurs partiront du village repéré par A pour rejoindre le village repéré par C. (Voir croquis ci-dessous). Le trajet qu'ils emprunteront est composé d'une descente, d'une montée, d'une descente et pour finir d'une marche sur terrain plat.



Descriptif

Les droites (D_1), (D_2) et (D_3) sont parallèles, les distances repérées sont exprimées en kilomètres.

Distance de A à $(D_1) = 3{,}5$; distance de B à (D_1) : 2,5 ; distance de B à (D_2) : 4 ; distance de (D_2) à (D_3) : 6 ; distance de C à (D_3) : 2 ; $KL = 4{,}5$; $IJ = 1{,}5$.

Après de savants calculs, Sophie indique à Damien où planter les balises. Saurez-vous, comme Sophie déterminer l'emplacement des balises pour que le trajet pour aller de A à C soit le plus court ?

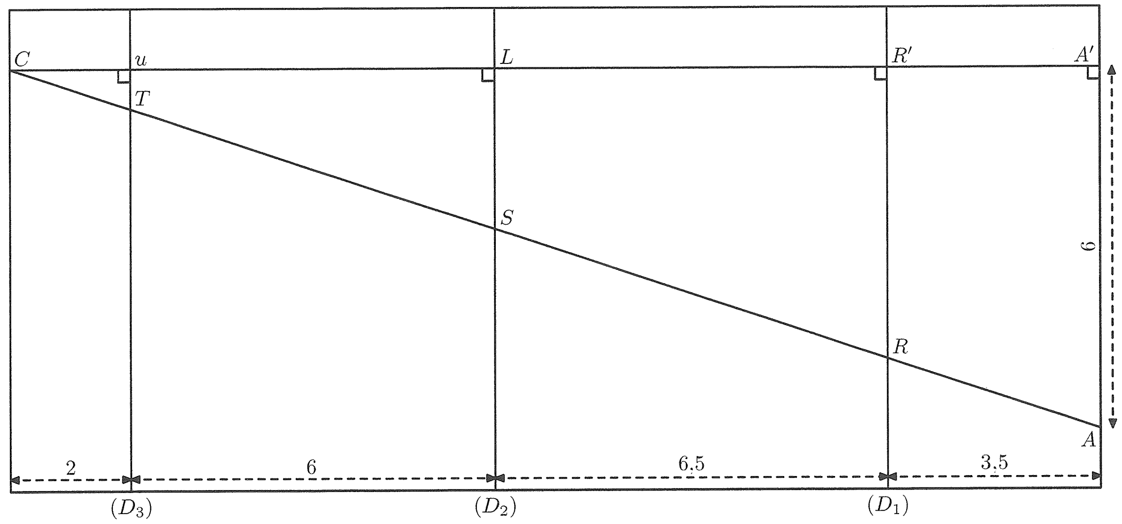
Calculer l'allongement du trajet s'ils doivent de plus passer par B.

Le contenu mathématique de cette situation étant assez riche, nous présentons ici une résolution.

Solution

La mise à plat des quatre « rectangles » permet de déterminer le plus court chemin entre A et C. En effet, les distances ne sont pas modifiées lors de cette mises à plat. Le segment d'extrémités A et C coupe (D_1) en R, (D_2) en S et (D_3) en T. La distance de A à C donne la distance du plus court chemin de A à C.

Schéma à l'échelle



En reconnaissant des situations permettant une application du théorème de Thalès, nous pouvons calculer les distances uT, LS, $R'R$.

