De la physique aux mathématiques : du problème des cordes vibrantes à l'article de Dirichlet

Hombeline LANGUEREAU

Sommaire

Le contenu cet article est celui de l'intervention proposée dans le cadre du stage d'histoire des mathématiques proposé par l'IREM en janvier 2002. Le plan en est le suivant : après avoir rappelé quelques définitions mathématiques, nous nous intéresserons au problème des cordes vibrantes, puis à quelques passages de la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier. Nous terminerons par l'article de Dirichlet.

De nombreux phénomènes sont périodiques. Par exemple, l'étude des vibrations d'une corde fixée à ses extrémités, le son, les signaux en dents de scie de l'électronique... Cela amène donc à décomposer une fonction compliquée en sommes de fonctions périodiques simples que sont les fonctions trigonométriques.

La théorie correspondante est la théorie des séries de Fourier. Au début du XVIII^{e} siècle, l'approximation des fonctions par les polynômes qui sont les fonctions les plus simples conduit à la théorie des développements en série entière et finalement à des fonctions très régulières. En revanche, l'approximation par les polynômes trigonométriques, qui semble tout aussi naturelle, conduit à des fonctions extrêmement peu régulières et à des problèmes très complexes.

Ce qui suit est largement inspiré de l'ouvrage de J. P. Kahane et P. G. Lemarié-Rieusset cité en bibliographie.

1 Problèmes mathématiques

Une fonction numérique 2π-périodique f étant donnée, existe-t-il des coefficients réels a_n et b_n ($n \in \mathbb{N}$) tels que $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$?[1] Si oui, comment les trouver ? Sont-ils uniques ? La somme a-t-elle un sens (espace de convergence) ? C'est le problème des séries de Fourier.

[1]En l'absence d'information contraire, ces notations seront conservées dans tout l'article.

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

Une série $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ étant donnée, est-elle convergente pour certaines valeurs de x ? Définit-elle une fonction ? C'est le problème des séries trigonométriques.

Le sujet des séries de Fourier tient en deux égalités :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \\ c_n &= \int f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nx}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \end{aligned}$$

La première contient une série et la seconde contient une intégrale. L'écriture complexe est celle du XX^e siècle. Ici $n\in\mathbb{Z}$, le passage entre les deux écritures (fonctions trigonométriques et fonction exponentielle) est donné par l'égalité :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}=\cos(x)+\mathrm{i}\,\sin(x).$$

Le problème de la convergence, pratiquement ignoré au XVIII^e siècle, est loin d'être trivial. Il est à l'origine de nombreux articles développant des idées nouvelles.

Voici quelques dates marquantes :

1829 : P-G Lejeune-Dirichlet (1805–1859) : *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.*

1854 : B. Riemann (1826–1866) : *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* (publié en 1867).

1870-72 : G. Cantor (1845–1918) : articles sur la convergence des séries trigonométriques.

1876 : P. Du Bois-Reymond (1831–1889) : fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point.

1906 : H. Lebesgue (1875–1941) : *Leçons sur les séries trigonométriques.*

1926 : A. N. Kolmogorov (1903–1987) : il existe une fonction Lebesgue-intégrable dont la série de Fourier diverge partout.

1966 : Kahane et Katznelson : la série de Fourier d'une fonction continue peut diverger sur n'importe quel ensemble donné dont la mesure de Lebesgue est nulle.

1966 : Carleson : Pour toutes les fonctions continues sur $[0,2\pi]$, la série de Fourier converge presque partout.

Un cadre dans lequel les séries de Fourier trouvent place de manière satisfaisante est l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2([0,2\pi])$ des fonctions de carré intégrable c'est-à-dire les fonctions f pour lesquelles $\displaystyle\int f(x)^2\,\mathrm{d}x<+\infty$, la famille $\{\cos(nx),\ \sin(nx),\ n\in\mathbb{N}\}$ en étant un système orthogonal total. L'orthogonalité est facile à démontrer, il suffit de calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(nx)\sin(px)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(px)\,\mathrm{d}x$, … Quant à la totalité, les fonctions continues étant denses dans $\mathrm{L}^2([0,2\pi])$, il suffit de montrer que toute fonction continue est limite dans $\mathrm{L}^2([0,2\pi])$ de polynômes trigonométriques. Ceci est obtenu en appliquant le théorème de Stone-Weierstrass.

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

Ce formalisme fait de l'ensemble des fonctions de carré intégrable ou de l'ensemble des suites de carré sommable (c'est-à-dire $\sum u_n^2 < +\infty$) un espace dans lequel on raisonne géométriquement « comme » on raisonne dans $\mathbb{R}^2$, avec un vocabulaire emprunté à la géométrie, mais ce cadre ne permet pas de traiter les problèmes classiques de convergence.

2 Avant Fourier : le problème des cordes vibrantes

Quelques dates :

1715 : Publication de *De methodo incrementorum* par B. Taylor (1685–1731).

1747 : Controverse D. Bernoulli (1700–1782), J. Le Rond d'Alembert (1717–1783) et L. Euler.

1753 : Nouvelle polémique entre D. Bernoulli et Euler.

1755 : Parution de l'article écrit en 1753 de D. Bernoulli *Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes* et *Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones qui peuvent exister dans un même système de corps.*

Quelle(s) équation(s) pour le problème physique des cordes vibrantes ?[2]

Le problème des cordes vibrantes est la description du mouvement d'une corde fixée à ses extrémités — la corde d'un violon par exemple.

Vers 1715, B. Taylor, par un argument direct, sans utiliser d'équation aux dérivées partielles, montre que (quand a est constant) pour chaque entier $n \geqslant 1$, la fonction $u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right)$ représente les vibrations de la corde ; pour $n = 1$, c'est le son fondamental, et pour $n = 2, 3, \dots$ ce sont les harmoniques. Comme on le savait déjà, le son émis par une corde est un mélange d'harmoniques.

