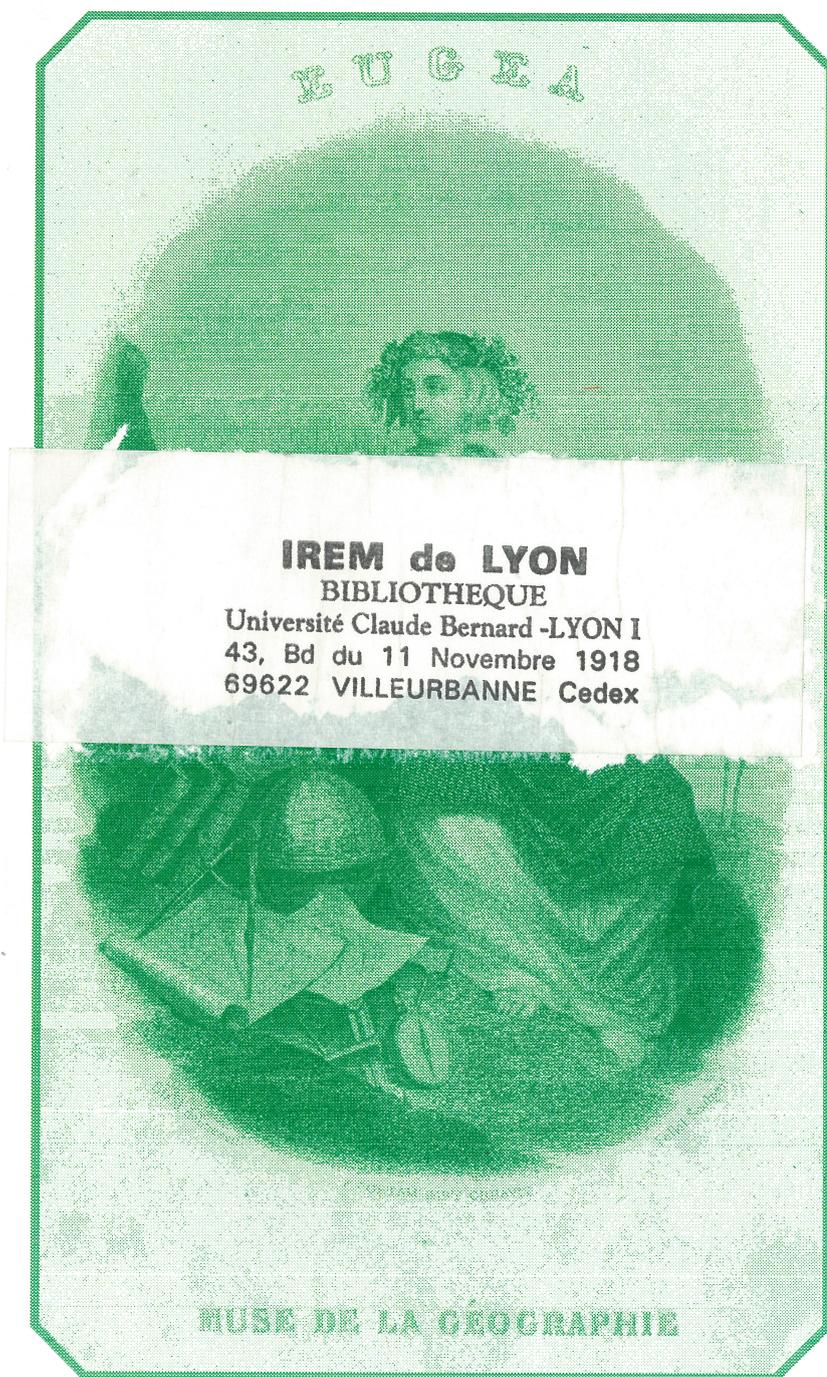


10829

Les Publications de l'IREM de BESANÇON

IBC09002.PDF :

De la sphère au plan





De la



au

?



IREM de LYON

BIBLIOTHEQUE

Université Claude Bernard -LYON I

43, Bd du 11 Novembre 1918

69622 VILLEURBANNE Cedex

Les Publications de l'IREM de BESANÇON

Directrice de collection **HOMBELINE LANGUEREAU**

Déjà publié par le groupe LYCÉE

La notion de fonction en classe de seconde, ISBN 2-913322-58-1, 1999

Quelques éléments de logique en classe de première, ISBN 2-913322-61-1, 1999

Savoirs et savoir-faire en mathématiques dans le domaine des fonctions, des vecteurs, ISBN 2-84627-055-4, 2002

Des activités mathématiques-physique en classe de seconde des lycées d'enseignement général et technologique,
ISBN 2-84627-054-6, 2002

Triangles isométriques. Triangles semblables, ISBN 2-84627-071-6, 2002

Paru en 2004 dans la même collection

Le mémoire de Gauss sur les surfaces courbes et la naissance de la géométrie différentielle intrinsèque,
Hombeline Languereau et Claude Merker, ISBN 2-84867-060-6

Illustration de couverture

Publiée par Dufour, Mulat et Boulanger, Imprimerie Gilquin et Dupain, ig. rue de la Calandre, Paris.
Tous droits réservés.

*Les Presses universitaires de Franche-Comté bénéficient du soutien financier du Conseil régional de Franche-Comté
du Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche dans le cadre
du contrat quadriennal.*

© Presses universitaires de Franche-Comté, Université de Franche-Comté, 2005

ISBN 2-84867-098-3

IREM de Franche-Comté

De la sphère au plan

IREM de LYON
BIBLIOTHEQUE
Université Claude Bernard -LYON I
43, Bd du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE Cedex

Groupe LYCÉE et Groupe CARTOGRAPHIE

Les auteurs

Groupe LYCÉE de l'IREM de Franche-Comté

Françoise De Labachellerie, professeure agrégée, Lycée Duhamel, Dole

Chantal Geoffroy, professeure agrégée, Lycée Ledoux, Besançon

Michel Magnenet, professeur agrégé honoraire

Alain Parmentelat, professeur agrégé, Lycée H. Friand, Poligny

Arnaud Simard, maître de conférence, IUFM, Besançon

Groupe CARTOGRAPHIE de l'IREM de Franche-Comté

Anne-Marie Aebischer, professeure agrégée, UFR Sciences et Techniques, Université de Franche-Comté

Sylvie Brunner, professeure de Lycée professionnel, LP Tristan Bernard, Besançon

Stéphane Chrétien, maître de conférence, UFR Sciences et Techniques, Université de Franche-Comté

Hombeline Languereau, professeure agrégée, UFR Droit et Sciences économiques, Université de Franche-Comté

Claude Merker, professeure agrégée, UFR Sciences et Techniques, Université de Franche-Comté

Remerciements

*à François Pétiard, professeur agrégé, CTU Université de Franche-Comté
pour la transcription des documents en L^AT_EX.*

Action de l'IREM de Franche-Comté

avec le soutien financier

*de l'Université de Franche-Comté,
dans le cadre du plan quadriennal 2004-2007*

avec les moyens horaires

*du Rectorat de l'académie de Besançon,
du Ministère de l'Education Nationale et de la Recherche
(DESCO)*

de l'Université de Franche-Comté

Présentation

L'étude conjointe des objets sphère et plan est abordée dès la classe de troisième de collège.

Elle peut se poursuivre de manière qualitative au lycée professionnel par des activités d'observation et de manipulation ; les élèves peuvent ensuite être dirigés vers des travaux de mesures et de repérage. Ces expérimentations permettent de les familiariser avec une géométrie non euclidienne, et de les sensibiliser au problème posé par une représentation plane de la sphère.

En classe de Seconde des lycées d'enseignement général et technologique, le programme de mathématiques en vigueur depuis septembre 2000 propose une liste, non exhaustive, de **thèmes d'études**, et stipule que chaque enseignant doit traiter au moins un thème dans chacun des trois grands chapitres *Statistiques, Calcul et fonctions, Géométrie*.

Dans cette liste, le thème ***Repérage sur la sphère ; application à la géographie, à l'astronomie*** a motivé pour nous ce travail sur la **cartographie**. En effet, ce sujet nous a paru intéressant pour plusieurs raisons.

D'abord, il permet de mener avec des élèves de Seconde, des activités mathématiques moins habituelles, et, par là peut-être, d'éveiller leur curiosité mathématique et d'enrichir leur culture scientifique.

Ensuite, il représente une réelle mise en œuvre d'interdisciplinarité et de transversalité (mathématiques – géographie – histoire).

Il peut constituer d'autre part, pour le professeur de Première, un outil intéressant pour accompagner, voire susciter, des sujets possibles de TPE (Travaux Personnels Encadrés) dans lesquels les mathématiques pourraient trouver une place de choix.

Les activités que nous proposons peuvent intéresser un public non scolaire dans le cadre de manifestations scientifiques, comme par exemple ce fut le cas lors de la Fête de la Science 2004 à Besançon.

Avec le développement du calcul différentiel, la cartographie est devenue une branche des mathématiques. L'unité de calcul différentiel en troisième année de licence de mathématiques offre l'occasion de présenter une étude formalisée des projections utilisées en cartographie.

Le tracé de cartes dans différentes projections peut être automatisé par l'utilisation de ressources informatiques ; nous présentons à cet effet le logiciel **Versamap**.

Table des matières

Présentation	i
Théorie	1
Introduction	5
I Quelques généralités	7
II Projection stéréographique	10
III Projection gnomonique	22
IV Projection isocylindrique	30
V Projection cylindrique centrale	38
VI Projection conique simple	48
VII Tableau synoptique	57
VIII Quelques autres pistes à explorer	58
Expérimentations	59
Une expérience à la Fête de la Science : triangles de la sphère	63
I Expérimentation matérielle	63
II Transposer les notions planes à la sphère	63
Une expérience en lycée professionnel	69
I Préparation de la séance en classe	69
II Expérimentation en classe	71
III Réactions des élèves au cours suivant	74
Une expérience en classe de seconde	75
Présentation	75
I Le plus court chemin sur un cube	76
II Le plus court chemin sur un cylindre	92
III Le plus court chemin sur un cône	99
IV Le plus court chemin sur une sphère	101
V Étude d'une projection	102
VI Projection gnomonique (variante 1)	110
VII Projection gnomonique (variante 2)	115

Une activité en licence	121
I Quelques définitions	121
II Recherche d'une carte conforme de la sphère	121
Compléments	125
Utilisation du logiciel Versamap	129
I Télécharger le logiciel	129
II Description du logiciel	129
III Exemples	135
Quelques repères historiques	139
I Cartographie ancienne	139
II Moyen Âge et Renaissance	139
III Cartographie moderne	140
Lexique	143
Bibliographie	145

Première partie
Théorie

Sommaire

	Introduction	5
I	Quelques généralités	7
	1. Repérage d'un point sur le globe terrestre	7
	2. Différents types de projections	8
II	Projection stéréographique	10
	1. Définition et propriétés	10
	2. Trame de la carte de l'hémisphère Nord obtenue par projection stéréo- graphique	12
	3. Démonstrations	14
	4. Orthodromie : « Le Caire – Shanghai »	20
III	Projection gnomonique	22
	1. Définition et propriétés	22
	2. Trame de la carte de l'hémisphère Nord obtenue par projection gnomonique	24
	3. Démonstrations	28
IV	Projection isocylindrique	30
	1. Définition et propriétés	30
	2. Trame de la carte obtenue par projection isocylindrique	31
	3. Démonstrations	34
V	Projection cylindrique centrale	38
	1. Définition et propriétés	38
	2. Trame de la carte obtenue par projection cylindrique centrale	41
	3. Démonstrations	44
	4. Projection de Mercator	45
VI	Projection conique simple	48
	1. Définition et propriétés	48
	2. Trame obtenue par projection conique simple	51
	3. Démonstrations	53
	4. Réalisation d'une carte	55
	5. La projection conique de Lambert	56
VII	Tableau synoptique	57
VIII	Quelques autres pistes à explorer	58

Introduction

Depuis l'Antiquité, nombreux sont ceux qui ont cherché à donner une représentation plane de la terre. Pour cela, il est possible d'assimiler la surface terrestre à une sphère, puis essayer d'aplatir celle-ci. Mais on ne peut dérouler ou déplier une sphère pour l'aplatir sans la déchirer ou la froisser : autrement dit, toute représentation plane d'une sphère entraîne nécessairement des déformations. En particulier, aucune représentation plane de la terre ne peut conserver les rapports de distances.

Les observations de plusieurs cartes permettent de constater qu'elles ne donnent pas toutes la même représentation du monde : la forme et la surface des continents varient de l'une à l'autre. En effet, les déformations obtenues dépendent du type de projection choisie, c'est-à-dire de la façon dont à chaque point de la sphère on a associé un point d'un plan.

Les projections peuvent être classées selon les déformations qu'elles produisent, ou plutôt en fonction des propriétés qu'elles conservent. Nous avons déjà cité qu'aucune projection plane d'une sphère ne peut conserver les rapports de distances. En revanche, certaines projections cartographiques conservent les angles (elles sont dites *conformes*) : les cartes ainsi obtenues sont particulièrement utiles aux marins qui peuvent alors naviguer à cap constant. C'est le cas par exemple de la projection de Mercator. D'autres projections conservent les rapports d'aires (elles sont dites *équivalentes*) : la projection de Peeters, souvent utilisée dans les manuels de géographie en est un exemple. Il existe également des projections qui conservent les plus courts chemins : le plus court chemin entre deux points de la surface de la terre, appelé *orthodromie*, sera alors représenté par un segment de droite. Enfin certaines projections ne possèdent aucune des propriétés de conservation précédentes, mais leur intérêt réside dans le peu de déformation qu'elles produisent.

Par ailleurs, une projection cartographique peut être définie de différentes manières : soit analytiquement en donnant une formule permettant de passer des coordonnées d'un point de la sphère aux coordonnées de son image sur la carte ; soit géométriquement en explicitant la transformation géométrique qui permet de construire l'image sur la carte d'un point de la sphère. Cette transformation peut être, soit une projection sur un plan (la carte), soit une projection sur un cylindre, ou encore sur un cône, suivie du développement du cylindre ou du cône pour obtenir la carte. Le classement de certaines projections peut alors se faire selon la surface sur laquelle on projette : projection sur un plan (la projection est alors dite *azimutale*), sur un cylindre (projection *cylindrique*) ou sur un cône (projection *conique*).

Ces deux classifications (selon les propriétés de conservation, ou selon la surface de projection) sont indépendantes : il existe des projections azimutales conformes, des projections azimutales non conformes, des projections cylindriques conformes, etc... Un tableau synoptique de ces classifications est présenté p. 57 avec quelques exemples.

Il existe actuellement plus de deux cents projections cartographiques (la plupart définies analytiquement seulement) dont une trentaine sont couramment utilisées. Nous en avons choisi quelques-unes susceptibles d'intéresser l'enseignement secondaire :

- deux projections azimutales (ou projections sur un plan à partir d'un point) : la projection gnomonique et la projection stéréographique.

- deux projections cylindriques (ou projections sur un cylindre, que l'on déroule ensuite pour obtenir une surface plane) : la projection isocylindrique (dite aussi cylindrique de Lambert) et la projection cylindrique centrale.
- une projection conique (ou projection sur un cône, que l'on déroule ensuite pour obtenir une surface plane).

Toutes ces projections sont définies géométriquement et leur étude peut s'insérer dans un thème concernant la géométrie dans l'espace en classe de seconde. Le passage à une définition analytique est également envisageable, mais plutôt en classe de première ou de terminale.

Notre étude est loin d'être exhaustive, notre objectif est de présenter quelques connaissances de base pour une première approche de la cartographie. Les professeurs désireux de proposer des activités sur ce thème à leurs élèves pourront trouver dans cette partie "théorie" des points de repère et quelques pistes de recherche à proposer. De même des élèves ayant choisi un sujet de TPE s'inscrivant dans ce thème pourront trouver des renseignements à leur portée. Dans ce but, les démonstrations proposées ont été écrites avec le souci d'utiliser au maximum les outils mathématiques dont dispose un lycéen.

Quand on aborde pour la première fois le thème de la cartographie, une des difficultés rencontrées est l'utilisation d'un vocabulaire spécifique à cette notion. Pour faciliter la lecture, nous avons regroupé ce vocabulaire dans un lexique à la fin de la brochure.

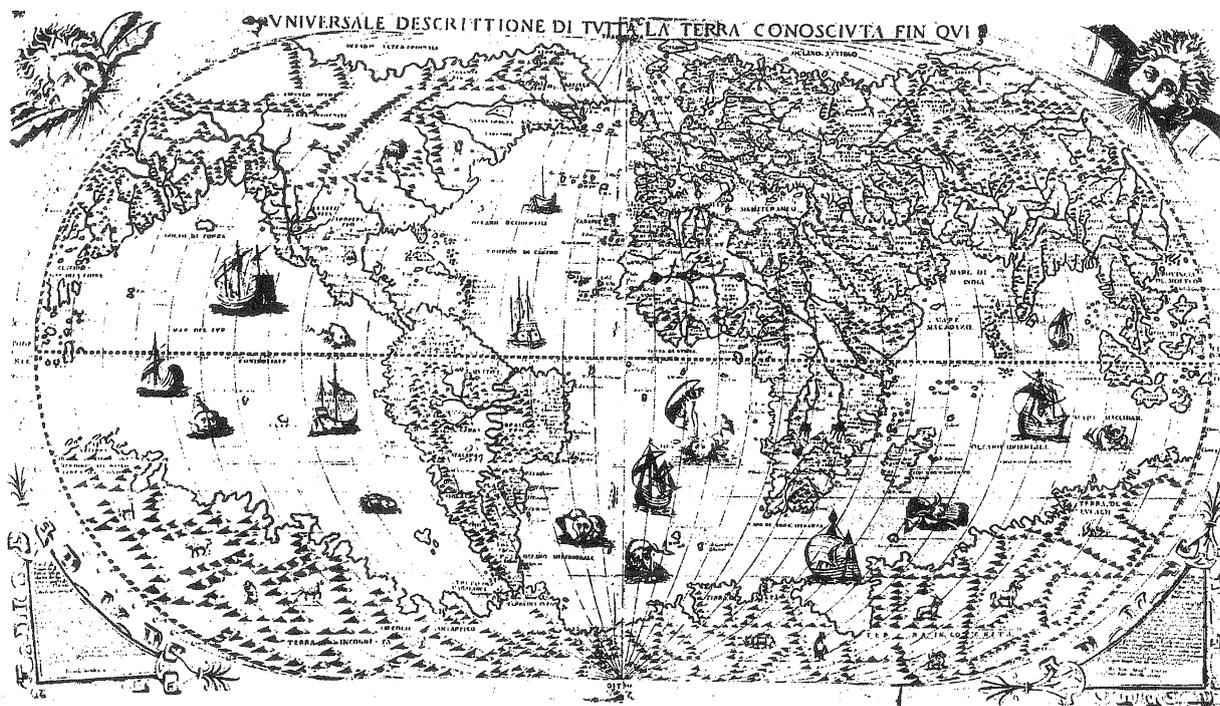


Figure 1. Référence : catalogue de la vente Sotheby's du 15 avril 1980

I Quelques généralités

1. Repérage d'un point sur le globe terrestre

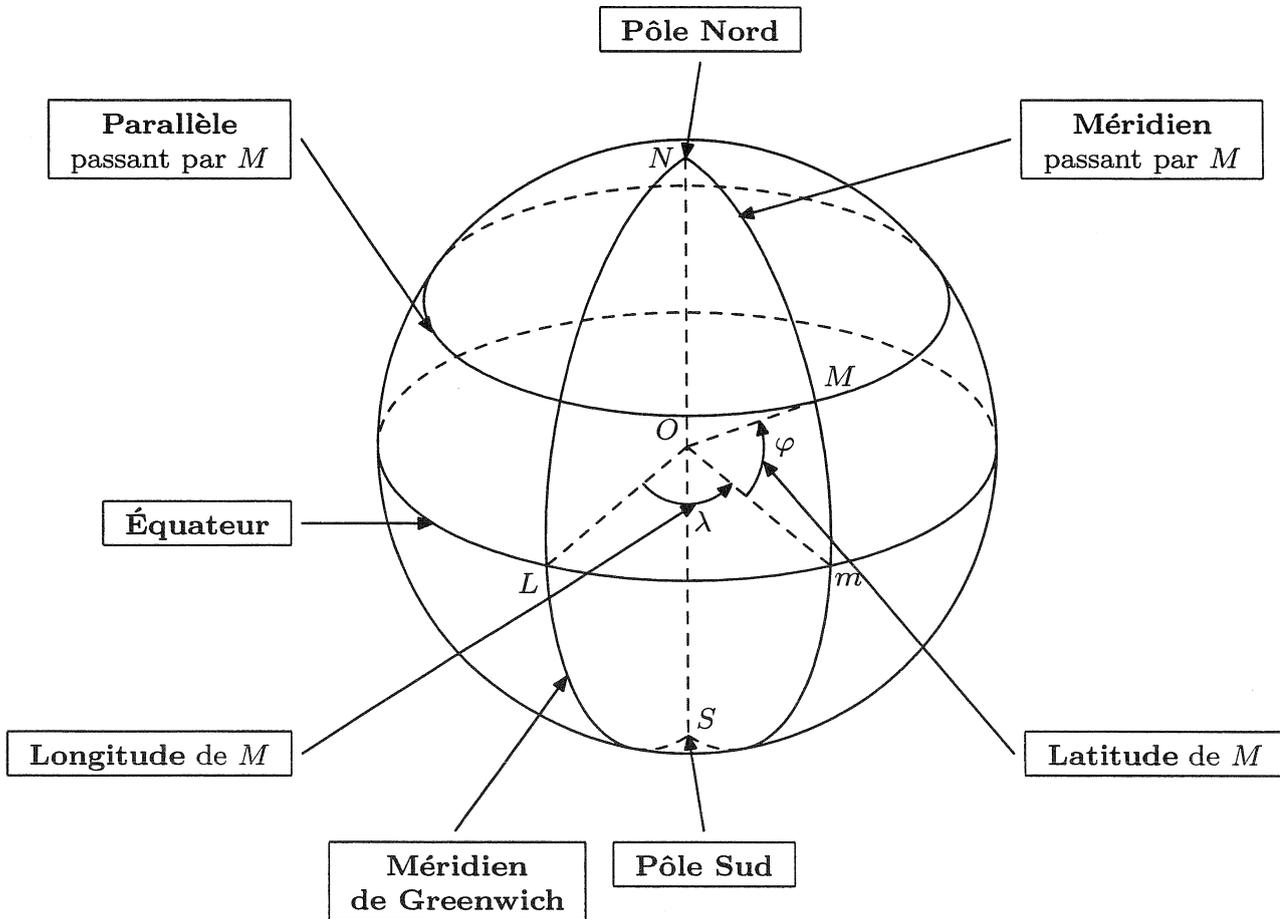


Figure I.1.

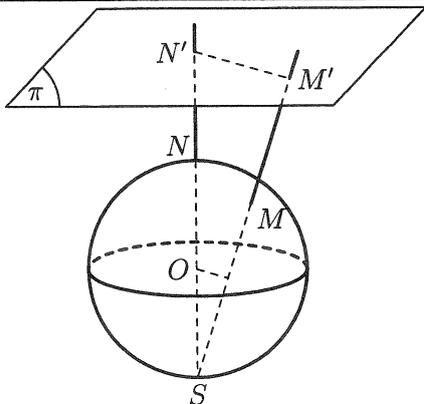
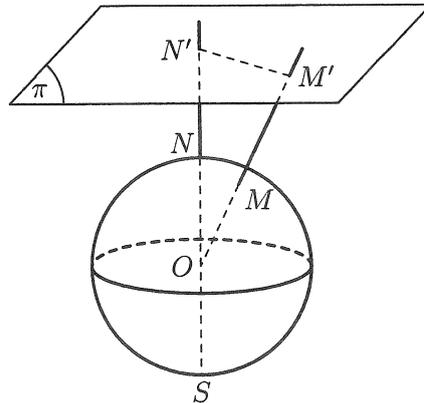
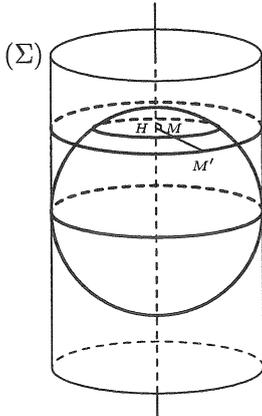
Par convention, φ est positif dans l'hémisphère Nord, négatif dans l'hémisphère Sud, λ est positif pour une longitude Est, négatif pour une longitude Ouest.

Sauf précision contraire, λ et φ seront exprimés en degrés.

On a donc $-90 \leq \varphi \leq 90$ et $-180 < \lambda \leq 180$.

La Terre est assimilée à une sphère de rayon R .

2. Différents types de projections

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE	
<p>Soit S le pôle Sud, (π) un plan parallèle au plan équatorial, et soit M un point de la sphère distinct du point S.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>On appelle image de M par la projection stéréographique sur (π) à partir du pôle Sud, le point M', intersection de la droite (SM) et du plan (π).</p> </div> <p>Remarque : le point S n'a pas d'image par cette projection.</p>	 <p>Figure I.2.</p>
PROJECTION GNOMONIQUE	
<p>Soit (π) un plan strictement parallèle au plan équatorial, et soit M un point de la sphère (équateur exclu).</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>On appelle image de M par la projection gnomonique sur (π), le point M', intersection de la droite (OM) et du plan (π).</p> </div> <p>Remarque : deux points antipodiques ont la même image par cette projection.</p>	 <p>Figure I.3.</p>
PROJECTION ISOCYLINDRIQUE	
<p>Soit (Σ) le cylindre d'axe, l'axe des pôles, tangent à la sphère à l'équateur, et soit M un point de la sphère autre qu'un pôle.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>On appelle image de M par la projection isocylindrique sur le cylindre (Σ), le point M', intersection du cylindre (Σ) et de la demi-droite $[HM)$, H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles.</p> </div>	 <p>Figure I.4.</p>

PROJECTION CYLINDRIQUE CENTRALE

Soit (Σ) le cylindre d'axe, l'axe des pôles, tangent à la sphère à l'équateur, et soit M un point de la sphère autre qu'un pôle.

On appelle **image de M par la projection cylindrique centrale sur le cylindre (Σ)** , le point M' , intersection du cylindre (Σ) et de la demi-droite $[OM)$.

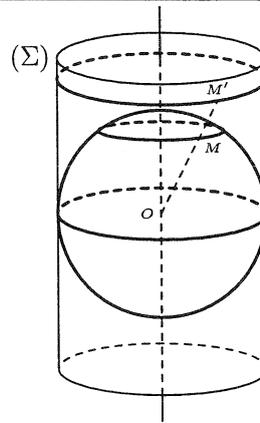


Figure I.5.

PROJECTION CONIQUE

Soit (Σ) un cône d'axe, l'axe des pôles, tangent à la sphère selon un parallèle, et soit M un point de la sphère autre qu'un pôle.

On appelle **image de M par la projection conique sur le cône (Σ)** , le point M' , intersection du cône (Σ) et de la demi-droite $[HM)$, H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles.

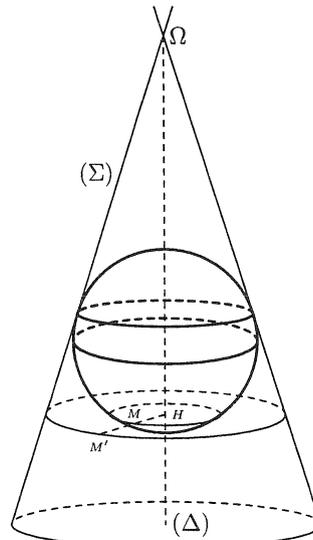


Figure I.6.

Nous présentons dans les pages suivantes ces différentes projections et quelques-unes de leurs propriétés; les études sont plus ou moins approfondies selon les projections : nous avons privilégié celles qui nous semblent les plus exploitables avec des élèves. Pour chaque projection, nous rappelons la définition, énonçons des propriétés (les démonstrations sont données en fin de section pour faciliter la lecture), et donnons une trame de la carte associée.

II Projection stéréographique

1. Définition et propriétés

1) Définition

Soit S le pôle Sud, (π) un plan parallèle au plan équatorial, et soit M un point de la sphère distinct du point S ,

On appelle image de M par la projection stéréographique sur (π) à partir du pôle Sud, le point M' , intersection de la droite (SM) et du plan (π) .

Remarque : le point S n'a pas d'image par cette projection.

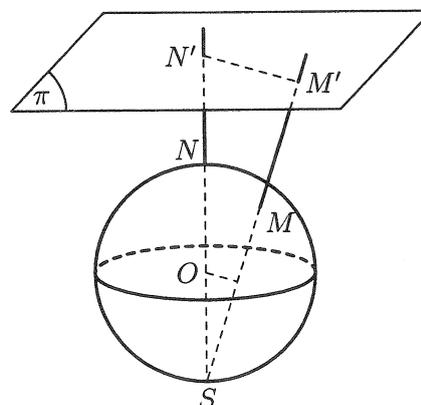


Figure II.1.

2) Parallèles et méridiens

On a représenté ci-contre le parallèle passant par M (cercle de centre H), et son image par la projection stéréographique (cercle de centre N' passant par M').

Les parallèles se projettent en des cercles concentriques qui ont pour centre le point N' (projeté du pôle Nord N), et un rayon proportionnel à $\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$.

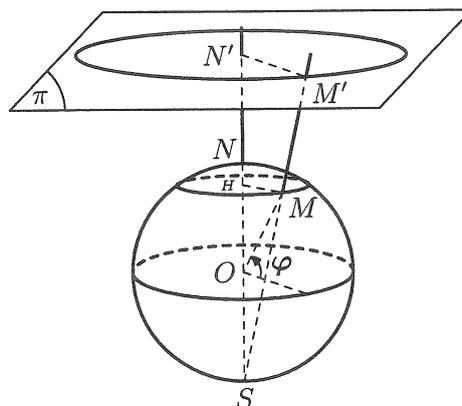


Figure II.2.

On a représenté ci-contre le méridien passant par M (demi-cercle de diamètre $[NS]$), et son image par la projection stéréographique (demi-droite d'origine N' passant par M').

Un méridien (S exclu) se projette en une demi-droite d'origine N' .

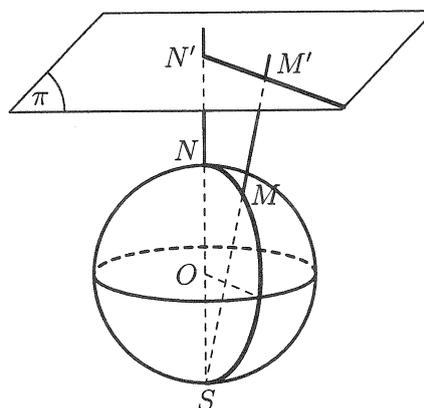


Figure II.3.

Des démonstrations sont proposées pages 14 à 18.

3) Image d'un grand cercle

Un grand cercle¹ (ne passant pas par le pôle Sud) se projette en un cercle.

Conséquence : la projection stéréographique ne conserve pas les orthodromies

Rappel :

On appelle orthodromie une ligne de plus courte distance joignant deux points de la surface terrestre. Sur une sphère, les orthodromies sont des arcs de grands cercles, tandis que dans un plan, les plus courts chemins sont des segments.

On peut néanmoins utiliser la propriété concernant l'image d'un grand cercle pour retrouver l'orthodromie entre deux points à partir d'une représentation en projection stéréographique (voir l'exemple page 20).

Remarque : tout cercle ne passant pas par le pôle Sud se projette également en un cercle.

4) Conservation de certaines propriétés

Une projection stéréographique conserve les angles

Cela signifie que si deux demi-droites sont tangentes à la sphère en un même point, alors leurs images par la projection stéréographique sont deux demi-droites qui déterminent un angle de même mesure.

En revanche, une projection stéréographique ne conserve $\left\{ \begin{array}{l} \text{ni les rapports d'aires,} \\ \text{ni les rapports de distances.} \end{array} \right.$

Exemple : sur le globe terrestre, le triangle reliant les villes de Dakar, Le Caire et Reykjavik est « presque » équilatéral; en effet, en calculant les distances sur le globe terrestre avec un rayon de 6 366 km, on obtient :

Dakar – Le Caire : 5 217 km,

Le Caire – Reykjavik : 5 280 km,

Reykjavik – Dakar : 5 480 km.

Voir page 13 la représentation en projection stéréographique de ce triangle (elle est notée RDC) : on n'obtient pas un triangle équilatéral, ce qui permet de constater que les rapports de distances ne sont pas conservés.

Villes	Latitude φ	Longitude λ
Dakar	14,8	-17
Le Caire	30	31,5
Reykjavik	64	-22

¹Un grand cercle est l'intersection d'une sphère et d'un plan contenant le centre de celle-ci.

2. Trame² de la carte de l'hémisphère Nord obtenue par projection stéréographique

Latitude (φ en degrés)	0	5	10	15	20	30	35	45	50	60	68	75	80	85
$\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$	1	0,916	0,839	0,767	0,700	0,577	0,521	0,414	0,364	0,268	0,194	0,132	0,087	0,044

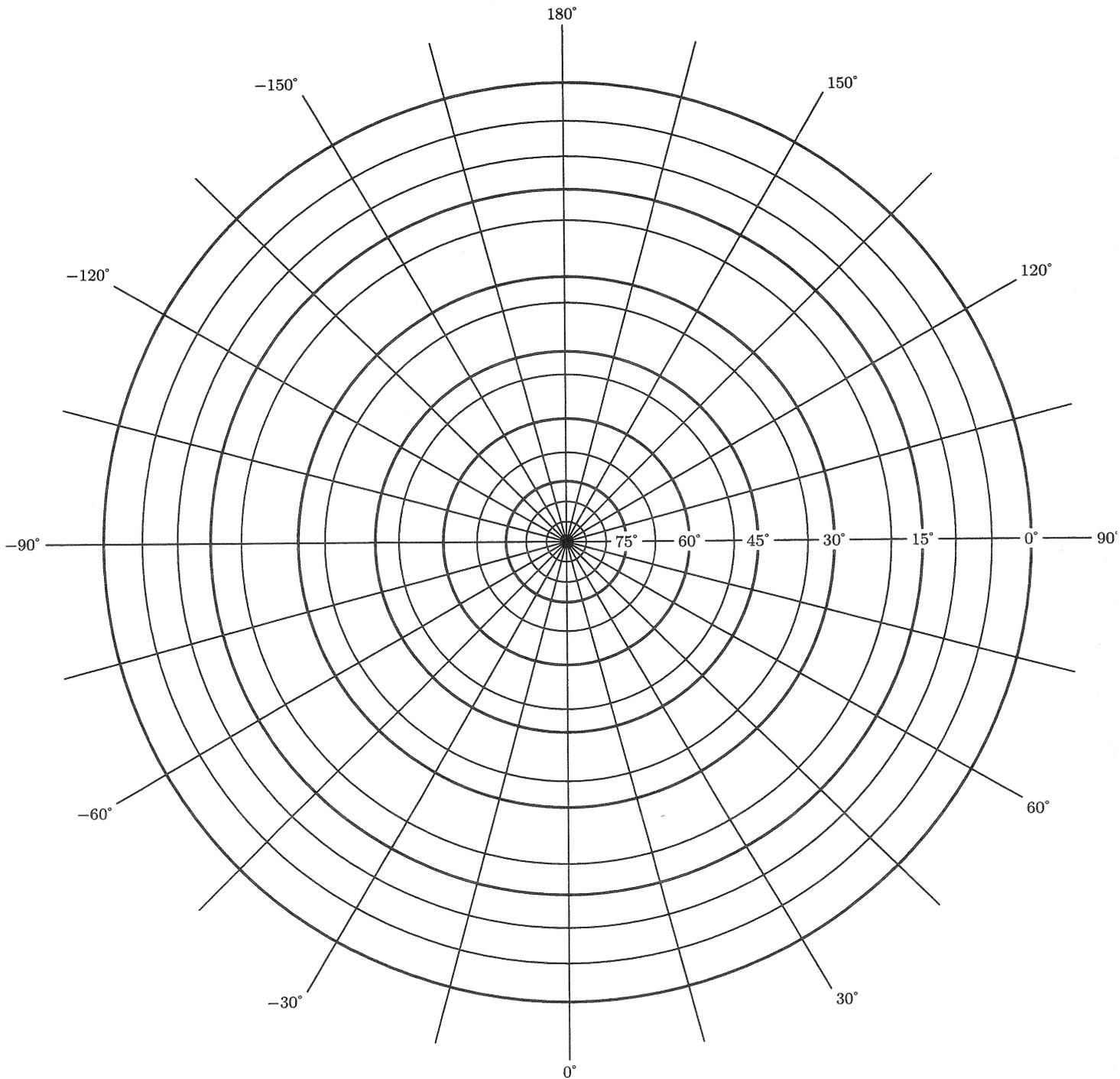


Figure II.4.

Voir page 14 les calculs concernant la réalisation de cette trame.

²La trame d'une carte est un ensemble d'images de méridiens et de parallèles par la projection considérée.

Représentation de l'hémisphère Nord obtenue par projection stéréographique

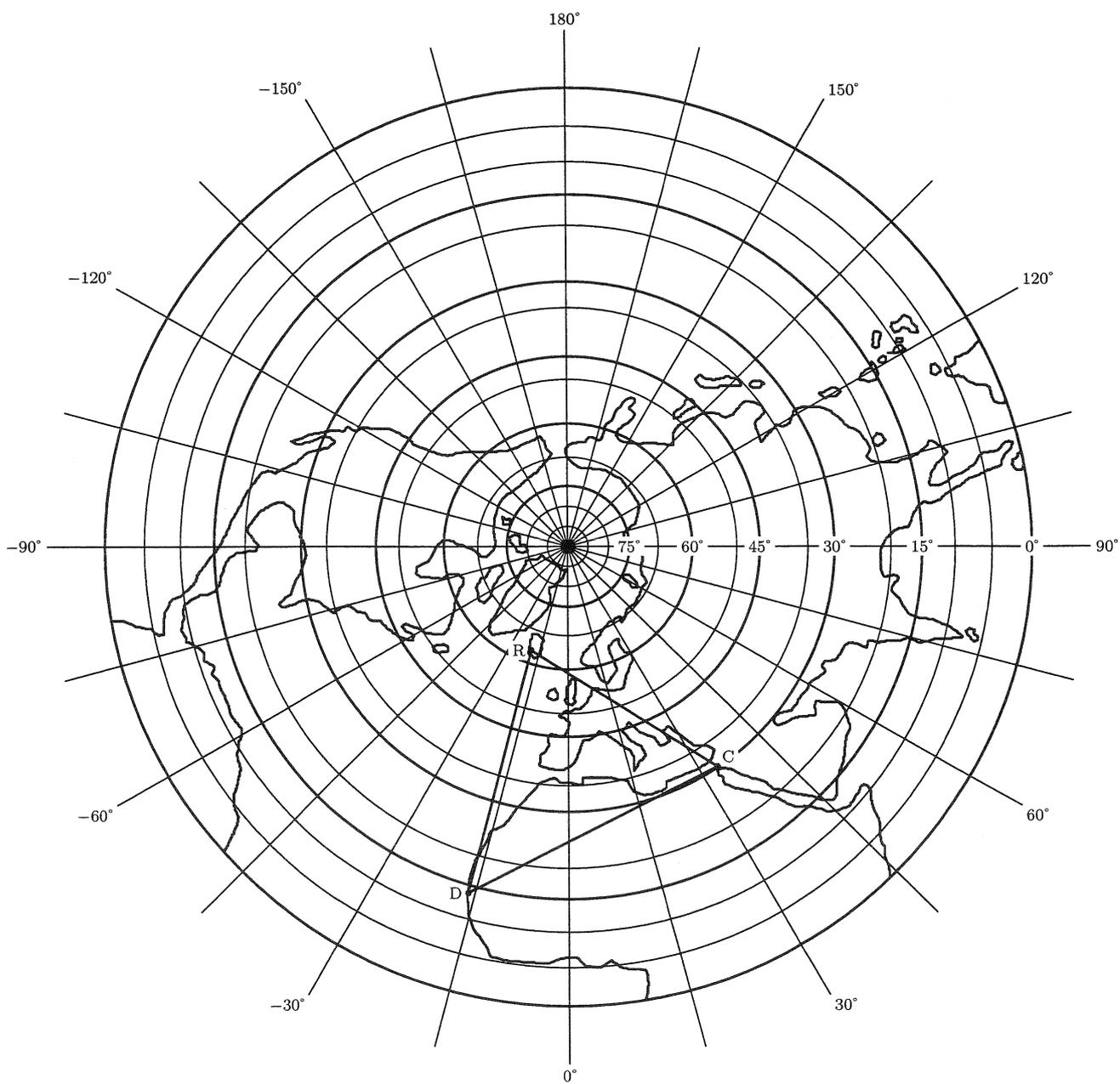


Figure II.5.

3. Démonstrations

1) Les parallèles ont pour projetés des cercles centrés sur N'

Nous proposons plusieurs démonstrations permettant de faire un choix en fonction des objectifs visés avec des élèves.

➤ Démonstrations géométriques

a) En utilisant une homothétie :

Soit N le pôle Nord, et M un point de la sphère distinct de N . Soit M' et N' les projetés respectifs de M et N . Soit (C) le parallèle passant par M , et H son centre (le point H ne dépend que du parallèle choisi). L'homothétie h de centre S qui transforme H en N' transforme aussi M en M' . Donc quand M décrit le cercle (C) , M' décrit l'image de (C) par h , c'est-à-dire un cercle (C') de centre $h(H)$, soit N' .

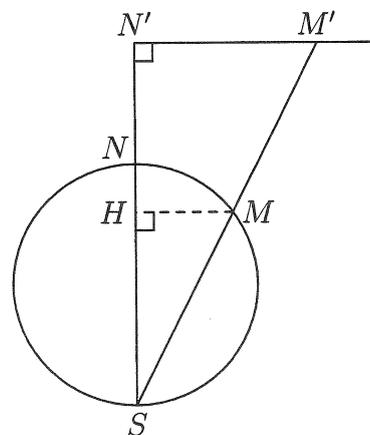
Figure dans le plan (NSM)

Figure II.6.

b) En utilisant la géométrie des configurations :

M appartient au parallèle (C) si et seulement si sa latitude φ est constante ($-90 < \varphi \leq 90$).

On note α l'angle \widehat{NSM} , exprimé en degrés (pour tout φ , on a : $0 \leq \alpha < 90$).

Or α est un angle inscrit qui intercepte l'arc \widehat{MN} , il est donc égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc, soit :

$$\alpha = \frac{1}{2}(90 - \varphi).$$

Le parallèle (C) est donc l'intersection du plan le contenant avec le cône droit de sommet S , d'axe (NS) et de demi-angle au sommet α .

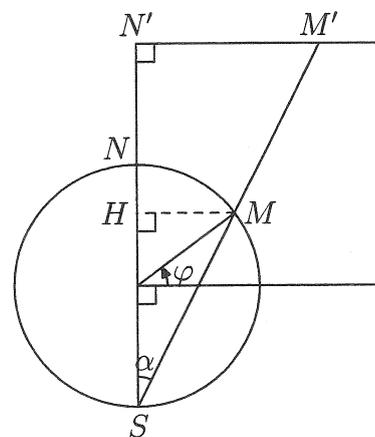
Figure dans le plan (NSM)

Figure II.7.

Son projeté (C') est l'intersection de ce cône et du plan (π) (qui est perpendiculaire à l'axe du cône), soit également un cercle.

Son rayon est égal à : $R' = M'N' = SN' \times \tan(\alpha)$ soit $R' = SN' \times \tan\left(\frac{1}{2}(90 - \varphi)\right)$.

Remarque : on peut constater que cette configuration est invariante par rotation d'axe (NS) .

► **Démonstration analytique**

On prend ici pour (π) le plan parallèle au plan équatorial passant par le pôle Nord, d'équation $z = R$.

Remarque : si le plan (π) ne passe pas par N , la démonstration est analogue en prenant comme équation de (π) : $z = \text{constante}$.

a) **Expression des coordonnées**

Soit le repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$,
où $\vec{i} = \frac{1}{R} \overrightarrow{OL}$, $\vec{k} = \frac{1}{R} \overrightarrow{ON}$.

Coordonnées de M :

$$(R \cos(\varphi) \cos(\lambda) ; R \cos(\varphi) \sin(\lambda) ; R \sin(\varphi))$$

– Équation de (π) : $z = R$

– Représentation paramétrique de (SM) :

$$\begin{cases} x = t \times R \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ y = t \times R \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ z = t \times (R \sin(\varphi) + R) - R \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

– En traduisant le fait que M' est le point d'intersection de (π) et de (SM) , on obtient :

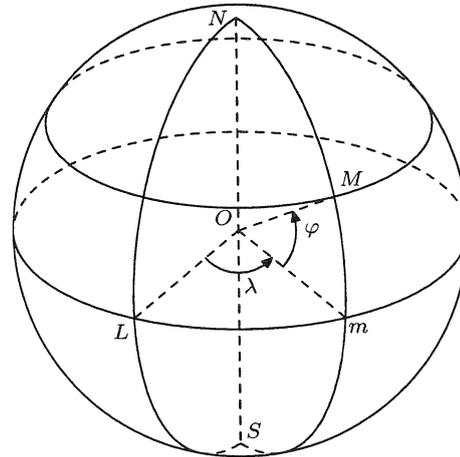


Figure II.8.

Coordonnées de M' dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$: $\left(\frac{2R \cos(\varphi) \cos(\lambda)}{1 + \sin(\varphi)} ; \frac{2R \cos(\varphi) \sin(\lambda)}{1 + \sin(\varphi)} ; R \right)$

Coordonnées de M' dans $(N ; \vec{i} ; \vec{j})$: $\left(\frac{2R \cos(\varphi) \cos(\lambda)}{1 + \sin(\varphi)} ; \frac{2R \cos(\varphi) \sin(\lambda)}{1 + \sin(\varphi)} \right)$

$-90 < \varphi \leq 90 ; -180 < \lambda \leq 180$

b) **Démonstration**

Les coordonnées de M' dans le repère $(N ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan (π) sont de la forme :

$$(k \cos(\lambda) ; k \sin(\lambda)), \text{ avec } k = \frac{2R \cos(\varphi)}{1 + \sin(\varphi)}.$$

Quand M décrit le parallèle C de latitude φ : k est constant, λ décrit $] -180 ; 180]$.

Donc M' décrit le cercle de centre N' et de rayon $\frac{2R \cos(\varphi)}{1 + \sin(\varphi)}$.

Conclusion :

Les parallèles se projettent en des cercles concentriques qui ont :

- pour centre, le projeté N' du pôle Nord N (ici $N' = N$)
- pour rayon, $\frac{2R \cos(\varphi)}{1 + \sin(\varphi)} = 2R \tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ (cas où (π) a pour équation : $z = R$)

2) Les méridiens ont pour projetés des demi-droites d'origine N'

► Démonstration géométrique

Soit un méridien, (P) le demi-plan de frontière (NS) contenant ce méridien, et M un point de ce méridien (autre que S). M' est un point de la droite (MS) , il appartient donc à (P) . Par ailleurs, M' appartient aussi au plan (π) . M' appartient donc à $(\pi) \cap (P)$.

Les projetés des points d'un méridien appartiennent donc tous à la demi-droite d'intersection du demi-plan (P) et du plan (π) .

Réciproquement, tout point B' de cette demi-droite est le projeté d'un point du méridien, point d'intersection de (SB') et du méridien.

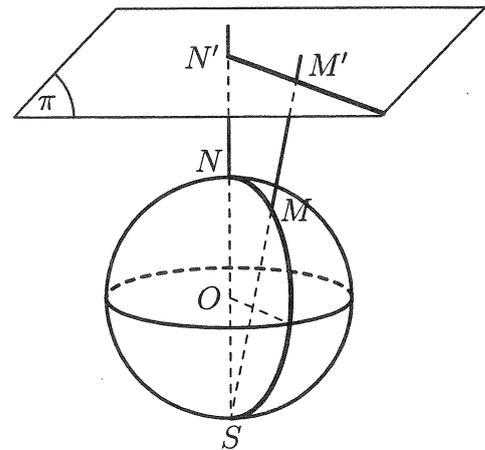


Figure II.9.

► Démonstration analytique (cas où le plan (π) a pour équation $z = R$)

Les coordonnées de M' dans le repère $(N; \vec{i}; \vec{j})$ du plan (π) sont de la forme :

$$(t \cos(\lambda); t \sin(\lambda)), \text{ avec } t = \frac{2R \cos(\varphi)}{1 + \sin(\varphi)} = 2R \tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Quand M décrit le méridien de longitude λ :

– $\cos(\lambda)$ et $\sin(\lambda)$ sont des constantes,

– φ décrit $] -90; 90]$ et t décrit alors $[0; +\infty[$:

on montre par exemple que la fonction f définie sur $] -90; 90]$ par

$$f(\varphi) = 2R \tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

(φ étant exprimé en degrés) est continue et strictement décroissante sur $] -90; 90]$, que

$$\lim_{x \rightarrow -90} f(x) = +\infty \text{ et } f(90) = 0.$$

Donc M' décrit une demi-droite d'origine N' et l'angle entre cette demi-droite et le vecteur \vec{i} est égal à λ .

Conclusion :

Les méridiens se projettent en des demi-droites qui :

- ont pour origine, le projeté N' du pôle Nord N
- font un angle égal à leur longitude avec le vecteur \vec{i} .

3) Échelle le long d'un parallèle

Considérons le cas où (π) est tangent à la sphère au pôle Nord :

soit (C) le parallèle de latitude φ , Ω son centre et r son rayon.

Ce parallèle (C) se projette en un cercle de centre N de rayon r' .

Soit M_1 et M_2 deux points de (C) , M'_1 et M'_2 leurs projetés, et $\theta = \widehat{M_1\Omega M_2}$.

Soit ℓ la longueur de l'arc $\widehat{M_1M_2}$ associé à θ , ℓ' celle de l'arc $\widehat{M'_1M'_2}$ correspondant.