$\dfrac{uT}{AA'} = \dfrac{Cu}{CA'}$, d'où $uT = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{LS}{AA'} = \dfrac{CL}{CA'}$, d'où $LS = \dfrac{8}{3}$; $\dfrac{R'R}{AA'} = \dfrac{CR'}{CA'}$, d'où $R'R = \dfrac{14{,}5}{3}$;

Conclusion :

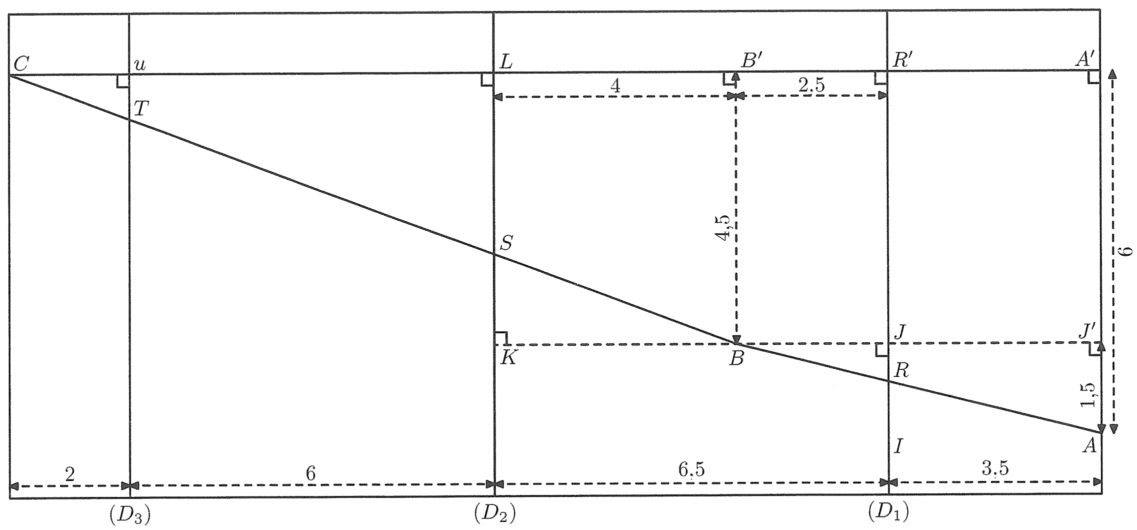
$uT = \dfrac{2}{3}$, $LS = \dfrac{8}{3}$, $R'R = \dfrac{14{,}5}{3}$.

La longueur du trajet le plus court est : $\sqrt{360}$ km, soit 18,974 km au mètre près.

Solution en passant par B

Même démarche, dans les triangles $(CB'B)$ et (BAJ').

L'énoncé nous permet de noter les distances utiles.



Le trajet le plus court est le trajet de A à B puis de B à C, sa longueur est $AB + BC$.

$\dfrac{JR}{J'A} = \dfrac{BJ}{BJ'}$, car $JR = 0{,}625$; $\dfrac{LS}{B'B} = \dfrac{CL}{CB'}$, d'où $LS = 3$; $\dfrac{ut}{B'B} = \dfrac{Cu}{CB'}$, d'où $uT = 0{,}75$.

En utilisant à nouveau le théorème de Pythagore, on obtient la longueur du trajet :

$AB = \sqrt{(1{,}5)^2 + 6^2}$; $BC = \sqrt{(4{,}5)^2 + 12^2}$.

Conclusion :

$AB + BC = \sqrt{38{,}25} + \sqrt{164{,}25}$, soit environ 19 km, au mètre près.

L'allongement du trajet est $\sqrt{360} - \sqrt{38{,}25} - \sqrt{164{,}25}$, soit environ 27 mètres.

Prolongements

Sachant que les randonneurs marchent à 6 km.h^{-1} sur le plat, à 7 km.h^{-1} en descente et 5 km.h^{-1} en montée.

1. Quelle est la durée des deux trajets ?
2. Quelle est l'augmentation de la durée du trajet en passant par B ?
3. Déterminer le trajet pour lequel la durée du parcours est minimum.