On a : $\ell = r\theta$ et $\ell' = r'\theta$, d'où $\frac{\ell'}{\ell} = \frac{r'}{r}$

(θ étant exprimé en radians)

Or, en utilisant le théorème de Thalès dans les triangles $SM_1\Omega$ et SM'_1N , on obtient :

$$\frac{NM'_1}{\Omega M_1} = \frac{SN}{S\Omega} \text{ d'où } \frac{r'}{r} = \frac{2R}{R + R \sin(\varphi)}$$

soit $\frac{r'}{r} = \frac{2}{1 + \sin(\varphi)}$ et par suite :

$$\boxed{\frac{\ell'}{\ell} = \frac{2}{1 + \sin(\varphi)}}$$

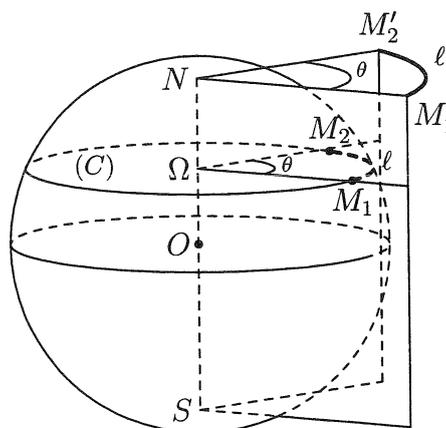


Figure II.10.

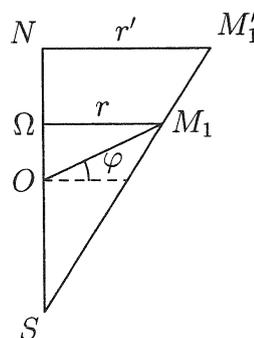


Figure dans le plan (SNM_1)

Figure II.11.

4) L'image d'un grand cercle est un cercle

► **Démonstration** (cas où le plan (π) est tangent au pôle Nord)

Dans cette démonstration, on utilise la notion d'inversion : la définition et quelques propriétés de l'inversion sont données page 19.

– On montre qu'une projection stéréographique est la restriction à la sphère d'une inversion de l'espace :

les triangles SMN et SNM' ont deux angles respectivement de même mesure :

– les angles \widehat{SMN} et \widehat{SNM}' sont droits.

– les angles \widehat{MSN} et \widehat{NSM}' sont égaux.

Les triangles SMN et SNM' sont donc semblables.

On en déduit que leurs côtés ont des longueurs proportionnelles, et qu'en particu-

$$\text{lier : } \frac{SM}{SN} = \frac{SN}{SM'}$$

$$\text{D'où : } SM \times SM' = 4R^2.$$

Compte-tenu de la configuration, on a aussi : $\overline{SM} \times \overline{SM'} = 4R^2$.

Conclusion :

la projection stéréographique est une inversion de pôle, le pôle Sud et de puissance $4R^2$.

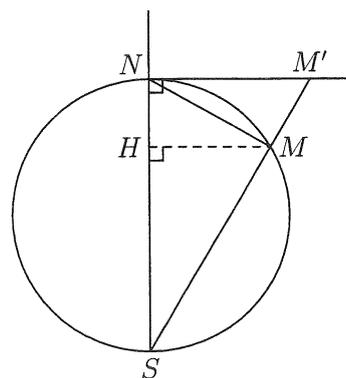


Figure II.12.

- Un cercle qui ne passe pas par le pôle d'inversion (pôle Sud) est l'intersection d'un plan (P) ne passant pas par le pôle Sud et de la sphère terrestre. L'image de (P) est une sphère (Σ) , et l'image de la sphère terrestre est le plan (π) . L'image du cercle est donc l'intersection du plan (π) et de la sphère (Σ) , c'est donc un cercle.

Conclusion :

la projection stéréographique transforme tout cercle ne passant pas par le pôle Sud en un cercle, en particulier, **les grands cercles sont transformés en cercles.**

5) La projection stéréographique conserve les angles

► **Démonstration** (cas où le plan (π) est tangent au pôle Nord)

Soit M un point de la sphère, distinct de N et de S , et soit M' son projeté stéréographique sur le plan (π) .

Soit (P) et (Q) les plans tangents à la sphère, respectivement en S et en M .

Soit (d_1) et (d_2) deux droites passant par le point M et contenues dans le plan (Q) , et soit A et B les points d'intersection respectifs de (d_1) et (d_2) avec le plan (π) .

Les demi-droites $[MA)$ et $[MB)$ sont deux demi-droites tangentes à la sphère en M ; leurs images par la projection stéréographique sont $[M'A)$ et $[M'B)$.

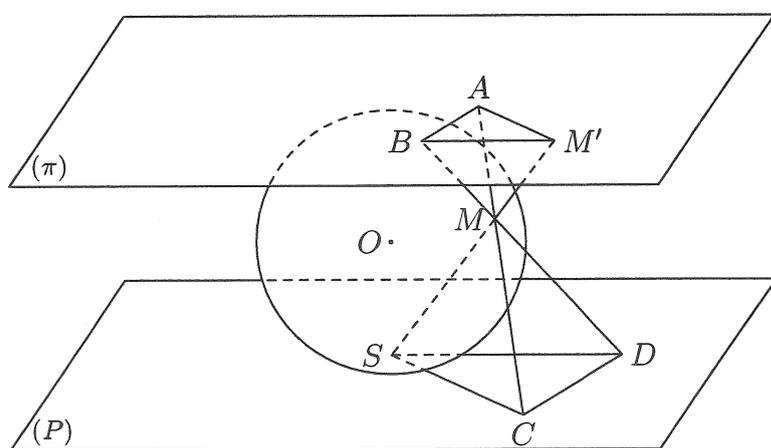


Figure II.13.

Il s'agit donc de montrer que les angles \widehat{AMB} et $\widehat{AM'B}$ sont de même mesure

Notons C le point d'intersection de la droite (AM) et du plan (P) , et D le point d'intersection de la droite (BM) et du plan (P) .

- Les droites (SC) et (AM') sont coplanaires (car (AC) et $(M'S)$ sont sécantes), et n'ont aucun point commun (car elles sont situées dans des plans strictement parallèles (P) et (π)) : elles sont donc parallèles.

De même, les droites (SD) et (BM') sont parallèles, ainsi que (AB) et (CD) .

On en déduit, par exemple en utilisant l'homothétie de centre M qui transforme A en C (et donc B en D et M' en S), que **les angles $\widehat{AM'B}$ et \widehat{CSD} sont de même mesure.**

- Les demi-droites $[DM)$ et $[DS)$ sont tangentes à la sphère et issues d'un même point, donc $DM = DS$. De même : $CM = CS$. Les deux triangles CMD et CSD ont leurs côtés respectifs de la même longueur, ils sont donc isométriques; leurs angles homologues sont donc de même mesure, en particulier : \widehat{CMD} et \widehat{CSD} sont de même mesure.

Or les angles \widehat{AMB} et \widehat{CMD} sont opposés par le sommet et donc de même mesure.

En conclusion, **les angles \widehat{AMB} et \widehat{CSD} sont de même mesure.**

Des deux points précédents, on déduit que **les angles \widehat{AMB} et $\widehat{AM'B}$ sont de même mesure.**

6) Inversion

➤ Définition

On se place dans l'espace, on suppose qu'une unité de longueur a été choisie.

Étant donné un point O et un nombre réel k non nul, on appelle **inversion de pôle O et de puissance k** , la transformation qui, à tout point M de l'espace distinct de O , associe le point M' de la droite (OM) tel que : $\overline{OM} \times \overline{OM'} = k$.

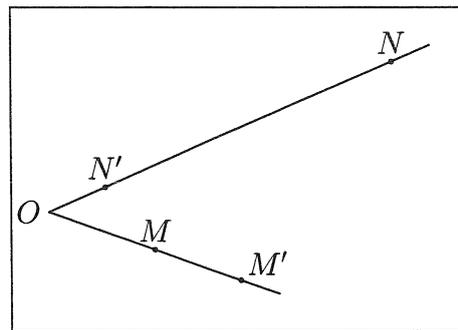


Figure II.14.

➤ Propriétés

Une inversion est involutive : si M a pour image M' par une inversion, alors M est aussi l'image de M' par cette inversion.

Points invariants

Si $k < 0$, il n'existe aucun point invariant.

Si $k > 0$, l'ensemble des points invariants est la sphère de centre O et de rayon \sqrt{k} .

Image d'une droite

Une droite passant par O , privée de O , est globalement invariante.

L'image d'une droite ne passant pas par O est un cercle.

Image d'un cercle

L'image d'un cercle, privé de O , passant par le pôle O est une droite (parallèle à la tangente à ce cercle au point O).

L'image d'un cercle ne passant pas par le pôle O est un cercle.

Image d'un plan

Un plan passant par O , privé de O , est globalement invariant.

L'image d'un plan ne passant pas par O est une sphère.

Image d'une sphère

L'image d'une sphère passant par le pôle O est un plan.

L'image d'une sphère ne passant pas par le pôle O est une sphère.

4. Orthodromie : « Le Caire – Shanghai »

La ville du Caire est située à une latitude de 30° et une longitude de 31° , celle de Shanghai à une latitude de 31° et une longitude de 121° .

L'orthodromie « Le Caire – Shanghai » (sur la sphère terrestre) est un arc de grand cercle passant par ces deux villes. Notons (C) ce grand cercle.

(C) passe aussi par les points situés aux antipodes du Caire et de Shanghai, autrement dit les points diamétralement opposés au Caire et à Shanghai sur la sphère terrestre.

Le point situé aux antipodes du Caire a pour latitude : -30° (soit l'opposé de la latitude du Caire) et pour longitude : -149° (soit la longitude du Caire moins 180°).

Sur la carte en projection stéréographique, le grand cercle (C) est représenté par un cercle (car par une projection stéréographique, l'image d'un grand cercle est un cercle), et ce cercle passe par les images respectives du Caire, de Shanghai et du point situé aux antipodes du Caire.

Le tracé de l'orthodromie est donné à la page suivante : les points L_C , S_h et L'_C sont les images respectives du Caire, de Shanghai et du point situé aux antipodes du Caire.

► Remarques :

- Pour placer le point L'_C , on calcule le rayon r de l'image du parallèle de latitude -30° : On note r_0 le rayon de l'image du parallèle de latitude 0° .

$$r = r_0 \times \tan\left(45^\circ - \frac{-30^\circ}{2}\right) \text{ soit } r = r_0 \times \sqrt{3} \text{ (pour la formule, voir page 10).}$$

Le tracé de L'_C peut aussi se faire géométriquement en utilisant la figure II.15 ci-dessous.

- On peut comparer le chemin obtenu ici avec celui obtenu en utilisant la projection gnomonique (où les orthodromies sont représentées par des segments).
- Les villes de Shanghai et du Caire étant situées approximativement à la même latitude, on peut, dès la classe de Seconde, calculer la longueur de cette orthodromie. Puis, comparer à la longueur de l'arc du parallèle reliant les deux villes.
- Cet exemple met aussi en évidence que par une projection stéréographique, le centre du cercle image de (C) n'est pas l'image du centre de (C) .

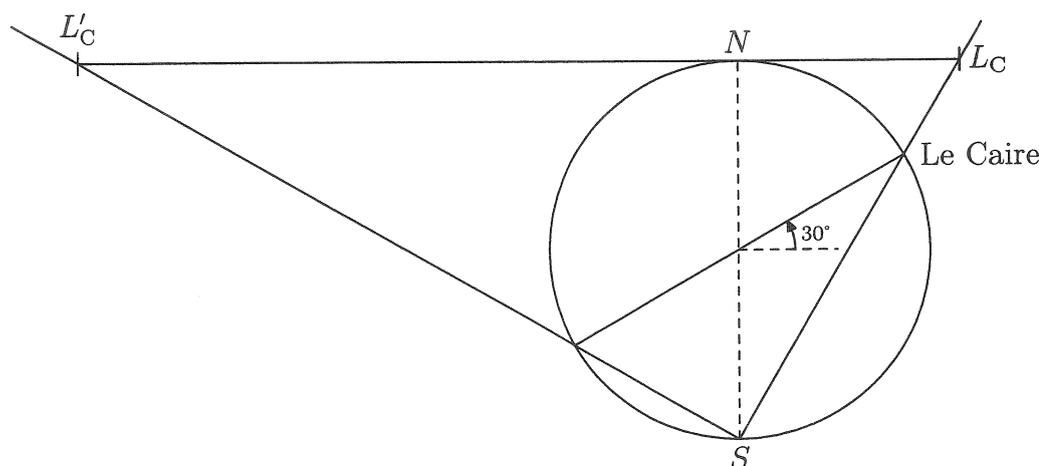


Figure II.15.

Représentation de l'orthodromie « Le Caire – Shanghai » obtenue par projection stéréographique

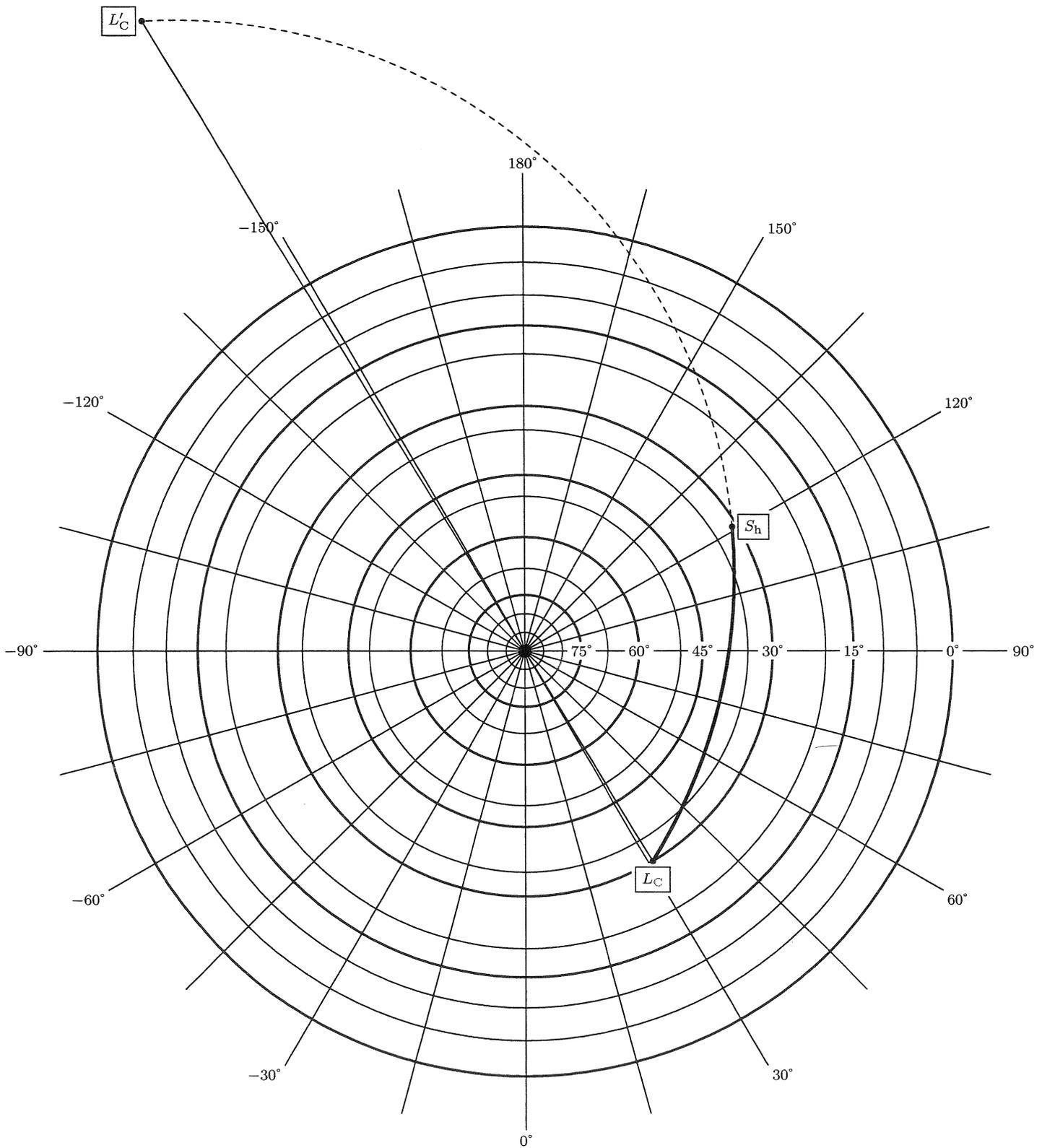


Figure II.16.

III Projection gnomonique

1. Définition et propriétés

1) Définition

Soit (π) un plan strictement parallèle au plan équatorial, et soit M un point de la sphère (équateur exclu).

On appelle **image de M par la projection gnomonique sur (π)** , le point M' , intersection de la droite (OM) et du plan (π) .

Remarque : deux points situés aux antipodes ont la même image par cette projection. On se limite dans la suite de cette étude à l'hémisphère Nord.

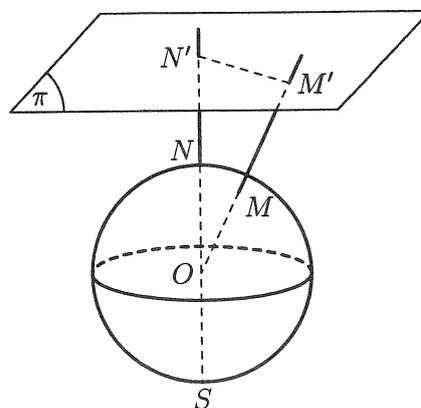


Figure III.1.

2) Parallèles et méridiens

Les parallèles se projettent en des cercles concentriques qui ont pour centre le projeté N' du pôle Nord N et un rayon proportionnel à $\cotan(\varphi)$.

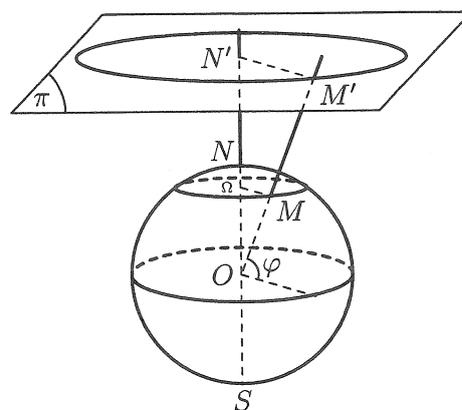


Figure III.2.

Les demi-méridiens (quarts de cercle de l'hémisphère Nord) ont pour projetés des demi-droites d'origine N' .

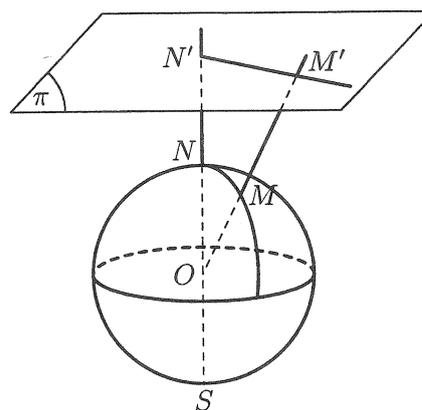


Figure III.3.

3) Grands cercles

Les demi-grands cercles³ de l'hémisphère Nord (autre que l'équateur) ont pour projetés des droites.

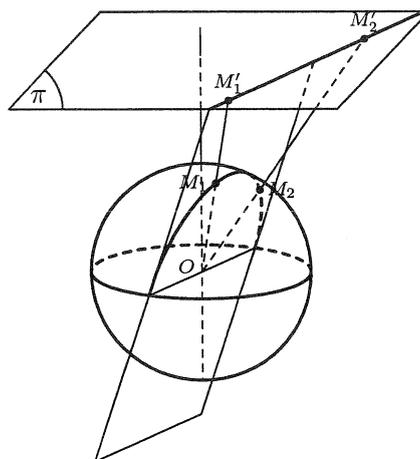


Figure III.4.

4) Orthodromie

La projection gnomonique (restreinte à l'hémisphère Nord) conserve les plus courts chemins.

En effet, un arc de grand cercle sur le globe terrestre est projeté en un segment.

5) Non-conservation de certaines propriétés

Une projection gnomonique ne conserve

{	ni les angles,
	ni les rapports d'aires,
	ni les rapports de distances.

Par exemple, sur le globe terrestre, le triangle reliant les villes de Dakar, Le Caire et Reykjavik d'une part, et celui reliant Bordeaux, Helsinki et Reykjavik d'autre part sont « presque » équilatéraux : En calculant les distances sur le globe terrestre avec un rayon de 6 366 km, on obtient :

- A. Dakar – Le Caire : 5 217 km,
Le Caire – Reykjavik : 5 280 km,
Reykjavik – Dakar : 5 480 km ;
- B. Bordeaux – Helsinki : 2 382 km,
Helsinki – Reykjavik : 2 397 km,
Reykjavik – Bordeaux : 2 482 km.

Mais les images par projection gnomonique de ces triangles ne sont pas des triangles équilatéraux : voir les représentations pages 26 à 27.

Des démonstrations sont proposées pages 28 à 29.

³Un grand cercle est l'intersection d'une sphère et d'un plan contenant le centre de celle-ci.

2. Trame de la carte de l'hémisphère Nord obtenue par projection gnomonique

φ (°)	7	8	9	10	12	15	20	30	45	50	59	68	78	85
$r/R = \cos(\varphi)$	0,993	0,990	0,988	0,985	0,978	0,966	0,940	0,866	0,707	0,643	0,515	0,375	0,208	0,087
$r'/R = \cotan(\varphi)$	8,144	7,115	6,314	5,671	4,705	3,732	2,747	1,732	1,000	0,839	0,601	0,404	0,213	0,087

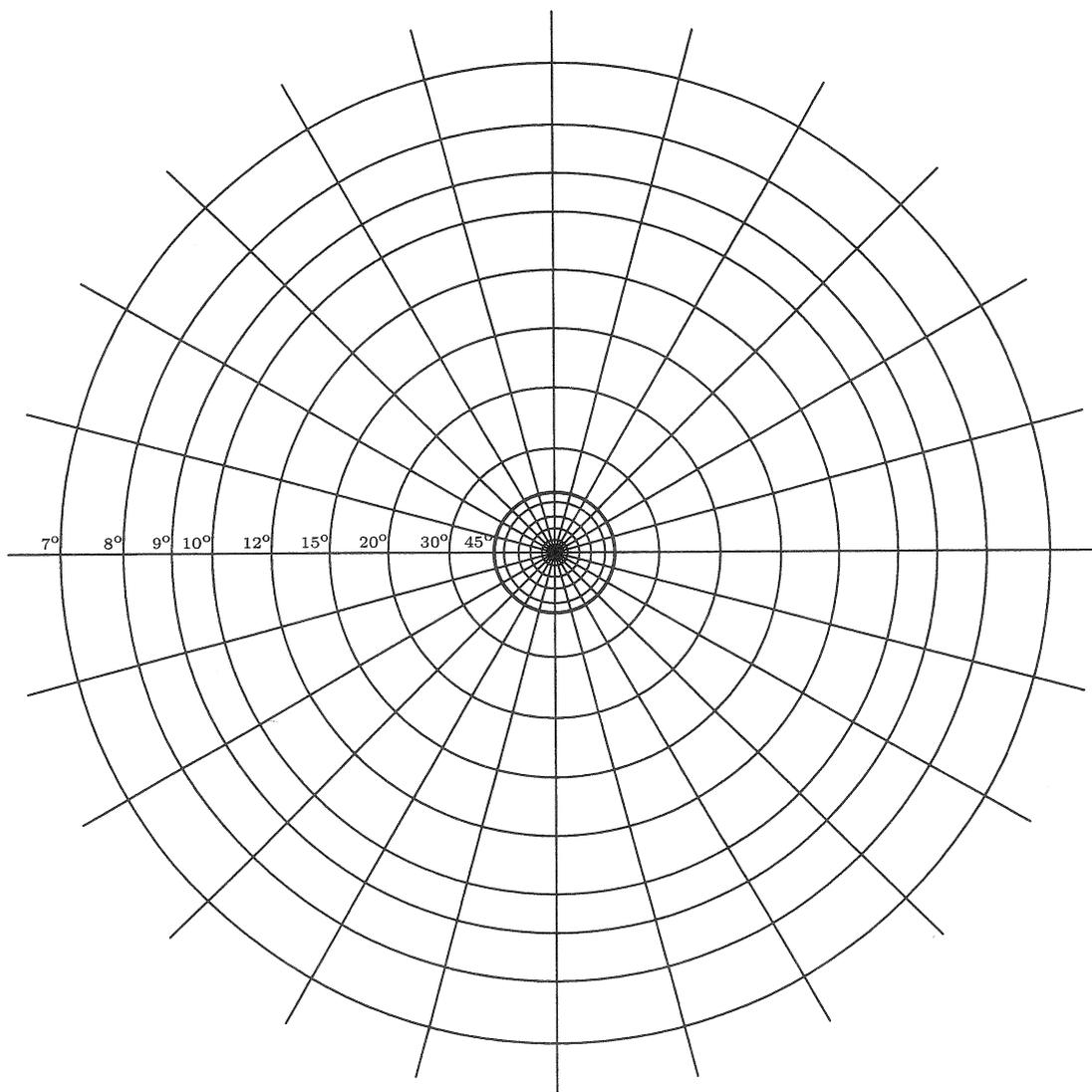


Figure III.5.

Voir page 29 les calculs concernant la réalisation de cette trame.

**Trame de la carte de l'hémisphère Nord (latitude supérieure à 45°)
obtenue par projection gnomonique**

φ (°)	45	50	55	60	65	70	75	80	82	85	86	89
$r/R = \cos(\varphi)$	0,707	0,643	0,573	0,500	0,422	0,342	0,259	0,174	0,139	0,087	0,070	0,017
$r'/R = \cotan(\varphi)$	1,000	0,839	0,700	0,866	0,466	0,364	0,268	0,176	0,140	0,087	0,070	0,017

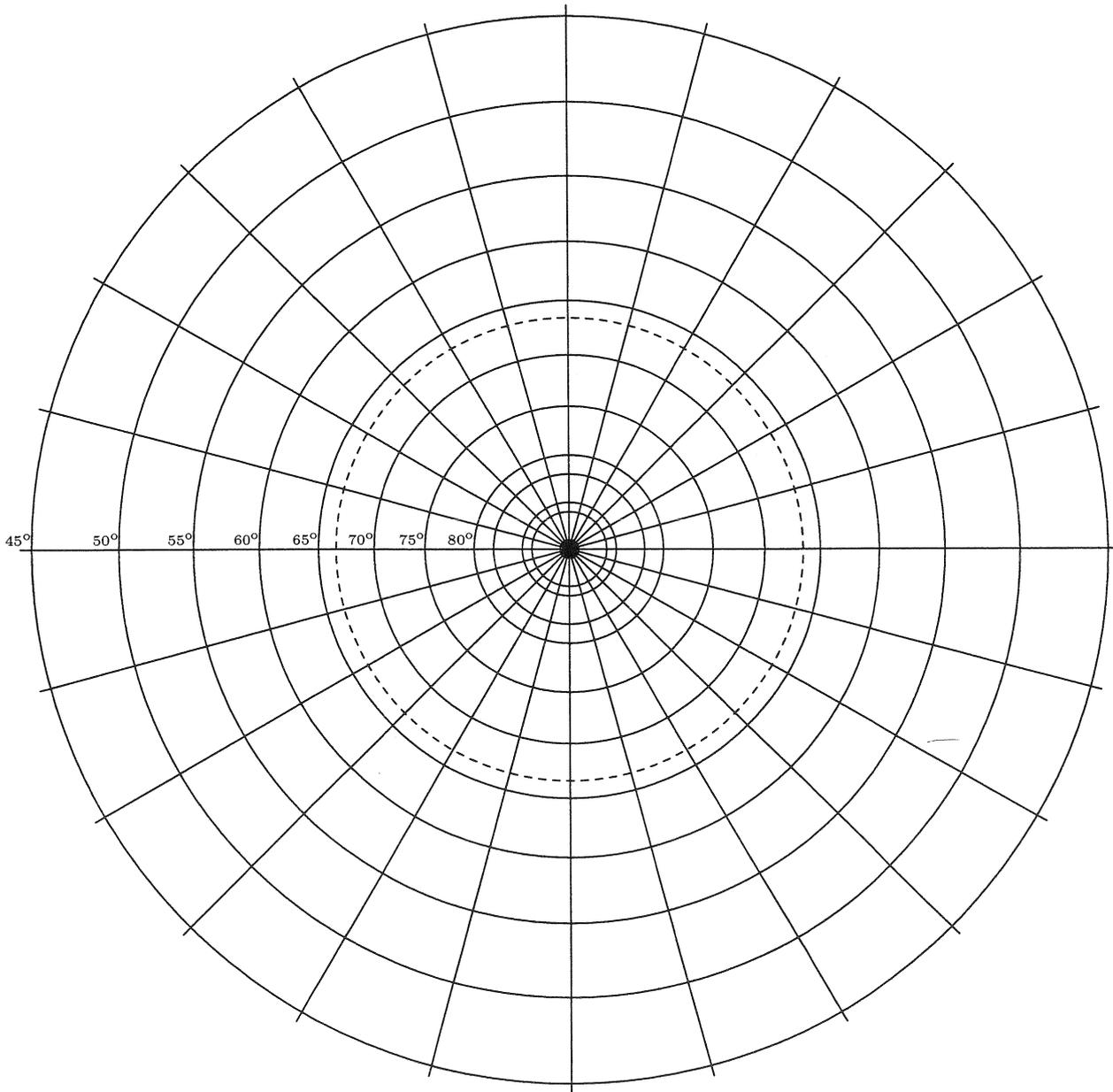


Figure III.6.

Cette trame est extraite de la précédente avec un agrandissement de 10 environ.

Représentation de l'hémisphère Nord obtenue par projection gnomonique

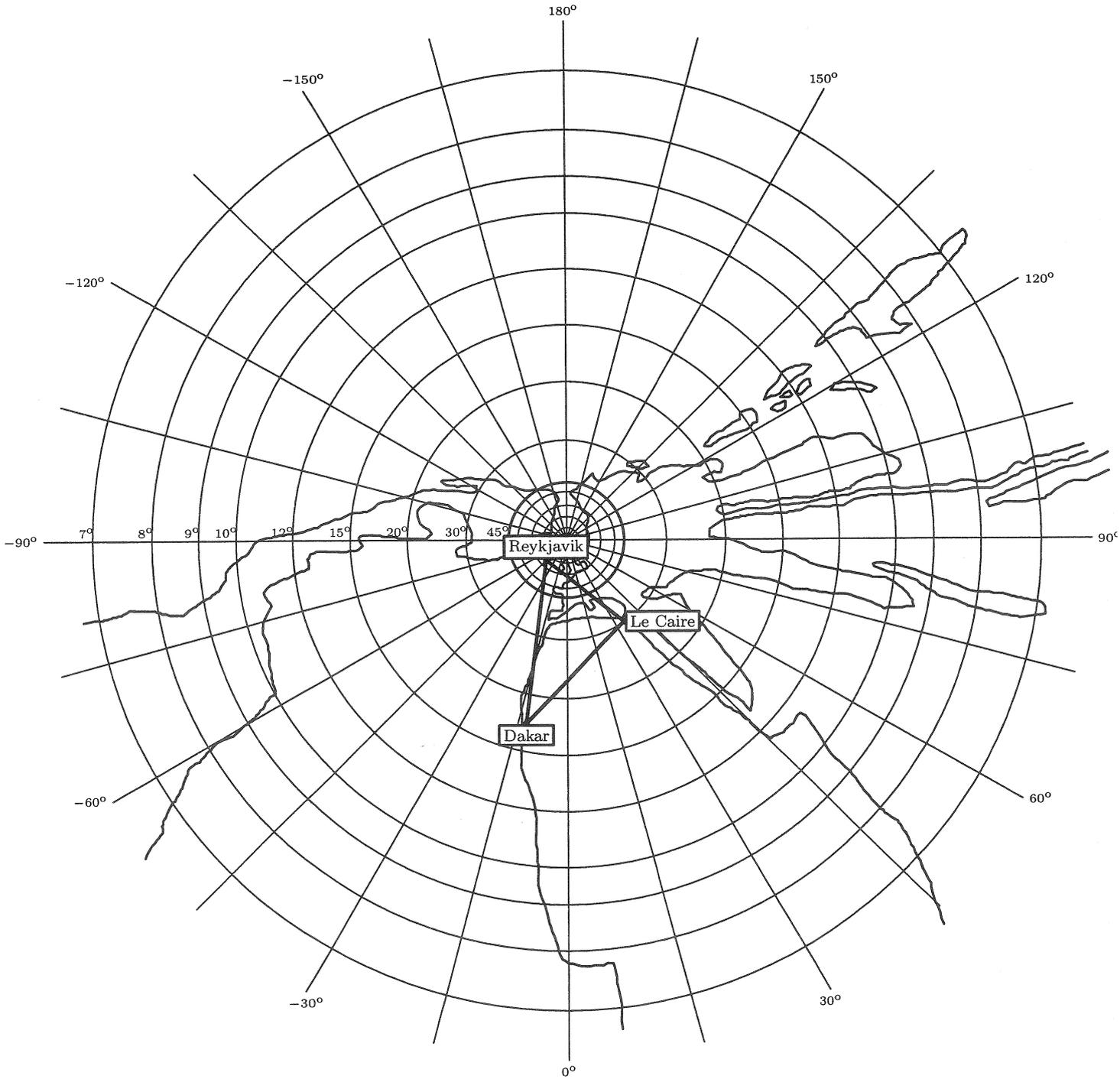


Figure III.7.

Villes	Latitude φ	Longitude λ
Dakar	14,8	-17
Le Caire	30	31,5
Reykjavik	64	-22

Représentation de l'hémisphère Nord (latitude supérieure à 45°)
obtenue par projection gnomonique

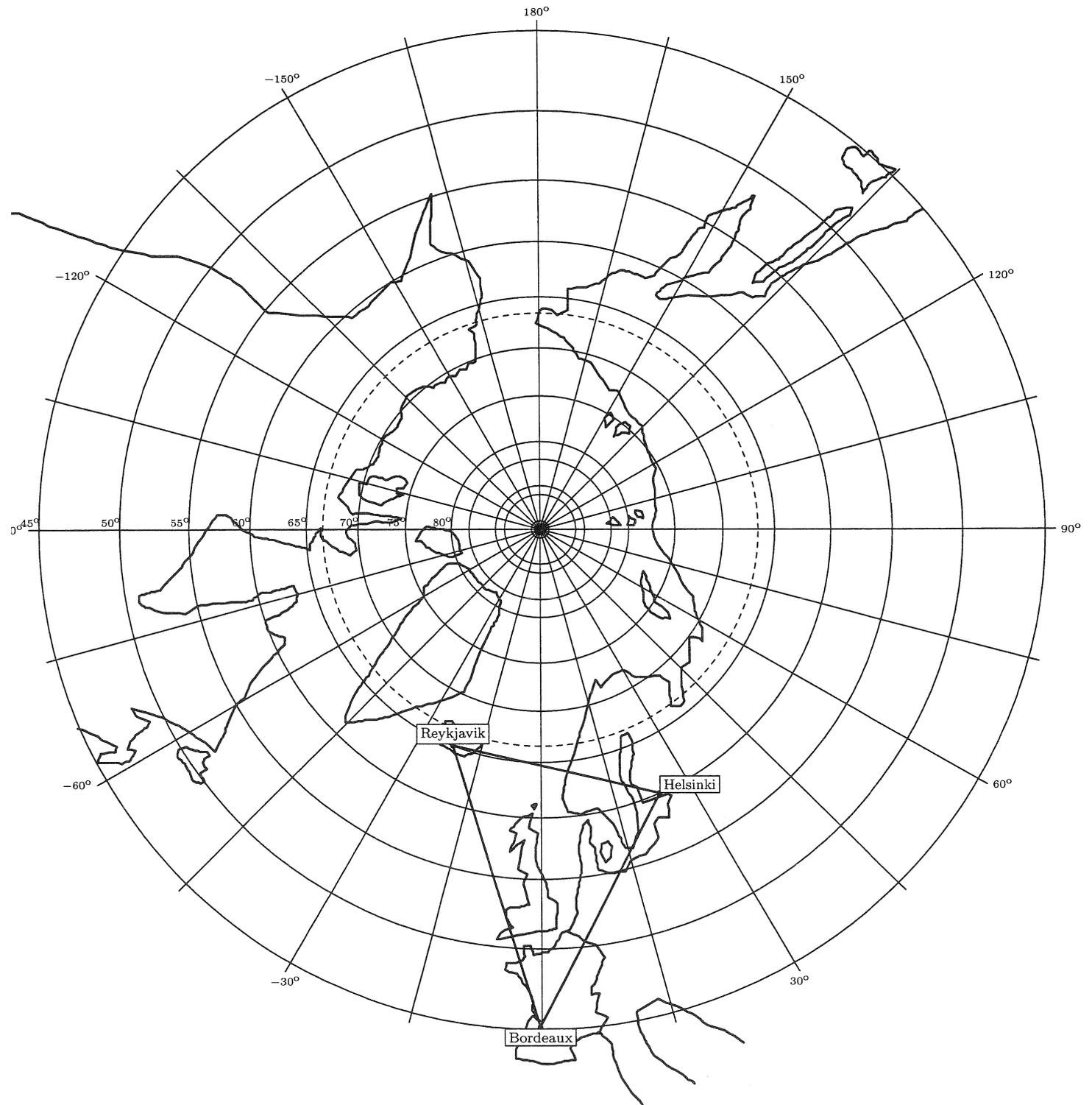


Figure III.8.

Villes	Latitude φ	Longitude λ
Helsinki	60	24
Bordeaux	45	-1
Reykjavik	64	-22

3. Démonstrations

- 1) Les parallèles (autres que l'équateur) ont pour projetés des cercles centrés sur N'

► **Démonstration**

Soit Ω le centre du parallèle et (P) le plan le contenant. La restriction de la projection gnomonique au plan (P) est l'homothétie de centre O envoyant Ω en N' .

Par suite, l'image d'un cercle du plan (P) de centre Ω est un cercle du plan (π) de centre N' .

De plus, $\cotan(\varphi) = \frac{M'N'}{ON'}$, soit :

$M'N' = ON' \cdot \cotan(\varphi)$ avec $0 < \varphi \leq 90$.

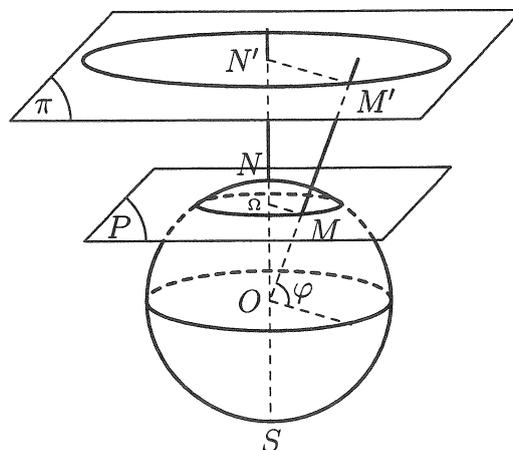


Figure III.9.

- 2) Les demi-méridiens ont pour projetés des demi-droites d'origine N'

► **Démonstration**

On considère le demi-méridien passant par M_1 ($M_1 \neq N$), et on note (Q) le demi-plan de frontière (NS) contenant ce demi-méridien. (Q) et (π) sont perpendiculaires.

Soit $[N'x)$ la demi-droite intersection du demi-plan (Q) et du plan (π) .

Tout point M du demi-méridien se projette en un point M' de $[N'x)$.

Réciproquement, tout point B' de $[N'x)$ est le projeté d'un point du demi-méridien, point d'intersection de (OB') et du demi-méridien.

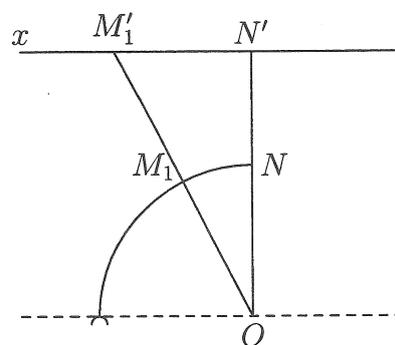


Figure dans le plan (Q)

Figure III.10.

- 3) L'image d'un demi-grand cercle (autre que l'équateur) de l'hémisphère Nord est une droite

► **Démonstration**

On considère un demi-grand cercle, et on note (Q') le plan contenant ce demi-grand cercle. (Q') et (π) sont sécants.

Soit (d) la droite d'intersection du plan (Q') et du plan (π) .

Tout point M du demi-grand cercle se projette en un point M' de (d) .

Réciproquement, tout point B' de (d) est le projeté d'un point du demi-grand cercle : le point d'intersection de (OB') et du demi-grand cercle.

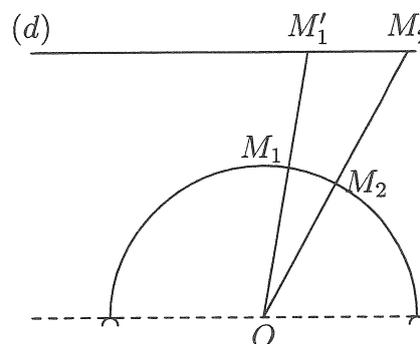


Figure dans le plan (Q')

Figure III.11.

4) Échelle le long d'un parallèle

Considérons le cas où (π) est tangent à la sphère au pôle Nord.

Soit (C) le parallèle de latitude φ , Ω son centre et r son rayon.

Ce parallèle (C) se projette en un cercle de centre N de rayon r' .

Soit M_1 et M_2 deux points de (C) , M'_1 et M'_2 leurs projetés.

Soit ℓ la longueur de l'arc $\widehat{M_1M_2}$ associé à θ (exprimé en radians), ℓ' celle de l'arc $\widehat{M'_1M'_2}$ correspondant.

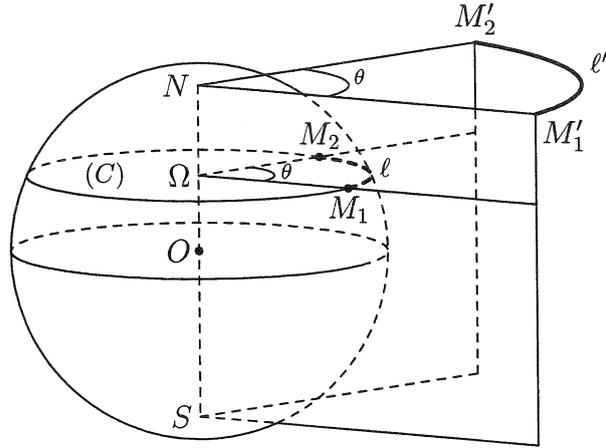


Figure III.12.

On a : $\ell = r\theta$ et $\ell' = r'\theta$, d'où $\frac{\ell'}{\ell} = \frac{r'}{r}$.

Or, en utilisant le théorème de Thalès dans les triangles $OM_1\Omega$ et OM'_1N , on obtient :

$$\frac{NM'_1}{\Omega M_1} = \frac{ON}{O\Omega} \text{ d'où } \frac{r'}{r} = \frac{R}{R \cos(90^\circ - \varphi)}$$

soit $\frac{r'}{r} = \frac{1}{\sin(\varphi)}$ et par suite : $\boxed{\frac{\ell'}{\ell} = \frac{1}{\sin(\varphi)}}$

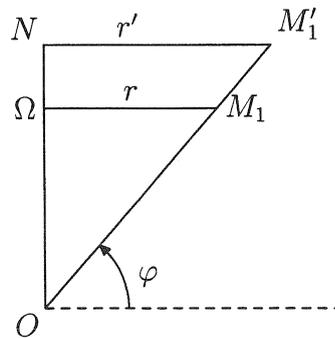


Figure dans le plan (ONM_1)

Figure III.13.

La déformation est donc faible pour les grandes latitudes (Nord), forte pour les petites latitudes.

Par exemple, si l'on prend $\ell = 100$ km :

Pour $\varphi = 80^\circ$, $\ell' \simeq 102$ km et pour $\varphi = 10^\circ$, $\ell' \simeq 578$ km.

5) Réalisation de la trame de la carte obtenue

En fonction du rayon terrestre R , nous avons :

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \frac{r}{R}, \text{ d'où : } r = R \cos(\varphi).$$

Or $\frac{r'}{r} = \frac{1}{\sin(\varphi)}$, donc $r' = \frac{R \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$.

Soit : $\boxed{r' = R \cdot \cotan(\varphi)}$

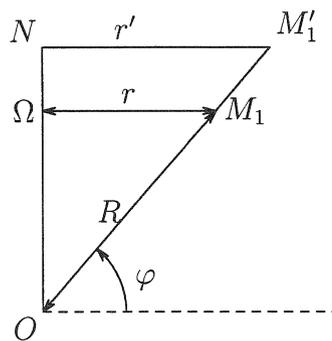


Figure dans le plan (ONM_1)

Figure III.14.

IV Projection isocylindrique

1. Définition et propriétés

1) Définition

Soit le cylindre (Σ) d'axe (Δ) , tangent à la sphère à l'équateur.
Soit M un point de la sphère autre qu'un pôle, et H son projeté orthogonal sur (Δ) .

On appelle image de M par la projection isocylindrique sur (Σ) le point M' , intersection de (Σ) et de la demi-droite $[HM)$.

Remarque : tout point de l'équateur est invariant par cette projection.

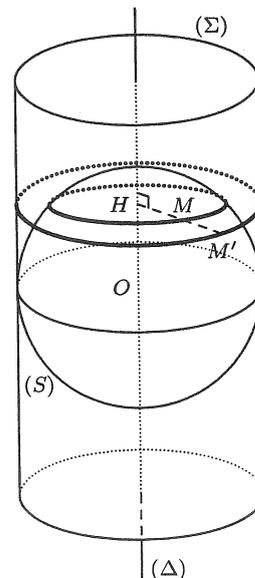


Figure IV.1.

2) Parallèles et méridiens

Les parallèles se projettent en des cercle centrés sur l'axe du cylindre, et de même rayon que le cylindre.

(voir figure IV.1).

Les méridiens ont pour projetés un segment (ouvert) inclus dans une génératrice de (Σ) .

(voir figure IV.2).

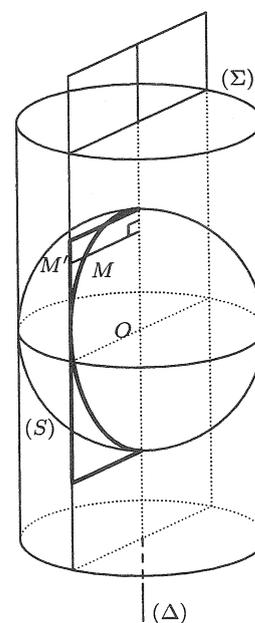


Figure IV.2.

3) Propriété

La projection isocylindrique conserve les rapports d'aires.
On dit que la projection isocylindrique est équivalente.

La projection étant réalisée, on développe le cylindre pour obtenir un rectangle nommé « carte ». Sur cette carte, les images des parallèles et des méridiens sont des segments.

Ce type de cartes est réapparu dans les années 1990 dans différents atlas et manuels de géographie. L'importance (en surface) des pays pauvres du Sud par rapport aux pays riches du Nord frappe l'observateur, ce qui assure à la carte le côté politiquement correct qu'on lui connaît.

Par exemple, l'Europe, située à l'Ouest de l'Oural a une aire de 10,5 millions de km^2 , soit presque trois fois moins que l'Afrique (30,2 millions de km^2).

En revanche, la projection isocylindrique ne conserve ni les angles, ni les plus courts chemins.

2. Trame de la carte obtenue par projection isocylindrique

On obtient la trame par projection isocylindrique (figure IV.3 page 32) de la manière suivante :

- On développe le cylindre selon un méridien. On prend un général l'antiméridien de Greenwich (de longitude 180°).
- On obtient un rectangle de longueur $2\pi R$ et de hauteur $2R$.
- Les méridiens sont représentés par des segments ouverts verticaux.
- Les cercles représentant les parallèles sont représentées par des segments horizontaux.
- La distance sur la carte entre l'équateur et le parallèle de latitude φ est égale à $R|\sin(\varphi)|$.

Cette carte conserve les aires. On peut observer à titre de comparaison que les projetés de la France (550 000 km^2) et de Madagascar (587 000 km^2), sont approximativement de même aire. De même, l'Afrique (30,5 M km^2) a une aire quadruple de celle de l'Australie (7,7 M km^2).

La déformation est très forte sur les parallèles de forte latitude. En effet, le parallèle de latitude φ , de longueur $2\pi R \cos(\varphi)$ et l'équateur de longueur $2\pi R$ sont représentés sur la carte par des segments de même longueur. Cela se traduit par un « étirement » Est - Ouest.

Ainsi, en Australie, la distance Sud - Nord entre Hobart et le Cap York est de 3 423 km et la distance Est - Ouest entre Brisbane et le Cap Inscription est de 3 966 km.

Lieux	Latitude φ	Longitude λ
Hobart	-42	147,5
Cap York	-11,5	142,5
Brisbane	-27,5	153
Cap Inscription	-25,5	113

De même, en Amérique du Nord, la distance Sud - Nord Miami - Cap Dorchester (baie d'Hudson) est de 4 559 km et la distance Est - Ouest Vancouver - Halifax (Nouvelle Écosse) est de 4 440 km. Cette seconde distance dépasse largement la première sur la carte.

Villes	Latitude φ	Longitude λ
Miami	26	-80,5
Cap Dorchester	67	-83
Vancouver	49	-123
Halifax	44,5	-63,5

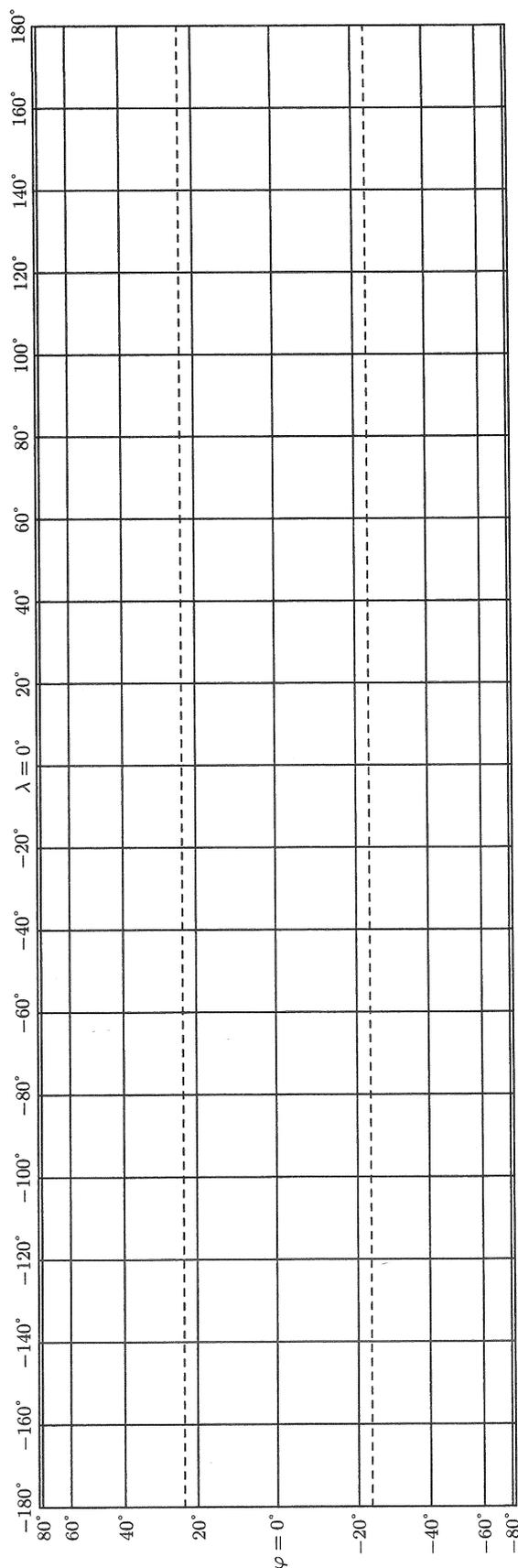


Figure IV.3.