IX Repérage de trésor

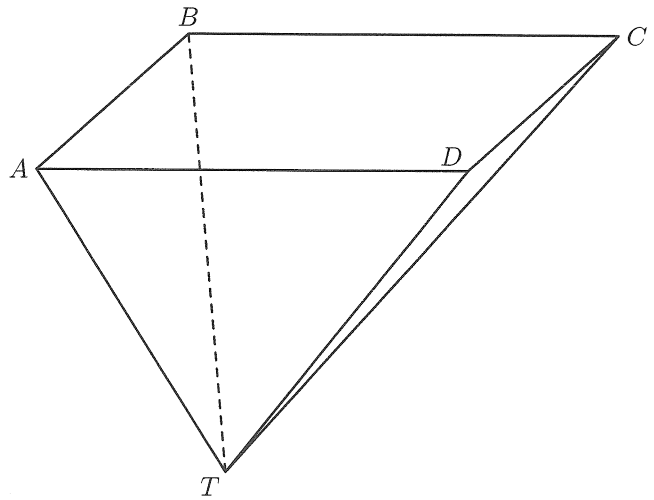
1. Énoncé

En mer Méditerranée, quatre barges d'exploration sont disposées en rectangle.

De la première barge A, on détecte l'épave du navire contenant le trésor à 1 160 mètres.

De la deuxième barge B, on détecte l'épave du navire contenant le trésor à 1 524 mètres.

De la troisième barge C, on détecte l'épave du navire contenant le trésor à 1 600 mètres.



À quelle distance de la quatrième barge D se trouve l'épave du navire contenant le trésor ?

Rappel : barge = bateau à fond plat.

On pourra utiliser la figure ci-dessus où T représente l'emplacement du trésor.

2. Analyse *a priori*

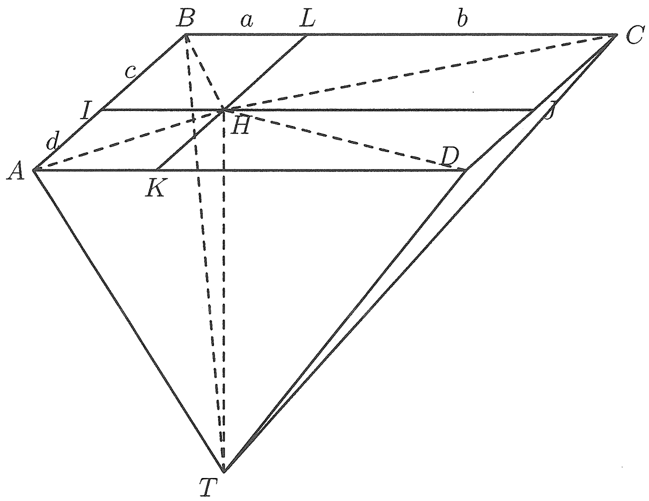
Il s'agit d'appréhender une situation de géométrie de l'espace, dont la représentation en perspective cavalière est volontairement donnée, afin de faciliter la compréhension de l'énoncé. L'expérimentation avec trois tiges dont les longueurs sont respectivement 11,6, 15,4 et 16 centimètres permet également de favoriser cette compréhension. La situation est modélisée par l'intersection de trois sphères.

Les élèves doivent ensuite prendre plusieurs initiatives.
- Utiliser le projeté orthogonal de T sur le plan (ABC). La figure proposée suggère que ce point est à l'intérieur de la base, mais la non connaissance des dimensions des côtés du rectangle $ABCD$ ne permet pas de l'affirmer.
- « Découper » la base $ABCD$ en rectangles et mettre en évidence des triangles rectangles dont l'un des sommets est T.
- Choisir d'inconnues auxiliaires pour certaines longueurs, et passer au cadre algébrique via le théorème de Pythagore.

Cet exercice demande à la fois technicité et prise d'initiatives, il permet d'observer les capacités de modélisation des élèves de seconde. C'est un exercice difficile qui peut trouver sa place dans une finale de rallye.

Sachant que le problème admet une solution, il suffit de procéder par simple implication.

3. Solution



Le croquis proposé incite Ĺ faire l'hypothèse que le trésor se situe en dessous du rectangle formé par les barges.

Soit H le projeté orthogonal de T sur le plan $(ABCD)$.

On partage le rectangle $ABCD$ en quatre rectangles comme l'indique le croquis.

On pose $BL = a$; $BI = c$; $L_A = AT$; $L_C = CT$; $LC = b$; $AI = d$; $L_B = BT$; $L_D = DT$;

On a : $AK = a$; $DK = b$; $CJ = c$; $DJ = d$.