Remarque : les pointillés représentent les tropiques.

Représentation du globe terrestre obtenue par projection isocylindrique

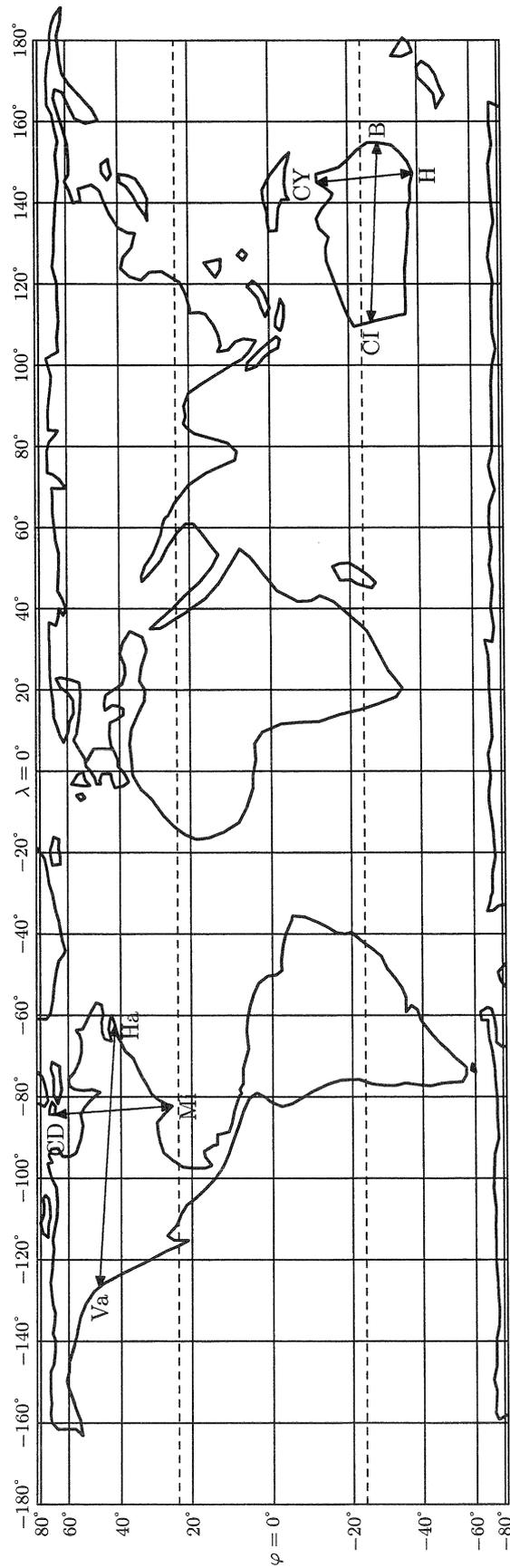


Figure IV.4.

3. Démonstrations

Rappel : soit le cylindre (Σ) d'axe (Δ) et (P) un plan formant avec (Δ) un angle α compris entre 0 et 90° .

Lorsque α est nul, l'intersection de (P) et (Σ) est soit vide, soit une droite parallèle à (Δ) , soit deux droites parallèles à (Δ) .

Lorsque α est non nul, l'intersection de (P) et (Σ) est une ellipse. On obtient un cercle si et seulement si $(\Delta) \perp (P)$.

1) Cas des parallèles

Les parallèles ont pour projetés des cercles de (Σ) centrés sur (Δ) .

Le plan (Π) contenant le parallèle est orthogonal à (Δ) et coupe donc (Σ) selon un cercle (\mathcal{C}) (figure IV.5) dont le centre est celui du parallèle et le rayon est celui du cylindre, donc l'image du parallèle est incluse dans (\mathcal{C}) .

Réciproquement, pour tout point de (\mathcal{C}) , le rayon de (\mathcal{C}) contenant ce point coupe la sphère en un unique point appartenant au parallèle de même centre que (\mathcal{C}) .

2) Échelle le long d'un parallèle

M et T sont sur un même parallèle, les points de l'équateur de même longitude sont respectivement A et B .

On note :
 $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega T}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \theta$ (θ est la différence de longitude exprimée en degrés)

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OT}) = \varphi$$

D'après la figure IV.5 ci-contre, on a $\Omega M = \Omega T = R \cos(\varphi)$

Donc, au point de vue des arcs :

$$\widehat{MT} = (R \cos(\varphi)) \frac{\theta\pi}{180} \text{ et } \widehat{AB} = R \frac{\theta\pi}{180}.$$

$$\widehat{M'T'} = \widehat{AB}$$

Comme $0 < \varphi < 90$, on a alors $\widehat{M'T'} = \frac{1}{\cos(\varphi)} \widehat{MT}$ ou encore

$$\boxed{\frac{\text{distance projetée}}{\text{distance réelle}} = \frac{1}{\cos(\varphi)}}.$$

Ce rapport mesure la déformation due à la projection le long du parallèle de latitude φ .

On observe que la déformation augmente avec la latitude.

φ ($^\circ$)	0	10	23,4	30	45	60	67	85
$\frac{1}{\cos(\varphi)}$	1	1,015	1,09	1,15	1,41	2	2,56	11,47

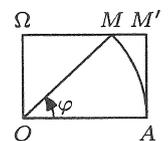
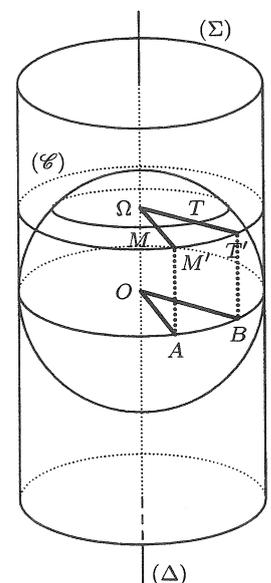


Figure IV.5.

3) Cas des méridiens

Les méridiens privés des pôles, ont pour projetés un segment (ouvert) inclus dans une génératrice de (Σ) .

Le plan (Π) contenant le méridien contient (Δ) et coupe donc (Σ) selon deux droites parallèles à (Δ) . Le demi-plan contenant le méridien et (Δ) coupe donc (Σ) selon une droite parallèle à (Δ) (figure IV.2).

Un point M du méridien autre qu'un pôle se projettera donc en un point du segment ouvert $]ns[$ (voir figure 3) ci-contre). L'image du méridien sera donc incluse dans $]ns[$.

Réciproquement, de tout point F de $]ns[$, on peut associer un unique point E du méridien tel que (EF) et (Nn) soient parallèles. F est alors le projeté de E . Ainsi, l'image du méridien privé des pôles est bien $]ns[$.

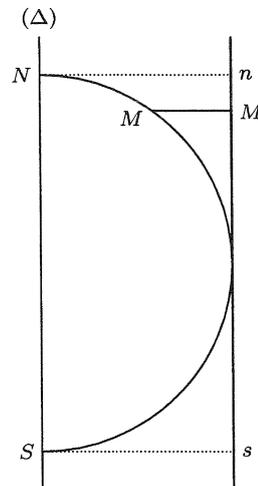


Figure IV.6.

4) Propriété

La projection isocylindrique est équivalente : elle conserve les rapports d'aires.

On peut, avec des élèves de lycée, montrer qu'il y a conservation des aires dans le cas particulier suivant : on considère l'ensemble des points de la sphère ayant une latitude comprise entre φ_1 et φ_2 (avec $\varphi_1 < \varphi_2$) et une longitude comprise entre λ_1 et λ_2 (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

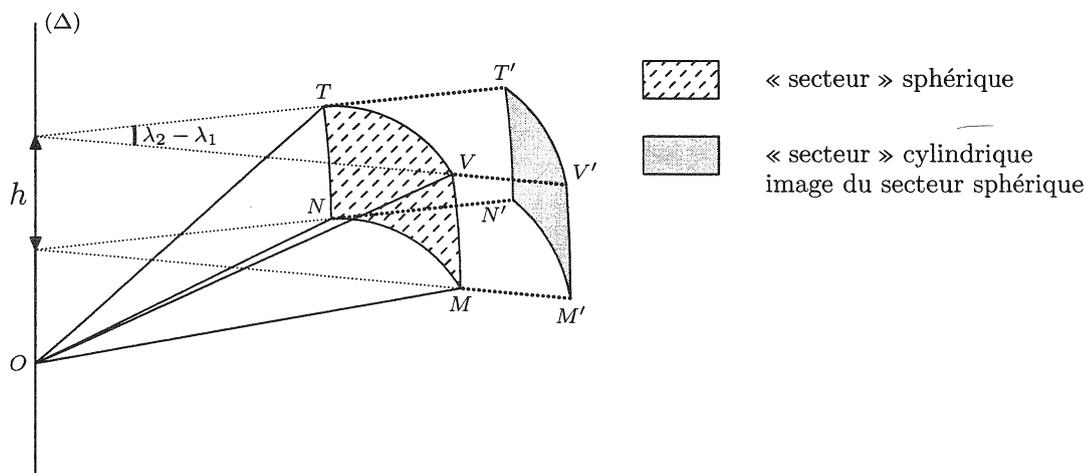


Figure IV.7.

L'ensemble considéré est un « secteur » de couronne sphérique de hauteur h et d'angle au centre $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{180} \pi$.

Notons \mathcal{A} l'aire de cet ensemble et \mathcal{A}' celle de son image par projection isocylindrique.

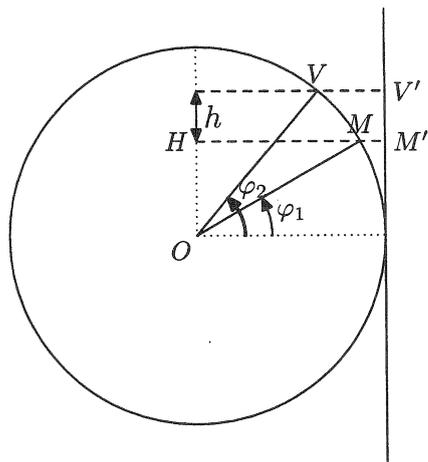


Figure dans le plan (MOV)
(plan contenant le méridien de longitude λ_1)

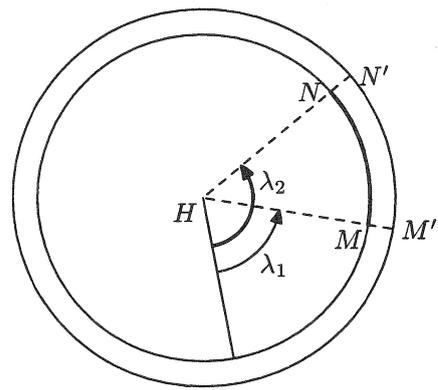


Figure dans le plan (HMN)
(plan contenant le parallèle de latitude φ_1)

Figure IV.8.

On admet que l'aire d'un tel « secteur » sphérique de hauteur h et d'angle α (exprimé en radians) est αRh (ici, $\alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{180} \times \pi$).

On en déduit : $\mathcal{A} = R \times h \times \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{180} \times \pi$.

Par projection isocylindrique, l'ensemble précédent a pour image un « secteur » cylindrique.

D'où : $\mathcal{A}' = \widehat{M'N'} \times h$.

Or, $\widehat{M'N'}$ est un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{180} \times \pi$ (en radians).

D'où : $\mathcal{A}' = R \times h \times \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{180} \times \pi$.

En conclusion, les deux ensembles (le domaine sphérique et son image par projection cylindrique) ont bien la même aire.

On peut ensuite admettre que tout domaine de la sphère peut se décomposer en réunions de domaines du type précédent et conclure que la projection isocylindrique conserve les aires.

Remarque : l'aire d'une couronne sphérique de hauteur h et de rayon R est $2\pi Rh$.

Nous proposons également une démonstration, de niveau universitaire, à l'intention des enseignants :

Soit S la sphère définie par la paramétrisation

$$f : \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right] \times [0 ; 2\pi[& \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \lambda) & \longmapsto (R \cos(\varphi) \cos(\lambda), R \cos(\varphi) \sin(\lambda), R \sin(\varphi)) \end{cases}$$

La normale vaut

$$\vec{N}(\varphi, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi, \lambda) \wedge \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\varphi, \lambda)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi, \lambda) &= (-R \sin(\varphi) \cos(\lambda), -R \sin(\varphi) \sin(\lambda), R \cos(\varphi)) \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\varphi, \lambda) &= (-R \cos(\varphi) \sin(\lambda), R \cos(\varphi) \cos(\lambda), 0) \end{aligned}$$

donc :

$$\vec{N}(\varphi, \lambda) = (-R^2 \cos^2(\varphi) \cos(\lambda), -R^2 \cos^2(\varphi) \sin(\lambda), -R^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi))$$

Par définition⁴, l'aire de la surface S est :

$$a(S) = \iint_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \times [0; 2\pi[} H(\varphi, \lambda) d\varphi d\lambda \quad \text{avec} \quad H(\varphi, \lambda) = \|\vec{N}(\varphi, \lambda)\|$$

L'aire d'un élément de surface \tilde{S} de S défini par $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$ et $\lambda \in [\lambda_1; \lambda_2]$ est :

$$\mathcal{A}(\tilde{S}) = \iint_{[\varphi_1; \varphi_2] \times [\lambda_1; \lambda_2]} H(\varphi, \lambda) d\varphi d\lambda$$

Or, $H(\varphi, \lambda) = R^2 \cos(\varphi)$ puisque $\cos(\varphi) \geq 0$ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

D'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tilde{S}) &= \iint_{[\varphi_1; \varphi_2] \times [\lambda_1; \lambda_2]} R^2 \cos(\varphi) d\varphi d\lambda \\ &= R^2 (\lambda_2 - \lambda_1) (\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)) \end{aligned}$$

Calculons maintenant l'aire de la surface \tilde{S}' projeté de la surface \tilde{S} sur le cylindre (Σ) .
 (Σ) est paramétré par :

$$g : \begin{cases} [0; 2\pi] \times [-R; R] & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) & \longmapsto (R \cos(\theta), R \sin(\theta), z) \end{cases}$$

On en déduit :

$$\vec{N}'(\theta, z) = \frac{\partial g}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial g}{\partial z} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = (-R \sin(\theta), R \cos(\theta), 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

D'où $\|\vec{N}'(\theta, z)\| = R$.

Quelle est la paramétrisation de \tilde{S}' ?

- Quand λ varie entre λ_1 et λ_2 , alors θ varie entre λ_1 et λ_2 ;
- Quand φ varie entre φ_1 et φ_2 , alors z varie entre $R \sin(\varphi_1)$ et $R \sin(\varphi_2)$. En effet :

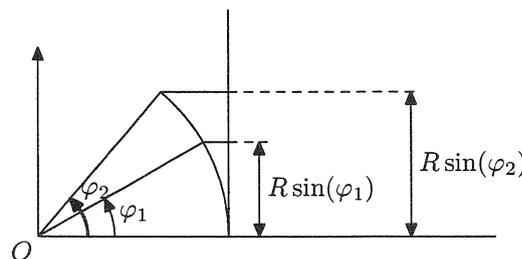


Figure IV.9.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tilde{S}') &= \iint_{[\lambda_1; \lambda_2] \times [R \sin(\varphi_1); R \sin(\varphi_2)]} \|\vec{N}'(\theta, z)\| d\theta dz \\ &= \iint_{[\lambda_1; \lambda_2] \times [R \sin(\varphi_1); R \sin(\varphi_2)]} R d\theta dz \\ &= R (\lambda_2 - \lambda_1) (R \sin(\varphi_2) - R \sin(\varphi_1)) \\ &= R^2 (\lambda_2 - \lambda_1) (\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)) \end{aligned}$$

On a donc : $\mathcal{A}(\tilde{S}) = \mathcal{A}(\tilde{S}')$...

Il y a conservation des aires des surfaces élémentaires. On en déduit qu'il y a conservation des aires pour toute surface incluse dans S paramétrée à partir d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 **quarrable**⁴.

⁴cf. Lelong-Ferrand/Arnaudies, *Cours de mathématiques*, tome 4

V Projection cylindrique centrale

1. Définition et propriétés

1) Définition

Soit la sphère de centre O , de rayon R , et le cylindre (Σ) tangent à la sphère suivant l'équateur. L'axe (Δ) du cylindre coupe la sphère en N et S .

Soit M un point de la sphère, différent de N et S .

On appelle image de M par la projection cylindrique centrale sur le cylindre (Σ) , le point M' , intersection de la demi-droite $[OM)$ avec (Σ) .

Remarque : tout point de l'équateur est invariant par cette projection.

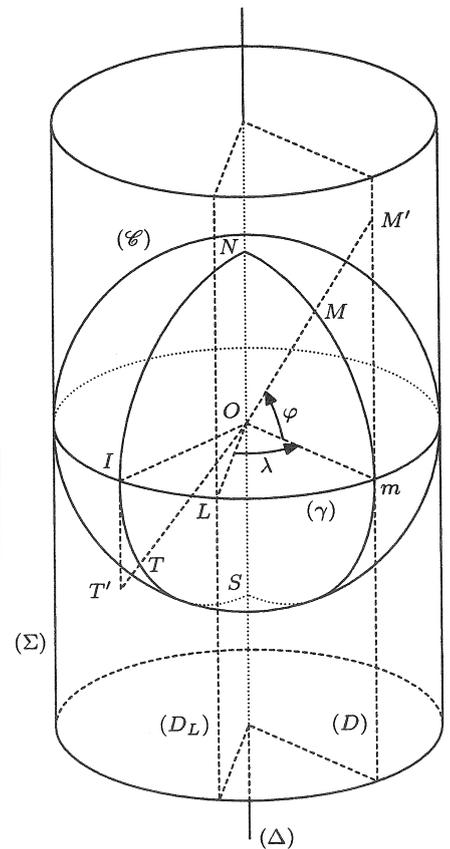


Figure V.1.

2) Coordonnées

On rappelle que φ désigne la latitude, en degrés, du point M , et λ sa longitude.

On considère un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ de l'espace, tel que $\vec{i} = \frac{1}{R} \overrightarrow{OL}$ et $\vec{k} = \frac{1}{R} \overrightarrow{ON}$, L étant le point d'intersection de l'équateur et du méridien de Greenwich (voir figure V.1).

Les coordonnées de M sont $(R \cos(\varphi) \cos(\lambda) ; R \cos(\varphi) \sin(\lambda) ; R \sin(\varphi))$.

Les coordonnées de M' sont $(R \cos(\lambda) ; R \sin(\lambda) ; R \tan(\varphi))$.

3) Parallèles

On a représenté ci-contre le parallèle passant par M (cercle (\mathcal{C}) de centre ω), et son image par la projection cylindrique centrale : le cercle (\mathcal{C}') , de centre ω' , passant par M' , intersection de (Σ) avec le demi-cône de révolution de sommet O , d'axe (Δ) , contenant ce parallèle.

Les parallèles se projettent en des cercles sur (Σ) .

Remarque : l'équateur se projette en lui-même.

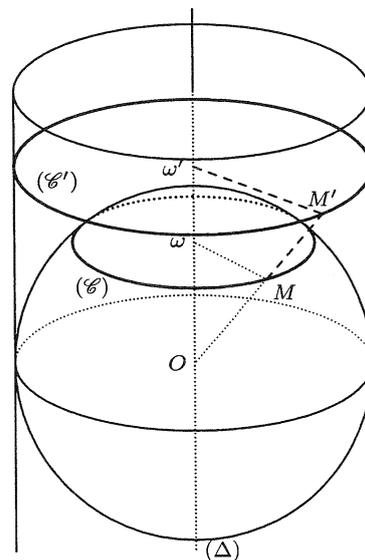


Figure V.2.

4) Méridiens

M étant un point non situé sur l'équateur, m étant le point de l'équateur de même longitude que M , on a représenté ci-contre le méridien passant par M (demi-cercle ouvert de diamètre $[NS]$), et son image par la projection cylindrique centrale : la droite (mM') , intersection de (Σ) avec le demi-plan ouvert, de frontière (Δ) , contenant ce méridien.

Les méridiens se projettent en des droites, génératrices de (Σ) .

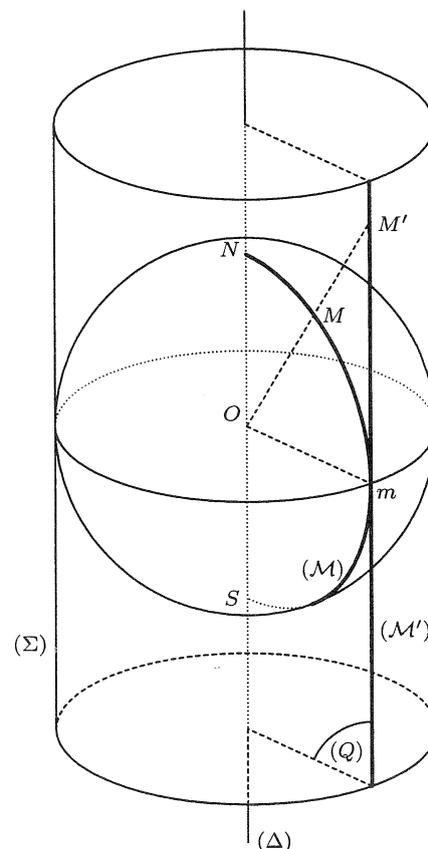


Figure V.3.

5) Image d'un grand cercle

L'image d'un grand cercle ne passant pas par les pôles N et S est une ellipse, intersection du plan contenant ce grand cercle avec le cylindre (Σ) .

Remarque : l'image de l'équateur est un cercle.

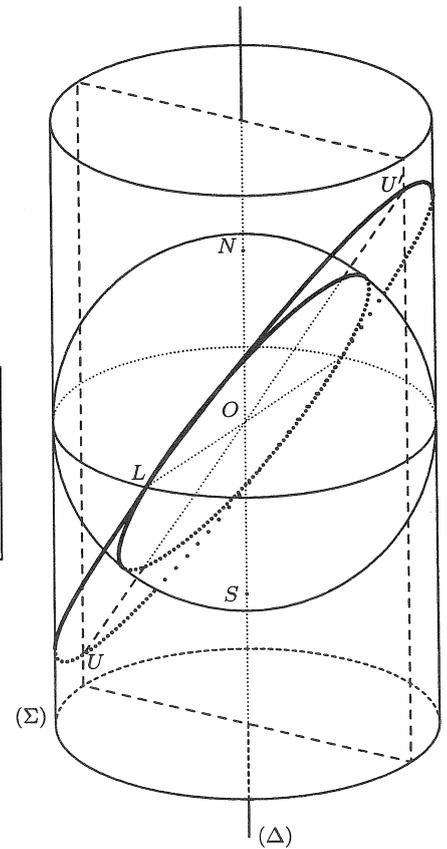


Figure V.4.

6) Développement du cylindre

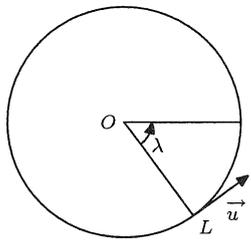
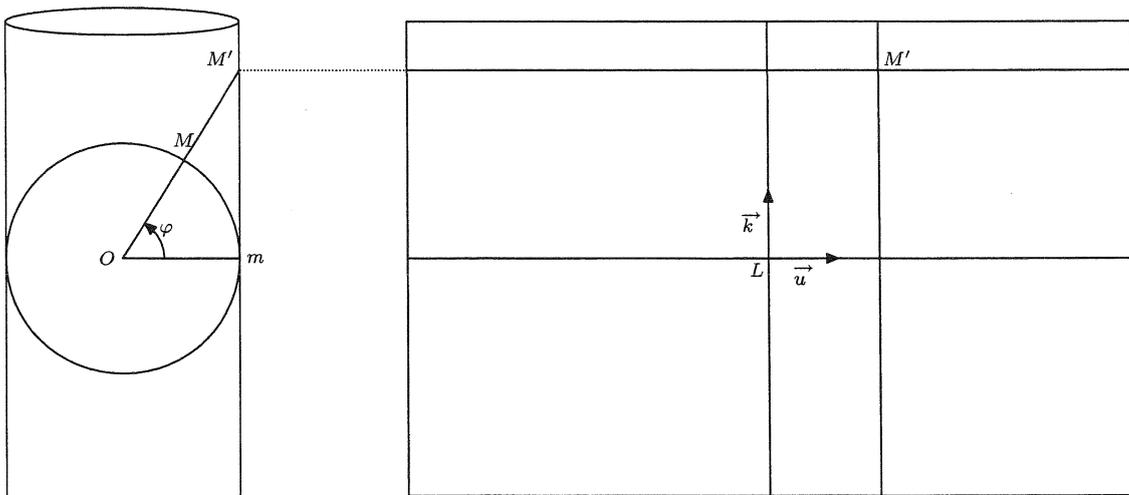
Lorsque l'on développe le cylindre pour obtenir une carte plane,

- les parallèles sont représentés par des segments de droite et les méridiens par des droites,
- les grands cercles (autres que l'équateur et ne passant pas par les pôles N et S) sont représentés par des arcs de sinusoides (voir figure V.5 page suivante).

7) Orthodromie

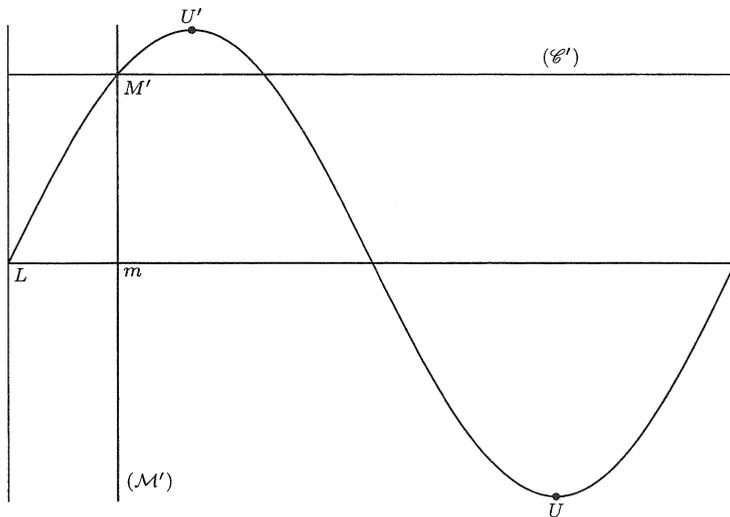
Le plus court chemin entre deux points de même longitude est représenté par un segment de droite. Il en est de même pour deux points situés sur l'équateur.

Dans tous les autres cas, le plus court chemin entre deux points est représenté par un arc de sinusoides.



Les coordonnées de M' dans le repère orthonormé

$$(L, \vec{u}, \vec{k}) \text{ sont } \left(R\lambda \frac{\pi}{180} ; R \tan(\varphi) \right).$$



U et U' sont les sommets de l'ellipse situés sur le grand axe.

Figure V.5.

Le projeté d'un grand cercle sur le cylindre est une ellipse qui se développe selon une sinusoïde. On peut faire varier l'inclinaison du grand cercle par rapport à l'équateur : on obtient alors d'autres arcs de sinusoïdes de mêmes extrémités.

2. Trame de la carte obtenue par projection cylindrique centrale

- Images des méridiens : la distance d'un méridien au méridien de Greenwich est proportionnelle à $|\lambda|$; les méridiens pris tous les 15° seront donc des droites équidistantes sur la trame.
- Images des parallèles : la distance à l'équateur est proportionnelle à $|\tan(\varphi)|$.

Voir figure V.6 page suivante.

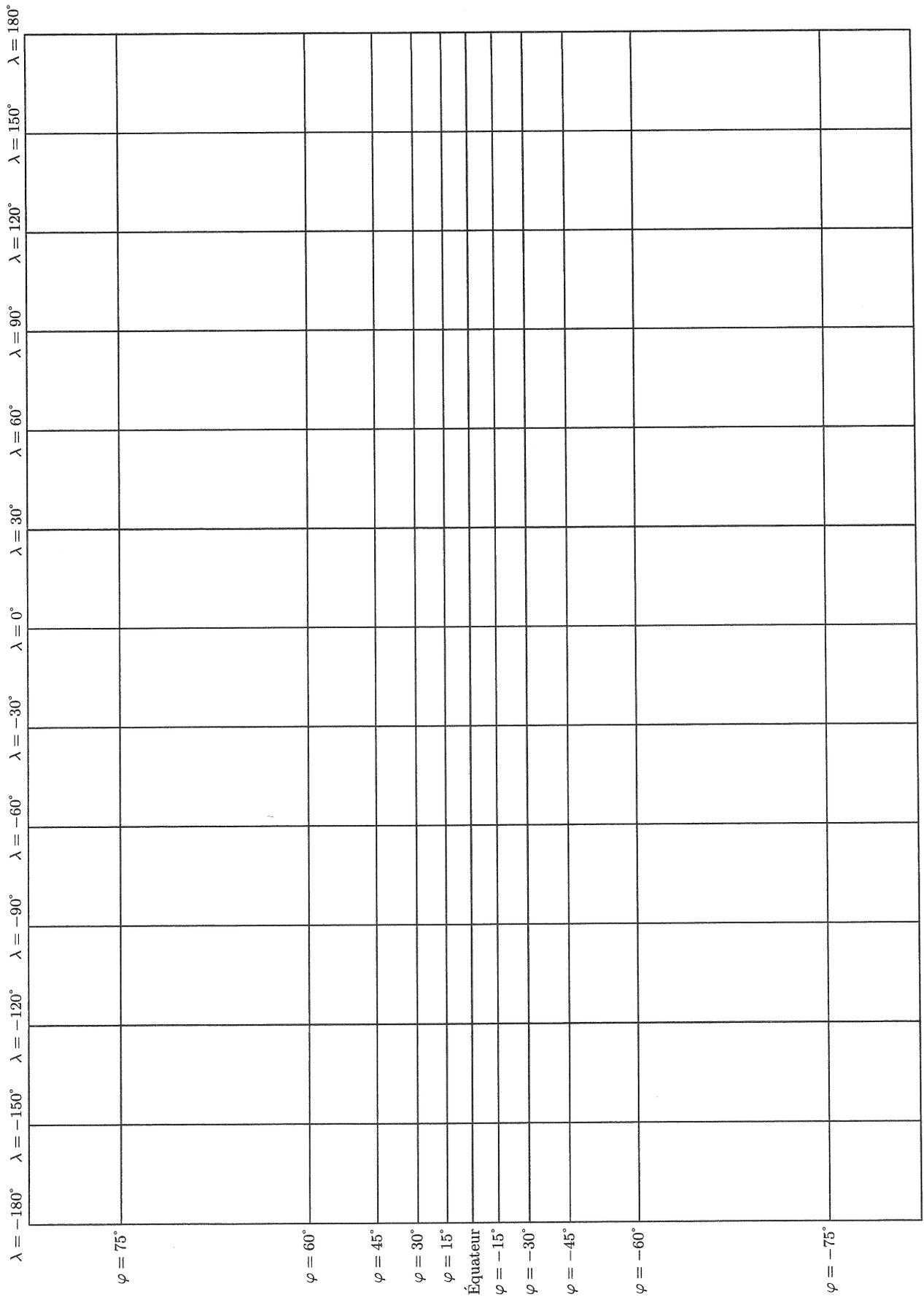


Figure V.6.

Représentation du globe terrestre obtenue par projection cylindrique centrale

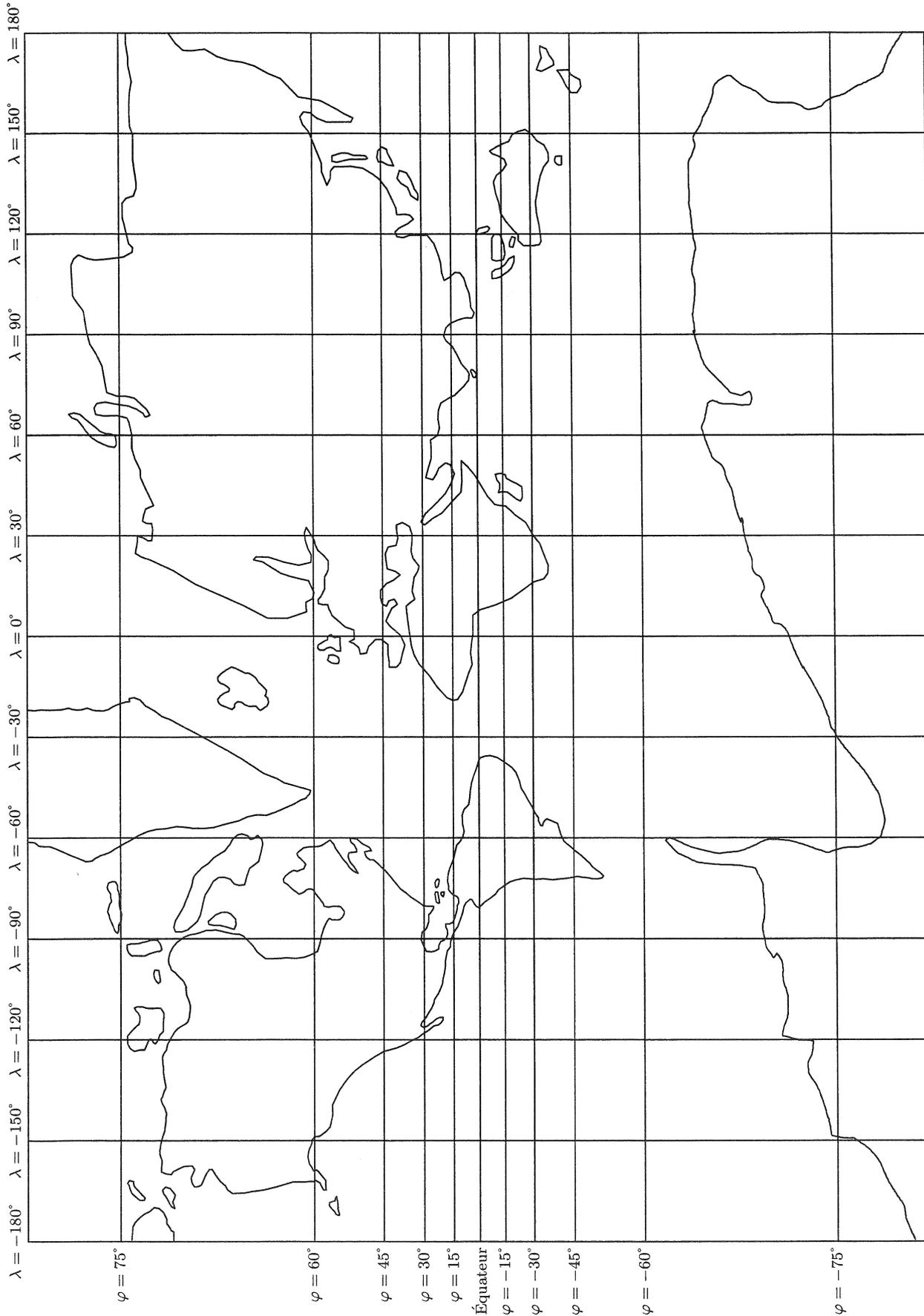


Figure V.7.

3. Démonstrations

1) Image d'un parallèle

Soit un point M de coordonnées $(R \cos(\varphi) \cos(\lambda) ; R \cos(\varphi) \sin(\lambda) ; R \sin(\varphi))$ sur le parallèle (\mathcal{C}) de latitude φ , et son projeté M' de coordonnées $(R \cos(\lambda) ; R \sin(\lambda) ; R \tan(\varphi))$ dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ précédemment défini.

$$M \in (\mathcal{C}) \iff \varphi = \text{cte} \iff z_{M'} = \text{cte},$$

ce qui équivaut à dire que le point M' appartient au plan P' d'équation $z = R \tan(\varphi)$.

Considérons le point $\omega'(0 ; 0 ; R \tan(\varphi))$ appartenant à P' . Il vient :

$$M \in (\mathcal{C}) \iff \overrightarrow{\omega'M'} = R \cos(\lambda) \vec{i} + R \sin(\lambda) \vec{j},$$

ce qui équivaut à dire, λ décrivant tout l'intervalle $] - 180 ; 180]$, que le point M' appartient au cercle (\mathcal{C}') , de centre ω' et de rayon R , contenu dans P' .

2) Image d'un méridien (N et S exclus)

► Démonstration analytique

Soit un point M , de coordonnées $(R \cos(\varphi) \cos(\lambda) ; R \cos(\varphi) \sin(\lambda) ; R \sin(\varphi))$ sur un méridien (\mathcal{M}) de longitude λ . Son projeté M' a pour coordonnées, dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, $(R \cos(\lambda) ; R \sin(\lambda) ; R \tan(\varphi))$.

$$M \in (\mathcal{M}) \iff \lambda = \text{cte}$$

Considérons le point $m(R \cos(\lambda) ; R \sin(\lambda) ; 0)$ appartenant à l'équateur. Il vient :

$$M \in (\mathcal{M}) \iff \overrightarrow{mM'} = R \tan(\varphi) \vec{k},$$

ce qui équivaut à dire, φ décrivant tout l'intervalle $] - 90 ; 90[$, que le point M' appartient à la droite (D) , parallèle à (Δ) passant par m .

Remarque : l'égalité $\overrightarrow{mM'} = R \tan(\varphi) \vec{k}$ justifie que les parallèles sont à une distance de l'équateur proportionnelle à $|\tan(\varphi)|$.

► Démonstration géométrique

Un méridien (\mathcal{M}) est l'intersection de la sphère avec un demi-plan ouvert (Q) de frontière (Δ) .

Soit un point M élément de (\mathcal{M}) ; alors son projeté M' appartient à la fois à (Q) et au cylindre (Σ) , c'est-à-dire à une droite (D) génératrice de (Σ) .

Soit un point M' élément d'une droite (D) génératrice de (Σ) ; alors M' appartient à un demi-plan (Q) de frontière (Δ) . Son antécédent M , par la projection cylindrique centrale, est donc à la fois dans (Q) et sur la sphère, donc sur un méridien (\mathcal{M}) .

3) Intersection d'un plan et d'un cylindre

L'équation du cylindre (Σ) est $x^2 + y^2 = R^2$ dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Soit (Q) un plan non perpendiculaire à l'axe du cylindre. On peut alors en donner une équation de la forme $z = ax + by$, avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$.

Un point N de coordonnées $(x ; y ; z)$ dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ appartient à l'intersection du plan (Q) et du cylindre (Σ) si et seulement si ses coordonnées s'écrivent :

$$\begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \\ z = aR \cos(t) + bR \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0 ; 2\pi[$$

Développons le cylindre : les coordonnées de N dans le repère orthonormé $(L ; \vec{u} ; \vec{k})$ sont :

$$\begin{cases} X = Rt \\ Y = aR \cos(t) + bR \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0 ; 2\pi[$$

On obtient donc un système d'équations paramétriques d'un arc de sinussoïde. Ainsi, les orthodromies sur une telle carte sont représentées par des arcs de sinussoïdes (voir figure V.5).

4. Projection de Mercator⁵

La projection cylindrique centrale se définit facilement géométriquement, mais n'est guère utilisée en cartographie car elle a l'inconvénient de beaucoup déformer, notamment pour les grandes latitudes, et, d'autre part, elle ne conserve ni les rapports d'aires, ni les rapports de distance, ni les angles.

En revanche, on rencontre souvent en cartographie une projection qui ressemble à la projection cylindrique centrale, qui est d'ailleurs parfois confondue avec celle-ci : il s'agit de la projection de Mercator.

Mercator (1512–1594), mathématicien et géographe flamand du XVI^e siècle réalisa la première grande carte à l'usage des navigateurs. Or, pour aller d'un point à un autre, ces derniers utilisaient une boussole qui leur permettait de suivre une route « à cap constant », c'est-à-dire en gardant un angle fixe avec le nord.

Mercator imagina une projection de type « cylindrique » : les méridiens sont représentés par des droites parallèles de telle sorte que la distance d'un méridien au méridien de Greenwich soit proportionnelle à la valeur absolue de sa longitude (comme pour la projection cylindrique centrale) ; les parallèles sont représentés par des segments de droites perpendiculaires aux méridiens, mais Mercator eut l'idée d'ajuster l'écartement des parallèles de façon à ce que les routes « à cap constant », (appelées aussi loxodromies), soient transformées en segments de droites.

La projection de Mercator n'a pas de définition géométrique simple, mais peut être définie analytiquement.

⁵Référence : Tangente n° 21.

Calcul de l'échelle des parallèles

Soit un point A de la sphère, de latitude φ , C un point de même latitude que A , et B un point de même longitude que A .

Sur la sphère :

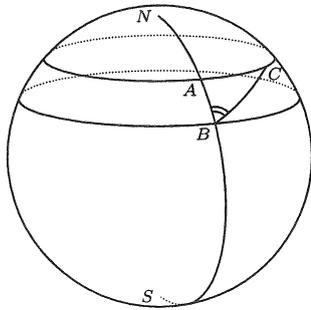


Figure V.8.

Sur la carte :

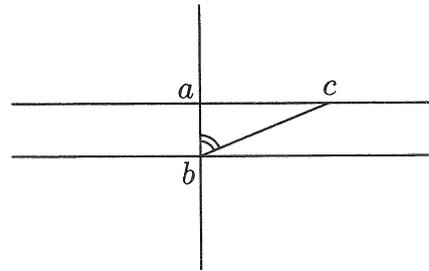


Figure V.9.

Si l'on note $d\varphi$ la différence de latitude (en radians) entre A et B , et $d\lambda$ la différence de longitude (en radians) entre A et C :

$$\widehat{AC} = R \cos(\varphi)d\lambda; \widehat{AB} = Rd\varphi$$

On suppose que l'équateur est à l'échelle 1, et donc que tous les parallèles sont représentés par des segments de longueur $2\pi R$.

On note a , b et c les images respectives de A , B et C sur cette carte, et dE l'écartement (sur la carte) entre les parallèles passant par a et b .

$$ac = Rd\lambda; ab = dE$$

On suppose que le triangle ABC est suffisamment petit pour pouvoir considérer qu'il est plan, et on cherche à quelle condition les angles \widehat{ABC} et \widehat{abc} sont égaux :

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} = \widehat{abc} &\iff \frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac} \\ \widehat{ABC} = \widehat{abc} &\iff \frac{d\varphi}{\cos(\varphi)} = \frac{dE}{R} \\ \widehat{ABC} = \widehat{abc} &\iff \frac{dE}{d\varphi} = \frac{R}{\cos(\varphi)} \end{aligned}$$

La fonction $f : x \mapsto R \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right)$ vérifie : $f'(x) = \frac{R}{\cos(x)}$ et $f(0) = 0$ (x étant exprimé en radians).

La trame s'obtient alors selon le schéma ci-dessous : on note M un point du globe de latitude φ et de longitude λ (exprimées en degrés), et m son image sur la carte.

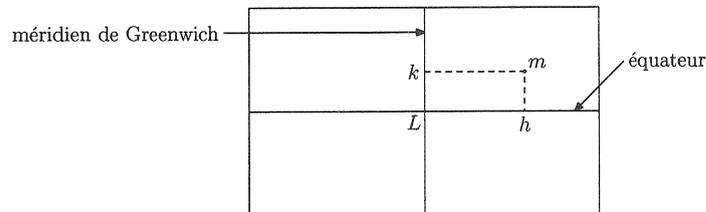


Figure V.10.

Lh est proportionnelle à $|\lambda|$; Lk est proportionnelle à $\ln \left(\tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right)$.

À l'époque de Mercator, on ne disposait ni du calcul différentiel, ni du calcul intégral, ni de la fonction \ln . Mercator a pu néanmoins réaliser sa carte pas à pas en prenant par exemple à chaque étape une différence de latitude de 1 degré.

La distance (sur la carte) du parallèle de latitude φ à l'équateur est alors donnée par la formule :

$$\frac{R}{\cos(1^\circ)} + \frac{R}{\cos(2^\circ)} + \dots + \frac{R}{\cos(\varphi^\circ)}$$

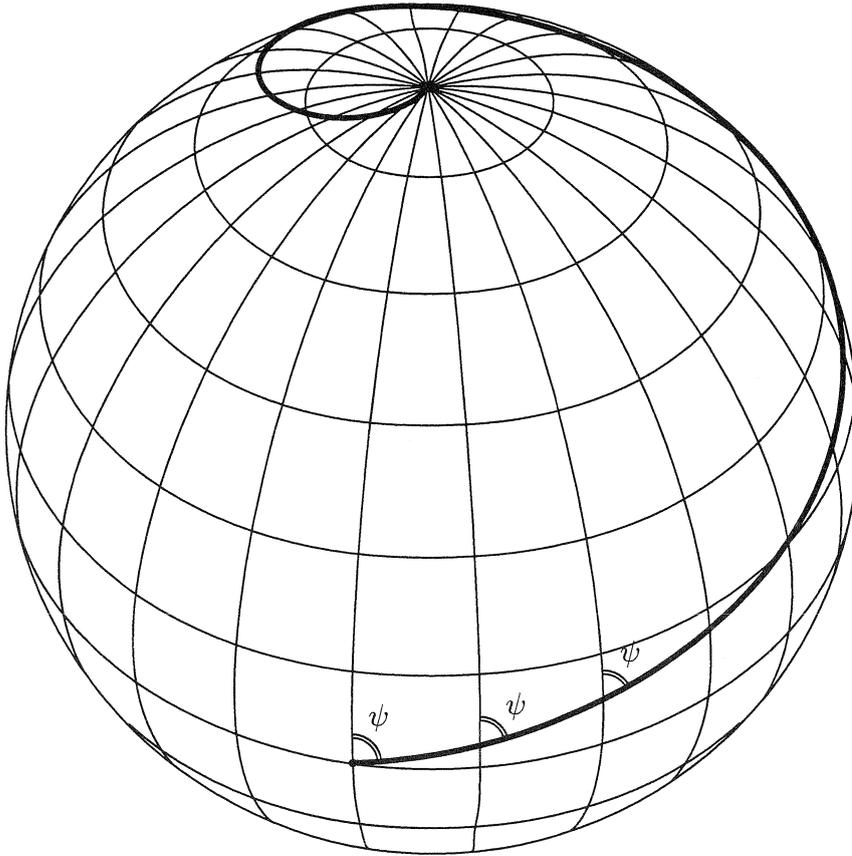


Figure V.11. Loxodromie sur la sphère

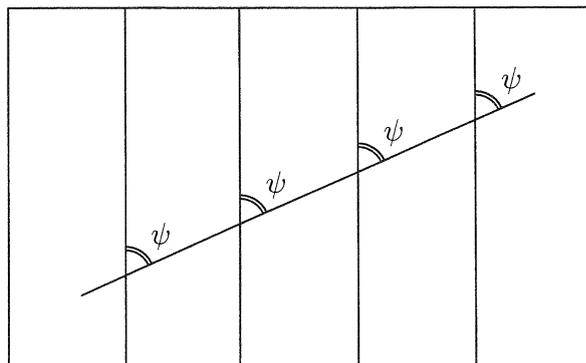


Figure V.12. Loxodromie en projection de Mercator

Remarque : la loxodromie sur la sphère est une courbe qui s'enroule indéfiniment autour du pôle sans jamais l'atteindre.

VI Projection conique simple

1. Définition et propriétés

1) Définition

Soit un cône (Σ) de sommet Ω , d'axe (Δ) , tangent à la sphère selon un parallèle fixé (Γ) de latitude θ non nulle, $-90 < \theta < 90$.

Soit M , point de la sphère autre qu'un pôle et H son projeté orthogonal sur (Δ) .

On appelle **image de M par la projection conique sur (Σ)** le point M' , intersection de (Σ) et de la demi-droite $[HM)$.

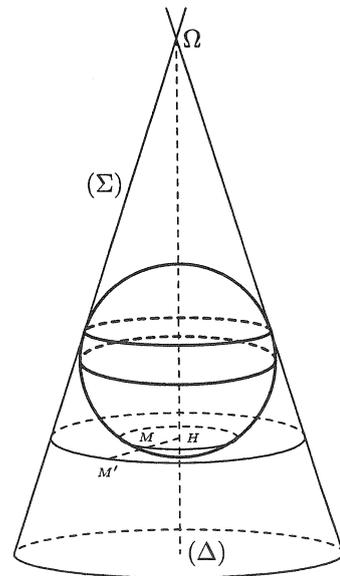


Figure VI.1.

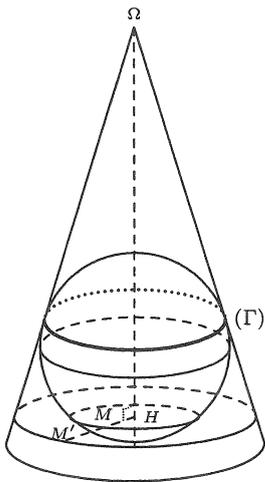


Figure VI.2.

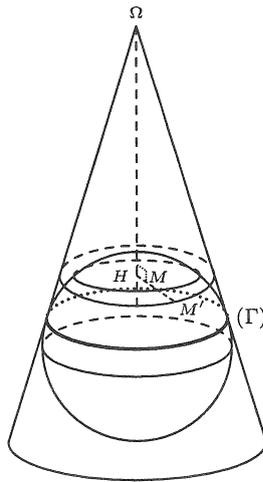


Figure VI.3.