L'utilisation du théorème de Pythagore dans différents triangles rectangles fournit quatre égalités :

$$(1) \qquad L_A^2 = HT^2 + a^2 + d^2$$

$$(2) \qquad L_B^2 = HT^2 + a^2 + c^2$$

$$(3) \qquad L_C^2 = HT^2 + b^2 + c^2$$

$$(4) \qquad L_D^2 = HT^2 + b^2 + d^2$$

On en déduit :

(1) + (3) : $$L_A^2 + L_C^2 = 2HT^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

(2) + (4) : $$L_B^2 + L_D^2 = 2HT^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

D'où : $L_A^2 + L_C^2 = L_B^2 + L_D^2$ et $L_D^2 = L_A^2 + L_C^2 - L_B^2$.

On effectue l'application numérique. Comme $L_A = 1\ 160$, $L_B = 1\ 524$ et $L_C = 1\ 600$, $L_D^2 = 1\ 160^2 + 1\ 600^2 - 1\ 524^2 = 1\ 583\ 024$. On en déduit que $L_D = \sqrt{1\ 583\ 024}$; ainsi $L_D \approx 1258$.

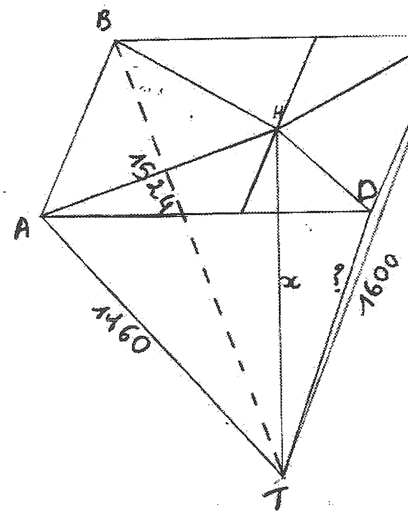
La barge D se trouve à environ 1258 mètres du trésor.

4. Analyse de productions

Le problème proposé apparaît, à la lecture des productions d'élèves, comme très difficile. Aucune réponse exacte n'est donnée parmi les quinze productions d'élèves de seconde.

Afin de mettre les élèves sur une piste, nous pourrions proposer dans l'énoncé d'utiliser le projeté orthogonal de T sur le plan (ABC). Seules deux productions ont fait apparaître ce point.

– Un début de démarche :



$x^2 + HA^2 = 1160^2$

$x^2 + HB^2 = 1524^2$

$x^2 + HC^2 = 1600^2$

$x^2 + HD^2 = ?^2$

$x^2 = 1160^2 - HA^2$

$x^2 = 1524^2 - HB^2$

$x^2 = 1600^2 - HC^2$

$x^2 = ?^2 - HD^2$

– Des triangles rectangles sont imaginés :

Dans le triangle Rectangle BTC, on utilise le theorème de Pythagore

$TC^2 = BT^2 + BC^2$

$1600^2 = 1524^2 + BC^2$

$BC^2 = 1600^2 - 1524^2$

$BC^2 = 237424$

$BC = \sqrt{237424}$

$BC \approx 487,26$ ~~BC est égale à~~

comme BCAD est un rectangle alors les droites (BC) et (AD) sont parallèles

donc $BC = AD$

$AD \approx 487,26$

Dans le triangle rectangle en ADT, on utilise le Theorème de Pythagore

$TD^2 = TA^2 + AD^2$

$TD^2 = 1160^2 + 487,26^2$

$TD^2 = 1583022$

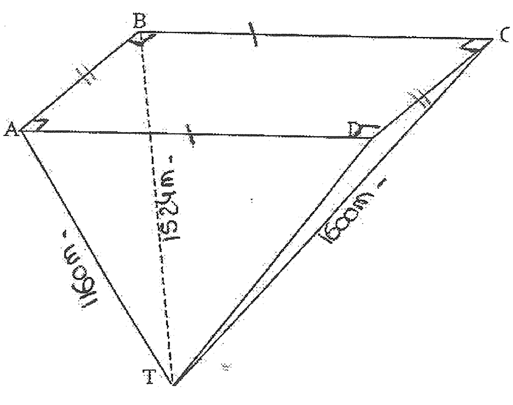
$TD = \sqrt{1583022}$

$TD \approx 1258$

Avec ces hypothèses supplémentaires, la droite (BT) est située dans le plan (P) perpendiculaire à (BC). De même, (AT) est située dans le plan (Q) perpendiculaire à (AD). Comme les droites (AD) et (BC) sont parallèles, c'est le même plan, $(P) = (Q)$.
T appartiendrait donc à ce plan ?
Les élèves utilisent effectivement les trois longueurs données et obtiennent le résultat attendu.