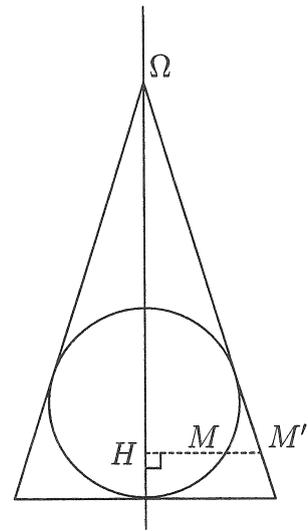


Figure VI.4.

2) Parallèles et méridiens

Les parallèles se projettent en des cercles de (Σ) centrés sur (Δ) et d'axe (Δ) .

Le rapport des rayons entre le parallèle de latitude φ et son projeté est $\frac{\cos(\varphi) \cos(\theta)}{1 - \sin(\varphi) \sin(\theta)}$.

(Γ) est l'unique parallèle invariant par projection.

(voir figures VI.2 et VI.3 : dessin en perspective ; figure VI.4 : section par un plan contenant l'axe du cône)

Les méridiens se projettent en des segments (ouverts) d'extrémités les projetés des pôles et inclus dans des droites sécantes au sommet du cône (généatrices de (Σ)).

(voir figures VI.5 et VI.6)

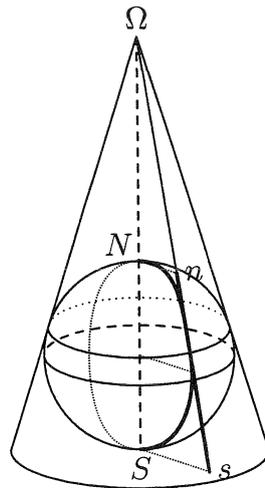


Figure VI.5.

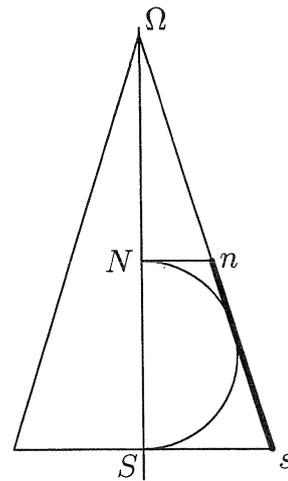


Figure VI.6.

3) Projection conique (aspect analytique)

Coordonnées de Ω

Le cône est tangent à la sphère.

Le parallèle (Γ) de latitude θ ($\theta \neq 0$) est la ligne de contact.

Le demi-angle au sommet est de mesure θ (angles à côtés perpendiculaires).

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

où le vecteur \vec{i} a même direction et même sens que \overrightarrow{OG} , G étant le point d'intersection de l'équateur et du méridien de Greenwich, et le vecteur \vec{k} a même direction et même sens que \overrightarrow{SN} (axe des pôles).

On rappelle que le point M de la sphère de latitude φ et de longitude λ a pour coordonnées :

$$M(R \cos(\varphi) \cos(\lambda) ; R \cos(\varphi) \sin(\lambda) ; R \sin(\varphi)).$$

Considérons un point A quelconque sur le parallèle (Γ) .

Sur la figure VI.7, les points A , O et Ω sont dans le plan de la feuille.

On a alors $A(R \cos(\theta) \cos(\lambda_A) ; R \cos(\theta) \sin(\lambda_A) ; R \sin(\theta))$.

Le sommet Ω du cône de coordonnées $(0, 0, z_\Omega)$ vérifie $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{A\Omega}$ soit $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$.

$$-(R \cos(\theta) \cos(\lambda_A))^2 - (R \cos(\theta) \sin(\lambda_A))^2 + R \sin(\theta)(z_\Omega - R \sin(\theta)) = 0$$

$$-R^2 + z_\Omega R \sin(\theta) = 0$$

et enfin $z_\Omega = \frac{R}{\sin(\theta)}$. On a donc $\Omega \left(0 ; 0 ; \frac{R}{\sin(\theta)} \right)$.

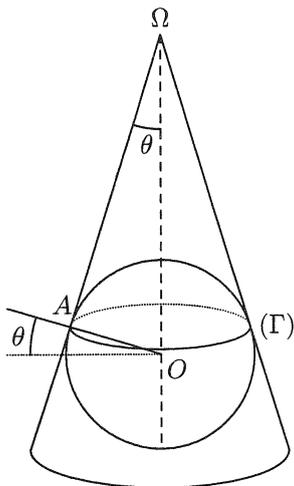
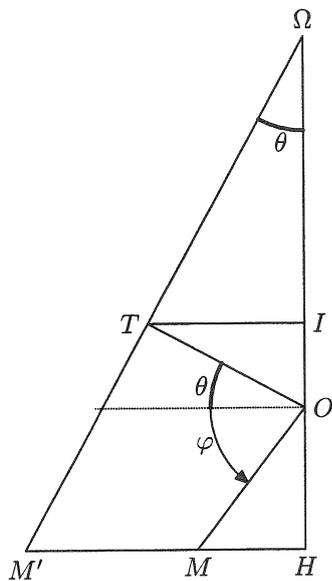


Figure VI.7.

Coordonnées de M' 

Soit T le point du parallèle (Γ) de même longitude que M .
 $T(R \cos(\theta) \cos(\lambda) ; R \cos(\theta) \sin(\lambda) ; R \sin(\theta))$.

On note I le centre de cette ligne de contact (Γ) .

Enfin, M' est le projeté de M sur le cône.

L'homothétie de centre Ω envoyant I sur H envoie T en M' , donc le rapport d'homothétie k vaut :

$$k = \frac{\overline{\Omega H}}{\overline{\Omega I}} = \frac{z_{\Omega} - z_H}{z_{\Omega} - z_I} = \frac{\frac{R}{\sin(\theta)} - R \sin(\varphi)}{\frac{R}{\sin(\theta)} - R \sin(\theta)} = \frac{1 - \sin(\theta) \sin(\varphi)}{1 - \sin^2(\theta)}$$

d'où finalement $k = \frac{1 - \sin(\theta) \sin(\varphi)}{\cos^2(\theta)}$.

Figure VI.8.

L'égalité $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega T}$ permet de déterminer les coordonnées de M' :

$$\begin{cases} x' = kR \cos(\theta) \cos(\lambda) \\ y' = kR \cos(\theta) \sin(\lambda) \\ z' - \frac{R}{\sin(\theta)} = k \left(R \sin(\theta) - \frac{R}{\sin(\theta)} \right) \end{cases}$$

$$\text{soit } z' = \frac{R}{\sin(\theta)} (1 + k \sin^2(\theta) - k) = \frac{R}{\sin(\theta)} (1 - k \cos^2(\theta))$$

$$\text{soit } z' = \frac{R}{\sin(\theta)} (1 - (1 - \sin(\theta) \sin(\varphi))) = R \sin(\varphi).$$

M' a bien la même cote que M .

Finalement, M' a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x' = kR \cos(\theta) \cos(\lambda) = R \frac{(1 - \sin(\theta) \sin(\varphi)) \cos(\lambda)}{\cos(\theta)} \\ y' = kR \cos(\theta) \sin(\lambda) = R \frac{(1 - \sin(\theta) \sin(\varphi)) \sin(\lambda)}{\cos(\theta)} \\ z' = R \sin(\varphi) \end{cases}$$

2. Trame obtenue par projection conique simple

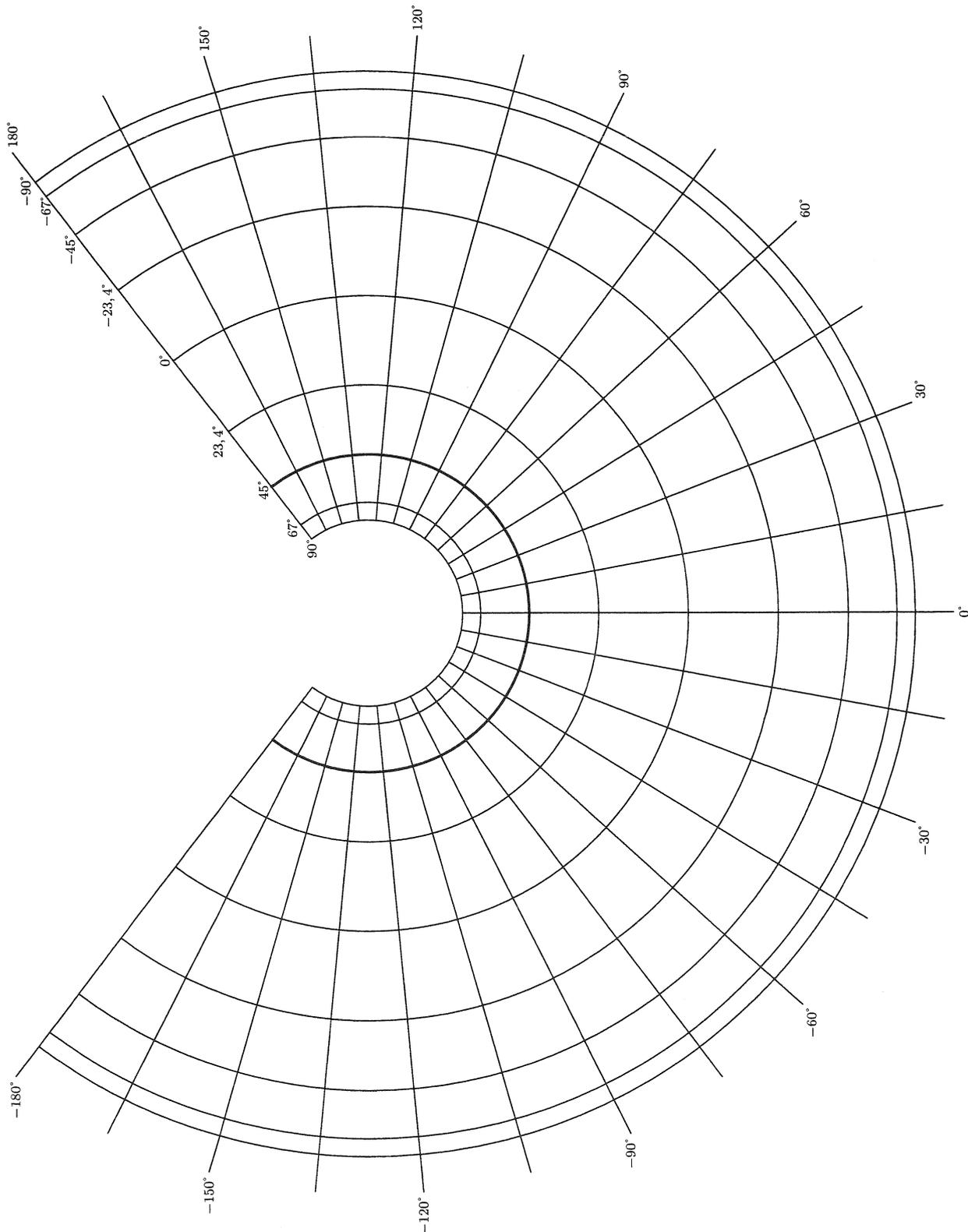


Figure VI.9.

Représentation de la Terre obtenue par projection conique simple

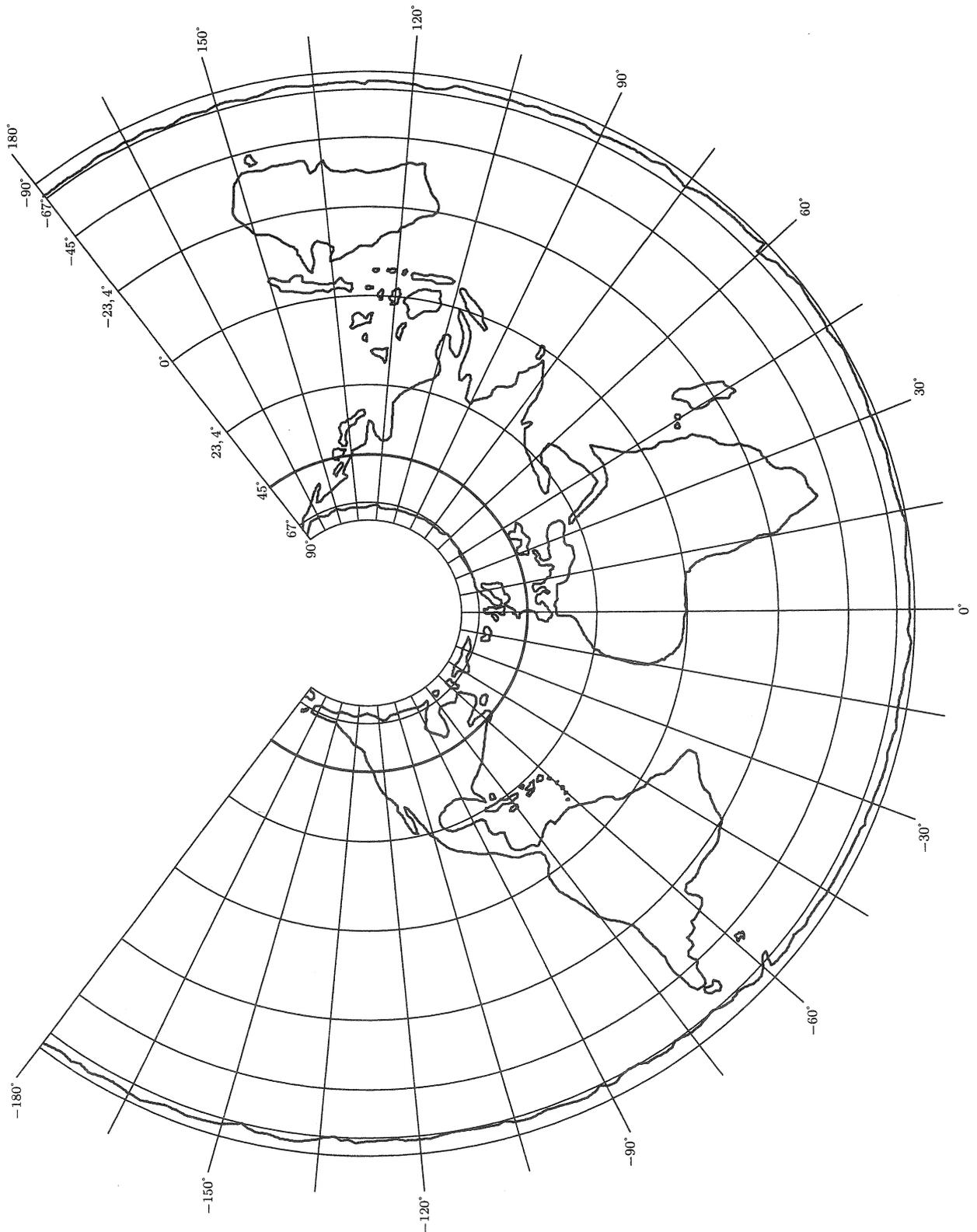


Figure VI.10.

3. Démonstrations

1) Image d'un parallèle

Les parallèles se projettent en des cercles de (Σ) centrés sur (Δ) .

Le plan (π) contenant le parallèle (C) étant orthogonal à l'axe (Δ) du cône, il coupe alors le cône suivant un cercle (C') , de même centre que (C) situé sur (Δ) . L'image du parallèle est donc incluse dans ce cercle.

Réciproquement, tout point P de (C') se projette orthogonalement sur (Δ) en son centre H . $[HP]$ coupe la sphère en un point M . Ce point M , appartient à la sphère et au plan (π) , donc il appartient au parallèle (C) .

L'image de (C) est donc un cercle centré sur (Δ) .

2) Étude du rapport des rayons

M , point de la sphère de latitude φ se projette en M' . T est le point de (Γ) de même longitude que M .

Le parallèle contenant M , de centre H et de rayon $r(=HM)$ se projette suivant le cercle de centre H , de rayon $r'(=HM')$. Les droites (IT) et (HM') sont parallèles, on a donc :

$$\frac{\overline{HM'}}{\overline{IT}} = \frac{\overline{\Omega H}}{\overline{\Omega I}}$$

$\overline{IT} = R \cos(\theta)$ et, d'après les calculs effectués page 50 pour les coordonnées de M' , $\frac{\overline{\Omega H}}{\overline{\Omega I}} = k = \frac{1 - \sin(\theta) \sin(\varphi)}{\cos^2(\theta)}$.

$$\text{D'où } \overline{HM'} = \frac{R(1 - \sin(\theta) \sin(\varphi))}{\cos(\theta)}$$

Ces nombres sont positifs car $0 < \theta < 90$, on a donc :

$$r' = \frac{R(1 - \sin(\theta) \sin(\varphi))}{\cos(\theta)}$$

$$\frac{\overline{\Omega M'}}{\overline{\Omega I}} = \frac{R(1 - \sin(\theta) \sin(\varphi))}{\sin(\theta) \cos(\theta)}$$

Comme $r = HM = R \cos(\varphi)$, on a

$$\frac{r'}{r} = \frac{R(1 - \sin(\theta) \sin(\varphi))}{R \cos(\varphi) \cos(\theta)} = \frac{1 - \sin(\theta) \sin(\varphi)}{\cos(\varphi) \cos(\theta)} \quad \text{et}$$

$$\frac{r'}{R} = \frac{1 - \sin(\theta) \sin(\varphi)}{\cos(\theta)}$$

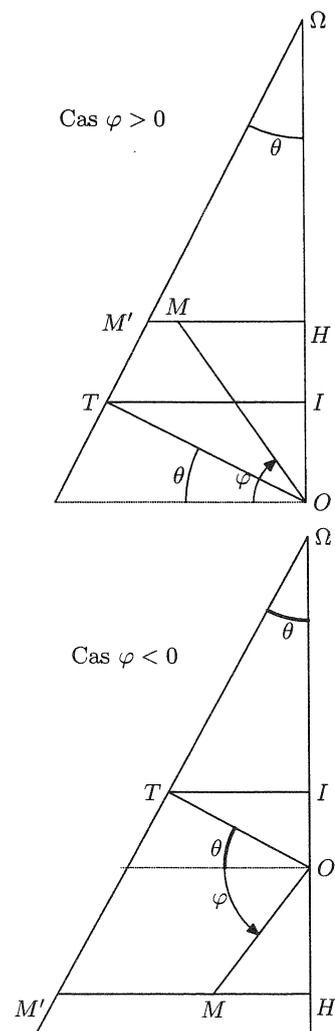


Figure VI.11.

3) Échelle le long d'un parallèle

Notons ℓ la longueur d'un arc sur un parallèle dont les extrémités ont des longitudes différent de $\Delta\lambda$ ($\Delta\lambda$ est exprimé en radians et $\Delta\lambda$ est dans $]0 ; 2\pi[$).

Notons ℓ' la longueur du projeté de l'arc précédent.

On a alors
$$\frac{\ell'}{\ell} = \frac{r'\Delta\lambda}{r\Delta\lambda} = \frac{r'}{r} \text{ soit } \frac{\ell'}{\ell} = \frac{1 - \sin(\theta) \sin(\varphi)}{\cos(\varphi) \cos(\theta)}.$$

Remarquons enfin que si $\varphi = \theta$, on a bien $\frac{\ell'}{\ell} = 1$, soit $\ell' = \ell$.

Le rapport $\frac{\ell'}{\ell} \left(= \frac{r'}{r} \right)$, échelle le long du parallèle de latitude φ entre le rayon du cercle projeté et le rayon du cercle sur la sphère, indique la déformation sur ce parallèle.

Par exemple, si le cône est tangent à la sphère selon le parallèle de latitude $\theta = 45^\circ$:

Latitude φ	85	67	45	23,4	0	-23,4	-45	-67	-85
Échelle	4,8	1,26	1	1,11	1,41	1,97	3	5,98	27,66
Latitude φ	41	42	43	44	45	46	47	48	49
Échelle	1,004 5	1,002 6	1,001	1,000 2	1	1,000 3	1,001 2	1,002 8	1,052

La déformation est donc nulle sur le parallèle (Γ), faible dans le voisinage immédiat.

4) Image d'un méridien

Les méridiens se projettent en des segments (ouverts) inclus dans des droites sécantes au sommet du cône (génératrices de (Σ)).

Soit (π) le plan contenant le méridien et M un point du méridien.

(π) contient alors $(\Delta) = (NS)$.

Le projeté M' de M , étant aligné avec H et M est donc dans (π) .

La figure VI.12 ci-contre, réalisée dans (π) , montre que l'image du méridien est incluse dans le segment ouvert $]ns[$, où n et s sont les projetés orthogonaux dans (π) de N et S .

Réciproquement, soit P un point de $]ns[$ et soit K le projeté orthogonal de P sur (Δ) . Le segment $[KP]$ coupe la sphère en un unique point Q . K , point de (Δ) , et P , point de $]ns[$, sont éléments de (π) , donc Q , point commun à la sphère et à (π) , appartient au méridien considéré.

Ainsi, l'image du méridien est le segment $]ns[$ de (π) .

On remarquera que ces points n et s dépendent de (π) , donc du méridien considéré.

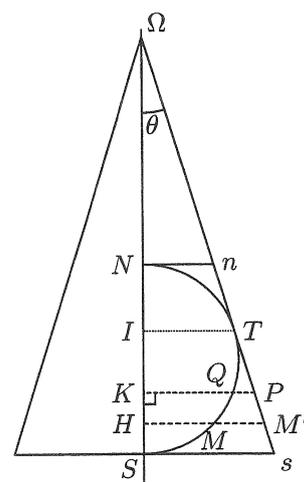


Figure VI.12.

4. Réalisation d'une carte

La projection étant réalisée sur le cône, on développe le cône pour obtenir une carte.

Étape n° 1 : Délimiter le domaine plan résultant du développement précédent.

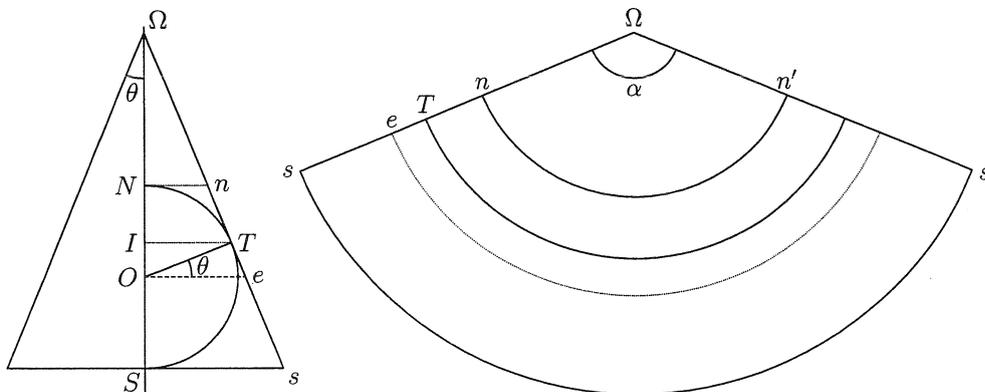


Figure VI.13.

Par conservation des longueurs, on a $2\pi Ss = \Omega s \alpha$ avec $Ss = \Omega s \sin(\theta)$. On a donc $\alpha = 2\pi \sin(\theta)$ (en radians).

De plus, d'après les résultats trouvés en 3), on a :

$$\Omega O = \frac{R}{\sin(\theta)} \text{ et } \Omega m = R \cotan(\theta) \text{ et } \Omega e = \frac{\Omega O}{\cos(\theta)} = \frac{R}{\sin(\theta) \cos(\theta)}.$$

$$\Omega S = \frac{R}{\sin(\theta)} + R = R \frac{1 + \sin(\theta)}{\sin(\theta)} \text{ d'où } \Omega s = \frac{1 + \sin(\theta)}{\sin(\theta) \cos(\theta)} R.$$

$$\Omega N = \frac{R}{\sin(\theta)} - R = R \frac{1 - \sin(\theta)}{\sin(\theta)} \text{ d'où } \Omega n = \frac{1 - \sin(\theta)}{\sin(\theta) \cos(\theta)} R.$$

Nous réaliserons une carte où le cône est tangent à la sphère selon le parallèle de latitude 45° .

En supposant $\theta = 45^\circ$, les résultats précédents deviennent :

$$\alpha = \sqrt{2} \pi \text{ rad, soit } \alpha = \sqrt{2} \cdot 180^\circ.$$

$$\text{On a aussi } \Omega s = R(2 + \sqrt{2}) \quad \Omega n = R(2 - \sqrt{2}) \quad \Omega T = R \quad \Omega e = 2R.$$

Ainsi, nous tracerons (voir figure VI.13) :

- Un secteur angulaire de sommet Ω et de mesure $\sqrt{2} \cdot 180^\circ$, soit environ 255° .
- Trois arcs de cercles de centre Ω et de rayons respectifs $\Omega n = R(2 - \sqrt{2})$, $\Omega m = R$, $\Omega s = R(2 + \sqrt{2})$.

Si nous effaçons les segments $[\Omega n]$, $[\Omega n']$, le domaine résultant délimitera notre carte.

Étape n° 2 : Réaliser la trame de la carte (parallèles et méridiens).

Cas des méridiens : Sur la carte, les méridiens seront représentés par des segments.

Sur le parallèle (Γ) de la sphère, graduons régulièrement de -180° à 180° avec un pas de 15° .

(Γ) étant invariant par projection, cette graduation régulière sera conservée sur la carte.

Nous pouvons alors représenter les méridiens de longitude $k \times 15^\circ$ où k est un entier variant de -12 à 12 .

Cas des parallèles :

Sur la carte, les parallèles seront représentés par des arcs de cercle centrés en Ω et de rayon $r_1 = \Omega M'$ (voir figure VI.8). Ainsi, le parallèle de latitude φ sera représenté par l'arc de cercle de centre Ω et de rayon $r_1 = \frac{R(1 - \sin(\theta) \sin(\varphi))}{\sin(\theta) \cos(\theta)}$.

Dans le cas où $\theta = 45^\circ$, $r_1 = R \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\varphi)}{\frac{1}{2}}$ soit $r_1 = R(2 - \sqrt{2} \sin(\varphi))$.

Le tableau suivant donne l'exemple de quelques parallèles.

Latitude φ (°)	85	67	45	23,4	0	-23,4	-45	-67	-85
$\frac{r_1}{R}$	0,59	0,70	1	1,44	2	2,56	3	3,30	3,41

L'image d'un point de la sphère sera alors représenté sur la carte par l'intersection du parallèle et du méridien correspondants.

Voir figure VI.10 page 52.

5. La projection conique de Lambert

Le principe : Cette projection utilise un cône qui coupe deux parallèles (référence : Tangente n° 83, novembre-décembre 2001, article « La Terre », Éditions POLE, Paris).

La faible déformation que l'on notait dans le voisinage du parallèle « contact » lors d'une projection conique classique pourra alors s'étendre à toute la zone comprise entre les deux parallèles.

La projection conique de Lambert est **conforme** (elle conserve les angles). C'est cette projection que l'IGN utilise pour les cartes routières de notre pays.

VII Tableau synoptique

<p>Selon la nature des déformations</p> <p>Selon la surface sur laquelle on projette</p>	<p>CONFORMES Conservation des angles</p>	<p>ÉQUIVALENTES Conservation des rapports d'aires</p>	<p>AUTRES</p>
<p>Impossible d'avoir les deux à la fois</p>			
<p>AZIMUTALES</p> <p>Projection sur un plan à partir d'un point appelé centre de la projection</p>	<p>STÉRÉOGRAPHIQUE</p> <p>Le centre de projection est le pôle opposé au point de tangence</p>		<p>GNOMONIQUE</p> <p>Le centre de projection est le centre de la Terre</p> <p>Il y a conservation des plus courts chemins</p>
<p>CYLINDRIQUES</p>	<p>MERCATOR</p>	<p>ISOCYLINDRIQUE (dite aussi cylindrique de Lambert)</p>	<p>PROJECTION CYLINDRIQUE CENTRALE</p>
<p>CONIQUES</p> <p>Projection sur un cône</p>	<p>PROJECTION CONIQUE DE LAMBERT</p> <p>Utilisée pour les cartes IGN</p>		<p>PROJECTION CONIQUE SIMPLE</p>

VIII Quelques autres pistes à explorer

Image d'un cercle

Nous avons déterminé, pour chacune des projections étudiées, l'image d'un parallèle, d'un méridien, et dans certains cas, d'un grand cercle.

On peut :

- rechercher, éventuellement à l'aide d'un logiciel, l'image de cercles autres que les précédents, dans différentes projections ;
- étudier l'image d'un arc de cercle muni d'une graduation régulière (conservation ou non des rapports de distances).

Image d'un grand cercle par projection isocylindrique

Nous avons étudié l'image d'un grand cercle passant par un point donné L de l'équateur. On peut étudier l'image d'une famille de grands cercles contenant L .

Comparaison de différentes trames

Nous avons proposé un exemple de trame pour chacune des projections étudiées. On peut envisager de construire des trames où les parallèles et les méridiens sont espacés régulièrement, par exemple tous les 10° , de façon à mieux percevoir les déformations de distances et d'aires.

Représentation de l'hémisphère Sud

Une projection gnomonique n'est pas bijective : deux points antipodiques ont la même image. Nous avons donné une carte de l'hémisphère Nord.

On peut également représenter l'hémisphère Sud.

Orthodromie

Nous avons vu qu'une orthodromie est représentée :

- en projection gnomonique, par un segment de droite ;
- en projection stéréographique, par un arc de cercle.

On peut :

- s'interroger sur la représentation d'une orthodromie dans d'autres projections.
- calculer la longueur de cette orthodromie.

Loxodromie

Dans le cas de la projection de Mercator, les loxodromies (ou routes à cap constant) sont représentées par des segments de droites.

On peut essayer de représenter des loxodromies dans d'autres projections, par exemple en projection stéréographique où leurs images sont des spirales logarithmiques⁶.

⁶La courbe d'équation polaire $\rho = \lambda e^\theta$ est appelée spirale logarithmique

Deuxième partie
Expérimentations

Sommaire

Une expérience à la Fête de la Science : triangles de la sphère	63
I Expérimentation matérielle	63
II Transposer les notions planes à la sphère	63
1. Grands cercles	63
2. Triangles sphériques	64
3. Angles, biangles	65
4. Aires	66
Une expérience en lycée professionnel	69
I Préparation de la séance en classe	69
1. Contenu de la séance	69
2. Différences entre le plan et la sphère	70
3. Études de cartes réalisées par une projection cylindrique et par projection gnomonique	70
II Expérimentation en classe	71
1. Représenter un continent à partir du globe	71
2. Comparer des distances sur le globe	72
3. Matérialiser des triangles et mesurer les angles	72
4. Le problème du pingouin	72
5. Expérience pour matérialiser les projections	73
6. Repérage dans deux systèmes de projection :	74
III Réactions des élèves au cours suivant	74
Une expérience en classe de seconde	75
Présentation	75
I Le plus court chemin sur un cube	76
1. Présentation du problème	76
2. Le chemin le plus court n'est pas nécessairement plan	85
3. Travail avec des élèves	86
4. Annexe	88
II Le plus court chemin sur un cylindre	92
1. Présentation du problème	92
2. Le chemin le plus court n'est en général pas plan	94
3. Travail avec des élèves	95
4. Annexe	96
III Le plus court chemin sur un cône	99
1. Présentation du problème	99

2.	Travail avec des élèves	100
IV	Le plus court chemin sur une sphère	101
1.	Présentation du problème : longueur du plus court chemin	101
2.	Travail avec des élèves	101
V	Étude d'une projection	102
1.	Fiche élève	102
2.	Fiche professeur	103
3.	Annexe	106
VI	Projection gnomonique (variante 1)	110
1.	Fiche élève	110
2.	Fiche professeur	113
VII	Projection gnomonique (variante 2)	115
1.	Fiche élève	115
2.	Fiche professeur	116
3.	Annexe	118
Une activité en licence		121
I	Quelques définitions	121
II	Recherche d'une carte conforme de la sphère	121
1.	À la recherche de la définition d'une carte de la sphère	121
2.	Un exemple classique : la carte des coordonnées terrestres	122
3.	Les cartes conformes	122
4.	Une carte conforme : la carte de Mercator	122

Une expérience à la Fête de la Science : triangles de la sphère

En géométrie plane, la somme des angles d'un triangle est constante et vaut 180° . Ce résultat est connu depuis la classe de 5^e.

Nous raisonnons en termes plans, alors que notre univers quotidien est sphérique. Les triangles que nous traçons sur le sol sont en fait des triangles de la sphère.

Cette remarque nous amène à poser plusieurs questions :

- comment transposer sur une sphère les notions planes de droites, d'angles, de triangles ?
- Que devient le résultat sur la somme des angles d'un triangle tracé sur une sphère ?

Dans un premier paragraphe, nous transposerons les notions de géométrie planes à la sphère, puis ces notions étant posées, nous aborderons le problème de la somme des angles d'un triangle sphérique : l'activité décrite dans ce paragraphe a été réalisée dans une classe de LP, puis à plus grande échelle lors de l'édition 2004 de la fête de la Science.

L'activité présentée ci-dessous peut être abordée à tout niveau à partir de la troisième : la sphère est étudiée dans la classe de Troisième (Volume, aire, repérage, section par un plan). Cette activité utilise exclusivement ces connaissances et une bonne dose de proportionnalité.

I Expérimentation matérielle

Cette expérimentation ne pose pas de problème sémantique aux élèves ou plus généralement aux personnes à qui on demande de tracer un triangle sur la sphère puis d'en mesurer les angles, à condition de leur fournir le matériel adéquat.

Un globe, du chatterton et un rapporteur souple permettent de se livrer à de multiples expériences : délimitation d'un triangle, mesure des angles puis calcul de la somme des angles.

Dans les deux cas (classe de L.P., fête de la Science), nous avons collecté les résultats sur une grande affiche de façon à ce que tous les participants puissent voir les résultats des mesures déjà effectuées.

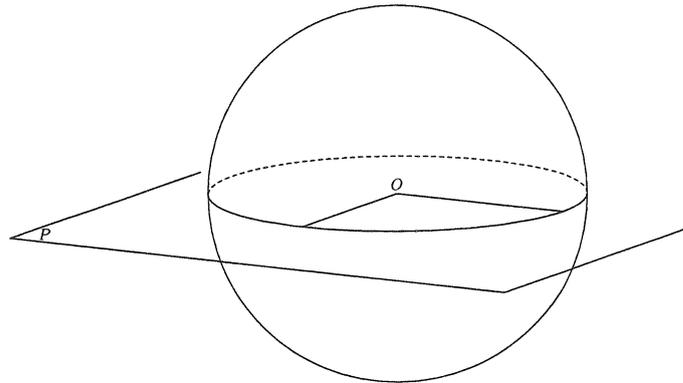
Bien entendu la somme des angles dépasse systématiquement 180° et la présence de triangles avec deux (voire trois angles droits) sème le trouble.

II Transposer les notions planes à la sphère

1. Grands cercles

Si nous assimilons le sol qui nous entoure à une partie de plan, tracer une droite sur ce plan revient à considérer l'intersection entre la sphère et un plan de l'espace passant par le centre de la sphère.

L'intersection entre une sphère et un plan passant par le centre de cette sphère est appelée un **grand cercle** de la sphère.



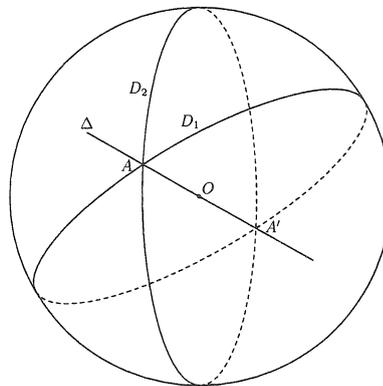
Les grands cercles sont donc les « droites » de sphère.

Deux grands cercles distincts de la sphère sont sécants selon deux points diamétralement opposés.

En effet, soit D_1 et D_2 deux grands cercles de la sphère. D_1 et D_2 sont respectivement l'intersection de la sphère avec deux plans P_1 et P_2 .

Ces deux plans sont distincts, mais contiennent tous les deux le centre de la sphère.

Ces deux plans sont donc sécants selon une droite Δ qui contient le centre de la sphère et coupe donc la sphère en deux points diamétralement opposés.



Remarquons que deux points diamétralement opposés sur un grand cercle déterminent deux demi-grands cercles, ainsi deux grands cercles déterminent quatre demi grands cercles, de la même façon que deux droites sécantes du plan déterminent 4 demi-droites.

2. Triangles sphériques

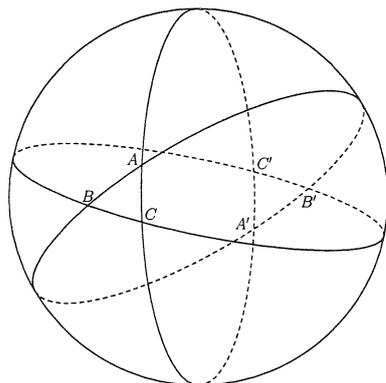
Dans le plan trois points non alignés A , B et C déterminent un triangle. Il y a plusieurs façons de définir un triangle du plan. Le triangle ABC peut-être vu comme :

- la portion de plan entourée par les trois droites (1) ;
- la réunion des trois segments $[AB] \cup [AC] \cup [BC]$ (2) ;
- l'ensemble $\{A, B, C\}$ (3).

Pratiquement ces définitions sont équivalentes, la portion de plan (1) étant l'enveloppe convexe (plus petit convexe contenant) de l'ensemble des trois points d'intersection (3) ou de la réunion des trois segments. Retenons que dans la définition (1) situe le triangle comme une partie convexe du plan et qu'on peut le définir par intersection des trois demi-plans délimités par chacune des droites et contenant respectivement le troisième point.

Pour définir un triangle sur la sphère, nous introduirons donc trois points de la sphère, non situés sur un même grand cercle. Ces trois points définissent trois grands cercles de la sphère. Le triangle sphérique déterminé par ces trois points sera l'intersection des trois demi-sphères délimitées par ces grands cercles et contenant le troisième point. Un triangle sphérique est ainsi toujours situé dans une demi-sphère et reste un sous ensemble « convexe » de la sphère, ce qui maintient bien le parallèle avec le triangle plan. C'est le triangle qu'on est amené à considérer naturellement lorsqu'on place trois points sur la sphère.

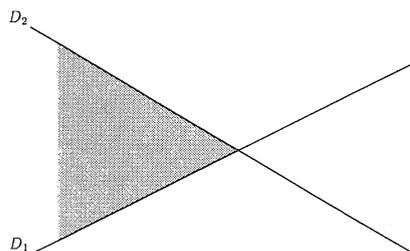
Trois grands cercles de la sphère déterminent donc 8 triangles sur la sphère.



Ces 8 triangles sont ABC , ABC' , $AB'C$, $A'BC$, $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ et $A'B'C'$.

3. Angles, biangles

Deux droites sécantes du plan définissent 4 secteurs angulaires (ces secteurs angulaires sont les intersections des demi-plans délimités par les deux droites), deux secteurs angulaires opposés par le sommet ont le même angle géométrique.

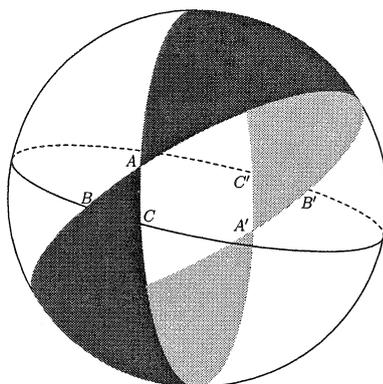


Si on trace deux grands cercles sur la sphère, un secteur angulaire de la sphère sera de la même façon l'intersection de deux des demi-sphères délimitées par chaque grand cercle.

Mesurer un secteur angulaire tracé sur la sphère peut se « réaliser » de façon très naturelle : il suffit de disposer d'une sphère, d'élastiques ou de chatterton pour tracer les grands cercles et d'un rapporteur.

Notons qu'un secteur angulaire d'une sphère a une aire finie. On peut donc associer deux mesures à un secteur angulaire d'une sphère en mesurant l'angle géométrique (avec un rapporteur) ou en mesurant l'aire. Ces deux mesures sont proportionnelles.

Nous nommerons biangle la réunion de deux secteurs angulaires de la sphère opposés par le sommet (la mesure du biangle étant la mesure d'un de ces deux secteurs) :



4. Aires

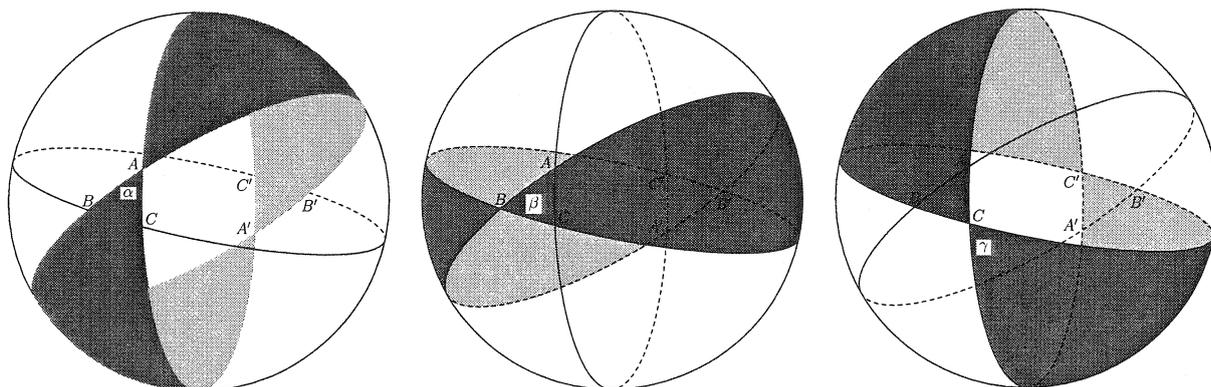
L'aire d'une sphère de rayon R est $4\pi R^2$.

L'aire d'un biangle est proportionnel à la mesure de son angle géométrique. La sphère est un biangle d'angle plat.

Le facteur de proportionnalité entre la mesure du biangle en radians et l'aire de la sphère est donc $4R^2$:

	Angle en radians	Aire
sphère	π	$4\pi R^2$
biangle	α	$4\alpha R^2$

Trois « grands cercles » d'une sphère déterminent un triangle ABC et un triangle $A'B'C'$ situé aux antipodes. Considérons les trois biangles déterminés par le triangle ABC , de sommets respectifs A , B et C , et notons α , β et γ la mesure de ces biangles :



Biangles de mesure	α	β	γ
Aire	$4\alpha R^2$	$4\beta R^2$	$4\gamma R^2$

Notons T l'aire du triangle ABC . C'est aussi l'aire du triangle $A'B'C'$.

Lorsqu'on somme les aires coloriées, on retrouve six fois l'aire du triangle ABC , soit quatre fois de trop :

$$\begin{aligned} \text{Somme des aires coloriées} &= \text{Aire de la sphère} + 4 \times (\text{aire du triangle}) \\ 4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 &= 4\pi R^2 + 4T \\ (\alpha + \beta + \gamma)R^2 &= \pi R^2 + T \end{aligned}$$

On en tire la relation générale :

$$(\alpha + \beta + \gamma) = \pi + \frac{T}{R^2}$$

**La somme des angles d'un triangle de la sphère est supérieure à π .
Elle augmente avec l'aire du triangle.**

De plus, l'aire d'un triangle d'une sphère de rayon R vérifie : $0 \leq T \leq 4\pi R^2$

La somme des angles d'un triangle est donc comprise entre π et 5π

$$\pi \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 5\pi$$

Nous avons situé les triangles dans des demi-sphères, nous pouvons donc améliorer cette encadrement puisque $0 \leq T \leq 2\pi R^2$.

$$\pi \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 3\pi$$

La somme des angles d'un triangle de la sphère est donc comprise entre 0 et 3π

Les cas limites $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ou $\alpha + \beta + \gamma = 3\pi$ correspondent aux cas limites d'un « triangle » ABC d'aire nulle, ou d'un « triangle » ABC recouvrant une demi-sphère.

Il s'agit dans le premier cas de trois point A , B et C alignés. Si on appelle A' le point diamétralement opposé à A , dans le premier cas B et C sont situés sur un même demi grand cercle d'extrémité A et A' , dans le deuxième cas, B et C sont situés chacun sur un des deux demi grands cercles d'extrémités A et A' .

Si nous n'avions pas limité notre définition à des triangles contenus dans une demi-sphère, on aurait pu considérer des triangles dont la somme des angles seraient comprises entre 3π et 5π . Cela revient à considérer à partir de notre triangle ABC son complémentaire dans la sphère. Mesurer ses angles revient alors à chaque fois à mesurer les angles sur « l'extérieur du triangle ABC ».

De même que dans le plan, la somme des angles d'un triangle est égale à π radians, si on mesure à l'« extérieur » du triangle, la somme devient 5π .

Une expérience en lycée professionnel

Objectif : Nous nous sommes donnés comme objectif de créer des séquences d'activités de sensibilisation d'élèves de tous niveaux aux problèmes posés par la représentation par cartes d'une partie de la sphère.

Il s'agit de créer des séquences de première approche qualitative, pouvant s'adresser à un public très varié. Cette séance a été expérimentée en lycée professionnel pour ce qui est développé ci-dessous, mais ce genre de séance pourrait tout aussi bien être réalisé dans une classe de seconde.

Problématique : Comparaison entre une sphère et un plan. Nous vivons sur une sphère, tout en ayant une conception plane de notre univers proche. Nous en faisons des représentations planes. Comment gérer ce « paradoxe » ?

I Préparation de la séance en classe

Liste du matériel :

- Mappemondes : il faut pouvoir disposer d'un nombre suffisant afin que chaque groupe d'élève puisse expérimenter d'un globe terrestre ;
- Atlas ;
- Ficelle ;
- Mètres de couturière ;
- Chatterton ;
- Rapporteurs ;
- Papier de soie pour décalquer ;
- Ciseaux, loupes ;
- Compas, double-décimètres ;
- Matériel de simulation de projection : passoire sur pied, ampoule + fil électrique ;
- feuille A3.

Les mappemondes étaient disposées sur les tables, le reste du matériel était sur le bureau du professeur, à la disposition des élèves.

1. Contenu de la séance

1) Comment faire des cartes d'une partie de la terre ?

But : faire percevoir l'impossibilité d'appliquer la sphère sur le plan, faire prendre conscience des problèmes qui se posent lorsqu'on veut réaliser une carte « exacte » d'une partie de la sphère.

Activité : dessiner des cartes des continents par décalque avec le matériel disponible. Quels problèmes apparaissent ?

Nous nous attendons à ce que les élèves expérimentent que, si on essaie d'appliquer le papier sur la sphère, des décalages vont se produire sur le tracé lorsqu'on voudra revenir au point de départ.

2) Mesure, comparaison des distances

But : faire percevoir la notion de plus courte distance sur la sphère et donc implicitement la notion de « segment de droite » sur la sphère.

Faire comprendre que la notion de plus court chemin n'a de sens que si les deux points ne sont pas diamétralement opposés.

Activité : comparer les distances entre Paris et New York, Paris et Kaboul, Lisbonne et New York sur le globe.

Comment mesurer la distance entre deux points donnés, sur un plan, sur une sphère ? Est-ce qu'on obtient toujours cette distance en suivant un parallèle ? Y a-t-il un seul trajet le long duquel on peut mesurer la distance entre deux points sur le plan, sur une sphère ?

Nous ne nous attendons pas à des difficultés particulières pour obtenir les mesures. L'intérêt de cette partie est de familiariser les élèves avec la géométrie de la sphère.

2. Différences entre le plan et la sphère

But : montrer les problèmes qui peuvent apparaître si on utilise la carte naturelle des coordonnées terrestres pour tracer un triangle équilatéral dont un des sommets est un pôle.

Activité : le problème du pingouin.

Un pingouin se promène sur la banquise. Il parcourt 100 km vers le Sud, 100 km vers l'Est et 100 km vers le Nord (pour lever toute ambiguïté, rappelons que les pingouins habitent dans l'hémisphère Nord, et les manchots dans l'hémisphère Sud).

Dessiner son trajet sur une feuille de papier. Suivre son trajet sur la sphère.

En effectuant ce déplacement, le pingouin est en fait revenu à son point de départ. D'où a-t-il pu partir ?

Avec le chatterton délimiter sur la sphère le triangle parcouru par le pingouin lorsqu'il part du pôle Nord, descend vers le Sud jusqu'à l'équateur, se déplace sur l'équateur, puis remonte vers le pôle Nord. Peut-on délimiter de la sorte un triangle équilatéral ? Quelles sont les mesures de ses trois angles ? Comparer avec la situation dans le plan.

3. Études de cartes réalisées par une projection cylindrique et par projection gnomonique

But : présentation de deux types de projection pouvant servir à réaliser des cartes.

Nous allons simuler deux exemples de projection.

Activité : mise en situation de chaque projection. Une ampoule est placée à l'intérieur d'une passoire semi circulaire percée de trou (retournée autour de l'ampoule). Les rayons lumineux sont interceptés par une feuille de papier qui est, soit enroulée autour de l'« équateur », simulant ainsi une projection cylindrique, soit placée tangentiellement au pôle, simulant ainsi une projection gnomonique.

Ces projections étant présentées, nous distribuerons aux élèves des fonds de carte comportant uniquement le canevas de latitude et longitude et nous leur demanderons de placer quelques

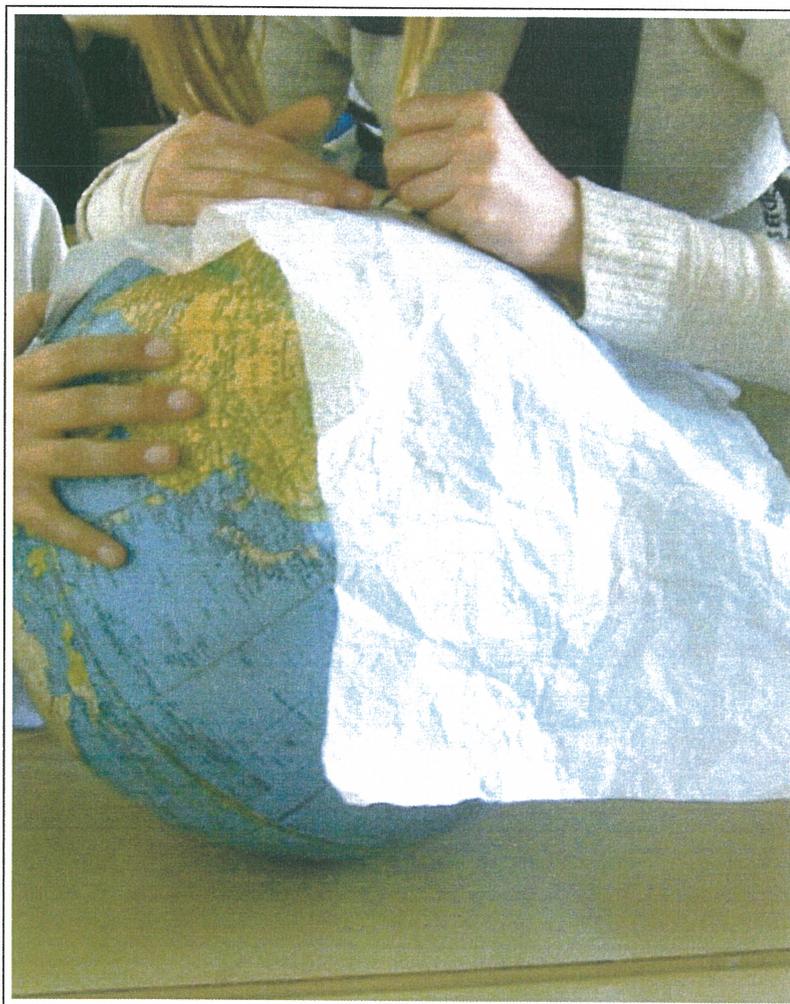
points et de tracer le trajet du pingouin. Peut-on représenter le trajet du pingouin sur une carte réalisée par projection cylindrique ? (problème des méridiens parallèles, on ne peut pas représenter le pôle Nord).

II Expérimentation en classe

Cette séquence a été testée dans une classe de 1^{re} année CAP Vente avec deux demi-groupes. La séquence a donc eu lieu deux fois avec à chaque fois un groupe de douze élèves. Chaque groupe a un globe sur sa table et peut venir chercher le matériel dont il estime avoir besoin. Voici quelques notes prises pendant la séance.

1. Représenter un continent à partir du globe

Matériel utilisé : un globe terrestre, du papier calque, du papier de soie, du scotch. Les élèves éprouvent des difficultés : le papier glisse, le globe tourne. Certains ont recours au scotch pour fixer le papier. Le groupe ayant choisi l'Australie est content de son résultat et admet assez facilement que le continent étant plus petit, la manipulation est plus facile. Il accepte de recommencer avec un continent plus grand.



Dans l'ensemble, les élèves semblent penser que compte tenu des difficultés, la représentation qu'ils obtiennent n'est pas si mauvaise. Ils perçoivent que la décalque pose des difficultés mais

ils expliquent ces difficultés par les conditions matérielles (« le papier bougeait », « le papier n'était pas très bien étendu ») plutôt que par la nature géométrique du globe.

Leur satisfaction venait essentiellement de ce que la décalque obtenue donnait une allure classique pour le continent qu'ils cherchaient à représenter. Dans ce cas, nous sommes intervenus pour leur faire réappliquer leur feuille sur la sphère et pointer les décalages qui apparaissaient. Cette intervention a semblé les convaincre : « on arrivait pas à faire un vrai bon décalquage, il aurait fallu faire quelques plis ».

Les commentaires des élèves sont extraits d'un bilan de la séance fait ultérieurement avec leur professeur.

2. Comparer des distances sur le globe

Matériel : double décimètre, ruban, ficelle.

Paris – New York ; Paris – Kaboul ; Lisbonne – New-york

Une élève essaie de plier sa règle. L'utilisation de la ficelle pour la mesure est polluée par le recours au chatterton dans un groupe pour matérialiser les trajets, initiative aussitôt imitée par les autres groupes.

3. Matérialiser des triangles et mesurer les angles

Le recours au chatterton pour la mesure des distances nous a conduit à enchaîner directement sur le problème de mesure des angles de triangles sur la sphère.

Matériel : chatterton, rapporteurs souples

Pas de problème particulier pour l'utilisation du rapporteur. Les résultats peuvent assez rapidement être mis en commun au tableau.

Groupe	Sur le globe	Somme des angles
1	90 ; 90 ; 20	200
2	150 ; 30 ; 30	210
3	150 ; 82 ; 90	322
4	19 ; 150 ; 180	349
5	90 ; 45 ; 60	195
6	30 ; 30 ; 130	190

Un élève semble particulièrement perturbé par les résultats du groupe 1 dont le triangle présente deux angles de 90° . Il tente de représenter le triangle au tableau. D'autres élèves font quelques tentatives pour représenter leur propre triangle.

4. Le problème du pingouin

Un pingouin fait 100 km vers le Sud, 100 km vers l'Est puis 100 km vers le Nord et se retrouve à l'endroit d'où il est parti. Quel est cet endroit ?

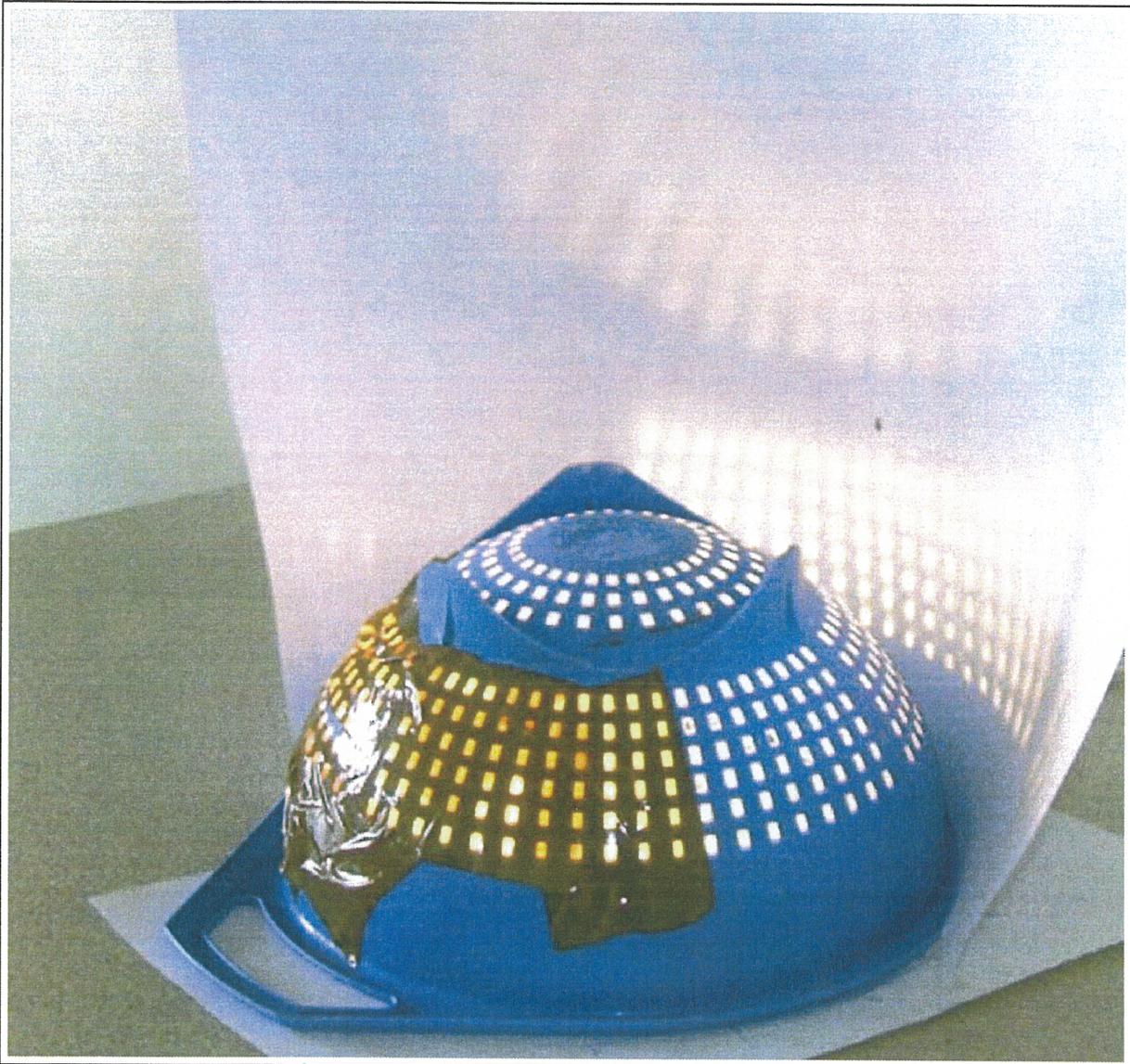
Les élèves trouvent assez facilement le lieu d'où est parti le pingouin. Peut-être l'accès à cette phase de l'activité a-t-elle été facilité par la pratique précédente sur les triangles de la sphère qui a permis aux élèves de s'appropriier le contexte de triangles sphériques.

Intervention d'un animateur pour matérialiser le trajet au tableau et introduire la projection gnomonique.

5. Expérience pour matérialiser les projections

Expérience réalisée devant tous les élèves.

Matériel : une passoire, une lampe, une feuille de papier.



Nous avons utilisé une passoire sur pied de forme hémisphérique, présentant des perforations ordonnées horizontalement et verticalement, de sorte qu'on pouvait assimiler cette passoire à une demi sphère et retrouver dans les perforations des parallèles et des méridiens.

Une lampe est disposée au milieu du disque de base de la passoire.

Une feuille de papier est enroulée autour de la passoire pour simuler une projection cylindrique. On observe alors que les parallèles sont projetés en des droites horizontales et que les méridiens sont projetés en des droites verticales.

Lorsque la feuille de papier est disposée tangentielle au pôle Nord, on observe que les parallèles sont projetés en des cercles concentriques alors que les méridiens sont projetés en des droites concourantes au pôle.

Une des difficultés de la réalisation (outre le fait de se procurer une passoire adéquate) est de bien positionner l'éclairage au centre du disque. Un déplacement de l'ampoule entraîne des distorsions dans les images des parallèles et des méridiens.

6. Repérage dans deux systèmes de projection :

Matériel : planisphères en projection gnomonique et de Mercator. Fonds de cartes vierges dans chacune des deux projections.

On arrive à la fin des deux heures, les élèves éprouvent des difficultés à situer les points dans les différents systèmes de repérage.

III Réactions des élèves au cours suivant

Les élèves ont été soumis à un petit test rapide lors de la séance de cours suivante. Voici quelques unes de leurs réponses.

Décalquer un continent à partir du globe : quelles difficultés avez vous rencontrées ?

- le globe est rond et on ne peut pas poser du papier sur du rond ;
- le papier bougeait ;
- le papier n'était pas très bien étendu ;
- le papier calque ne faisait pas le tour ;
- on n'arrivait pas à faire un vrai bon décalquage, il aurait fallu faire quelques plis ;
- aucune difficulté ; tout a été bien expliqué le plus simplement possible.

Que concluez vous ?

- on ne peut pas faire de carte exacte de la Terre ;
- le globe est rond ce n'était pas pratique ;
- le papier calque n'était pas assez souple ;
- c'est parce que le globe est rond et volumineux et le papier plat ;
- c'est une bonne idée d'avoir mis deux heures pour en savoir plus sur notre planète.

Mesurer des distances sur le globe

- on ne peut pas vraiment calculer car le globe est rond ;
- le globe n'arrêtait pas de tourner ;
- le globe est rond ;
- la règle ne peut pas se courber pour la forme du globe ;
- au début un peu de difficultés mais après tout s'est bien passé.

Mesurer les angles d'un triangle sur le globe

- les degrés n'étaient pas les mêmes que sur le plat ;
- sur le globe on voit des carrés, sur le plan on voit des triangles ;
- les angles d'un triangle font 180° .

Retranscrire l'histoire du pingouin

Il leur a été demandé de raconter l'histoire du pingouin. Celle-ci a été bien retranscrite en général.

Une expérience en classe de seconde générale

Présentation

Avant de développer l'étude d'une projection cartographique, nous présentons une **activité liminaire** permettant d'amener nos élèves à formuler un questionnement pertinent quant au sujet, et donc à s'y engager avec davantage de motivation. Il s'agit d'une activité mathématique que l'on peut à la fois mettre en place très tôt dans l'année de seconde, et faire évoluer au fil des mois ; ainsi cette activité peut très judicieusement s'intégrer dans une progression spiralee. Cette activité mathématique a pour objet de poser le **problème de plus court chemin**, thème récurrent dans l'histoire de la cartographie, puisque celle-ci permet, notamment, aux navires et aux avions d'optimiser leur route en suivant les **orthodromies**.

Et, avant de travailler sur une sphère – sur le globe terrestre –, nous avons pensé qu'il serait plus simple d'aborder dans un premier temps cette question de **plus court chemin sur les faces d'un cube** : comme vous le verrez, cette simplicité est très relative, car des problèmes insoupçonnés ont surgi au fil de ce travail, n'entamant en rien l'intérêt des élèves, mais renforçant au contraire leur motivation à travers un débat très ouvert.

Nous proposons ensuite de conduire ce même problème de **plus court chemin sur un cylindre**, puis sur **un cône**, avant de traiter le cas d'**une sphère**.

Enfin, nous présentons l'étude de projections, en particulier celle de la projection gnomonique. En ce qui concerne les autres projections, nous laissons le choix au professeur de découvrir avec ses élèves d'autres approches pédagogiques.

Chacune des activités est présentée avec son accompagnement pédagogique, et son ancrage dans le programme, notamment la **géométrie dans l'espace**.

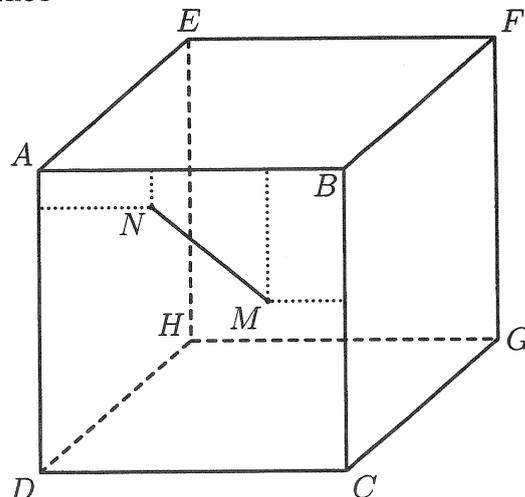
I Le plus court chemin sur un cube

1. Présentation du problème

Étant donné deux points distincts d'un cube, quel est, sur ce cube, le plus court chemin entre ces deux points ?

Situation 1 : les deux points sont sur la même face

Le segment joignant ces deux points réalise le plus court chemin.



Situation 2 : les deux points sont sur deux faces voisines

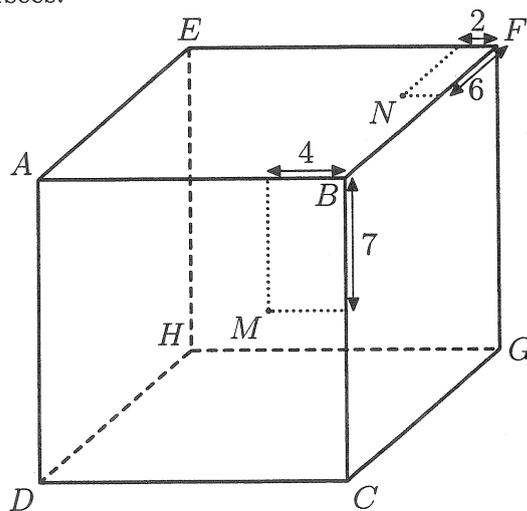
Afin de montrer la complexité du problème et l'absence, à notre connaissance, de résultat valide quelles que soient les positions des deux points, nous traiterons deux exemples sur un cube d'arête 16.

Le raisonnement est basé sur le nombre d'arêtes traversées.

(a) Exemple 1 :

Nous prendrons comme hypothèses :

- M est sur la face $ABCD$
- M est à une distance 7 de $[AB]$ et à une distance 4 de $[BC]$
- N est sur la face $ABFE$
- N est à une distance 6 de $[EF]$ et à une distance 2 de $[BF]$



Nous notons MN la distance du chemin de M à N en restant sur les faces du cube.

Nous allons développer le cube en utilisant le patron ci-dessous :

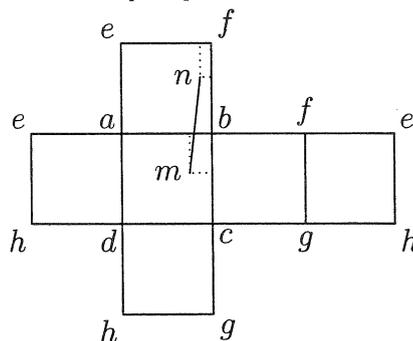
Remarque : les différents patrons du cube sont présentés en annexe 4.a.

Cas 1 : on traverse une seule arête, l'arête commune [AB].

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment [mn].

On a alors :

$$MN^2 = mn^2 = 17^2 + 2^2 = 293$$



Cas 2 : on traverse deux arêtes (on passe alors par une face intermédiaire).

Il y a deux sous cas :

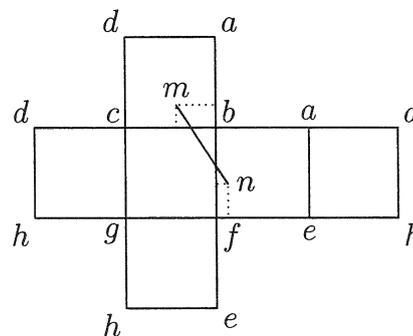
Cas 2-1 : on passe par [BC] et [BF].

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment [mn].

On a alors :

$$MN^2 = mn^2 = 14^2 + 9^2 = 277$$

Remarquons qu'alors, la distance est plus courte que celle obtenue précédemment.



Cas 2-2 : on passe par [AD] et [AE].

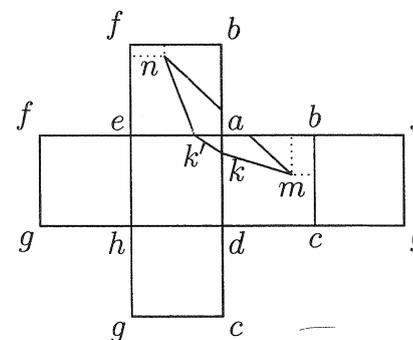
On a alors :

$$MN = mk + kk' + k'n$$

$$MN \geq mn$$

Par ailleurs : $mn^2 = 21^2 + 22^2 = 925$,

$$\text{d'où : } MN^2 > 900$$



Cas 3 : on traverse trois arêtes ou plus (on passe par au moins deux faces intermédiaires).

Dans le cas où l'on traverse trois arêtes, deux de ces arêtes seront opposées sur une face.

La distance cherchée sera alors supérieure à 16 (arête du cube) + 4 (distance de M à une arête) + 2 (distance minimale de N à une arête), soit une distance supérieure à 22. cette distance sera donc supérieure à celle obtenue en 2-1

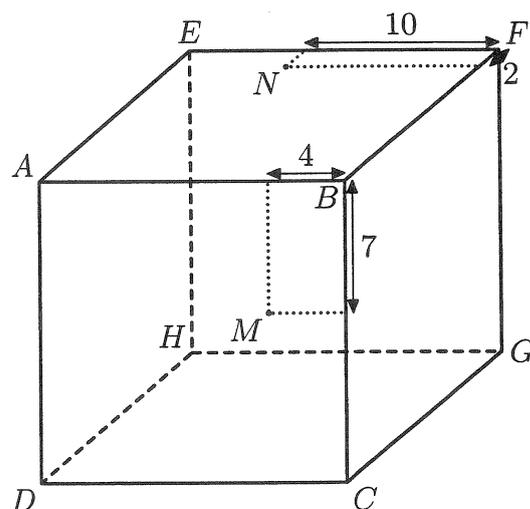
Si on traverse plus de trois arêtes, le raisonnement et la minoration précédente restent vrais.

Conclusion : pour cet exemple, la distance minimale s'obtient en passant « par le côté ». On traverse alors deux arêtes pour réaliser ce plus court chemin (cas 2.1).

(b) Exemple 2

Nous prendrons comme hypothèses :

- M est sur la face $ABCD$
- M est à une distance 7 de $[AB]$ et une distance 4 de $[BC]$
- N est sur la face $ABFE$
- N est à une distance 2 de $[EF]$ et une distance 10 de $[BF]$.



Nous allons développer le cube :

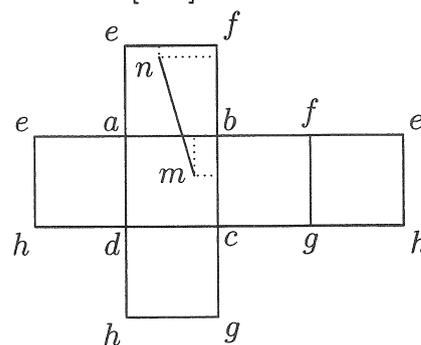
Cas 1 : on traverse une seule arête, l'arête commune $[AB]$.

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mn]$.

On a alors :

$$MN^2 = mn^2 = 21^2 + 6^2 = 477$$

Remarquons que cette distance est inférieure à 22.



Cas 2 : on traverse deux arêtes (on passe alors par une face intermédiaire).

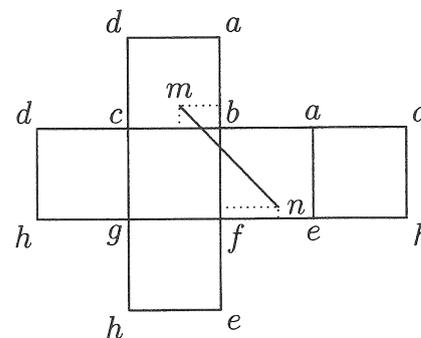
Il y a deux sous cas :

Cas 2-1 : on passe par $[BC]$ et $[BF]$.

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mn]$.

On a alors :

$$MN^2 = mn^2 = 17^2 + 18^2 = 613$$

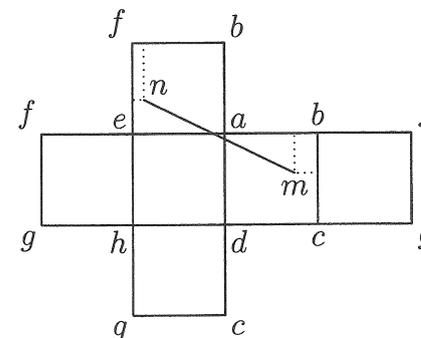


Cas 2-2 : on passe par $[AD]$ et $[AE]$.

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mn]$

On a alors :

$$MN^2 = mn^2 = 13^2 + 26^2 = 845$$



Cas 3 : on traverse trois arêtes ou plus (on passe par au moins deux faces intermédiaires).

Dans le cas où on traverse trois arêtes, deux de ces arêtes seront opposées sur une face. La distance cherchée sera alors supérieure à 16 (arête du cube) + 4 (distance de M à une arête) + 2 (distance minimale de N à une arête), soit une distance supérieure à 22. cette distance sera donc supérieure à celle obtenue en 2-1.

Si on traverse plus de trois arêtes, le raisonnement et la minoration précédente restent vrais.

Conclusion : pour cet exemple, la distance minimale s'obtient en passant « par le dessus ». On traverse alors uniquement l'arête commune aux faces qui contiennent M et N pour réaliser ce plus court chemin (cas 1).

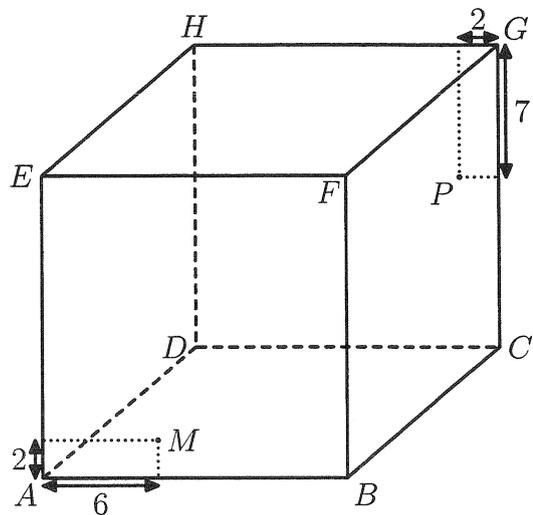
- (c) **Bilan :** dans le cas où M et N sont sur deux faces voisines, le chemin le plus court n'est pas toujours réalisé en traversant l'arête commune. Ce chemin le plus court dépend des positions respectives de M et N à l'intérieur de chaque face. D'après l'exemple 1, il semble que lorsque M et N sont « assez proches » d'une même face (à laquelle ils n'appartiennent pas), le plus court chemin passe par cette face.

Situation 3 : les deux points sont sur deux faces opposées

Nous traiterons un exemple sur le même cube d'arête 16 :

Nous prendrons comme hypothèses :

- M est sur la face $ABFE$
- M est à une distance 2 de $[AB]$ et une distance 6 de $[AE]$
- P est sur la face $DCGH$
- P est à une distance 2 de $[GC]$ et une distance 7 de $[HG]$



Nous notons MP la distance du chemin de M à P en restant sur les faces du cube.

Le raisonnement est basé sur le nombre de faces intermédiaires traversées.

Cas 1 : on traverse une seule face intermédiaire, (on passe alors par deux arêtes)

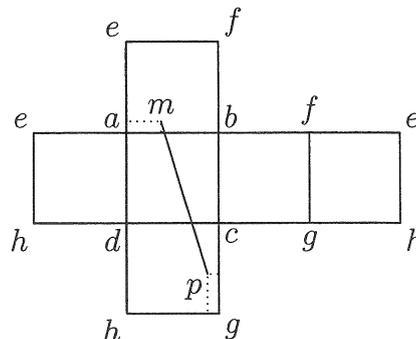
Il y a quatre sous-cas :

Cas 1-1 : on traverse la face $ABCD$ (on passe par $[AB]$ et $[CD]$)

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mp]$

On a alors :

$$MP^2 = mp^2 = 27^2 + 8^2 = 793$$

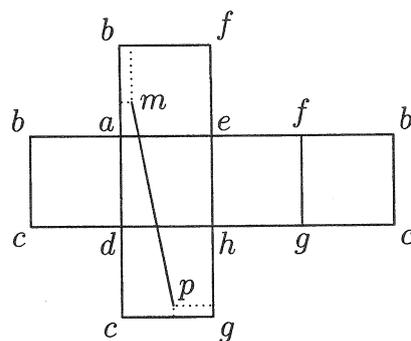


Cas 1-2 : on traverse la face $ADHE$ (on passe par $[AE]$ et $[DH]$)

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mp]$

On a alors :

$$MP^2 = mp^2 = 36^2 + 7^2 = 1\ 345$$

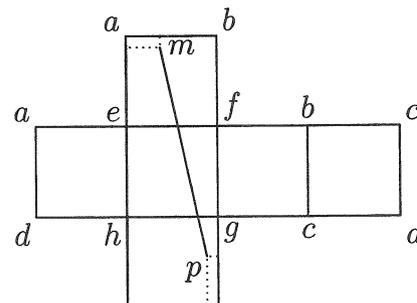


Cas 1-3 : on traverse la face $EFGH$ (on passe par $[EF]$ et $[HG]$)

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mp]$

On a alors :

$$MP^2 = mp^2 = 37^2 + 8^2 = 1\ 433$$

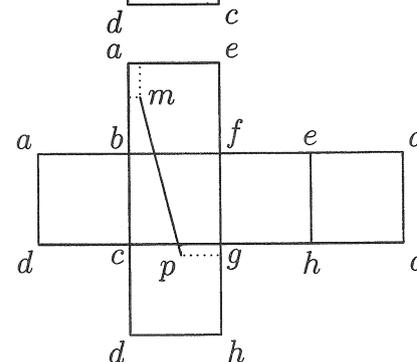


Cas 1-4 : on traverse la face $BCGF$ (on passe par $[BF]$ et $[CG]$)

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mp]$

On a alors :

$$MP^2 = mp^2 = 28^2 + 7^2 = 833$$

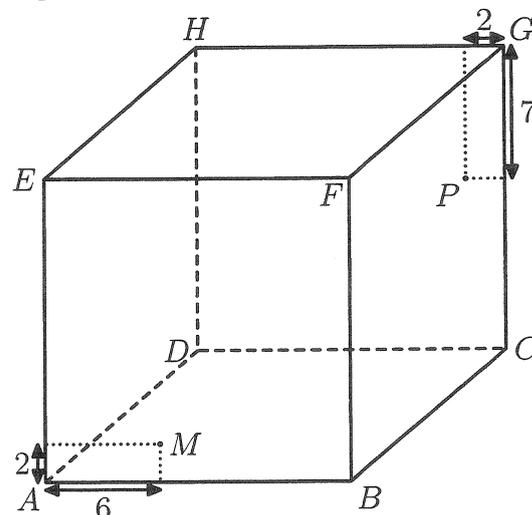


Bilan du cas 1 : le plus court chemin en traversant une seule face intermédiaire est celui où l'on passe par la face de dessous $ABCD$. La longueur de ce plus court chemin est $\sqrt{793}$, soit 28,16 à 10^{-2} près par défaut.

Cas 2 : on traverse deux faces intermédiaires (on passe alors par trois arêtes).

Il y a huit sous-cas : en passant par les faces :

- Cas 2-1 : dessous puis droite
- Cas 2-2 : dessous puis gauche
- Cas 2-3 : dessus puis droite
- Cas 2-4 : dessus puis gauche
- Cas 2-5 : droite puis dessous
- Cas 2-6 : droite puis dessus
- Cas 2-7 : gauche puis dessous
- Cas 2-8 : gauche puis dessus

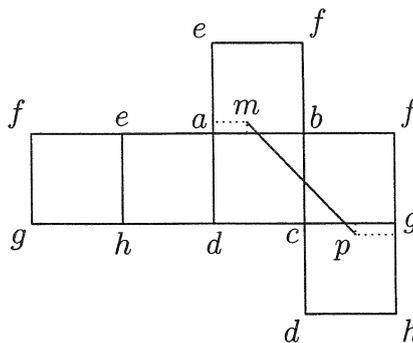


Cas 2-1 : on traverse les faces $ABCD$ et $BCGF$ (on passe par les arêtes $[AB]$, $[BC]$ et $[CG]$)

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mp]$

On a alors :

$$MP^2 = mp^2 = 19^2 + 20^2 = 761$$

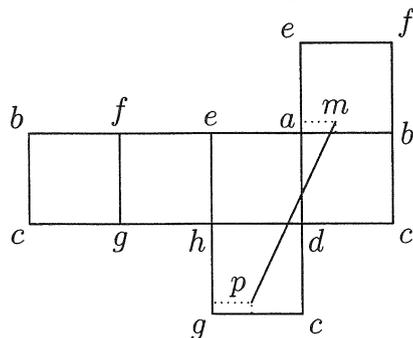


Cas 2-2 : on traverse les faces $ABCD$ et $ADHE$ (on passe par les arêtes $[AB]$, $[AD]$ et $[DH]$)

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mp]$

On a alors :

$$MP^2 = mp^2 = 15^2 + 32^2 = 1\,249$$

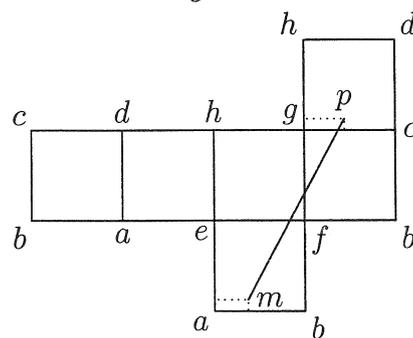


Cas 2-3 : on traverse les faces $EFGH$ and $BCGF$ (on passe par les arêtes $[EF]$, $[FG]$ et $[CG]$)

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mp]$

On a alors :

$$MP^2 = mp^2 = 17^2 + 32^2 = 1\,313$$

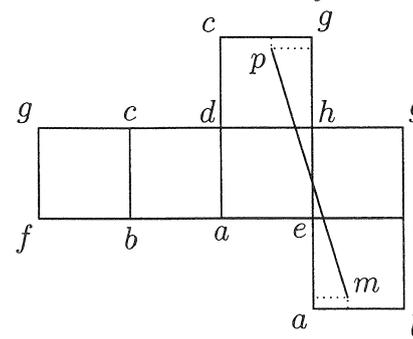


Cas 2-4 : on traverse les faces $EFGH$ et $ADHE$ (on passe par les arêtes $[EF]$, $[EH]$ et $[DH]$)

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mp]$

On a alors :

$$MP^2 = mp^2 = 44^2 + 13^2 = 2\,105$$

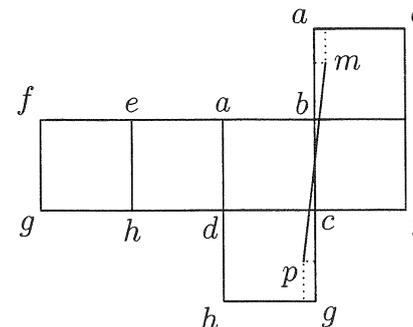


Cas 2-5 : on traverse les faces $BCGF$ et $ABCD$ (on passe par les arêtes $[BF]$, $[BC]$ et $[CD]$)

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mp]$

On a alors :

$$MP^2 = mp^2 = 35^2 + 4^2 = 1\,241$$



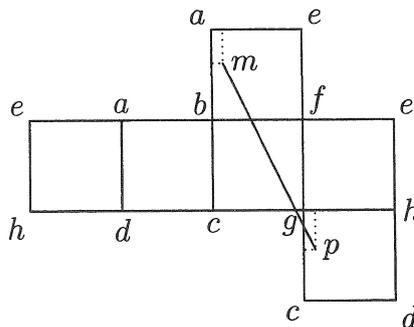
Cas 2-6 : on traverse les faces $BCGF$ et $EFGH$ (on passe par les arêtes $[BF]$, $[FG]$ et $[GH]$)

La distance minimale est ici supérieure à mp

Or : $mp^2 = 33^2 + 16^2 = 1\ 345$

On a alors :

$$MP^2 > 1\ 345$$



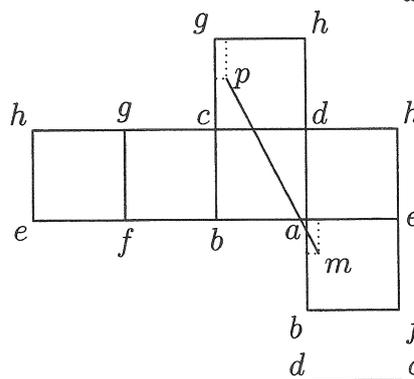
Cas 2-7 : on traverse les faces $ADHE$ et $ABCD$ (on passe par les arêtes $[AE]$, $[AD]$ et $[CD]$)

La distance minimale est ici supérieure à mp

Or : $mp^2 = 31^2 + 16^2 = 1\ 217$

On a alors :

$$MP^2 > 1\ 217$$

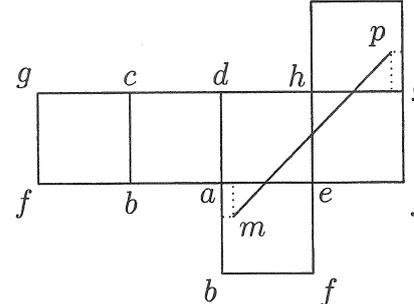


Cas 2-8 : on traverse les faces $ADHE$ et $EFGH$ (on passe par les arêtes $[AE]$, $[EH]$ et $[GH]$)

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mp]$

On a alors :

$$MP^2 = mp^2 = 29^2 + 28^2 = 1\ 625$$

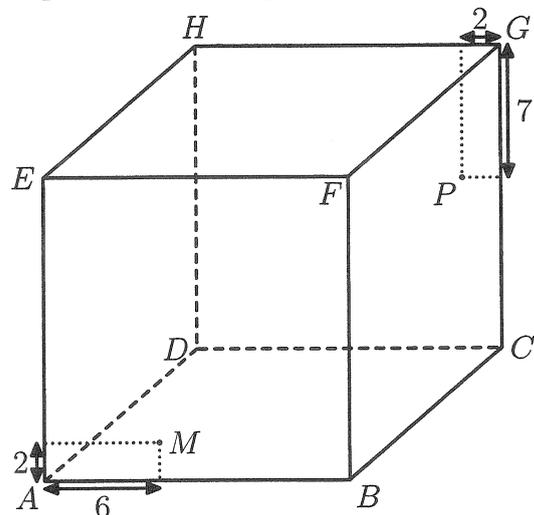


Bilan du cas 2 : le plus court chemin en traversant deux faces intermédiaires est celui où l'on passe par la face de dessous $ABCD$, puis par la face de droite $BCGF$. La longueur de ce plus court chemin est $\sqrt{761}$, soit 27,59 à 10^{-2} près par défaut. Ce chemin est plus court que celui obtenu en passant par une seule face intermédiaire !

Cas 3 : on traverse trois faces intermédiaires, (on passe alors par quatre arêtes)

Il y a huit sous-cas : en passant par les faces :

- Cas 3-1 : dessous puis droite puis dessus
- Cas 3-2 : dessous puis gauche puis dessus
- Cas 3-3 : dessus puis droite puis dessous
- Cas 3-4 : dessus puis gauche puis dessous
- Cas 3-5 : droite puis dessous puis gauche
- Cas 3-6 : droite puis dessus puis gauche
- Cas 3-7 : gauche puis dessous puis droite
- Cas 3-8 : gauche puis dessus puis droite



Pour les cas 3-3, 3-4, 3-5 et 3-6, on montre facilement que la distance MN est supérieure à $\sqrt{761}$; par exemple, avec le cas 3-3 : pour aller du point M à la face de dessus, la distance minimale est de 14 ; pour aller de la face de dessus à la face de dessous, la distance minimale est de 16. Donc, pour aller de M à P , la distance est supérieure à 30.

Nous nous limiterons donc aux cas 3-1, 3-2, 3-7 et 3-8.

Cas 3-1 : on traverse les faces $ABCD$, $BCGF$ et $EFGH$ (on passe par les arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[FG]$ et $[HG]$)

La distance minimale est ici supérieure à mp

Or : $mp^2 = 28^2 + 25^2 = 1\,409$

On a alors :

$$MP^2 > 1\,409$$

Cas 3-2 : on traverse les faces $ABCD$, $ADHE$ et $EFGH$ (on passe par les arêtes $[AB]$, $[AD]$, $[EH]$ et $[HG]$)

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mp]$

On a alors :

$$MP^2 = mp^2 = 36^2 + 25^2 = 1\,921$$

Cas 3-7 : on traverse les faces $ADEH$, $ABCD$ et $BCGF$ (on passe par les arêtes $[AE]$, $[AD]$, $[BC]$ et $[CG]$)

La distance minimale est ici supérieure à mp

Or : $mp^2 = 24^2 + 27^2 = 1\,305$

On a alors :

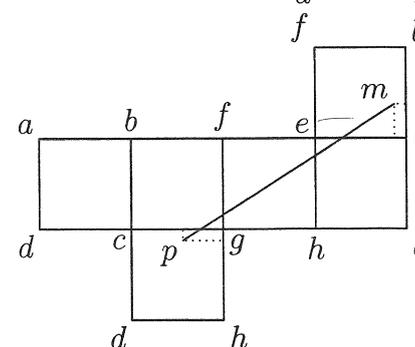
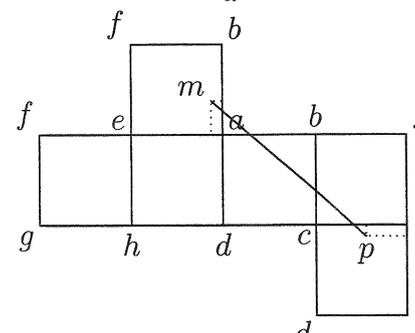
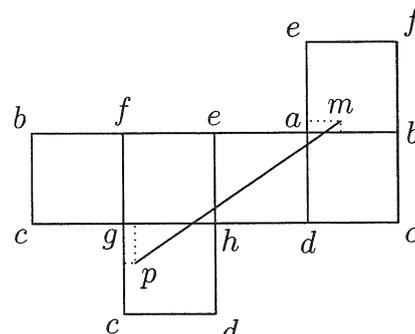
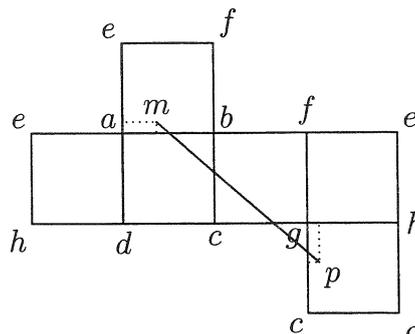
$$MP^2 > 1\,305$$

Cas 3-8 : on traverse les faces $ADHE$, $EFGH$ et $BCGF$ (on passe par les arêtes $[AE]$, $[EH]$, $[FG]$ et $[CG]$)

Dans ce cas, la distance minimale est réalisée par le segment $[mp]$

On a alors :

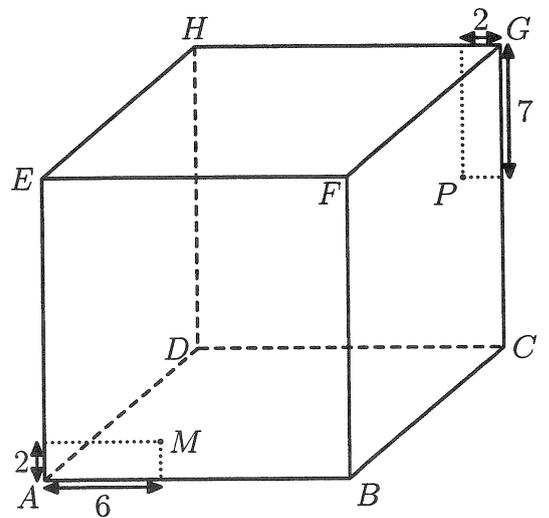
$$MP^2 = mp^2 = 37^2 + 24^2 = 1\,945$$



Cas 4 : on traverse quatre faces intermédiaires, (on passe alors par cinq arêtes).

Il y a huit sous-cas : en passant par les faces :

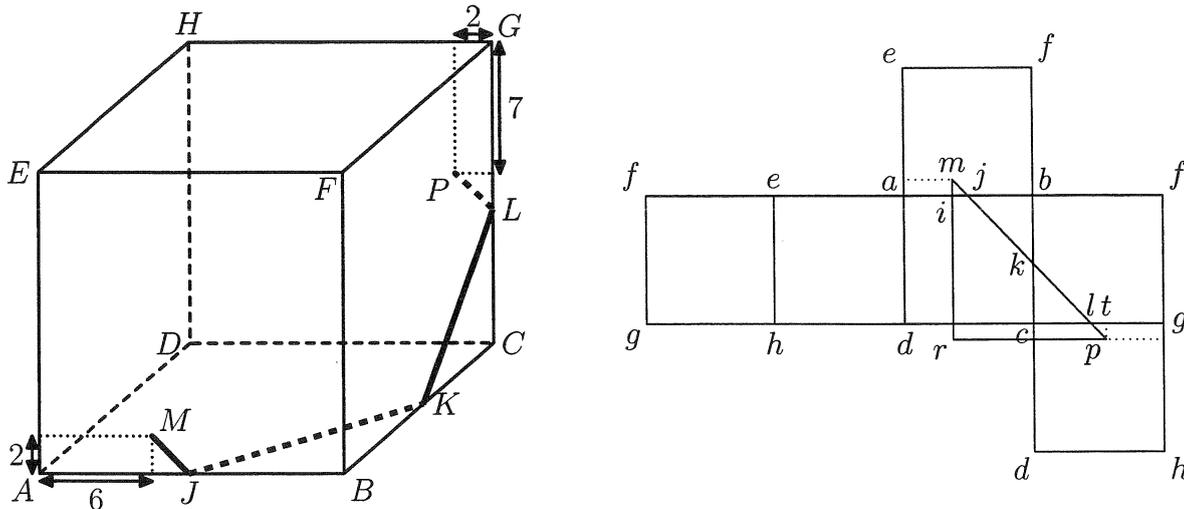
- Cas 4-1 : dessous puis droite puis dessus puis gauche
- Cas 4-2 : dessous puis gauche puis dessus puis droite
- Cas 4-3 : dessus puis droite puis dessous puis gauche
- Cas 4-4 : dessus puis gauche puis dessous puis droite
- Cas 4-5 : droite puis dessous puis gauche puis dessus
- Cas 4-6 : droite puis dessus puis gauche puis dessous
- Cas 4-7 : gauche puis dessous puis droite puis dessus
- Cas 4-8 : gauche puis dessus puis droite puis dessous



On montre que la distance MN est toujours supérieure à 32 avec une méthode analogue à celle du cas 3.

Bilan : dans cet exemple, le chemin le plus court traverse deux faces intermédiaires : la face de dessous $ABCD$, puis la face de droite $BCGF$. La longueur de ce plus court chemin est $\sqrt{761}$, soit 27,59 à 10^{-2} près par défaut. Ce chemin est plus court que celui obtenu en passant par une seule face intermédiaire !

2. Le chemin le plus court n'est pas nécessairement plan



Soit J , K et L les points d'intersection du chemin le plus court avec les arêtes $[AB]$, $[BC]$ et $[CG]$.

Méthode 1

Les deux droites (MJ) et (PL) sont dans deux plans parallèles. Si la trajectoire est plane, alors ces deux droites sont parallèles. Nous allons montrer que les droites (MJ) et (PL) ne sont pas parallèles, nous pourrions alors conclure que les points M , J , K et L ne sont pas coplanaires. En utilisant le théorème de Thalès :

- Dans les triangles mij et mnp : $\frac{ij}{rp} = \frac{mi}{mr}$, d'où $ij = \frac{2}{20} \times 19 = 1,9$
- Dans les triangles ltp et lms : $\frac{lt}{ls} = \frac{tp}{ms}$, d'où $\frac{lt}{19 - lt} = \frac{2}{18}$ et $lt = 1,9$

On en déduit que : $\overrightarrow{MJ} = \frac{1,9}{16} \overrightarrow{AB} - \frac{2}{16} \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{PL} = \frac{2}{16} \overrightarrow{AB} - \frac{1,9}{16} \overrightarrow{AE}$.

Or, $\frac{1,9}{16} \times \left(-\frac{1,9}{16}\right) - \frac{2}{16} \times \left(-\frac{2}{16}\right) \neq 0$, donc les vecteurs \overrightarrow{MJ} et \overrightarrow{PL} ne sont pas colinéaires, et par suite les droites (MJ) et (PL) ne sont pas parallèles.

Méthode 2 (en classe de première S)

Plaçons-nous dans le repère orthonormal $\left(A ; \frac{1}{16} \overrightarrow{AB} ; \frac{1}{16} \overrightarrow{AD} ; \frac{1}{16} \overrightarrow{AE}\right)$.

On a : $M(6 ; 0 ; 2)$ et $P(14 ; 16 ; 9)$.

En utilisant, par exemple, le théorème de Thalès dans différentes configurations planes de l'espace, on obtient : $J(7,9 ; 0 ; 0)$ et $L(16 ; 16 ; 7,1)$.

On montre alors que les vecteurs $\overrightarrow{JM}(-1,9 ; 0 ; 2)$, $\overrightarrow{JP}(6,1 ; 16 ; 9)$ et $\overrightarrow{JL}(8,1 ; 16 ; 7,1)$ ne sont pas coplanaires.

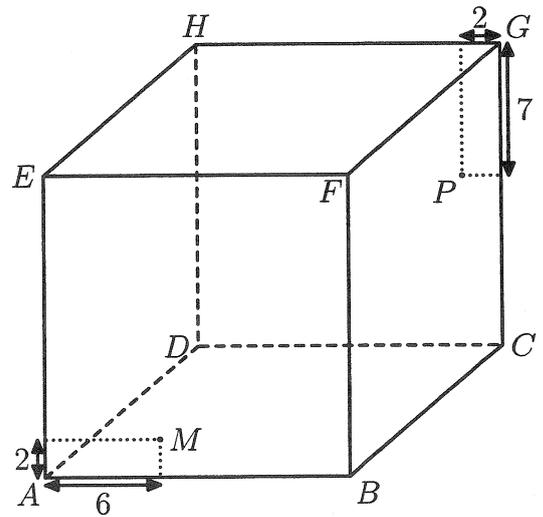
Conclusion : dans cet exemple, le chemin le plus court n'est donc pas plan.

Remarque : le chemin le plus court peut être plan dans certaines situations.

3. Travail avec des élèves

- (a) **Énoncé** d'un exercice donné en temps libre, au mois de septembre :

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 16. Quel est le chemin le plus court pour aller du point M au point P en se déplaçant sur les faces du cube ?



- (b) **Remarques sur les copies d'élèves :**

Un nombre conséquent d'élèves n'ont pas pensé à faire le patron du cube. Ils ont, sur le dessin en perspective, proposé plusieurs chemins, généralement en empruntant des segments parallèles aux arêtes, ou en passant par des sommets. Ils ont ensuite calculé leur longueur, puis ont choisi le plus court.

Les élèves qui ont réalisé un patron n'ont fait qu'une seule proposition : le chemin allait du point M au point P en passant par une seule autre face.

- (c) **Premier bilan en classe : (10 min)**

La longueur du chemin pour aller de M à P sur le cube est égale à la longueur du chemin pour aller de m à p sur le patron. Le plus court est alors la longueur du segment $[mp]$.

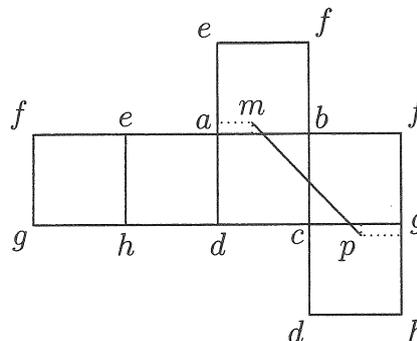
On peut aller de M à P en passant par la face de droite, ou de gauche, ou de dessus, ou de dessous.

Pour la séance suivante, les élèves ont à réaliser les patrons correspondant à ces situations, et à calculer la longueur de chacun des quatre chemins.

- (d) **Deuxième bilan en classe : (20 min)**

Pour la majorité des élèves, le plus court des quatre chemins précédents est celui passant par la face de dessous.

On propose aux élèves un chemin passant à la fois par la face de dessous et celle de droite, et on leur demande si ce chemin pourrait être plus court que les précédents (*la figure ci-dessous est agrandie en annexe 4.b pour une photocopie sur transparent*).



Les élèves ont pensé, à l'unanimité que non. Pour le prouver, ils ont accepté de réaliser (non sans difficulté!) le patron correspondant. Le calcul a alors permis de prouver que, contrairement à l'intuition, il existait un tel chemin plus court que les quatre précédents. . .

Le problème est à nouveau ouvert : quel est le chemin le plus court pour aller de M à P ?

Pour la séance suivante, les élèves ont le choix entre deux travaux :

- réaliser trois patrons de cubes différents.
- trouver d'autres chemins possibles.