– Existence d'un rapport de proportionnalité ?

Comme ABCD est un Rectangle, on sait que tous ces angles sont droits et que AB = DC et BC = AD. On peut penser qu'il y a un rapport de proportionnalité entre les côtés de la pyramide de base ABCD et de sommet T. On peut écrire : $\frac{1160 \times 1600}{1524} = 1217,8$



On suppose que les triangles BCT et ADT sont proportionnels.

Donc $\frac{CT}{BT} = \frac{DT}{AT}$

$\Longrightarrow \frac{1600}{1524} = \frac{DT}{1160}$

$DT = \frac{1600 \times 1160}{1524} = 1217,8$

Donc le trésor se trouve à environ 1217,8 mètres de la barge D.

– Un nouveau théorème de Thalès dans l'espace ?

On est en présence d'une pyramide, dont la base est un rectangle.

Si on fait le patron de la pyramide, on remarque que les points B,T,D d'une part et A,T,C d'autre part sont alignés dans cet ordre.

De plus (BC) et (AD) sont parallèles, car ABCD est un rectangle.

On utilise donc le théorème de Thalès :

$\frac{TB}{TD} = \frac{TC}{AT}$

$TD = \frac{TB \times AT}{TC}$

$TD = \frac{1524 \times 1160}{1600}$

$TD = 1104,9$ m

La quatrième barge D se trouve à 1104,9 m de l'épave du navire contenant le trésor.

Comme dans beaucoup de problèmes difficiles, nous pouvons constater que les élèves utilisent des outils ou des règles en imaginant des hypothèses erronées mais il s'agit peut-être du début d'une démarche de modélisation.

Bibliographie

Arsac G., Germain G., Mante M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème.* IREM université de Lyon.

Betton S., Coppé S. (2005). Favoriser l'activité mathématique dans la classe : ouvrir les problèmes. *Bulletin de l'APMEP.* Vol. 461 pp. 733-748.

Bettinelli, B. (2003). *Le raisonnement géométrique avec la moisson des formes.* Ed. La moisson des formes, 1 rue de la Perrouse, 25115 Pouilley-Les-Vignes.

Bichara J. (2004). Rallye Mathématique de l'IREM des Antilles et de la Guyane, présentation, observations, réflexions. *Revue Repère IREM.* Vol. 56 pp. 59-76.

Charnay R. (1992). Problème ouvert, problèmes pour chercher. *Grand N.* Vol. 51, pp. 77-83.

Comité International des Jeux Mathématiques (2006). *Panoramath 4, Panorama 2006 des compétitions mathématiques.* Ed. Pôle CIJM avec ADIREM, APMEP. Paris.

Deloustal-Jorraud V. (2006). Travailler le raisonnement, l'argumentation et la preuve en plaçant les élèves en situation de recherche. *Actes du XXXII^e^ colloque COPIRELEM.* IREM de Strasbourg.

Deledicq A., Deledicq J.-C., Casiro F. (1991). *Jeux et mathématiques pour tous.* ACL les Éditions du Kangourou. Paris.

Ferachoglou R., Lafond M. (2002). 100 *Friandises pour la classe*, organisé par l'IREM de Dijon. Ellipse.

Groupe jeux de l'APMEP (1995). *De l'intérêt des problèmes de rallyes. Brochure jeux 4.* Publication de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris.

Groupe jeux de l'APMEP (2005). *Des activités pour la classe, Jeux 7.* Publication de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris.

Groupe Rallye (2006). Tracés de figures géométriques à l'aide d'un seul triangle gabarit. *Mathématiques vivantes.* Vol 71. IREM de Franche-Comté.

Grugnetti L., Jaquet F. (2006). D'un concours de mathématiques par classe à la formation des maîtres. *Actes du XXXII^{e} colloque COPIRELEM.* IREM de Strasbourg.

Legrand M. (1996). La problématique des situations fondamentales. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16.2, pp. 221-229.

Plane H., (2003). D'un vieil ouvrage d'enseignement de la géométrie. *APMEP-PLOT nouvelle série*, n° 108 p. 14-15.

Sauter Mireille (Coord.) et IREM de Montpellier (1998). *L'écrit en mathématiques - Analyses de narrations de recherche d'élèves.* IREM de Montpellier.

Rallye Mathématique de Franche-Comté (2004). Épreuves du concours 2004. Récupéré le 10 novembre 2006 sur le site de l'IREM de Franche-Comté. http://www-irem.univ-fcomte.fr (rubrique « rallye »)

Revue *Hypercube* (2004), n° 59-60 « spécial rallye ».

Richeton J.P. (2000). Une option « science » en seconde... Pourquoi ? *Bulletin APMEP.* Vol. 429 pp. 432-446.

Trouillot E., Richard J., Faradji D., Le Borgne P., (2005). *Mathématiques et jeux au collège.* Ed SCEREN. Coll. Enjeux du système éducatif. Hachette Éducation.

Presses universitaires de Franche-Comté
Université de Franche-Comté
Place Saint-Jacques - 25030 Besançon Cedex

Mise en pages LaTeX
François Pétiard et Julie Gillet

Imprimé par **Dicolor**
21121 Ahuy

Dépôt légal 4e trimestre 2006 - 06 12 812

Auteurs Groupe Rallye
Susana Barata, Françoise de Labachelerie, Philippe Le Borgne, Michel Magnenet, Jean-François Monnin, Alain Parmentelat, Maguy Piranda, Sandrine Rivière

Titre Rallye mathématique de Franche-Comté 2005

Langage Français

Caractéristiques de l'édition

Édition	Première édition
Éditeur	Presses universitaires de Franche-Comté
Diffuseur	IREM de Franche-Comté
Année	2006
Format	21 x 29,7 cm (A4) 128 pages recto verso support papier
Dépôt légal	4e trimestre 2006
ISBN	2-84867-154-8

Public Professeurs des collèges et lycées, formateurs IUFM en mathématiques

Résumé Cette brochure, écrite par des enseignants ou enseignants-chercheurs de mathématiques animateurs à l'IREM de l'Université de Franche-Comté, contient un chapitre présentant les objectifs des rallyes mathématiques. Deux autres chapitres décrivent les sujets des épreuves de qualification et de finale du rallye mathématique de 2005 en Franche-Comté. Outre les énoncés des exercices avec leurs corrigés, les enseignants trouveront des exemples de procédures d'élève analysées ainsi que des propositions d'insertion des exercices dans une progression pédagogique en classe de troisième ou de seconde conforme aux programmes. Cette brochure intéressera particulièrement les professeurs de mathématiques de collège et de lycée, les formateurs des IUFM ainsi que toute personne motivée par une approche ludique des mathématiques.

Mots clés IREM, rallye mathématique, mathématiques, jeux mathématiques, problème ouvert, aire, proportionnalité, périmètre, théorème de Thalès, théorème de Pythagore, tâtonnement, essai-erreur, travail autonome, travail en groupe, narration de recherche, Franche-Comté, université, presses universitaires.

Presses universitaires de Franche-Comté
http://presses-ufc.univ-fcomte.fr

Prix public : 9 eur

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Université de Franche-Comté

Département de Mathématiques - UFR Sciences et Techniques
16 route de Gray - 25030 BESANÇON Cedex - France

Tél. : 03 81 66 62 25 - Fax : 03 81 66 62 34
Courriel : iremfc@math.univ-fcomte.fr – http : //www-irem.univ-fcomte.fr/

Presses universitaires de Franche-Comté

UFC Université de Franche-Comté