(e) Suite et fin :

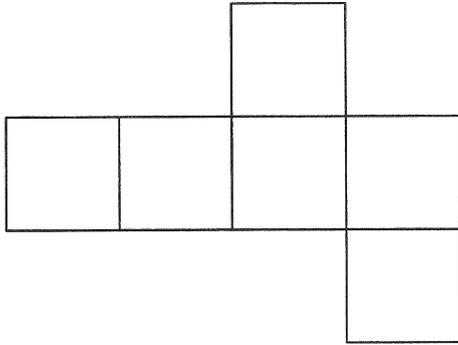
En regroupant les diverses propositions de patrons des élèves, on en obtient 10 différents. En existe-t-il beaucoup d'autres? Lors de la séance suivante, le 11^e est apporté par plusieurs élèves (*voir en annexe 4.a les 11 patrons du cube*).

Un seul élève a proposé un autre chemin. Il s'engage, avec un camarade, à poursuivre la recherche, propose quelques séances plus tard, d'autres chemins, mais n'a pas trouvé de démarche algorithmique pour les déterminer tous. Le travail avec les élèves s'arrête, mais cela leur a permis de constater, à nouveau, qu'une réponse à un problème nécessite une argumentation complète.

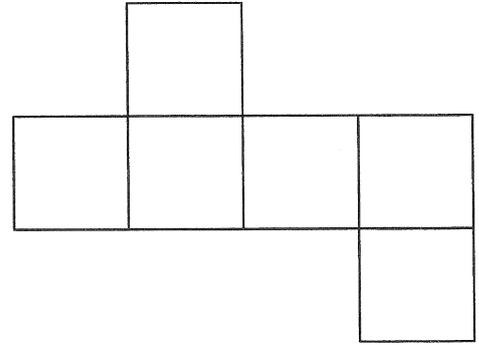
4. Annexe

(a) Les 11 patrons du cube

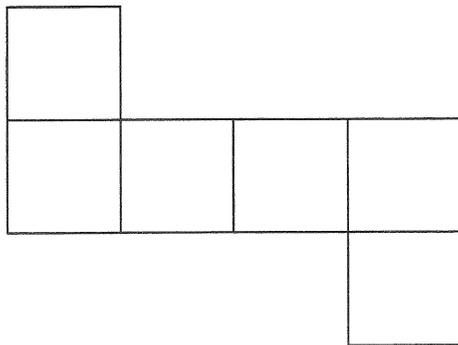
Patron 1



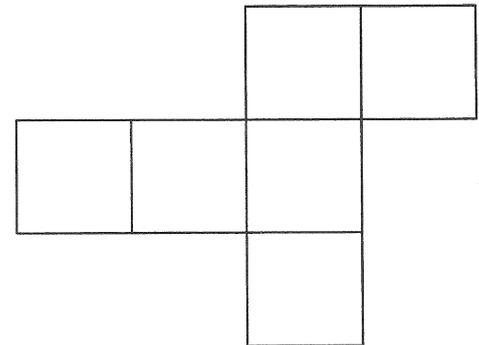
Patron 2



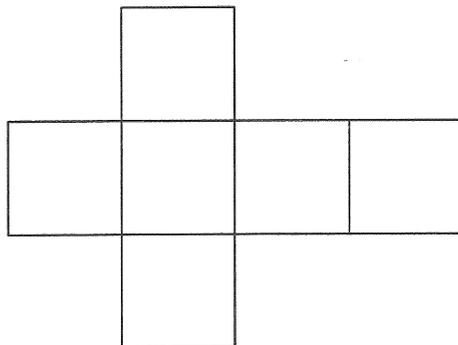
Patron 3



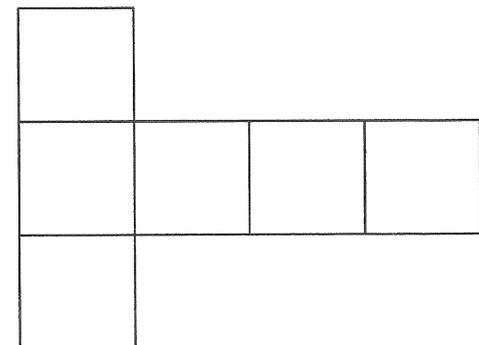
Patron 4



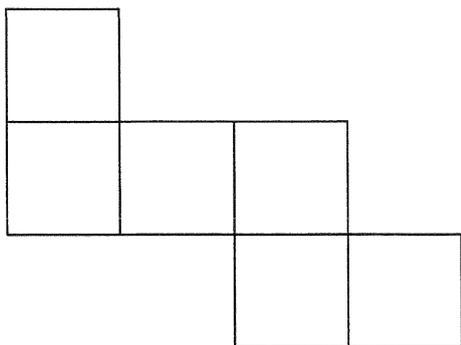
Patron 5



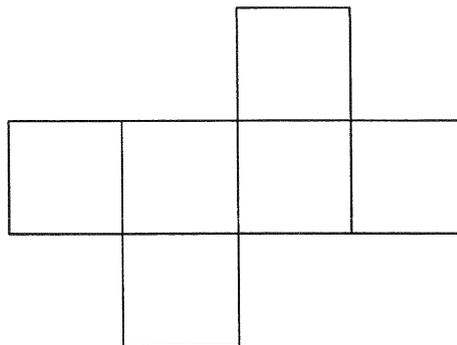
Patron 6



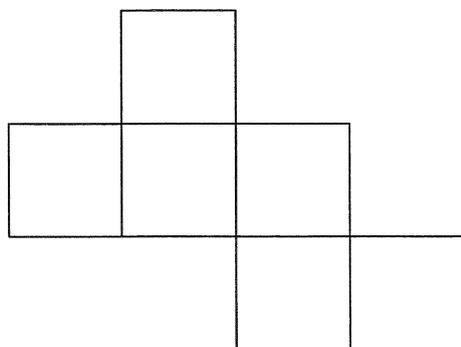
Patron 7



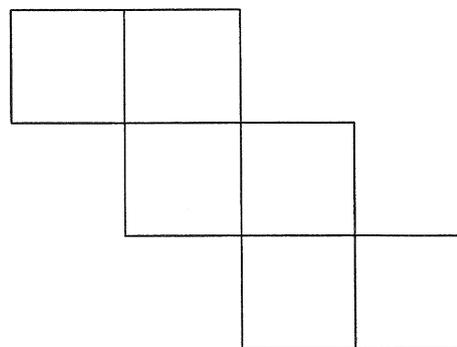
Patron 8



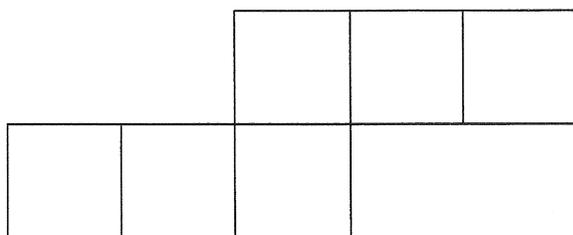
Patron 9



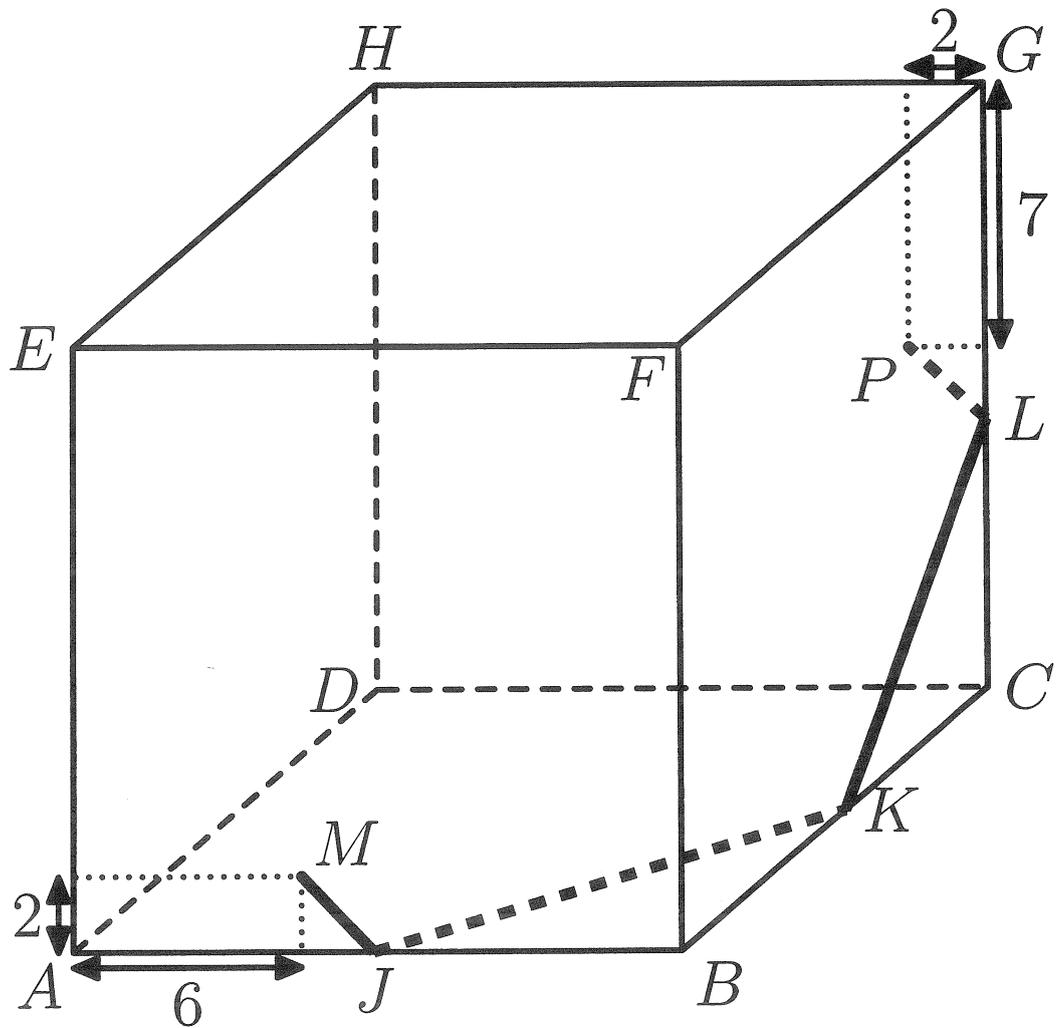
Patron 10



Patron 11



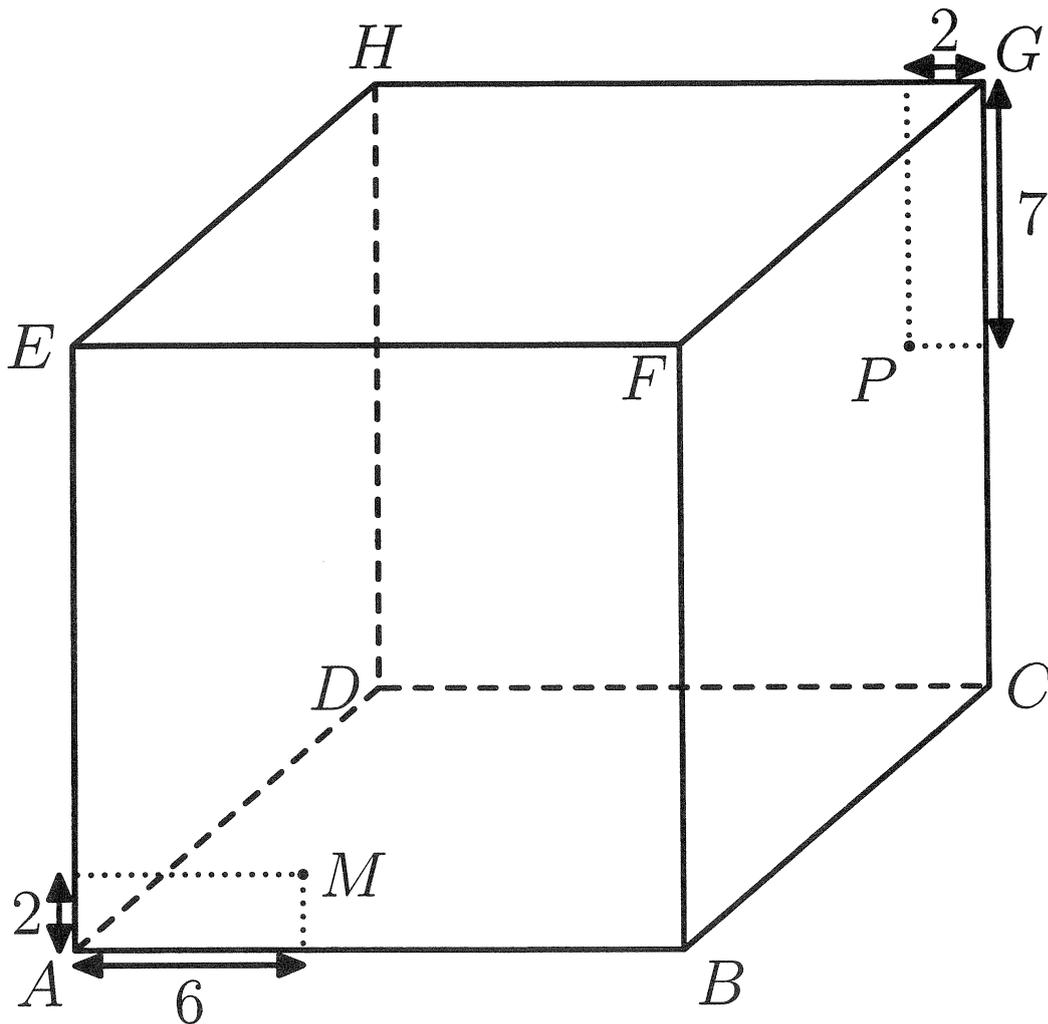
(b) Le chemin le plus court ?



(c) Énoncé du devoir donné aux élèves

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 16

Quel est le chemin le plus court pour aller du point M au point P en se déplaçant sur les faces du cube ?



II Le plus court chemin sur un cylindre

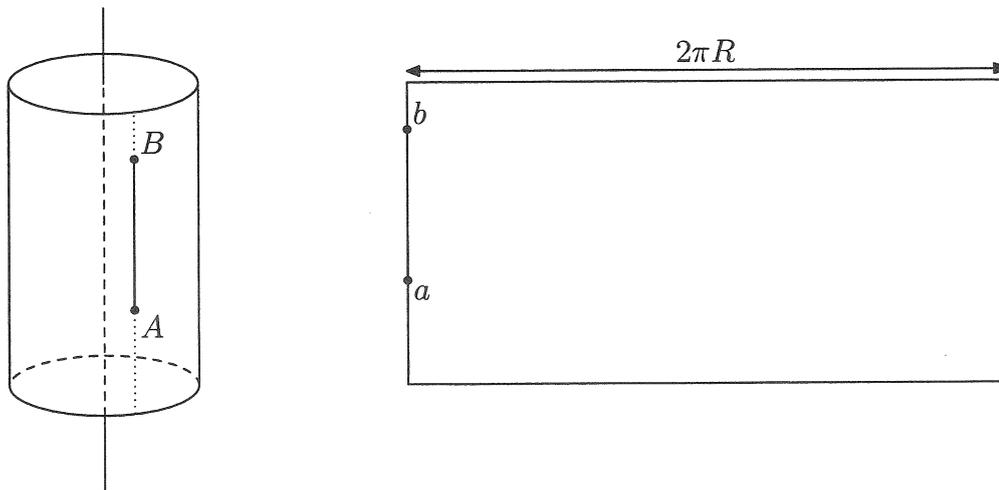
1. Présentation du problème

Problème :

Étant donné deux points distincts sur un cylindre droit de révolution, quel est le plus court chemin sur le cylindre entre ces deux points ?

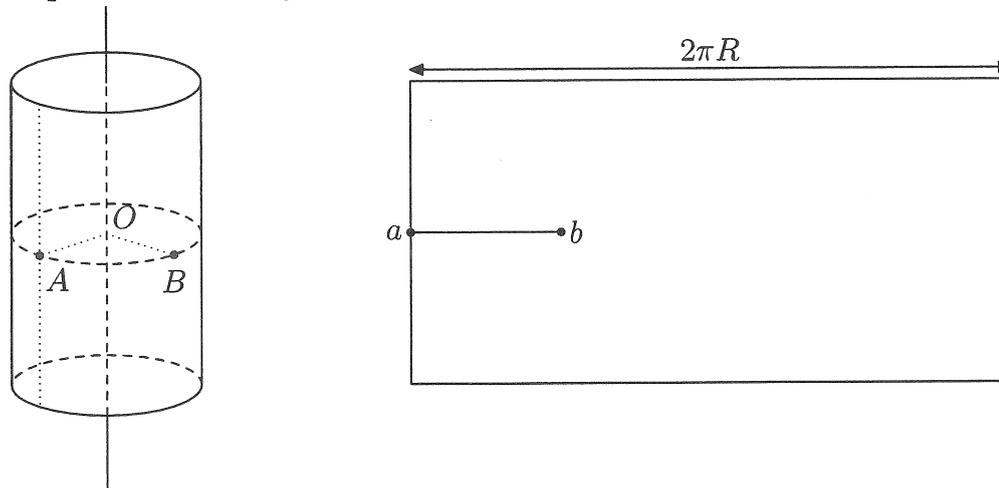
Méthode : On développe le cylindre (Σ), en le coupant suivant une génératrice contenant l'un de ces points, afin d'obtenir un rectangle. Le développement conservant les distances, le plus court chemin entre ces deux points est tracé dans ce rectangle.

Situation 1 : les deux points sont sur une même génératrice



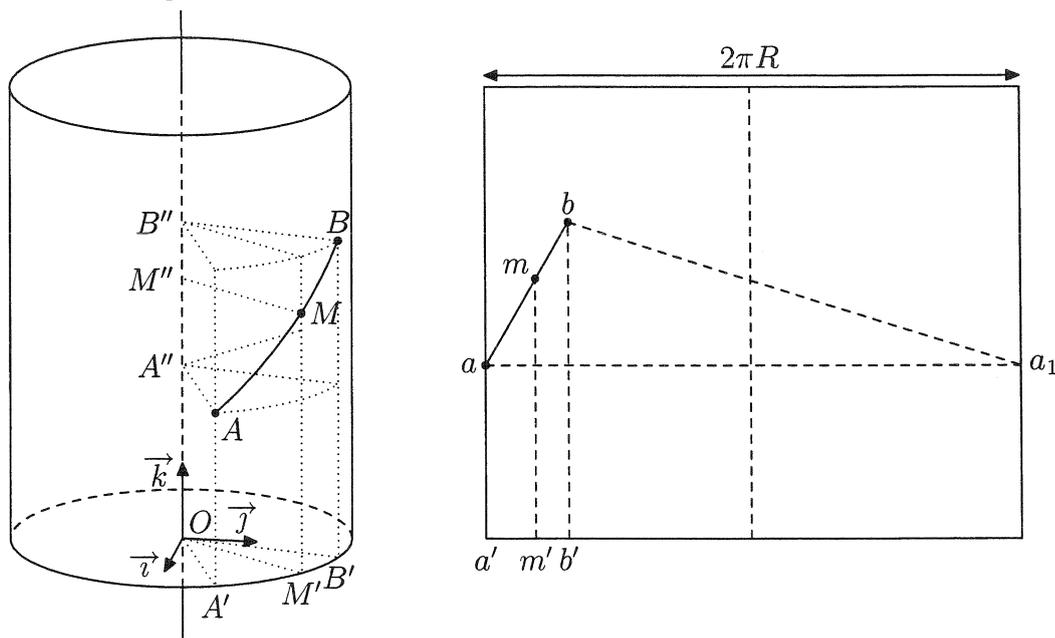
$d(A, B) = ab$, cela correspond à la longueur du segment $[AB]$

Situation 2 : les deux points sont dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, ce plan coupant l'axe du cylindre en O .



$ab = d(A, B) = R\theta$, si $\theta = \widehat{AOB}$ en radians

Situation 3 : cas général



Remarque : sur la figure ci-dessus, le rectangle n'est pas représenté à la même échelle que le cylindre. Soit (Σ) le cylindre d'axe (Δ) , A et B deux points du cylindre. En coupant le cylindre suivant la génératrice passant par A , on obtient le rectangle; a est la trace de A sur le rectangle, b la trace de B sur le rectangle; $aa_1 = 2\pi R$. La distance de A à B sur le cylindre est égale à ab ($ab \leq ba_1$). Le segment $[ab]$ s'enroule sur (Σ) suivant un arc de courbe (C) d'extrémités A et B , A et B se situant sur un même demi-cylindre, et le plan de section contenant l'axe du cylindre et le point A .

Aspect analytique

Soit un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ tel que : \vec{i} est orthogonal à (Δ) ; \vec{k} est un vecteur directeur de (Δ) . On pose $\theta_A = (\vec{i}, \overrightarrow{OA'})$, $\theta_B = (\vec{i}, \overrightarrow{OB'})$ et $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM'})$.

Dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$:

$$A \begin{pmatrix} R \cos(\theta_A) \\ R \sin(\theta_A) \\ z_A \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} R \cos(\theta_B) \\ R \sin(\theta_B) \\ z_B \end{pmatrix}$$

$m \in [a, b] \iff \exists t \in [0, 1]$ tel que $\overrightarrow{am} = t\overrightarrow{ab}$. On en déduit $\theta_M - \theta_A = t(\theta_B - \theta_A)$ et $z_M - z_A = t(z_B - z_A)$.

Lorsque $\theta_B \neq \theta_A$:

$$M \begin{pmatrix} R \cos(\theta) \\ R \sin(\theta) \\ \frac{\theta - \theta_A}{\theta_B - \theta_A}(z_B - z_A) + z_A \end{pmatrix} \quad \theta \in [\theta_A, \theta_B]$$

On peut justifier que la courbe (C) est une hélice circulaire.

Remarque :

- Si $\theta_A = \theta_B$ et $z_A \neq z_B$, le segment $[AB]$ est inclus dans une génératrice (voir situation 1).
- si $\theta_A \neq \theta_B$ et $z_A = z_B$, le chemin le plus court est un arc de cercle situé dans un plan perpendiculaire à l'axe (voir situation 2).

Conclusion :

En dehors des deux cas particuliers, la plus courte distance entre deux points d'un cylindre est la longueur ℓ d'un arc d'hélice circulaire.

$$\ell = \sqrt{R^2(\theta_A - \theta_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

2. Le chemin le plus court n'est en général pas plan

En dehors des cas particuliers correspondant aux situations 1 et 2, la trajectoire donnant le plus court chemin entre deux points d'un cylindre n'est pas une courbe plane.

Pour le démontrer, il suffit de prendre un exemple : on pose $\theta_A = 0$ et $z_A = 0$, $\theta_B = \pi$, I le point de la trajectoire tel que $\theta = \frac{\pi}{2}$ et J le point de la trajectoire tel que $\theta = \frac{\pi}{3}$.

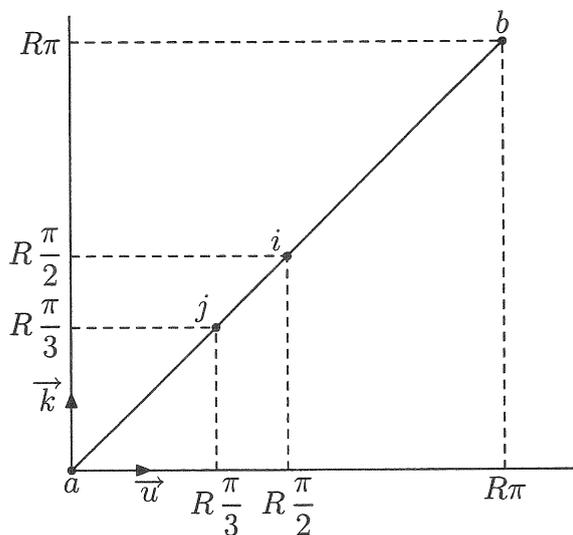
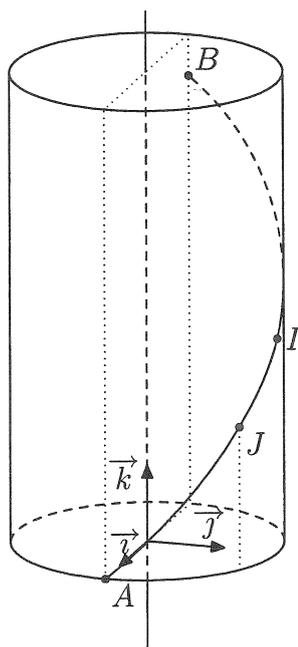
Soit $A(R ; 0 ; 0)$, $B(-R ; 0 ; R\pi)$, $I(0 ; R ; R\frac{\pi}{2})$, $J(\frac{R}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}R ; \frac{\pi}{3}R)$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2R \\ 0 \\ \pi R \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} -R \\ R \\ \frac{\pi}{2}R \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AJ} \begin{pmatrix} -\frac{R}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}R \\ \frac{\pi}{3}R \end{pmatrix}$$

En utilisant le produit mixte : $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AI}) \cdot \overrightarrow{AJ} = -\frac{\pi}{6}R^3 \neq 0$.

On en déduit que le point J n'appartient pas au plan (ABI) .

Remarque : on peut aussi montrer que les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AI} et \overrightarrow{AJ} ne sont pas coplanaires en montrant qu'il n'existe pas de réels α et β tels que : $\overrightarrow{AJ} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AI}$.

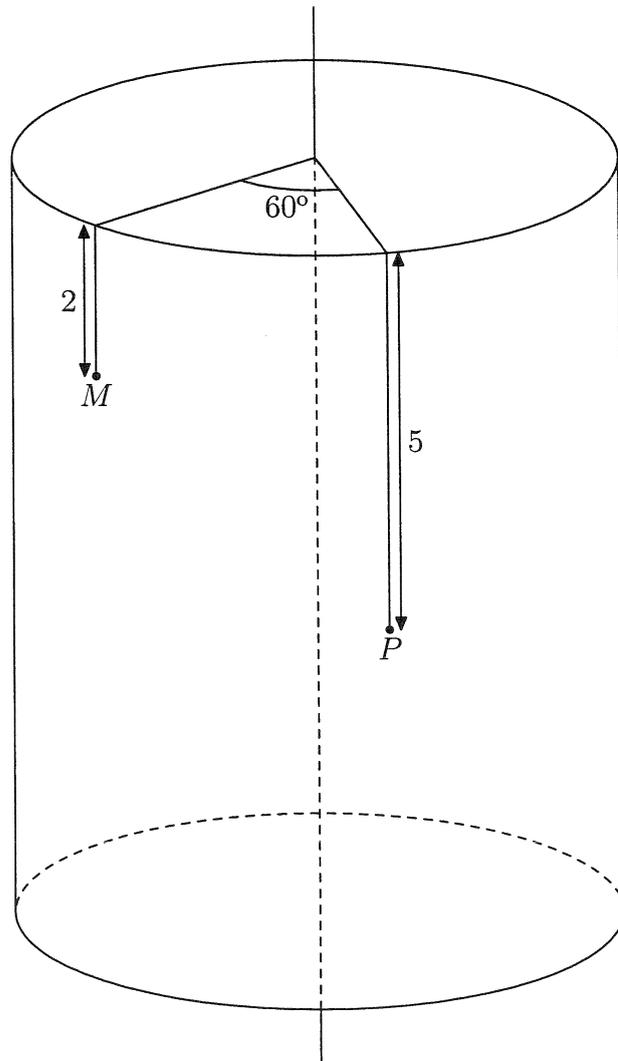


3. Travail avec des élèves

Énoncé d'un exercice donné en temps libre, au mois d'octobre :

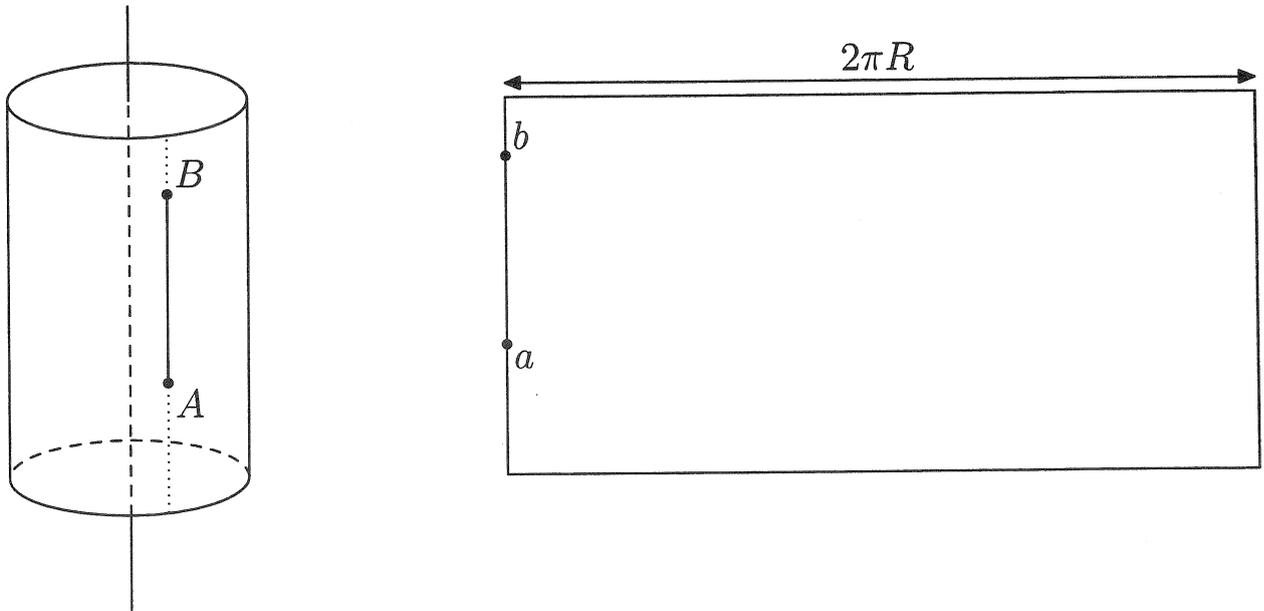
Quel est le chemin le plus court pour aller du point M au point P en se déplaçant sur le cylindre ci-contre ?

Le cylindre est de rayon 4, et les points M et P sont situés sur ce cylindre, à l'extérieur de celui-ci.



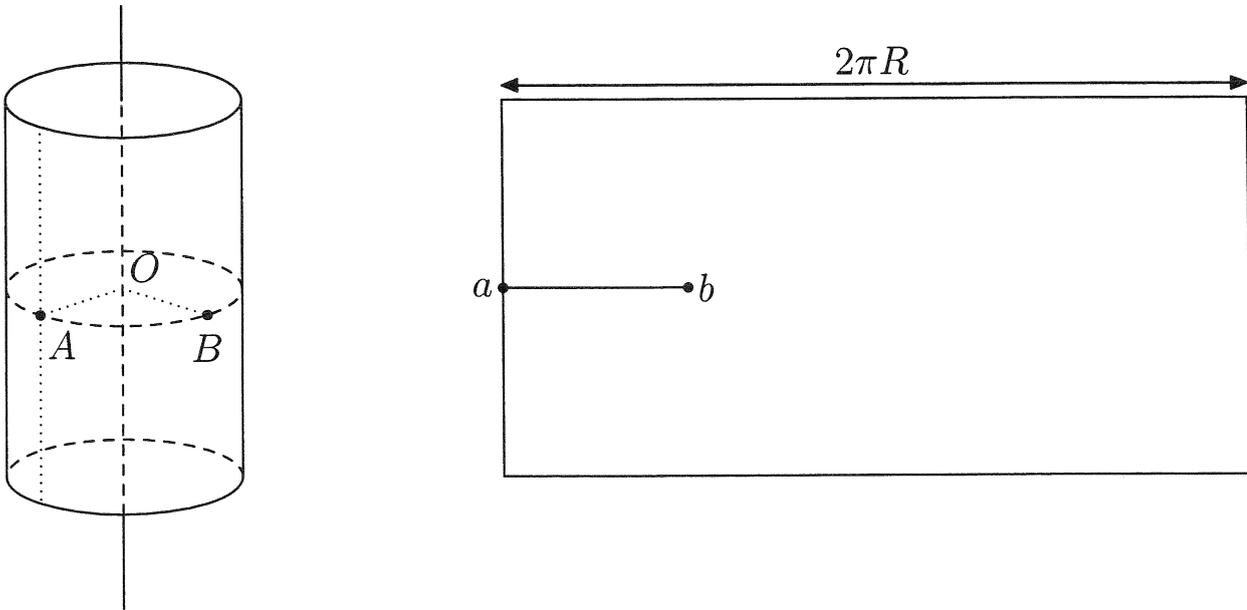
4. Annexe

(a) Deux points sur une même génératrice



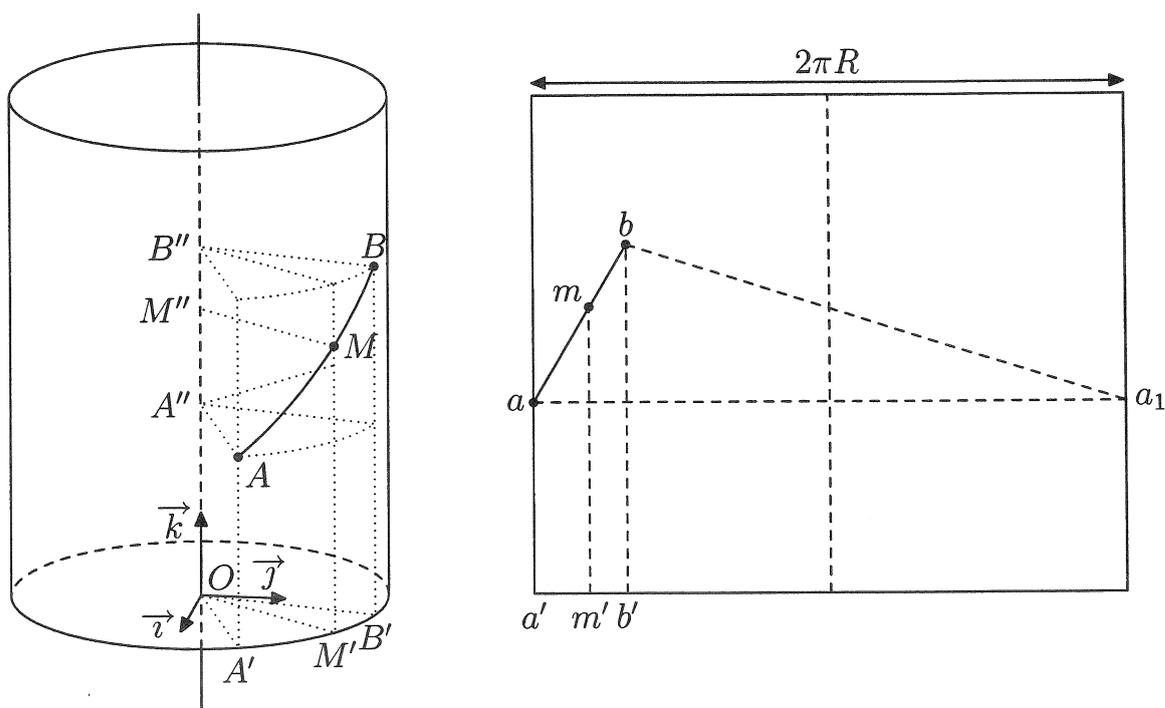
$d(A, B) = ab$, cela correspond à la longueur du segment $[AB]$.

(b) Deux points dans un même plan perpendiculaire à l'axe du cylindre



$$ab = d(A, B) = R\theta, \text{ si } \theta = \widehat{AOB} \text{ en radians.}$$

(c) cas général



III Le plus court chemin sur un cône

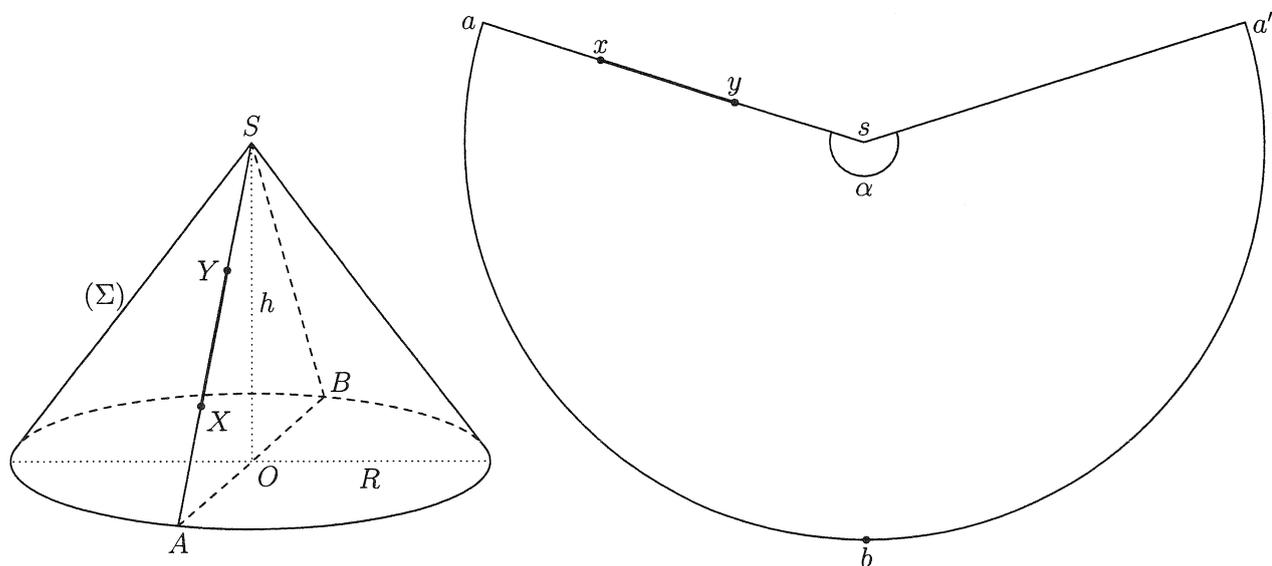
1. Présentation du problème

Problème :

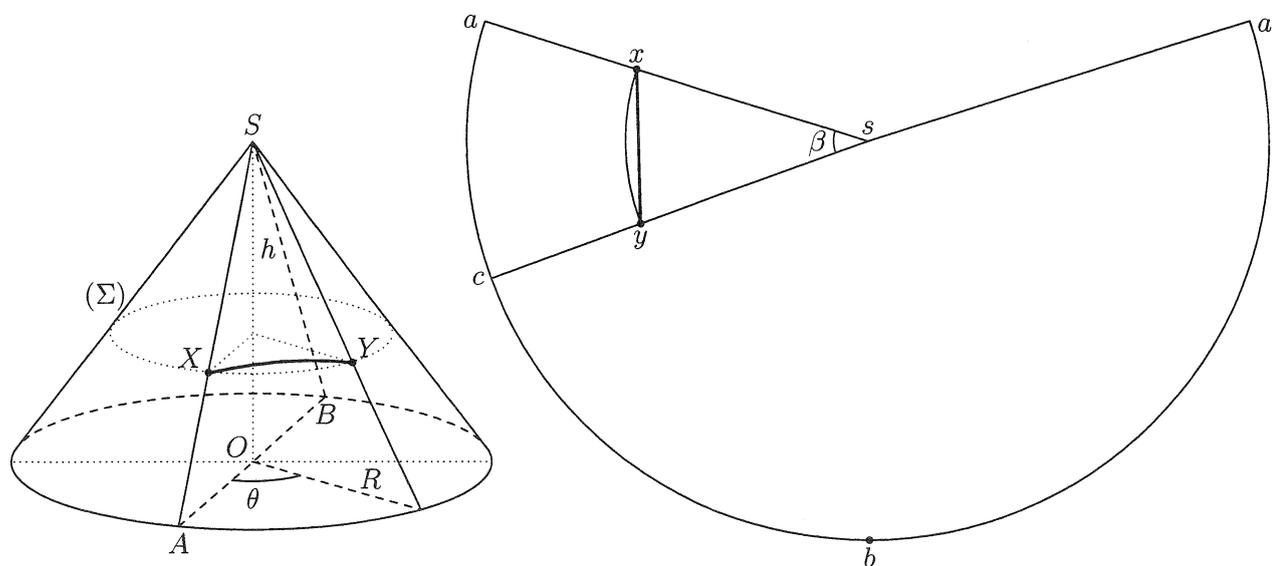
Étant donné deux points distincts sur un cône droit de révolution, quel est le chemin le plus court entre ces deux points ?

Méthode : on développe le cône (Σ) en le coupant suivant une génératrice contenant l'un de ces points. On obtient un secteur angulaire plan. Le plus court chemin est tracé dans ce secteur. Il suffit alors d'enrouler le secteur sur le cône pour obtenir le plus court chemin sur celui-ci.

Situation 1 : les deux points sont sur la même génératrice

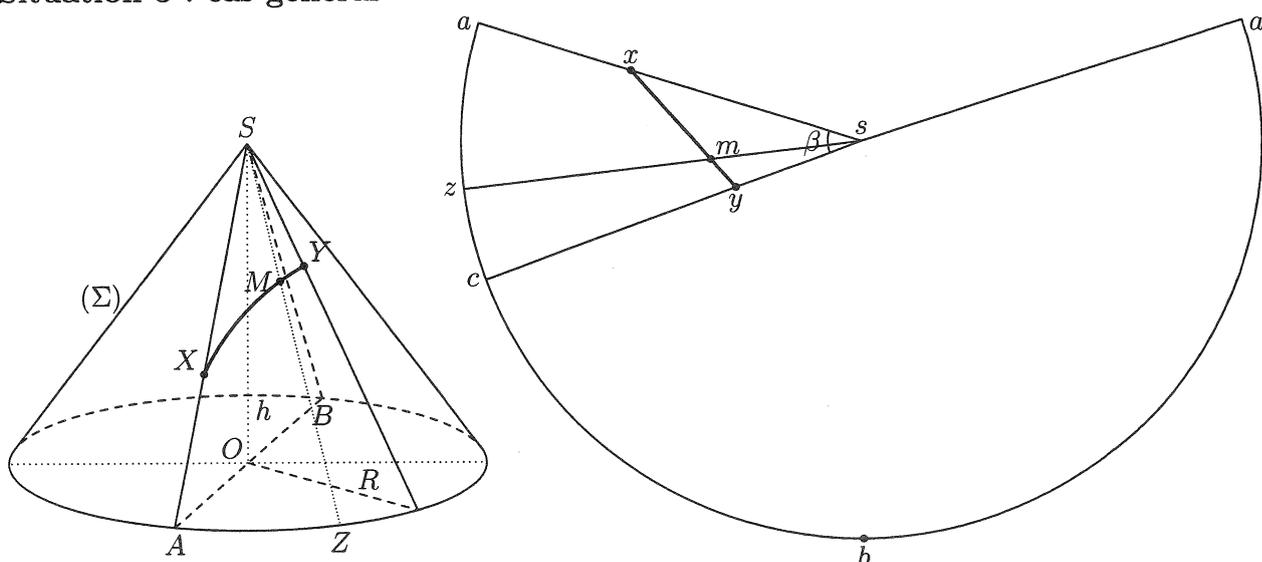


Situation 2 : les deux points sont dans un plan perpendiculaire à l'axe du cône



L'arc de cercle d'extrémités X et Y se développe en l'arc de cercle d'extrémités x et y . La distance entre X et Y est la longueur du segment $[xy]$. Le chemin le plus court entre X et Y sur le cône est l'arc de courbe d'extrémités X et Y se développant suivant le segment $[xy]$.

Situation 3 : cas général



Soit X et Y deux points du cône n'appartenant pas à la même génératrice.

X appartient à $[SA]$ et Y appartient à $[SC]$.

X se développe en x et Y en y .

L'image du chemin le plus court entre X et Y sur le cône est le segment $[xy]$ sur le secteur angulaire.

On a : $\frac{sm}{sz} = \frac{SM}{SZ}$. On utilise cette proportion pour tracer le plus court chemin sur le cône :

M est le point du segment $[SZ]$ tel que : $SM = sm \times \frac{SZ}{sz}$.

2. Travail avec des élèves

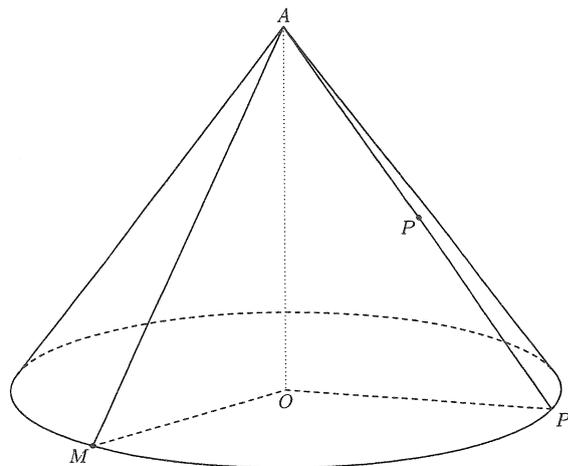
Quel est le chemin le plus court pour aller du point M au point P en se déplaçant sur le cône ci-contre ? Calculer sa longueur.

On donne :

$$OA = 8 ; OM = 6 ;$$

$$AP = 5 ;$$

$$\widehat{MOP'} = 120^\circ.$$



Le travail peut se faire en deux temps :

- réalisation du patron du cône pour tracer le chemin le plus court : c'est l'occasion de réactiver des connaissances de collège.
- calcul de la longueur de ce plus court chemin : ce calcul nécessite l'utilisation de l'outil « trigonométrie du triangle rectangle », dans une situation un peu plus complexe que celles rencontrées habituellement au collège.

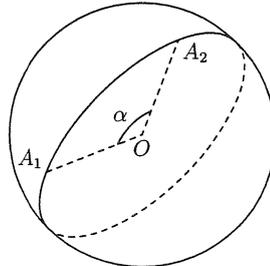
IV Le plus court chemin sur une sphère

1. Présentation du problème : longueur du plus court chemin

Étant donné deux points distincts d'une sphère, quel est, sur cette sphère, le plus court chemin entre ces deux points ?

On admettra que la longueur de ce plus court chemin est la longueur du petit arc de grand cercle joignant ces deux points.

Soit A_1 et A_2 deux points de la sphère de latitudes respectives φ_1 et φ_2 , et de longitudes respectives λ_1 et λ_2 ($\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1$ et λ_2 sont exprimées en radians).



Calculons la longueur D du petit arc du grand cercle joignant A_1 et A_2 :

$D = R\alpha$, avec $\alpha = \widehat{A_1OA_2}$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$).

Or, $A_1(R \cos(\varphi_1) \cos(\lambda_1) ; R \cos(\varphi_1) \sin(\lambda_1) ; R \sin(\varphi_1))$

et $A_2(R \cos(\varphi_2) \cos(\lambda_2) ; R \cos(\varphi_2) \sin(\lambda_2) ; R \sin(\varphi_2))$.

On a, d'une part : $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = OA_1 \times OA_2 \times \cos(\alpha) = R^2 \times \cos(\alpha)$, et d'autre part :

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = R^2(\cos(\varphi_1) \cos(\lambda_1) \cos(\varphi_2) \cos(\lambda_2) + \cos(\varphi_1) \sin(\lambda_1) \cos(\varphi_2) \sin(\lambda_2) + \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2))$$

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = R^2(\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2))$$

On en déduit : $\cos(\alpha) = \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)$

Puis :

$$D = R \cdot \text{Arccos} \left(\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \right)$$

2. Travail avec des élèves

Problème : Quel est le plus court chemin pour aller de la ville de Dole à celle de Québec ?

Méthode :

Pour déterminer le plus court chemin sur un cube, sur un cylindre, ou sur un cône, on a pu développer chacun de ces solides et utiliser un patron pour trouver le plus court chemin.

Mais une sphère n'est pas développable : « une sphère n'a pas de patron », dit un élève ;

Avec une feuille de papier et un globe, on constate qu'effectivement, on n'arrive pas à envelopper le globe sans froisser la feuille.

Comment alors représenter la terre sur un plan ?

La suite du travail avec les élèves sur ce thème du plus court chemin nécessite une étude de la projection de la sphère sur un plan. Les élèves ont déjà eu l'occasion de constater en cours de géographie que les représentations planes du monde ne sont pas toutes les mêmes. On leur propose alors d'étudier une (ou plusieurs) projection(s) particulière(s). Un itinéraire possible est :

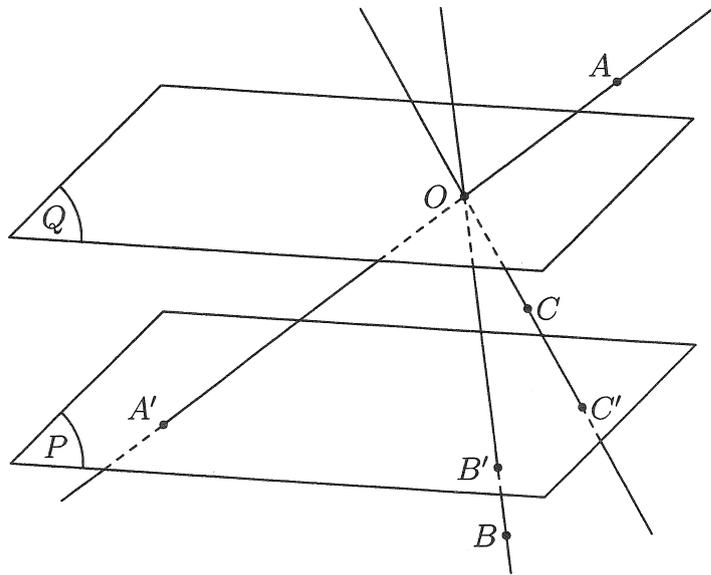
– Étude d'une projection de l'espace (sans référence à la sphère) : voir E

– Étude d'une projection cartographique particulière, la projection gnomonique : voir F ou G

Nous avons choisi la projection gnomonique, d'une part parce qu'elle présente des propriétés géométriques accessibles aux élèves, et d'autre part parce qu'elle conserve « les plus courts chemins » : ainsi le plus court chemin sur le globe sera représenté par un segment de droite (voir activités VI p. 110 et VII p. 115).

V Étude d'une projection

1. Fiche élève

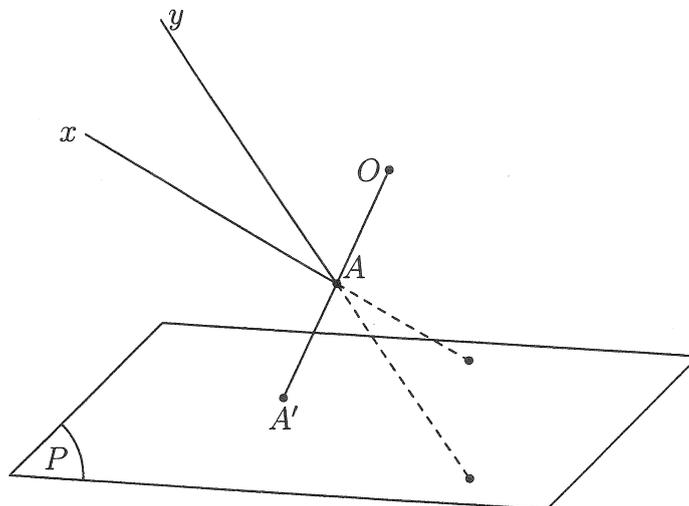


Soit \mathcal{E} l'espace, (P) un plan de \mathcal{E} .

O un point de \mathcal{E} n'appartenant pas à (P) .

Pour tout point M distinct de O , on considère la droite (OM) .

1. Déterminer l'ensemble (Q) des points M de \mathcal{E} pour lesquels (OM) ne coupe pas (P) .
2. Pour tout point M de F la droite (OM) coupe (P) en un seul point M' : quel est l'ensemble F ?
On note $M' = p(M)$; M' est l'image de M par la projection p . Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit F ?
3. Soit D une droite de \mathcal{E} . Déterminer l'ensemble image de D par la projection p .
4. Tracer l'image d'un couple de demi-droites $([Ax] ; [Ay])$. Justifier.



5. Déterminer l'image d'un cercle dont le plan est strictement parallèle à (Q) .

2. Fiche professeur

(a) Les intentions de ce devoir

Ce devoir peut être proposé à des élèves de classes de seconde dans le cadre de travail différencié. Le texte utilisant des formulations mathématiques et quelques notions abstraites, peu fréquemment utilisées en seconde indifférenciée, devrait permettre à l'élève de poursuivre sa formation mathématique en vue d'études scientifiques.

(b) Les objectifs

- Mettre en œuvre des connaissances de géométrie dans l'espace :
 - position relative de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan,
 - représentation plane d'une figure de l'espace ;
- Réinvestir :
 - un vocabulaire mathématique (image, antécédent, point invariant, application),
 - des méthodes de démonstration, des études de cas ;
- Permettre de suggérer des prolongements en restant dans la phase de conjecture : image d'un cercle, d'un triangle, d'un cône, conservation des rapports. . .
- Étudier une figure de l'espace, connue par sa représentation dans le plan.

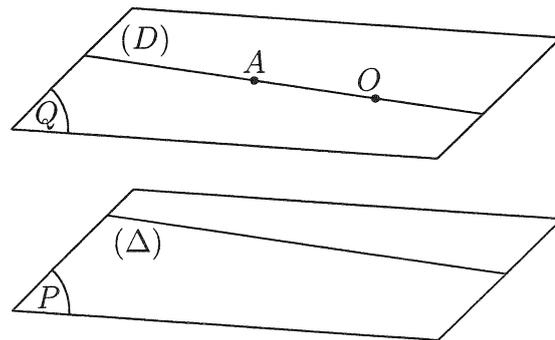
(c) Quelques éléments de correction du devoir

Les figures sont reproduites agrandies en annexe pour être photocopiées sur transparents.

Question 1.

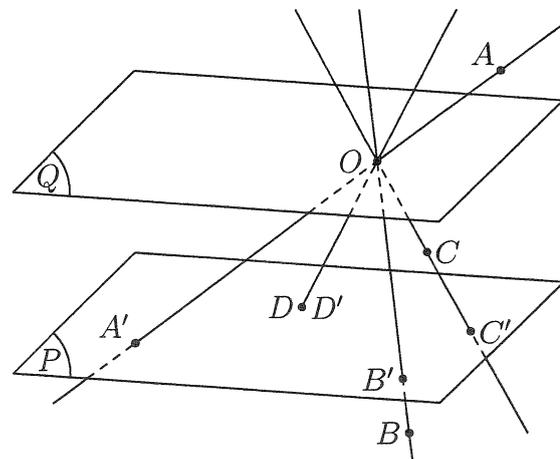
Une droite (D) passant par O est parallèle au plan (P) si, et seulement si, il existe une droite (Δ) incluse dans (P) et parallèle à (D) .

L'ensemble des droites (D) détermine le plan parallèle au plan (P) passant par O .
L'ensemble (Q) est donc le plan parallèle au plan (P) passant par O .



Question 2.

La question 2 reprend la question 1, avec une formulation différente. Elle permet de bien préciser l'ensemble des points de l'espace qui ont une image par p . Dans la deuxième partie de la question, on pourra parler d'antécédents, de points invariants.

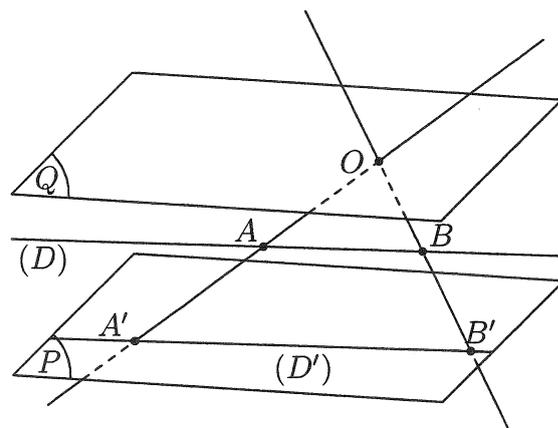


Question 3.

Deux cas sont à étudier :

Cas 1 : la droite (D) est strictement parallèle au plan (Q)

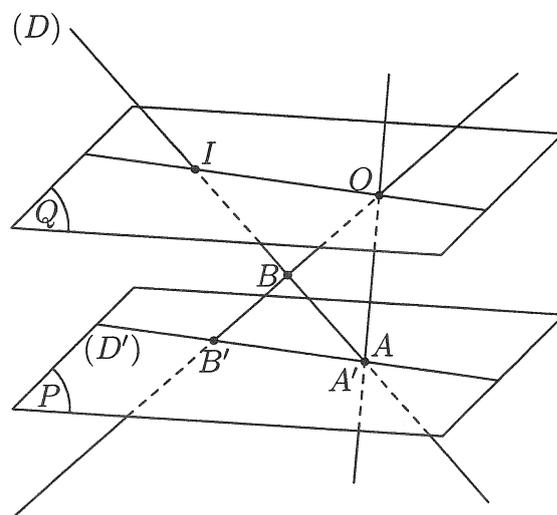
Voir aussi le cas particulier où (D) est incluse dans (P)



Cas 2 : la droite (D) n'est pas parallèle au plan (Q)

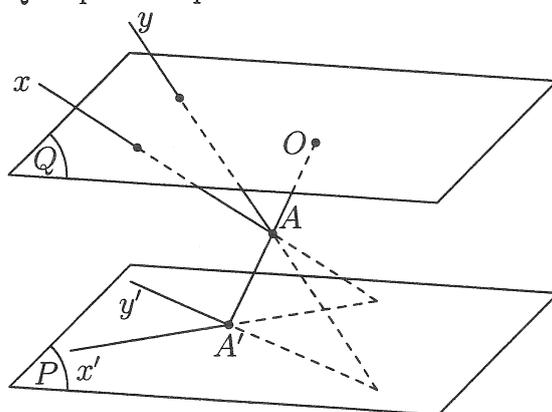
Dans ce cas le point d'intersection de la droite (D) et du plan (Q) n'a pas d'image par p .

On cherche donc l'image de D^* : droite D privée de ce point d'intersection.



Question 4.

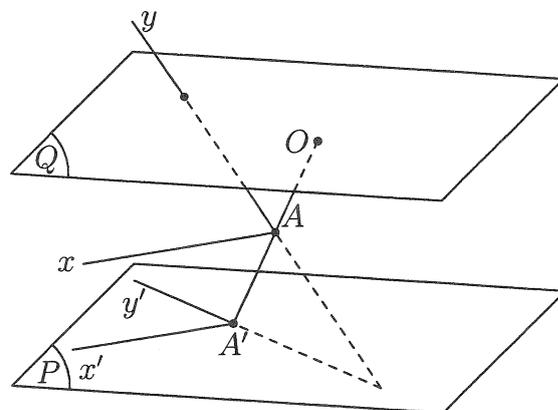
Quelques cas peuvent être étudiés :



$[Ax]$ et $[Ay]$ sont sécantes au plan (Q)

Autres cas envisageables :

- $[Ax]$ et $[Ay]$ sont parallèles au plan (Q)
- $[Ax]$ et $[Ay]$ sont sécantes au plan (P)

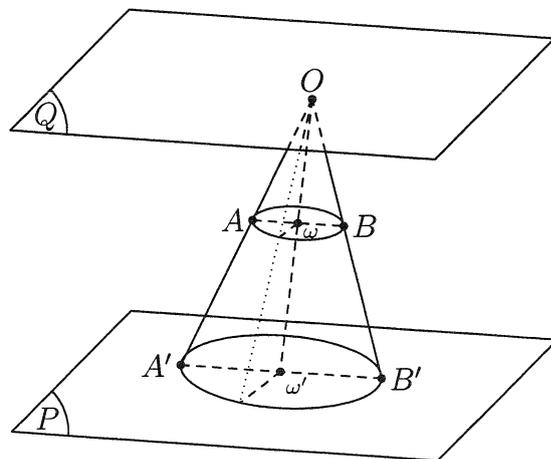


$[Ax]$ est parallèle au plan (Q) et $[Ay]$ est sécante au plan (Q)

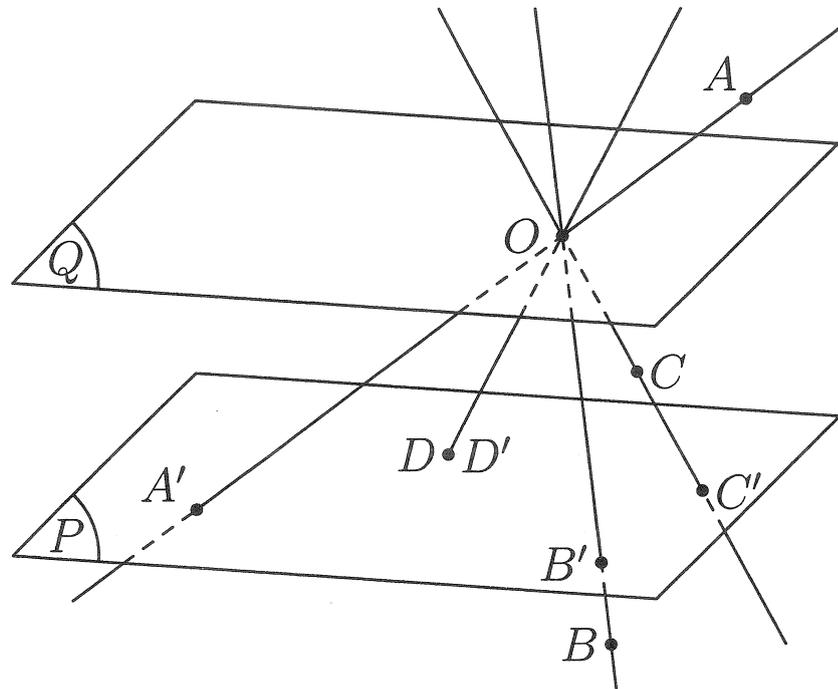
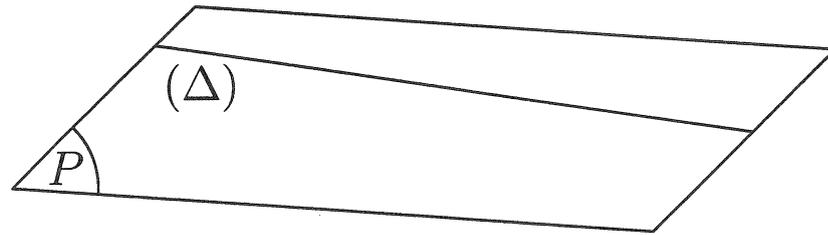
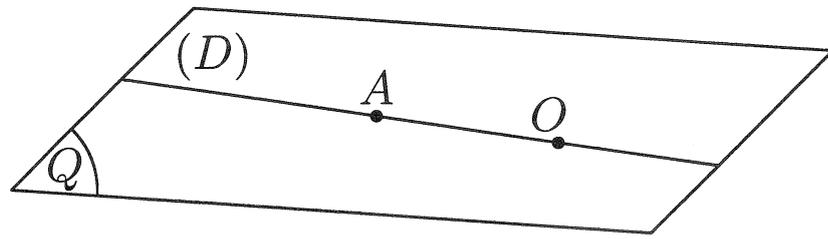
Question 5.

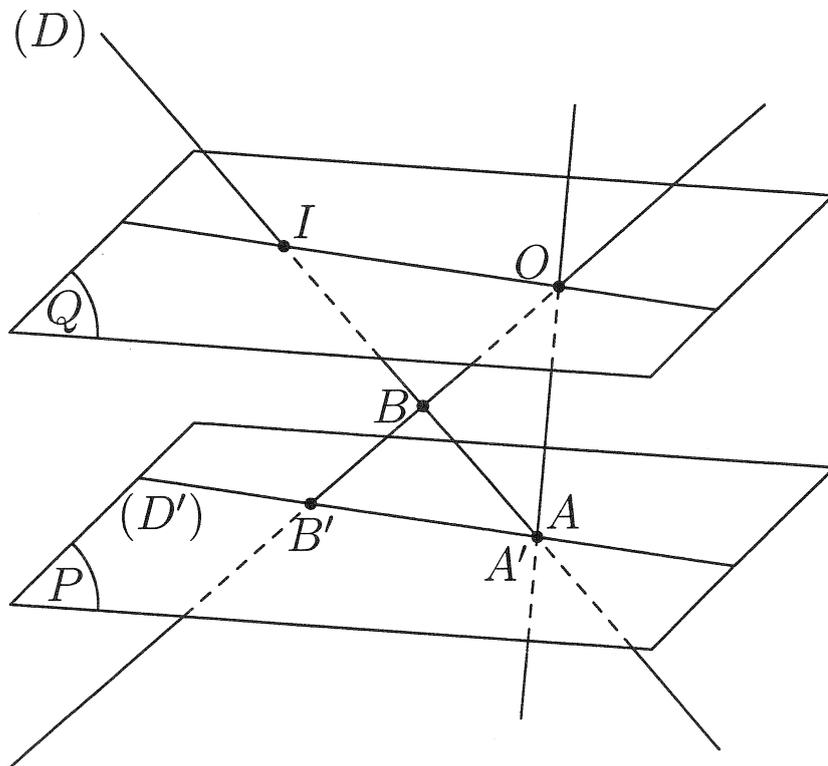
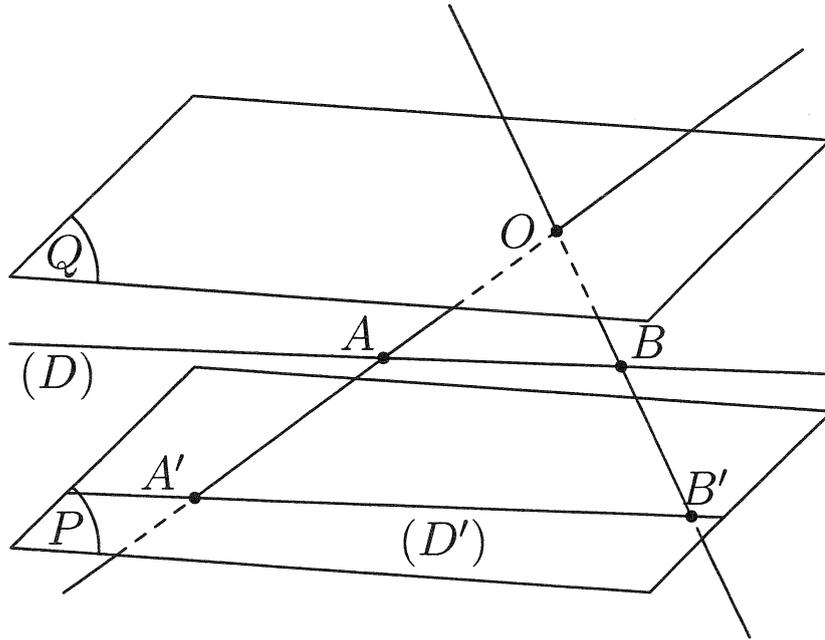
Il s'agit de préciser ce qu'est un cercle dans l'espace.

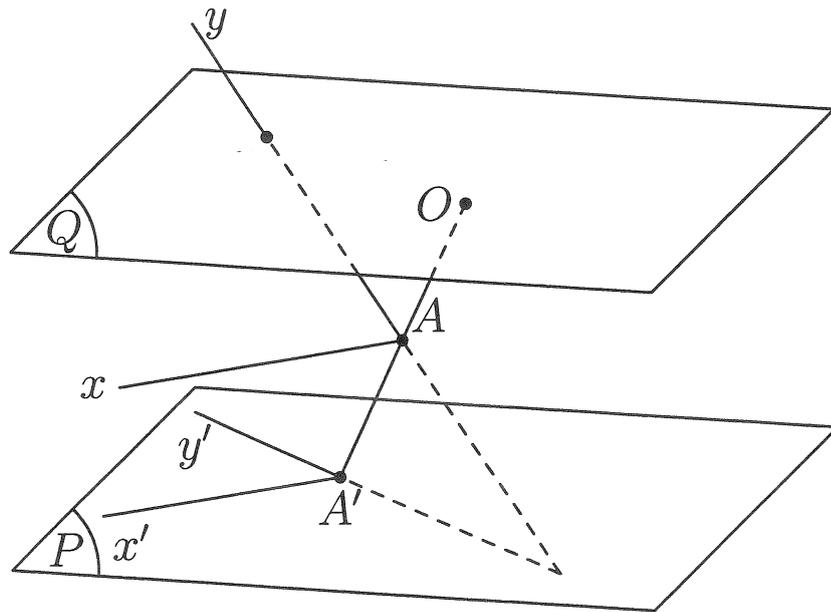
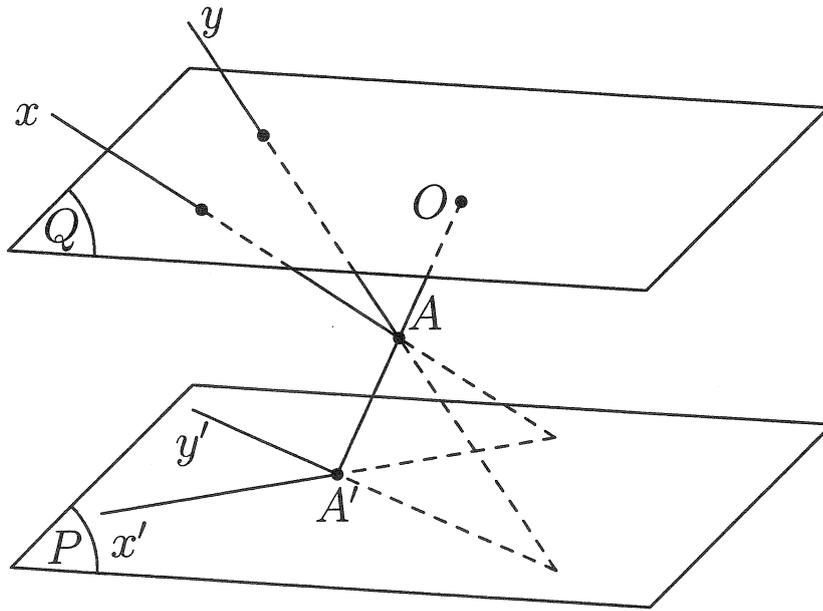
L'élève doit prendre des initiatives pour représenter un cercle de l'espace.

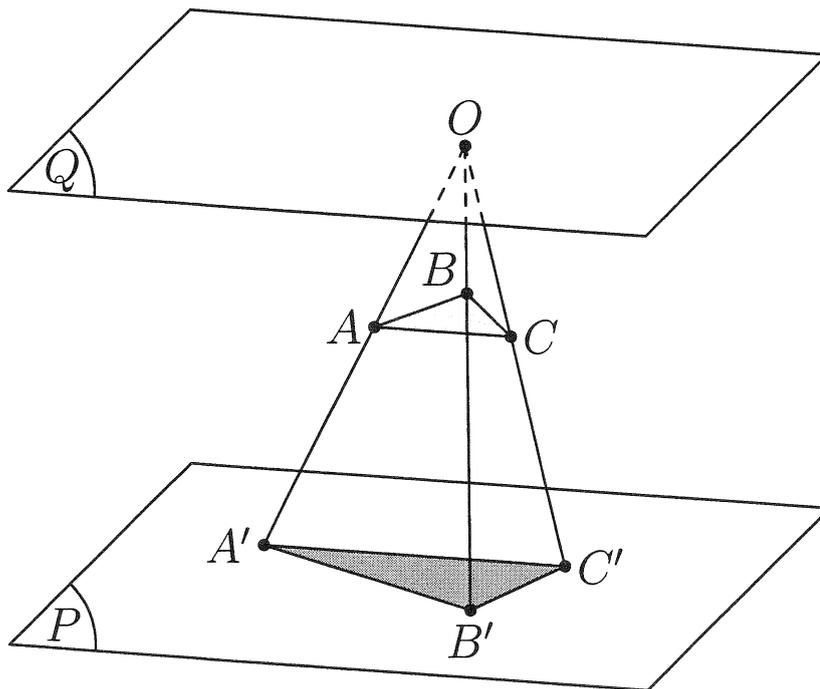
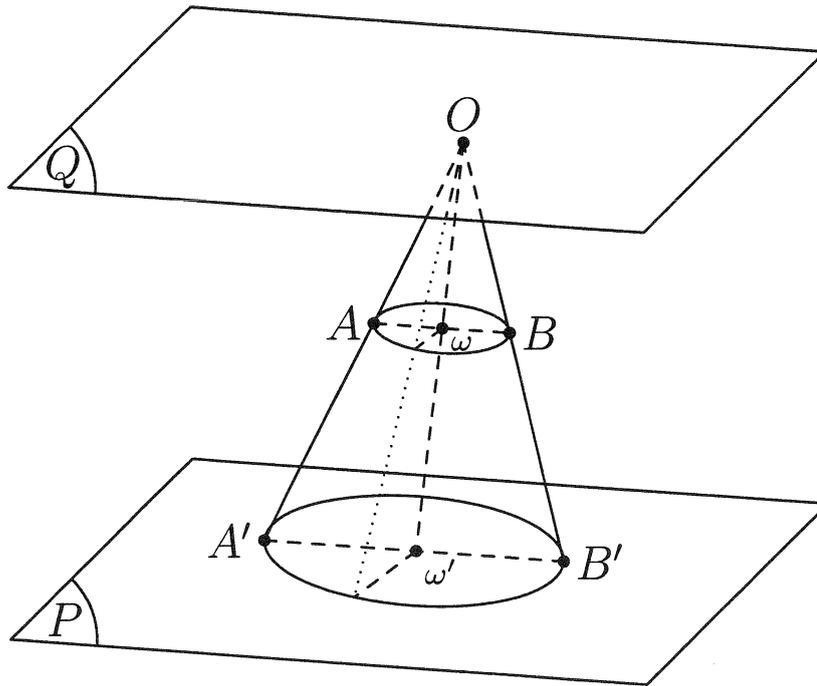


3. Annexe









VI Projection gnomonique (variante 1)

1. Fiche élève

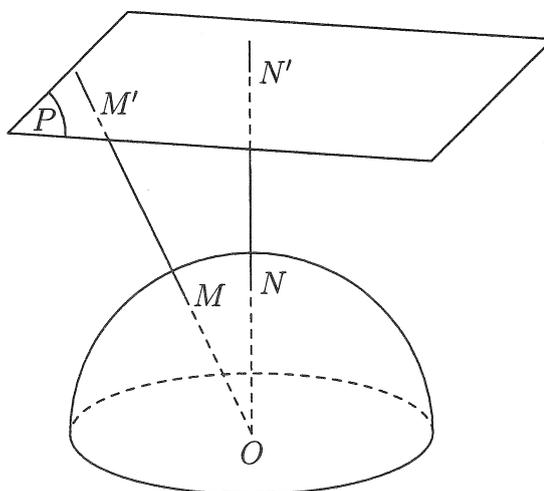
La **projection gnomonique** consiste à projeter une demi-sphère sur un plan.

Dans l'étude qui suit, la demi-sphère considérée est l'hémisphère Nord, équateur exclu.

Définition : soit (P) un plan strictement parallèle au plan équatorial et soit O le centre de la Terre.

Pour tout point M de l'hémisphère Nord, si la droite (OM) coupe (P) en un unique point M' , ce point M' est l'image de M dans la projection gnomonique sur le plan P .

L'ensemble des points M' obtenus lorsque M décrit l'hémisphère Nord est la carte sur (P) de l'hémisphère Nord.



1. Dans le problème, le plan de projection (P) est le plan tangent à la sphère en N (N étant le pôle Nord). Faire une figure en perspective dans ce cas.

2. Recherche du projeté d'un parallèle

Soit (C) le parallèle de l'hémisphère nord de latitude φ (en degrés). On a donc $0 < \varphi < 90$.

On notera Ω son centre, r son rayon et enfin (Q) le plan parallèle à (P) contenant (C) .

Pour un point M de (C) d'image M' , on note (P') le plan contenant les points O, M, N .

2.1. Justifier que M' est dans P' , puis faire une figure dans le plan (P') .

2.2. Calculer $M'N$ en fonction de R et φ . Montrer que cette distance est constante lorsque M parcourt le parallèle (C) . En déduire que le projeté (C') de (C) sur P est inclus dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon r' .

Nous admettrons que réciproquement, tout point de (C') est l'image d'un point de (C) par la projection gnomonique.

2.3. Exprimer r , puis r' en fonction de R et φ .

2.4. Projetés de quelques parallèles

Remplir le tableau en arrondissant les valeurs de r et r' au km près. On prendra $R = 6\,400$ (en km). Comment se nomme le parallèle de latitude $23,4^\circ$? Comment se nomme le parallèle de latitude $66,5^\circ$?

φ (en degrés)	10	15	23,4	30	45	60	66,5	70
r (en km)								
r' (en km)								

3. Recherche du projeté d'un demi méridien

Un méridien (Γ) est un demi-cercle inclus dans un plan (P') . Quel est son diamètre ?

3.1. Déterminer la nature de l'intersection Δ de (P') et (P) , donner un point de Δ .

Soit M un point de (Γ) , démontrer que M' est un point de Δ , puis faire une figure dans le plan (P') .

3.2. Lorsque M parcourt la partie du méridien incluse dans l'hémisphère Nord, quelle est la partie de Δ décrite par son projeté M' ?

3.3. *Projetés de quelques demi méridiens*

Soit M_1 et M_2 deux points situés sur le même parallèle de centre Ω et sur deux méridiens correspondant à une différence de longitude de 15° . Faire une figure en perspective.

Déterminer une mesure l'angle $\widehat{M_1\Omega M_2}$. Combien mesure l'angle projeté $\widehat{M'_1 N M'_2}$? Pourquoi ?

4. Réalisation d'une carte

En choisissant une échelle convenable, représenter une trame de l'hémisphère Nord obtenue par projection gnomonique sur le plan parallèle à l'équateur, tangent à la sphère terrestre en N . Pour cela, on représentera les demi méridiens de longitude égale à un multiple de 15° et on poursuivra par les parallèles de latitude égale à un multiple de 15° , le tropique du Cancer et le cercle polaire arctique.

Cette trame étant réalisée, on complétera le tableau de la page suivante, puis on placera les villes dont les coordonnées figurent dans ledit tableau. Enfin, on dessinera le contour de l'Amérique du Nord et de l'Amérique Centrale.

5. Recherche du projeté d'un demi grand cercle

Un grand cercle est un cercle de la sphère centré en O . Quel est son rayon ?

Soit (π) le plan contenant un grand cercle autre que l'équateur.

Déterminer la nature de l'intersection D de (π) et (P) .

Soit M un point de (E) , demi grand cercle situé dans l'hémisphère nord, démontrer que M' est un point de D .

Réciproquement, si on prend un point X de D , démontrer qu'il existe un point M de (E) dont le projeté est X .

Quel est alors le projeté d'un demi grand cercle ?

6. Qui une telle carte peut-elle intéresser ?

Rappel 1 : le plus court chemin sur la sphère reliant deux points A et B de la sphère est le petit arc du grand cercle passant par ces deux points.

Si A et B , points de l'hémisphère Nord, ont pour image sur la carte A' et B' , quelle est l'image sur la carte du grand cercle contenant A et B ? Quelle est l'image sur la carte du petit arc de grand cercle joignant A et B ?

Application : le commandant de bord assure la liaison aérienne New York-Tōkyō. Il emprunte l'itinéraire le plus court. Tracez-le sur votre carte.

Rappel 2 :

	Latitude	Longitude
New York	39	-74
Tōkyō	36	140

Numéro	Villes	Continent	Latitude (°)	Longitude (°)
01			15	-2
02	Aden		13	45
03	Le Caire		30	
04	Manille		15	120
05	Hô Chi Minh-Ville			105
06	Ōsaka		35	135
07			60	30
08	Bordeaux			0
09	Oslo		60	10
10			45	-75
11	New Orleans		30	
12	Durango		23,4	-105
13	Guatemala City		15	-90
14	Anchorage			
15	Istanbul		41	30
16	Conakry		10	16
17			34	-118
18	Mourmansk		69	33
19	Honolulu		21	-158
20	Halifax		44	-63
21	Miami			-80
22	Reykjavik		64	-22
23	Djibouti		11	43
24	Assouan		23,5	33
25	Tanger		36	6
26	San José		10	-84
27	Mérida		21	-90

TAB. .1 . Localisation de certaines villes

2. Fiche professeur

(a) Les prérequis

Les élèves doivent connaître :

- La sphère terrestre et son vocabulaire associé : pôles, hémisphères, équateur, parallèles, méridien de Greenwich, méridiens.
- Le repérage d'un point de la Terre par sa latitude et sa longitude.
La latitude a une mesure en degrés appartenant à l'intervalle $] - 90 ; 90[$, les valeurs négatives étant attribuées à l'hémisphère sud.
La longitude a une mesure en degrés appartenant à l'intervalle $] - 180 ; 180[$, les valeurs négatives étant attribuées à l'hémisphère ouest.
- La définition d'un grand cercle et sa qualité orthodromique (voir partie théorique).
- Le repérage sur un globe terrestre.

(b) Organisations pédagogiques possibles

Définition et question 1 : travail en classe entière (10 à 15 minutes)

Questions 2 et 3 : travail en demi-classe (une heure)

- Formule 1 : Le groupe 1 peut travailler sur les parallèles et le groupe 2 sur les demi-méridiens
- Formule 2 : À l'intérieur de chaque demi-classe, une partie des élèves travaillera sur les parallèles et l'autre partie sur les demi-méridiens.

Une synthèse des résultats aux deux questions sera alors faite en classe entière (formule 1) ou à la fin de l'heure (formule 2). Elle sera l'occasion de préciser qu'un plan est défini à partir de trois points non alignés et d'introduire la notation usuelle : (*NOM*) pour la question 2.

Question 4 : travail individuel en temps libre

Le tracé de la carte de l'Amérique du Nord et de l'Amérique Centrale pourra être confié à quelques élèves volontaires.

En retour, le professeur présentera sur transparent les cartes des Amériques dressées par les élèves et fournira la carte de l'hémisphère Nord à chaque élève (voir partie théorique III)

Questions 5 et 6 : travail individuel en temps libre

(c) L'exploitation de la carte

La déformation

Après avoir constaté la déformation en comparant un continent sur le globe terrestre, avec son image sur une carte obtenue par projection de Mercator (voir partie théorique V.4.) et son image sur notre carte obtenue par projection gnomonique, on pourra « évaluer » cette déformation en comparant numériquement ce que deviennent certains rapports de distances et certains rapports d'aires après projection.

Quelques exemples pourraient être :

Pour les aires (km ²)		Pour les distances (km)	
France	550 000	Dakar – Reykjavik	5 480
Royaume-Uni	244 000	Reykjavik – Le Caire	5 280
Groenland	2 175 000	Le Caire – Dakar	5 217
Inde : (φ de 30° à 8,5°)	3 000 000	Bordeaux – Helsinki	2 382
Sri Lanka : (φ de 10° à 6,5°)	65 000	Helsinki – Reykjavik	2 397
Philippines : (φ de 19° à 6°)	300 000	Reykjavik – Bordeaux	2 482

On pourra lier cette déformation au rapport $\frac{r'}{r}$ et poser les questions suivantes :

- Quelles sont les régions *peu* déformées en comparant avec ce qu'on voit sur un globe terrestre ?
- Quelles sont les régions *très* déformées en comparant avec ce qu'on voit sur un globe terrestre ?

L'intérêt de la carte

Après avoir justifié que l'itinéraire le plus court est le segment de droite liant New York et Tōkyō, on constatera que ces deux villes sont presque sur le même parallèle. On pourra alors dessiner sur la carte l'itinéraire joignant les deux villes en suivant ce parallèle.

Sur le planisphère usuel, on pourra dessiner les deux itinéraires précédents et en conclure l'intérêt de la carte obtenue par projection gnomonique en navigation aérienne.

La projection gnomonique transforme les arcs de grand cercle en segments. Les segments sont les orthodromies du plan. La projection gnomonique conserve donc les orthodromies.

VII Projection gnomonique (variante 2)

1. Fiche élève

La projection gnomonique consiste à projeter l'hémisphère Nord (équateur exclu) sur un plan de la façon suivante :

Soit (P) le plan strictement parallèle au plan équatorial et passant par le pôle nord N , et soit O le centre de la Terre. Pour tout point M de l'hémisphère Nord, l'image de M est le point M' , intersection de la droite (OM) et du plan (P) .

1. Faire une figure.

- (a) en perspective.
- (b) dans un plan contenant les points N , O et M .

Pour la séance suivante : chercher les latitudes et longitudes des villes de Dole et de Québec.

2. Recherche du projeté d'un parallèle

Soit (C) le parallèle passant par Dole. On notera Ω son centre, r son rayon et enfin (Q) le plan parallèle à (P) contenant (C) .

- (a) Compléter les deux figures de la question 1.
- (b) On note (C') l'image du parallèle (C) par la projection gnomonique. Émettre une conjecture sur la nature de (C') , puis essayer de démontrer cette conjecture.
- (c) Représenter (C') dans le plan (P) .
- (d) Représenter, dans le plan (P) , les images de deux autres parallèles de votre choix.
- (e) Les rayons des parallèles et les rayons de leurs projetés sont-ils proportionnels ?

3. Recherche du projeté d'un demi-méridien

Soit (Γ) l'intersection du méridien passant par Dole et de l'hémisphère Nord. Préciser la nature de (Γ) .

- (a) Compléter les deux figures de la question 1.
- (b) On note (Γ') l'image de (Γ) par la projection gnomonique. Émettre une conjecture sur la nature de (Γ') , puis essayer de démontrer cette conjecture.
- (c) Représenter (Γ') dans le plan (P) .
- (d) Représenter, dans le plan (P) , l'image du demi-méridien passant par Greenwich.
- (e) Représenter les images des méridiens de longitude $k \times 30^\circ$, pour k entier, $-5 \leq k \leq 6$.

4. Réalisation d'une « trame »

Représenter, dans le plan (P) , les images

- des méridiens de longitude $k \times 30^\circ$, pour k entier, $-5 \leq k \leq 6$.
- des parallèles de latitude $k \times 15^\circ$, pour k entier, $1 \leq k \leq 6$, ainsi que du parallèle passant par Dole (et Québec).

5. Recherche du plus court chemin

Sur la trame :

- Placer l'image de chacune des villes de Dole et de Québec.
- Tracer l'image du plus court chemin pour aller de Dole à la ville de Québec.

2. Fiche professeur

PROPOSITION DE FONCTIONNEMENT

Séance n° 1 : (en classe entière).

Travail individuel ou par binômes, pendant 20 à 30 minutes, puis bilan en classe entière (20 min), sous forme de questionnement oral.

Question 1 : *Faire une figure*

Questions

Connaissances mises en jeu

À propos de la question (a)

« Le plan (P) est le plan parallèle au plan équatorial passant par N » : le plan (P) est-il unique ?

Si deux plans ne sont pas parallèles, quelles peuvent être leurs positions relatives ?

Quelle est alors leur intersection ?

« M' est le point d'intersection de la droite (OM) et du plan (P) » : ce point existe-t-il toujours ?

Quelles peuvent être les positions relatives d'une droite et d'un plan ?

Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace sont :

- soit parallèles : ils n'ont aucun point en commun.
- soit sécants : ils se coupent alors selon une droite.

Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan de l'espace sont :

- soit parallèles : ou bien la droite est contenue dans le plan, ou bien la droite et le plan n'ont aucun point commun.
- soit sécants : ils se coupent alors selon un unique point.

À propos de la question (b)

Combien existe-t-il de plans contenant les points N , O et M ?

Différentes façons de définir un plan

Notation d'un plan

On admet qu'étant donné 3 points non alignés N , O et M , il existe un et un seul plan contenant ces trois points.

On le note (NOM).

On dit qu'un plan est défini par trois points non alignés.

VRAI ou FAUX

- Une droite est définie par deux points.
- Un plan est défini par deux droites.

Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace sont :

- soit coplanaires : elles sont alors soit parallèles, soit sécantes.
- soit non coplanaires : elles n'ont alors aucun point commun.

Quelle est l'intersection du plan équatorial avec le plan (NOM) ?

Quelle est l'intersection du plan (P) avec le plan (NOM) ?

Quelle est la position relative de ces deux droites ?

Est-on sûr que le point M' appartient au plan (NOM) ?

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un, coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Si un plan contient deux points distincts, alors il contient la droite définie par ces deux points.

La synthèse des connaissances relatives à la géométrie dans l'espace et mises en jeu dans cette activité est donnée aux élèves (voir annexe (c)).

Séance n° 2 : (une heure en demi-classe).

Questions 2 et 3 : Recherche du projeté d'un parallèle et du projeté d'un demi-méridien.

Pendant l'heure de module : projeté d'un parallèle avec l'un des groupes, et d'un demi-méridien avec l'autre groupe. Deux ou trois élèves par groupe se chargent de préparer (sur transparents) la présentation du compte-rendu en classe entière.

Séance n° 3 : (20 min en classe entière).

Synthèse à faire à la séance suivante en classe entière : quelques élèves se chargent alors de réaliser la trame (utilisation possible de Geoplan). Cette trame sera ensuite distribuée à chaque élève, afin qu'il puisse chercher la question 5.

Séance n° 4 : (en classe entière).

Apporter un planisphère où les parallèles sont représentés par des droites, par exemple en projection de Mercator : sur cette carte, le segment joignant Dole et Québec est l'image d'un arc du parallèle passant par Dole et Québec.

Qu'en est-il sur la carte en projection gnomonique ? En d'autres termes, quel chemin sur la sphère correspond au segment $[dq]$ joignant Dole et Québec sur la carte en projection gnomonique ?

Soit M' un point de $[dq]$, projeté de M : M appartient à la terre. Soit le plan contenant les villes de Dole et de Québec, ainsi que le centre O de la terre : d , projeté de Dole, et q , projeté de Québec, appartiennent à ce plan, donc M' aussi, et M aussi. M appartient à l'intersection d'un plan passant par O et de la terre, il appartient donc au grand cercle passant par Dole et Québec.

Bilan : en projection gnomonique, $[dq]$ représente un arc du grand cercle passant par Dole et Québec.

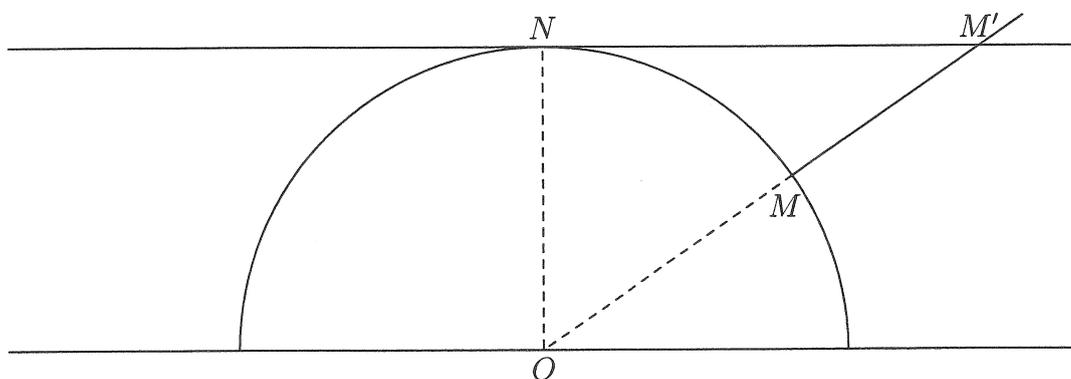
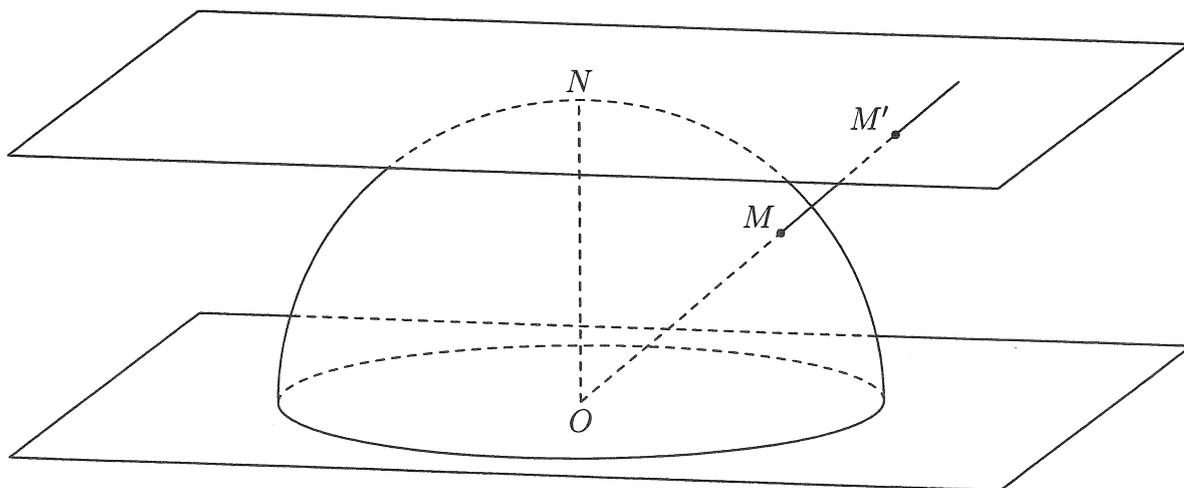
Quel est le plus court de ces deux chemins (arc de parallèle, ou arc de grand cercle) ? Ceci peut être l'objet d'un devoir en temps libre.

On admettra ensuite que le plus court chemin sur une sphère est un arc de grand cercle.

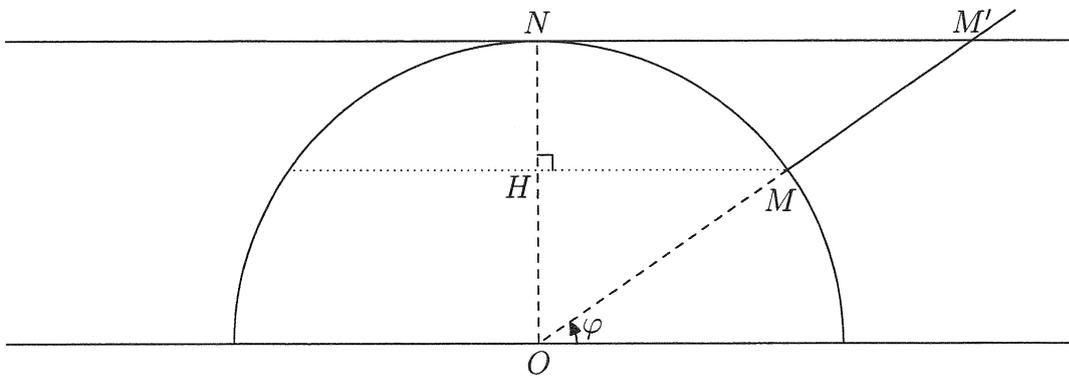
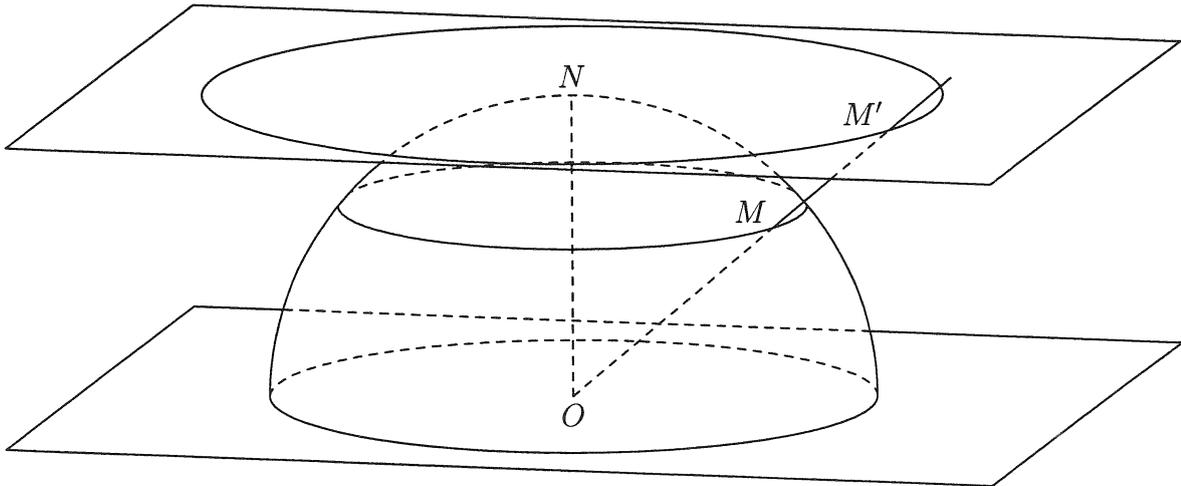
La projection gnomonique conserve les plus courts chemins. C'est pour cette raison qu'elle est utilisée dans les aéroports (on projette sur un plan tangent à la sphère passant par l'aéroport).

3. Annexe

(a) Figures de la question 1.



(b) Figures de la question 2.

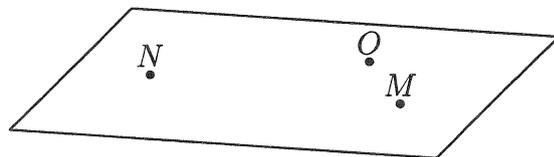


(c) **Fiche cours** : trace dans le cahier de cours de l'élève.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

1. Définir un plan

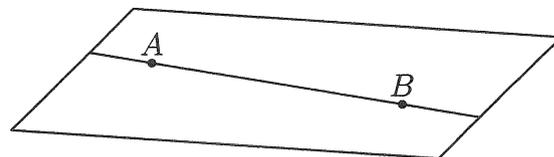
On admet qu'étant donné 3 points non alignés N , O et M , il existe un et un seul plan contenant ces trois points. On le note (NOM) .



On dit qu'un plan est défini par trois points non alignés.

2. Propriété

Si un plan contient deux points distincts, alors il contient la droite définie par ces deux points.



3. Positions relatives dans l'espace

- de deux plans
- d'une droite et d'un plan
- de deux droites

Les différentes figures sont à reproduire à partir du manuel.

4. Parallélisme

Si deux plans sont parallèles, alors tout troisième plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles.

La figure est à reproduire à partir du manuel.

Le cours sera ensuite complété à la suite d'autres activités.

Une activité en licence

Nous allons donner dans ce qui suit, une formalisation plus mathématique que physique du problème de la recherche d'une carte conforme, et notamment de la carte de Mercator.

Cette activité est d'un niveau de troisième année de Licence de Mathématiques et permet de mettre en jeu dans un environnement concret les notions de calcul différentiel étudiées à ce niveau (homéomorphisme, difféomorphisme, différentielle, différentielle de l'inverse, matrice jacobienne et dérivées partielles, ...)

La sphère est munie de la topologie induite par \mathbb{R}^3 .

I Quelques définitions

On rappelle qu'un homéomorphisme entre deux espaces topologiques est une application continue bijective, dont la réciproque est continue.

Difféomorphisme de classe \mathcal{C}^k : une application d'un espace topologique E vers un espace topologique F est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^k si f est une bijection de E sur F , si f et f^{-1} sont de classe \mathcal{C}^k .

II Recherche d'une carte conforme de la sphère

1. À la recherche de la définition d'une carte de la sphère

Derrière l'idée de carte, il y a le problème d'appliquer la sphère, ou une partie A de la sphère sur un plan. Cette application doit être injective pour que les points de la sphère soient caractérisés par leur image. L'application cherchée sera alors une bijection depuis la partie A sur son image. La propriété de continuité de l'application et de sa réciproque est également naturelle pour que les voisinages des points soient conservés de la sphère à la partie du plan ou inversement.

Cela nous amène donc à poser la définition suivante :

Définition

Soit S une sphère de rayon R , une **carte** de S est un couple (A, f) , A étant une partie ouverte de S et f étant une application de A dans \mathbb{R}^2 et un homéomorphisme de A sur $f(A)$.

Naturellement, on pourra essayer d'imposer d'autres propriétés à la carte : il pourra être intéressant que f soit un difféomorphisme.

Dans toute la suite, S sera la sphère de \mathbb{R}^3 de centre $O(0, 0, 0)$ et de rayon 1.

2. Un exemple classique : la carte des coordonnées terrestres

Remarquons à présent, que si la définition d'une carte est naturelle, sa mise en pratique est plus complexe. Comment expliciter une application d'une partie A de S dans le plan ?

On peut définir un point de la sphère par ses coordonnées dans \mathbb{R}^3 . Une pratique courante est de fixer sur la sphère un demi-cercle Γ de référence et de définir à partir de ce choix la longitude ℓ et la latitude θ d'un point de la sphère non situé sur ce demi-cercle. Tout point de la sphère non situé sur Γ est alors également déterminé par le couple (ℓ, θ) .

L'application $\Phi : \begin{cases} S \setminus \Gamma & \longrightarrow]0; 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ M & \longmapsto (\ell, \theta) \end{cases}$ est alors bien une application d'une partie de la sphère dans le plan.

Proposition

Avec les notations précédentes, le couple $(S \setminus \Gamma, \Phi)$ est une carte de S

C'est la réciproque de Φ qui est le plus souvent explicitée :

$$(\ell, \theta) \longmapsto (\cos(\ell) \cos(\theta), \sin(\ell) \cos(\theta), \sin(\theta)).$$

Remarquons que Φ est même un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^∞ .

3. Les cartes conformes

Une carte conforme est une carte dans laquelle les « angles » sont conservés.

L'angle de la sphère défini par deux grands cercles sécants en un point M est l'angle des tangentes aux grands cercles en M dans le plan tangent en M . Parler d'angle sur la sphère se ramène donc à une notion plane. Dans un plan, les applications qui conservent les angles sont les similitudes.

Nous prendrons comme définition d'une carte conforme la définition suivante :

Définition

Une carte (A, f) de la sphère est **conforme** si f est de classe \mathcal{C}^1 et si pour tout point M de A la différentielle df_M est une similitude de P_M vers $f(A)$, P_M désignant le plan tangent à S en A .

Si f est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 , on sait que $d(f^{-1})_{f(M)} = (df_M)^{-1}$.
Donc df_M est une similitude si et seulement si $d(f^{-1})_{f(M)}$ est une similitude.

4. Une carte conforme : la carte de Mercator

Conservons la notation précédente : (A, Φ) désigne la carte des coordonnées terrestres.

Pour définir une carte (A, f) , il est commode d'introduire l'application $g = f \circ \Phi^{-1}$ (cela revient à désigner directement le point de la sphère par ses coordonnées terrestres).

Ainsi, si $f : M \longmapsto (u, v)$, g est la fonction $g : (\ell, \theta) \longmapsto (u, v)$, (ℓ, θ) désignant les coordonnées terrestres du point M .

Nous allons chercher une carte (A, f) conforme telle que g soit une application de la forme $(\ell, \theta) \longmapsto (\ell, V(\theta))$.

C'est donc une carte où on « déroule » la sphère le long de l'équateur, mais on va chercher à modifier les « ordonnées » (trouver une fonction de la latitude) pour que la carte soit conforme. Nous cherchons donc la fonction V .

Comme la fonction manipulable est la fonction Φ^{-1} , nous allons plutôt chercher à raisonner sur $F = f^{-1} = \Phi^{-1} \circ g^{-1}$, qui à (u, v) associe M .

g est bijective, donc V est nécessairement bijective entre des intervalles convenables.

Si nous posons $W = V^{-1}$, on a alors $g^{-1}(u, v) = (u, W(v))$.

$F = f^{-1}$ est alors de la forme :

$$(u, v) \longmapsto \Phi^{-1}(u, W(v)) = (\cos(u) \cos(W(v)), \sin(u) \cos(W(v)), \sin(W(v))).$$

Déterminons une fonction W pour laquelle la carte sera conforme, c'est à dire d'après la remarque précédente pour laquelle $df_{f(M)}^{-1}$ soit une similitude.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

Pour tout (u, v) de $f(A)$, $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v)$ sont orthogonaux

Ceci est un calcul de dérivées partielles :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = (-\sin(u) \cos(W(v)), \cos(u) \cos(W(v)), 0) \text{ et}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = W'(v) (-\cos(u) \sin(W(v)), -\sin(u) \sin(W(v)), 1).$$

Le produit scalaire $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial F}{\partial v}(u, v)$ est évidemment nul, les vecteurs sont orthogonaux.

Nous pouvons donner une interprétation de ce calcul :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(u+h, v) - F(u, v)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM_h}}{h}, \text{ si on pose } M = F(u, v) \text{ et } M_h = F(u+h, v).$$

Les points M et M_h ont même latitude, ils sont donc situés sur le même parallèle (on rappelle que dans le type imposé de la carte, $\ell = u$ et $\theta = W(v)$).

$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v)$ est donc un vecteur tangent en M à ce parallèle de la sphère.

$$\text{De même, } \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(u, v+h) - F(u, v)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM_h}}{h}.$$

Ici, $M = F(u, v)$ et $M_h = F(u, v+h)$ sont deux points situés sur un même méridien, le vecteur $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v)$ est donc tangent à ce méridien.

On retrouve bien dans cette interprétation le fait que les vecteurs sont orthogonaux.

Si les vecteurs $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v)$ sont linéairement indépendants, nous allons les remplacer par des vecteurs unitaires colinéaires e_1 et e_2 pour constituer une base dans laquelle on exprimera la matrice de $dF_{(u,v)}$.

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \right\| = |\cos(W(v))| \text{ et } \left\| \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \right\| = |W'(v)|.$$

Si $\cos(W(v))$ et $W'(v)$ sont non nuls, ces vecteurs sont non nuls et linéairement indépendants puisqu'ils sont déjà orthogonaux, ils constituent une base du plan tangent en $M = F(u, v)$.

La différentielle de F au point (u, v) est l'application $(h, k) \longmapsto \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) h + \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) k$.

Avec les notations introduites, $dF(u, v) : (h, k) \longmapsto |\cos(W(v))| e_1 + |W'(v)| e_2$.

La matrice jacobienne de $dF_{(u,v)}$ dans la base (e_1, e_2) est donc

$$JF_{(u,v)} = \begin{pmatrix} |\cos(W(v))| & 0 \\ 0 & |W'(v)| \end{pmatrix}$$

Il reste à trouver une condition sur W pour que cette différentielle soit une similitude

On voit que si W remplit la condition $W'(v) = \cos(W(v))$, la différentielle de F a une matrice de la forme $k \cdot \text{id}$, c'est une similitude⁷, et même ici une homothétie.

$W = V^{-1}$ donc $W' = \frac{1}{V' \circ W} \cdot V$ est donc solution de l'équation différentielle

$$\frac{1}{V' \circ W} = \cos(W)$$

c'est-à-dire

$$V'(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions : $V(\theta) = \ln \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) + C$,
 $C \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, la fonction W déterminée permet bien de définir une carte conforme.

⁷les similitudes en dimension 2 ont des matrices dans une base orthonormée du type $k \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou du type $k \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec dans les deux cas $a^2 + b^2 = 1$

Troisième partie
Compléments

Sommaire

Utilisation du logiciel Versamap	129
I Télécharger le logiciel	129
II Description du logiciel	129
1. Le menu projection	130
2. Le menu Design Map	131
3. Menu Input/Output	132
4. Le menu Draw Map	134
III Exemples	135
1. Allure du globe dans différentes projections	135
2. Représentation d'une partie du globe	137
3. Fabrication d'un fond de carte vierge	137
4. Exemples de tracés de grands cercles	138
Quelques repères historiques	139
I Cartographie ancienne	139
II Moyen Âge et Renaissance	139
III Cartographie moderne	140
Lexique	143
Bibliographie	145

Utilisation du logiciel Versamap

Le logiciel Versamap permet de tracer des fonds de cartes (découpage selon latitude et longitude) en mode vectoriel et bitmap selon 13 projections différentes. Il permet aussi de tracer des fonds de cartes (canevas des graduations), de tracer sur une carte réalisée le grand cercle passant par deux points fixés.

Ce logiciel est en anglais.

Ce logiciel est un « *shareware* » : l'auteur propose un essai gratuit, mais pour un usage définitif, vous devrez acheter la licence. (coût très modique, environ 30 €).

La version d'essai fonctionne très bien, mais n'offre pas toutes les possibilités pour la manipulation des annotations texte de la carte.

I Télécharger le logiciel

Voici les adresses de quelques sites depuis lesquels on peut télécharger ce logiciel (nouvelle version Versamap 2.07) :

- <http://jfbradu.free.fr/cartesvect/index.htm>
- <http://www.ac-rouen.fr/pedagogie/equipes/lethist/histgeo/versamap.htm>
- <http://www.zdnet.fr/telecharger>

Versamap permet de tracer des cartes à partir de différentes projections. Versamap transforme donc les coordonnées sphériques de sa base de points (latitude et longitude) en coordonnées planes (x, y) selon un calcul mathématique commandé par la projection sélectionnée par l'utilisateur.

L'utilisateur peut également définir la portion du globe à représenter et enregistrer ou imprimer ses cartes.

La version non enregistrée du logiciel n'autorise l'annotation des cartes qu'avec des polices à espacement fixe.

II Description du logiciel

Lorsqu'on démarre l'application Versamap.exe, on se retrouve face à un premier écran qui explique le problème de limitation des fontes pour la version non enregistrée et qui invite à appuyer sur le bouton OK pour dessiner une première carte.

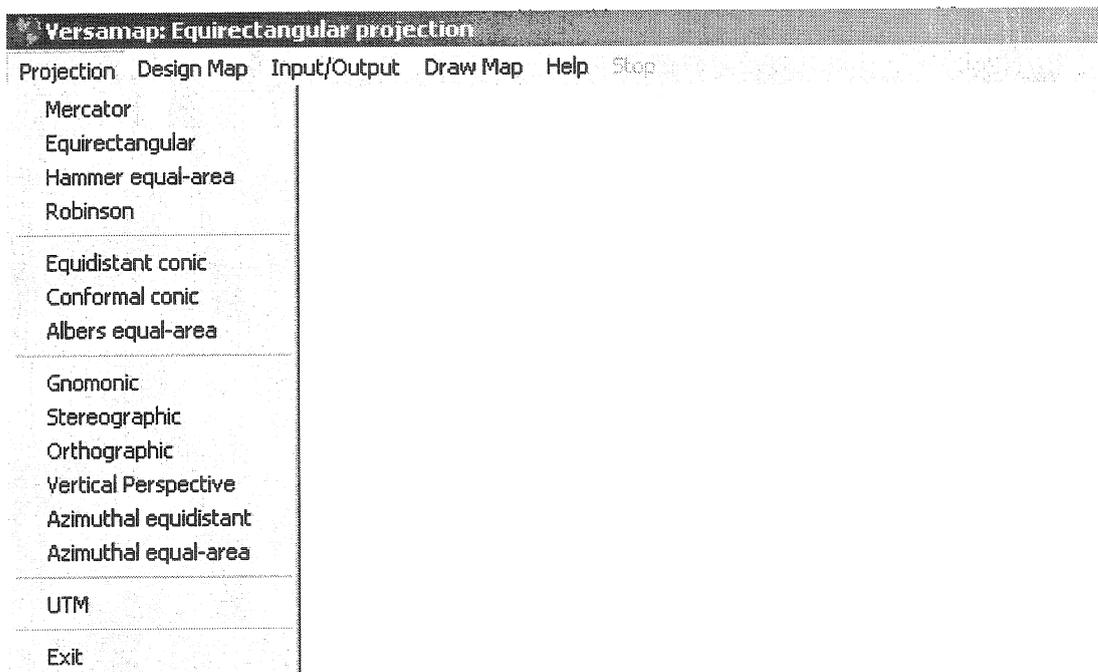
Ceci fait alors apparaître un écran totalement blanc, avec une barre de menus déroulant en haut à gauche, portant les mentions :

Projection	Design Map	Input/Output	Draw Map	Help	Stop
------------	------------	--------------	----------	------	------

1. Le menu projection

Ce menu présente les différentes projections à partir des quelles on peut représenter une carte. Ces projections sont donc dans l'ordre :

- Mercator ;
- Equirectangular (équirectangulaire : projection cylindrique équidistante mais ni équivalente ni conforme) ;
- Hammer equal-area (projection équivalente de Hammer, variante polyconique équivalente de la projection azimutale équivalente de Lambert) ;
- Robinson (projection pseudo cylindrique) ;
- Equidistant conic (projection conique équidistante) ;
- Conformal conic (projection conique conforme) ;
- Albers equal-area (projection équivalente conique d'Albers) ;
- Gnomonic (gnomonique) ;
- Stereographic (stéréographique) ;
- Orthographic (projection azimutale à partir d'un point de perspective situé à l'infini) ;
- Vertical perspective (la Terre vue de l'espace) ;
- Azimuthal equidistant (projection azimutale équidistante) ;
- Azimuthal equi-area (projection azimutale équivalente) ;
- UTM (Universal Transverse Mercator)



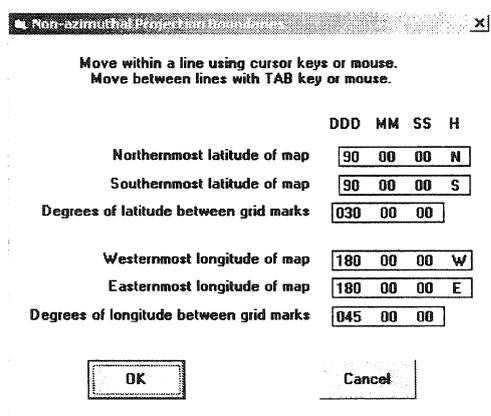
Le dernier item du menu, **Exit**, permet de quitter l'application.

2. Le menu Design Map

Les différents items de ce menu permettent de mettre en forme la carte :

1) Map Boundaries

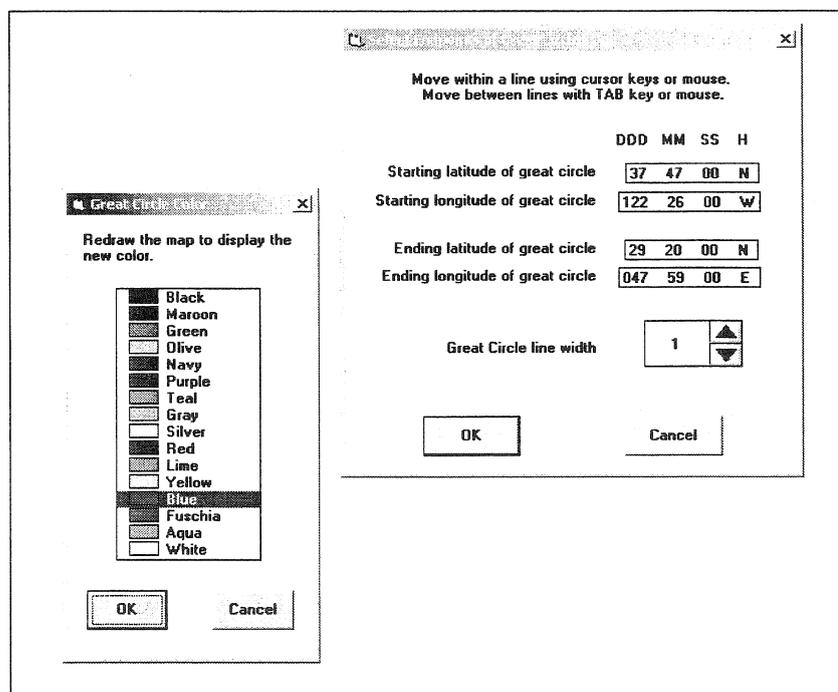
Permet de sélectionner la portion de globe que l'on veut représenter, en indiquant les valeurs extrêmes de la latitude (Nord ou Sud) et de la longitude (Est ou Ouest) en degrés minutes et secondes ainsi que la valeur du pas de subdivision. Ce dernier doit être impérativement, dans chaque cas, un diviseur de la différence des deux valeurs extrêmes spécifiées.



2) Great Circle

Lorsque cet item est coché, cela permet de tracer le chemin réalisant la plus courte distance entre deux points du globe : orthodromie (du grec « route droite ») ou grand cercle passant par ces deux points.

Ces deux points sont définis par leur latitude et leur longitude. On peut préciser la largeur et la couleur souhaitées pour le tracé de ce « grand cercle ».



3) Add text to Map

Permet d'annoter la carte, en ajoutant un texte de son choix à indiquer dans la case prévue. Ce texte s'affiche sur la carte à l'endroit où est positionné le curseur, lorsqu'on active le clic gauche de la souris.

4) Labels

Également pour annoter une carte.

5) Background Color

Permet de choisir la couleur du fond de carte. Pour une impression, il est conseillé de revenir au blanc.

6) Grid Color

Permet de choisir la couleur du tracé des parallèles et des méridiens.

7) Grid Type

Pour définir l'affichage des méridiens et des parallèles (tracé des lignes, marquage des points d'intersection uniquement...)

8) Save Map design

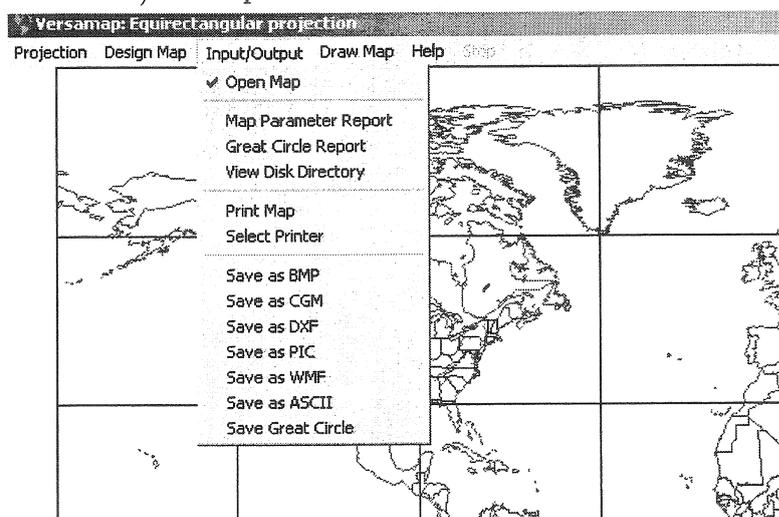
Pour sauvegarder les paramètres de la carte. Le fichier est enregistré automatiquement avec une extension .cnf (configuration). Il faut le nommer et sélectionner dans l'arborescence des fichiers l'endroit où on veut l'enregistrer.

9) Recall Grid design

Pour charger un fichier de configuration qu'on aurait enregistré auparavant.

3. Menu Input/Output

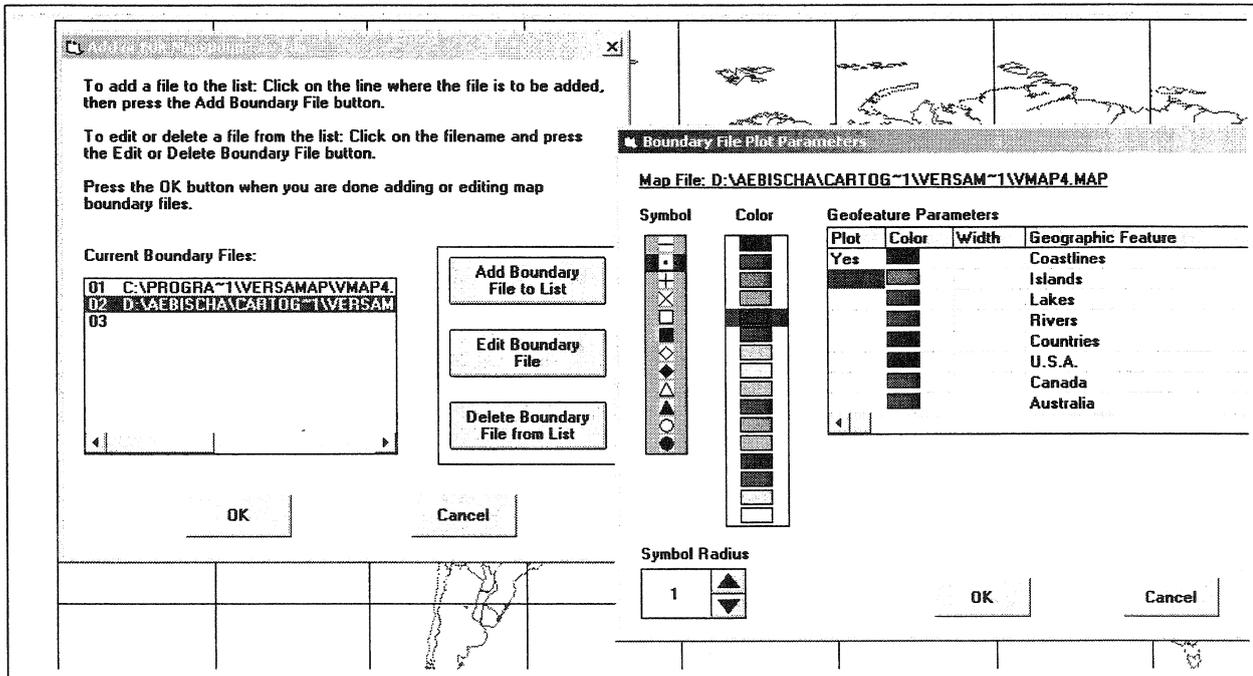
Ce menu permet de modifier les caractéristiques de la carte (tracé des frontières des états, inclure les îles, les fleuves...) ainsi que les couleurs du tracé.



Les différents items de ce menu sont :

1) Open Map

Lorsque cet item est sélectionné, l'écran de gauche ci-dessous s'affiche. Le fichier de carte courant qui est représenté s'affiche surligné.



Une option intéressante dans cet écran est le bouton « Edit Boundary File » qui permet d'accéder à l'écran de droite de la représentation précédente intitulé **Boundary Files Plot Parameters**.

Sur la représentation ci-dessus, l'option « Edit Boundary File » a été activée.

Dans la colonne Plot, chaque case peut prendre deux valeurs : « Yes » ou « case vide ». On passe d'une valeur à l'autre en cliquant sur la case.

Cela permet de paramétrer l'affichage ou non des lignes côtières, des îles, lacs, fleuves, pays... Lorsqu'on veut juste étudier l'impact des projections sur les formes des continents, il est conseillé de ne sélectionner que « Coastlines » pour éviter d'avoir une représentation trop chargée.

La colonne Color permet de régler la couleur que l'on veut attribuer à un tracé.

2) Map Parameter Report

Affiche les caractéristiques de la carte qui a été définie.

3) Great Circle Report

Détaille la latitude et la longitude d'une centaine de points situés sur le grand cercle préalablement défini, ainsi que la distance en miles nautiques et en kilomètres entre ces points.

4) View Disk Directory

Montre le contenu des répertoires sur chaque disque.

Permet de faire le point sur la localisation des fichiers.

5) Print Map

Permet d'imprimer la carte affichée à l'écran (attention à la perte de précision du tracé vectoriel).

6) Select Printer

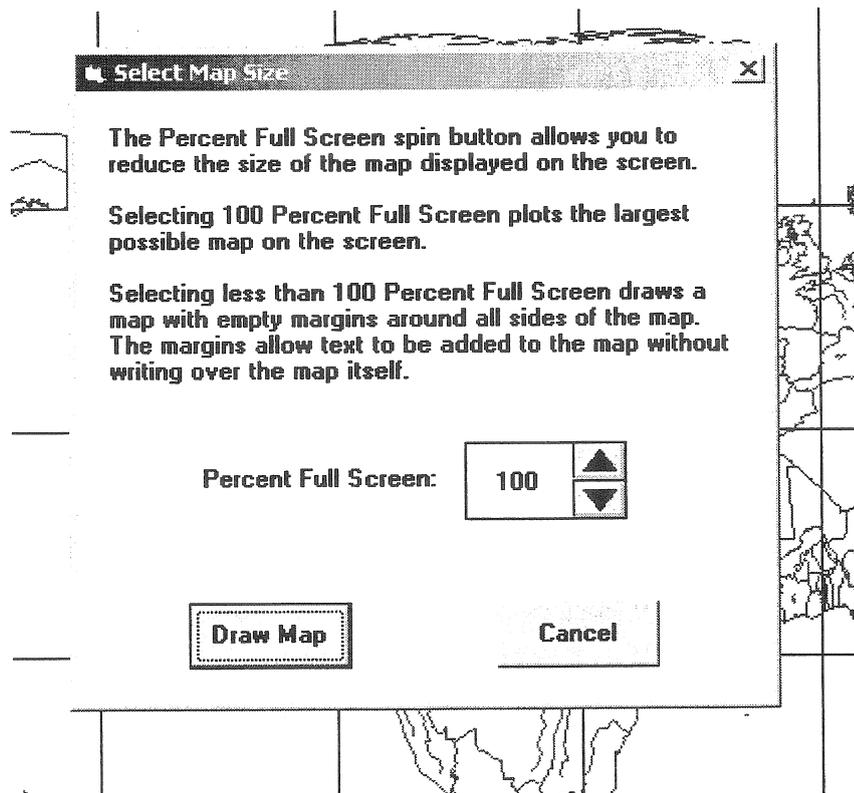
Sélection de l'imprimante.

7) Save as

Permet de sauvegarder la carte sous la forme d'un fichier qui peut ensuite être ouvert et travaillé depuis d'autres logiciels. On peut enregistrer la carte en .bmp, .cgm, .pic, .wmf, .ascii, .prn.

4. Le menu Draw Map

Sélectionner Draw Map conduit à l'écran suivant :



Sur cet écran, on peut régler la proportion du plein écran que l'on veut voir occupé par la carte.

Il faut cliquer sur le bouton Draw Map au centre de cet écran pour lancer le dessin de la carte.

III Exemples

1. Allure du globe dans différentes projections

Les représentations suivantes ont été établies avec les instructions suivantes :

1) Projection de Mercator

Projection → **Mercator**

Design Map → **Map Boundaries**

entrer alors :

Latitude extrême Nord : 80 N,

Latitude extrême Sud : 80 S,

Degrés entre les parallèles : 20,

Longitude extrême Ouest : 180 W,

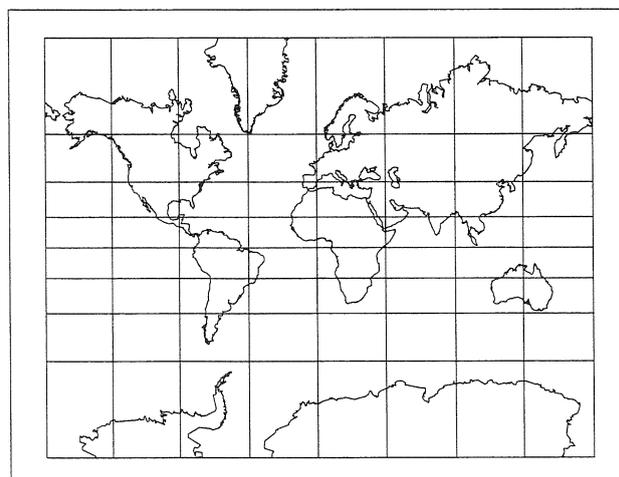
Longitude extrême Est : 180 E,

Degrés entre les méridiens : 45 puis OK

Input/Output → **Open Map** →

Edit Boundary Files (Yes uniquement dans la case Plot située sur la ligne de Coastlines, couleur noire pour ce tracé)

Draw Map → **Draw Map**



Projection de Mercator
Latitude 80 N - 80 S Longitude 180 W - 180 E

2) Projection de Hammer

Projection → **Hammer**

Design Map → **Map Boundaries**

entrer alors :

Latitude extrême Nord : 90 N,

Latitude extrême Sud : 90 S,

Degrés entre les parallèles : 30,

Longitude extrême Ouest : 180 W,

Longitude extrême Est : 180 E,

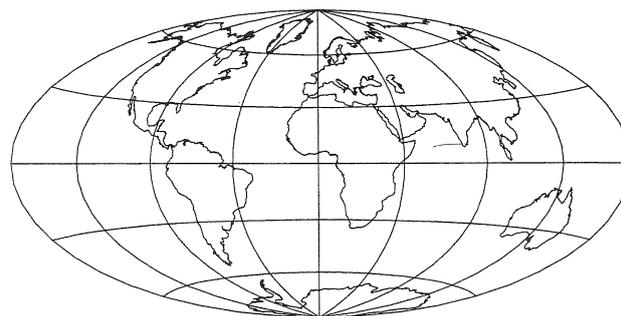
Degrés entre les méridiens : 45 puis OK

Input/Output → **Open Map** →

Edit Boundary Files (régler le tracé des côtes en noir et supprimer les autres tracés)

Draw Map

Draw Map



Projection équivalente de Hammer

3) Projection de Robinson

Projection → Robinson

Design Map → Map Boundaries

entrer alors :

Latitude extrême Nord : 90 N,

Latitude extrême Sud : 90 S,

Degrés entre les parallèles : 30,

Longitude extrême Ouest : 180 W,

Longitude extrême Est : 180 E,

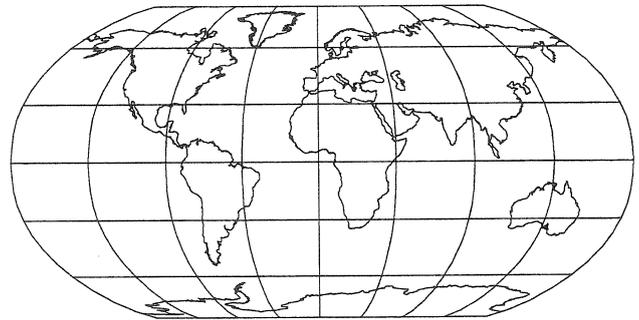
Degrés entre les méridiens : 45 puis OK

Input/Output → Open Map →

Edit Boundary Files (régler le tracé des côtes en noir et supprimer les autres tracés)

Draw Map

Draw Map



Projection de Robinson

4) Projection Verticale

Projection → Vertical

Design Map → Map Boundaries

entrer alors :

Latitude centrale de la carte : 40 N, les parallèles : 30,

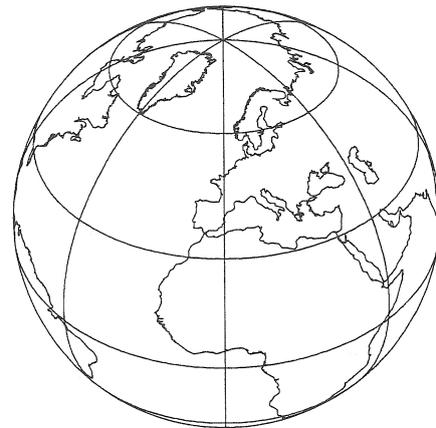
Longitude centrale de la carte : 0 W,

Degrés entre les méridiens : 45 puis OK

Input/Output → Open Map →

Edit Boundary Files (régler le tracé des côtes en noir et supprimer les autres tracés)

Draw Map → Draw Map



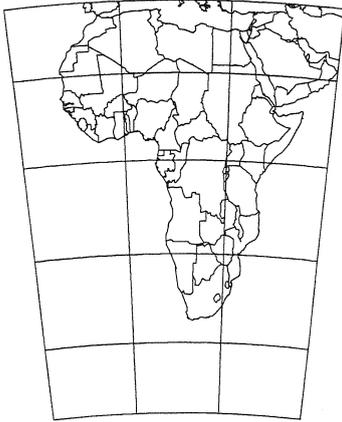
Perspective verticale

2. Représentation d'une partie du globe

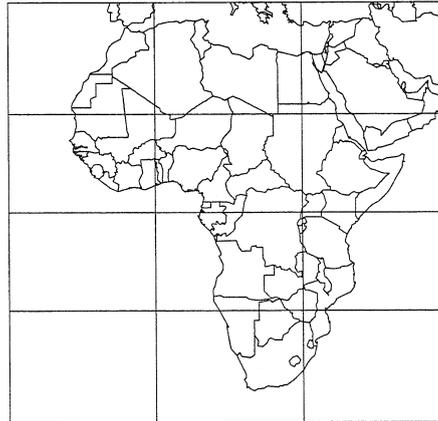
Quelques représentations de l'Afrique politique : les frontières des états figurent.

Le mode d'emploi est le même que précédemment. Simplement, pour faire apparaître les frontières des États, une des étapes sera :

Input/Output → **Open Map** → **Edit Boundary Files** (régler le tracé des côtes en noir et supprimer les autres tracés sauf « Countries »)



Afrique : projection équivalente de Albers



Afrique : projection de Mercator

3. Fabrication d'un fond de carte vierge

Pour organiser des activités de repérage, on peut être amené à fournir aux élèves des fonds de cartes vierges ne comprenant que les indications des méridiens et des parallèles.

Le schéma suivant a été obtenu à partir d'une projection gnomonique, le point de projection étant le pôle Nord. Les méridiens ont été espacés de 30°, les parallèles sont espacés de 10°.

Pour l'obtenir :

Projection → **Gnomic**

Design Map → **Map Boundaries**

(entrer alors :

Latitude du centre de la carte : 90 N,

degrés entre les parallèles : 10,

Longitude du centre de la carte : 0 W,

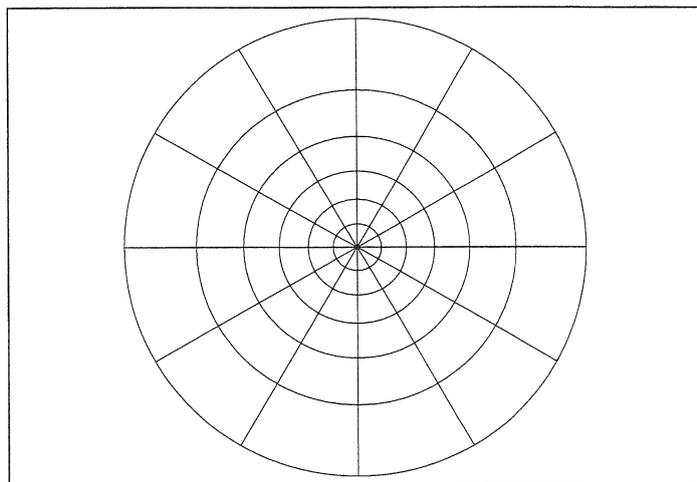
Degrés entre les méridiens : 30)

Input/Output → **Open Map** →

Edit Boundary Files (supprimer tous les tracés)

Draw Map (régler éventuellement la taille de l'affichage)

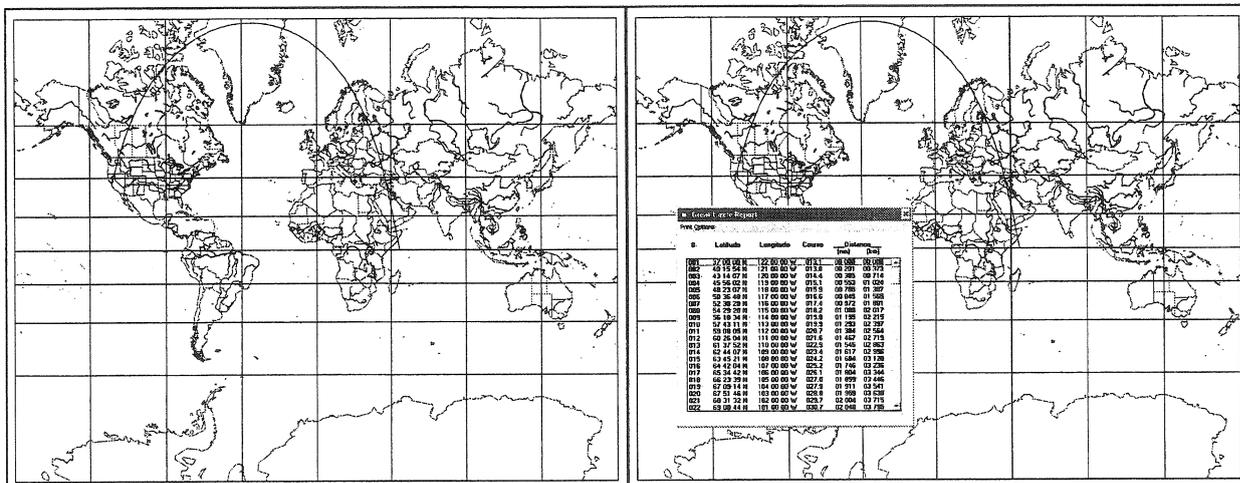
Draw Map



Comme il est difficile de gérer le texte dans la version d'essai, il est conseillé pour des annotations de reprendre l'image dans un document .doc ou autre si on veut ajouter des graduations (voir exemples à la fin).

4. Exemples de tracés de grands cercles

Tracé du grand cercle entre les points définis par latitude et longitude : (37° N, 122° W) et (0° N, 50° E)



Pour l'obtenir :

Projection → Mercator

Design Map → Great Circle → Great Circle

(entrer alors les coordonnées des points extrêmes du grand cercle)

Draw Map → Draw Map

Si l'on désire faire afficher les points du « segment » :

Input/Output → Great Circle Report

Par défaut, la carte tracée dans la projection de Mercator est la projection de l'ensemble du globe.

Quelques repères historiques

I Cartographie ancienne

VII^e siècle av. J.-C. : la sphéricité de la Terre, imaginée vers 650 avant J.-C. par Thalès de Milet, puis affirmée par les Pythagoriciens, permet de fixer un cadre aux connaissances géographiques.

VI^e siècle av. J.-C. : la première carte représentant le monde connu est exécutée par le philosophe grec Anaximandre. De forme circulaire, cette carte représente les terres connues à l'époque ; celles-ci ont pour centre la mer Égée et sont entourées par l'océan.

III^e siècle av. J.-C. : Ératosthène (275-194), bibliothécaire d'Alexandrie, exécute la première mesure de la circonférence terrestre avec une précision surprenante ; malheureusement ses successeurs, notamment Posidonios de Rhodes (135-50), réduisent considérablement cette dimension.

II^e siècle av. J.-C. : à la suite d'Ératosthène, Hipparque (190-125) invente la première projection, dite « carte plate parallélogrammatique », lointain ancêtre de la projection de Mercator.

II^e siècle après J.-C. : Claude Ptolémée (90-168), astronome et géographe d'Alexandrie, détermine par le calcul la latitude et la longitude de huit mille points. Vers l'année 150 av. J.-C., il produit son *Guide géographique*, qui contient des cartes du monde. Il s'agit des premières cartes utilisant une forme mathématiquement précise de projection conique ; malheureusement, Ptolémée adopte pour la circonférence terrestre la mesure erronée de Posidonios et évalue ainsi à 180° l'écart de longitude entre Chine et Europe. Cette erreur de Ptolémée sera une cause indirecte de la découverte de l'Amérique.

Conclusion : malgré ses graves défauts, la cartographie grecque antique contient déjà toutes les notions fondamentales de la cartographie moderne : sphéricité de la Terre, coordonnées terrestres, mesure des latitudes et, moins précisément, des longitudes, systèmes de projection.

II Moyen Âge et Renaissance

IX^e au XIII^e siècle : dépositaires des idées de Ptolémée, les Arabes accomplissent une œuvre cartographique importante. Ils dressent des cartes marines, les « portulans », servant à la navigation de port à port. Ces cartes sont en général dépourvues de méridiens ou de parallèles mais présentent des lignes reliant les positions des ports importants. L'emploi généralisé de la boussole leur confère une grande précision. Le plus grand voyageur et géographe arabe, Edrisi (1099-1165), construit une carte qui s'étend de l'Europe occidentale à l'Inde et à la Chine, et de la Scandinavie au Sahara.

XV^e au XVI^e siècle : les grands voyages de Colomb (1451-1506), de Vasco de Gama (1469-1524), de Magellan (1469-1521) et El Cano (?-1526), suivis par les marins anglais

et français, élargissent considérablement la connaissance géographique de la Terre. La cartographie ne se limite plus au tracé des côtes et devient continentale.

1507 : le géographe allemand Martin Waldseemüller (1478–1520) publie une carte du monde en douze feuilles sur laquelle apparaît pour la première fois à l'Ouest une terre distincte de l'Asie, dénommée America en l'honneur du navigateur florentin Amerigo Vespucci.

1569 : le Flamand Gerhard Mercator (1512–1594) représente le monde connu sous la forme d'un ensemble de dix-huit feuilles. Il utilise à cet effet un canevas conforme, sur lequel méridiens et parallèles se recoupent à angles droits.

1570 : un autre Flamand, Ortelius (1527–1598), publie (1570) un *Theatrum orbis terrarum* en cinquante-trois planches portant soixante-dix cartes, qui peut être considéré comme le premier grand atlas universel. L'ensemble de la Terre y est représenté sur une mappemonde où Ancien et Nouveau Mondes figurent chacun dans un cercle divisé par des méridiens courbes recoupant l'équateur en parties égales.

Conclusion : Jusqu'au XVI^e siècle, les cartographes se sont surtout préoccupés de donner une image d'ensemble de la Terre au fur et à mesure de sa découverte. Ils procédaient par compilation des connaissances acquises par les voyageurs et les marins, reportées sur des canevas de projection construits à partir d'observations astronomiques de plus en plus précises. À partir du XVII^e siècle, le monde est conçu et représenté dans sa forme et ses proportions réelles et les maîtres de la cartographie ne sont plus des navigateurs, mais des mathématiciens ou des astronomes.

III Cartographie moderne

1669–1718 : mesure de la méridienne de Paris.

En France, l'abbé Jean Picard, la Hire, Jean-Dominique Cassini et son fils Jacques effectuent la mesure de la méridienne de Paris. Il s'agit par la même occasion de vérifier la récente hypothèse de Newton sur l'aplatissement de la Terre. La preuve définitive en est apportée par les mesures similaires effectuées au Pérou par Bouguer et La Condamine et en Laponie par Maupertuis et Clairaut.

1748–1817 : la carte de Cassini.

C'est dans la seconde moitié du XVIII^e siècle qu'est réalisée la première carte de France à moyenne échelle (1:86 400). Cette carte, dite carte de Cassini, ou de l'Observatoire, ou de l'Académie, est l'œuvre de César François Cassini (1714–1784) et de son fils Jacques-Dominique (1748–1845). Le territoire est divisé en cent quatre-vingt-deux feuilles. Commencés en 1748, les relevés effectués par triangulation sont pratiquement achevés en 1789, mais les dernières feuilles ne voient le jour qu'en 1817.

Pendant un siècle et demi, la carte de Cassini resta, malgré ses imperfections, le modèle dont s'inspirèrent les cartographes du monde entier.

XVIII^e siècle : parallèlement, la cartographie générale se poursuit avec le souci principal de réaliser des documents d'une incontestable exactitude.

Jean Lambert (1728–1777) détermina les paramètres des projections éponymes, projections conformes ou équivalentes.

Rigobert Bonne (1727–1794), par une mise au point mathématique de la vieille projection de Ptolémée, établit le canevas équivalent sur lequel sera construite la future carte de France au 1 : 80 000 en hachures dite carte d'État-Major.

XIX^e siècle : les travaux de cette carte, commencés en 1818, durent jusqu'en 1880 (et même 1882 pour la Corse). Appuyée sur la méridienne mesurée par Jean-Baptiste Delambre et Pierre Méchain entre 1792 et 1799 et sur une nouvelle triangulation achevée en 1863, elle comprend deux cent soixante-treize feuilles (plus neuf pour la Corse). Le figuré du relief dérive de courbes de niveau équidistantes de 10 mètres qui, à la mise au net, sont remplacées par des hachures d'autant plus serrées que la pente est plus forte.

XX^e siècle : l'imprécision du 1:80 000, incite à la rédaction d'une carte nouvelle. Confiés au service géographique de l'armée créé en 1897, les travaux commencent en 1901. Les relevés au 1:10 000 à la planchette et publiés au 1:50 000 en quatorze couleurs n'avancent que lentement. Reprise en 1920, la carte ne comporte plus que cinq ou six couleurs. À partir de 1930, l'emploi de la photographie aérienne puis de la télédétection par satellites dans le relevé du terrain, enfin l'introduction du traitement informatique des données et de l'automatisation des opérations graphiques marquent l'essor d'une ère nouvelle. Les relevés par stéréotopographie aérienne sont complétés sur le terrain et publiés au 1:25 000. Ils constituent la carte de base du territoire français. L'Institut Géographique National (I.G.N.) qui, depuis 1940, a remplacé le service géographique de l'armée, publie de très nombreuses autres cartes, cartes du monde et cartes des États d'expression française auxquels il apporte une aide technique appréciable.

Conclusion : *À partir du XVII^e siècle, les nécessités de l'administration et de la guerre exigent des cartes plus détaillées et à plus grande échelle. Les mesures d'arcs de méridien, la création du corps des ingénieurs géographes, la figuration du relief, la réalisation de la première grande carte détaillée de la France marquent les débuts des cartes nationales.*

*Le but essentiel de la cartographie reste dans tous les cas la représentation objective, la plus précise possible au regard de l'échelle, des formes matérielles et des objets réels qui caractérisent l'espace géographique. La réalisation de telles cartes doit être précédée par des mesures de terrain destinées à doter le territoire étudié d'un réseau de référence de points rigoureusement contrôlés en position et en altitude, ce sont les opérations **géodésiques**. Les opérations **topographiques** consistent à repérer, au sol ou par photographie aérienne, chacun des points remarquables de la surface à cartographier par rapport au canevas obtenu par la géodésie, puis à représenter les formes du terrain selon un système graphique conventionnel. Viennent enfin les opérations **cartographiques** proprement dites, qui ont pour but la rédaction et l'impression des cartes définitives.*

Ce paragraphe est largement inspiré d'un article de l'Encyclopædia Universalis.

Lexique

Grand cercle (d'une sphère) : intersection de la sphère avec un plan contenant son centre.

Loxodromie : ligne qui coupe les méridiens terrestres sous un angle constant ; en particulier, route d'un navire qui suit constamment le même cap.

Mappemonde : Carte du globe terrestre sur laquelle les deux hémisphères sont représentés côte à côte.

Méridien : demi-grand cercle de la terre, d'extrémités les pôles. C'est aussi le lieu des points de la terre ayant une même longitude.

Orthodromie : ligne de plus courte distance joignant deux points de la surface de la terre.

Parallèle : cercle de la terre dont le plan est parallèle à l'équateur. C'est aussi le lieu des points de la terre ayant une même latitude.

Planisphère : carte sur laquelle est représentée en entier le globe terrestre.

Projection cartographique : procédé de correspondance entre les coordonnées géographiques d'un point (latitude et longitude) et les coordonnées de son image dans le plan de projection. Ce procédé peut faire appel à la géométrie ou/et à des formules mathématiques.

Projection azimutale : projection sur un plan, à partir d'un point.

Projection conforme : projection qui conserve les angles (l'angle de deux courbes quelconques tracées sur la sphère terrestre est égal à l'angle des deux courbes images).

Projection équivalente : projection qui conserve les rapports d'aires.

Projection orthodromique : projection qui conserve les plus courts chemins.

Bibliographie

► Livres

Encyclopædia Universalis

- [1] ALLANO-CHEVALIER M., OUDOT X., *Algèbre et géométrie euclidienne*, Hachette supérieur, Paris, 2003.
- [2] BENEDITTINI M., « Histoire de quelques projections cartographiques », *Mnémosyne*, n° 12, mai 1996, p. 29–60.
- [3] BERGER M., *Géométrie 2*, Nathan, Paris, 1996.
- [4] BLANC V. et alii, *L'astrolabe au carrefour des savoirs*, IREM de Paris-Nord, Paris, 2000.
- [5] BOURGUET M., « Cartographie et mathématiques », *Repères – IREM*, n° 6, janvier 1992, p. 81–110.
- [6] BOUSQUET-BRESSOLIER C., *L'œil du cartographe*, C.T.H.S., Paris, 1995.
- [7] BRASSIER P., *Navigation astronomique*, Vuibert, Paris, 1999.
- [8] CAGNAC G., THIBERGE L., *Géométrie*, Masson, Paris, 1967.
- [9] CRAIG T., *A treatise on projections*, Washington government printing office, 1882.
- [10] GAMBIN M. T., « Des cartes portulan à la formule de Wright », *Mnémosyne*, n° 11, février 1996, p. 31–62.
- [11] HÉBERT E. (sous la direction de), *Instruments scientifiques à travers l'histoire*, Ellipses, Paris, 2004.
- [12] LANGUEREAU H., MERKER C., « Une expérience d'enseignement en géométrie non euclidienne », *Repères – IREM*, n° 30, janvier 1998, p. 59–77.
- [13] LEFORT J., *L'aventure cartographique*, Belin, Paris, 2004.
- [14] LEFORT X., « L'histoire de la carte de France des Cassini », *Repères – IREM*, n° 14, janvier 1994, p. 21–38.
- [15] LELONG-FERRAND J., ARNAUDIES J. M., *Cours de mathématiques t. 4*, Dunod, Paris, 1977.
- [16] LOMBARDI H., *Géométries élémentaires (tome 1)*, Presses Universitaires de Franche-Comté, Besançon, 1999.
- [17] MOLK J. (sous la direction de), *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Gauthiers-Villars, Paris, 1915.
- [18] OLLIVIER Y., « Les projections cartographiques », *Quadrature*, n° 26, oct., nov., déc. 1996, p. 17–24.
- [19] Tangente, « De la géographie à la géométrie », *Tangente*, n° 83, nov-déc. 2001.

► **Sites internet**

<http://mathworld.wolfram.com/>

<http://www.eleves.ens.fr/home/ollivier/carto/carto.html>

<http://www.versamap.com/index.htm>

Presses universitaires de Franche-Comté
P.U.F.C. - Université de Franche-Comté
2, place Saint-Jacques - 25030 Besançon Cedex

Imprimerie : **Burs Besançon**
9, rue Lecourbe - 25000 Besançon

Dépôt légal 2^e trimestre 2005

Auteur Groupe LYCÉE et groupe CARTOGRAPHIE

Titre De la sphère au plan.

Langage Français.

Caractéristiques de l'édition

Édition Première édition

Éditeur Presses universitaires de Franche-Comté

Diffuseur IREM de Franche-Comté

Année 2005

Format 21 x 29,7 cm (A4)

152 pages

Support papier

Dépôt légal 2^e trimestre 2005

ISBN 2-84867-098-3

Public Professeurs de Mathématiques et de Géographie de l'enseignement secondaire et formateurs.

Résumé Comment passer d'une représentation sphérique à une représentation plane ?

Après le rappel du repérage d'un point sur le globe terrestre, une première partie théorique présente des définitions et études de projections d'une sphère sur un plan.

Dans une seconde partie, des expérimentations, visant à sensibiliser des élèves à la représentation plane de la terre et à la recherche de plus courts chemins, sont proposées. Elles concernent les élèves des lycées. Chaque document élève est accompagné d'une fiche pour le professeur. Un mode d'emploi du Logiciel *Versamap* complète cette brochure.

Cette brochure s'adresse aussi bien aux professeurs de mathématiques que de géographie des lycées généraux et professionnels.

Mots clés Carte, cartographie, conique, cylindrique, gnomonique, Mercator, projections, représentations, stéréographique, trame.

Repérage, plus court chemin.

Conservation, angles, distance, aires.

Expérimentation.

Versamap.

**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
de l'Université de Franche-Comté**

Département de Mathématiques - UFR Sciences et Techniques

16 route de Gray - 25030 BESANÇON Cedex - France

Tél. : 03 81 66 62 25 - Fax : 03 81 66 62 34

Courriel : iremfc@math.univ-fcomte.fr

[http : // www-irem.univ-fcomte.fr /](http://www-irem.univ-fcomte.fr/)