Jean Bernoulli (1667–1748) aborde le même problème en 1727 en essayant d'appliquer de façon stricte le modèle mécanique newtonien. Dans un cadre atomiste, le mouvement de la corde est par un système d'équations newtoniennes, $f = m\gamma$, chaque équation décrivant le mouvement d'un des corpuscules composant la corde. Cela bien que la corde se présente comme un corps continu dont nous connaissons seulement la masse totale M et la longueur ℓ. Bernoulli applique un schéma newtonien discret en assimilant la corde à un fil élastique sans épaisseur, auquel sont suspendues n masses dont la somme vaut M. Les masses sont placées à égales distances les unes des autres. Si x_k est l'abscisse de la k-ième masse, $x_k = \frac{k}{n}\cdot$ On applique la loi de Newton. Le mouvement des masses est représenté par la variation de l'ordonnée y_k.

Bernoulli démontre que l'équation du mouvement de la masse k peut s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_k}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{n\gamma}{\ell}\right)^2 (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$$

C'est une bonne idée ; mais conserver un modèle discret conduit à un schéma grossier ou inutilisable.

[2]Ce paragraphe est emprunté à G. Israel cité en bibliographie

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

D'Alembert, en 1746, propose une solution qui consiste à assimiler un corpuscule à un point géométrique muni d'une masse. La corde est à la fois continue et discrète. D'Alembert découpe de la même façon que Bernoulli, mais jusqu'à l'infini. Il note x l'abscisse d'un point quelconque de la corde, y son ordonnée, dx l' « intervalle entre deux points » de la corde. L'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{y(t,x+\Delta x) - 2y(t,x) + y(t,x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\right]$$

En faisant tendre Δx vers 0, l'équation que d'Alembert obtient, en termes modernes, est : $\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}$; les conditions aux bornes $y(0,t) = y(\ell,t) = 0$ expriment que la corde est fixée aux points $x = 0$ et $x = \ell$ et les égalités $y(x,0) = \phi(x)$ et $\dfrac{\partial}{\partial t}y(x,0) = \psi(x)$ expriment que la forme et la vitesse sont données au temps $t = 0$.

Comment résoudre le problème ?

En 1747, D'Alembert résout l'équation (E) : $\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}$en effectuant le changement de variables $X = x - at$ et $Y = x + at$ qui réduit l'équation à $\dfrac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0$. Il conclut que la solution de (E) est donnée par $u(x, \text{réduite } t) = f(x - at) + g(x + at)$ où f et g sont deux fonctions « arbitraires ».

Daniel Bernoulli, en 1750, propose d'écrire la solution « générale » comme la série $u(t,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{a}(t-\beta_n)\right)$; les valeurs a_n et β_n étant convenablement choisies.

C'est la recherche d'une solution « générale » qui engendre la controverse entre d'Alembert, Euler et D. Bernoulli. Cette solution est obtenue en superposant des fonctions sinus, les coefficients étant calculés par des égalités d'intégrales sans souci de convergence. D. Bernoulli démontre que :

$$y(t,x) = \sum_p \alpha_p \sin\left(p\,\frac{\pi x}{\ell}\right)\cos(pkt)$$

fournit une solution au problème et il considère que c'est la plus générale possible. C'est sur ce point que réagit Euler. Pour qu'il en soit ainsi, dit Euler, il faut qu'à $t = 0$, la formule qui devient $y(x) = \displaystyle\sum_p \alpha_p \sin\left(p\,\frac{\pi x}{\ell}\right)$ représente toutes les formes que peut prendre une corde fixée à ses deux extrémités, à savoir les courbes dont le graphe est un trait tracé à volonté sans lever la plume (pour nous, une fonction continue, dérivable par morceaux). Il observe qu'une fonction mécanique arbitraire peut être définie sur un segment (intervalle fermé et borné) par la série somme de cosinus et de sinus mais en pensant que cette série représente seulement une fonction analytique. Son opinion est reprise (avec des variantes) par beaucoup d'autres mathématiciens de son temps, sans faire de progrès sur cette question jusqu'au commencement du travail de Fourier sur la théorie de la chaleur.

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

Voici quelques éléments de la controverse extraits de *Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres année 1753*, Berlin 1755.

Le paragraphe XII est écrit par D. Bernoulli.

XII. Voyons encore ſi toutes les nouvelles courbes trouvées par M. *Euler*, ſont compriſes dans notre remarque. Pour cet effet il faudra donner une équation pour toutes les courbes Tayloriennes, dont les cinq premieres figures ſont autant d'exemples. Je me ſervirai des dénominations de M. *Euler*. Soit donc la longueur de la corde $AB = a$; $\pi =$ à la demi-circonference du cercle dont le rayon eſt exprimé par l'unité, la plus grande appliquée au milieu de chaque ventre pour la premiere figure $= \alpha$, pour la ſeconde $= \beta$, pour la troiſième $= \gamma$, pour la quatrième $= \delta$; ſoit enfin x une abſciſſe quelconque, & y l'appliquée pour cette abſciſſe, on aura ſuivant M. *Taylor*,

$$\text{pour la 1. fig. } y = \alpha \text{ ſin } \frac{\pi x}{a}$$

$$\text{pour la 2. fig. } y = \beta \text{ ſin } \frac{2\pi x}{a}$$

$$\text{pour la 3. fig. } y = \gamma \text{ ſin } \frac{3\pi x}{a}$$

$$\text{pour la 4. fig. } y = \delta \text{ ſin } \frac{4\pi x}{a} \quad \&c.$$

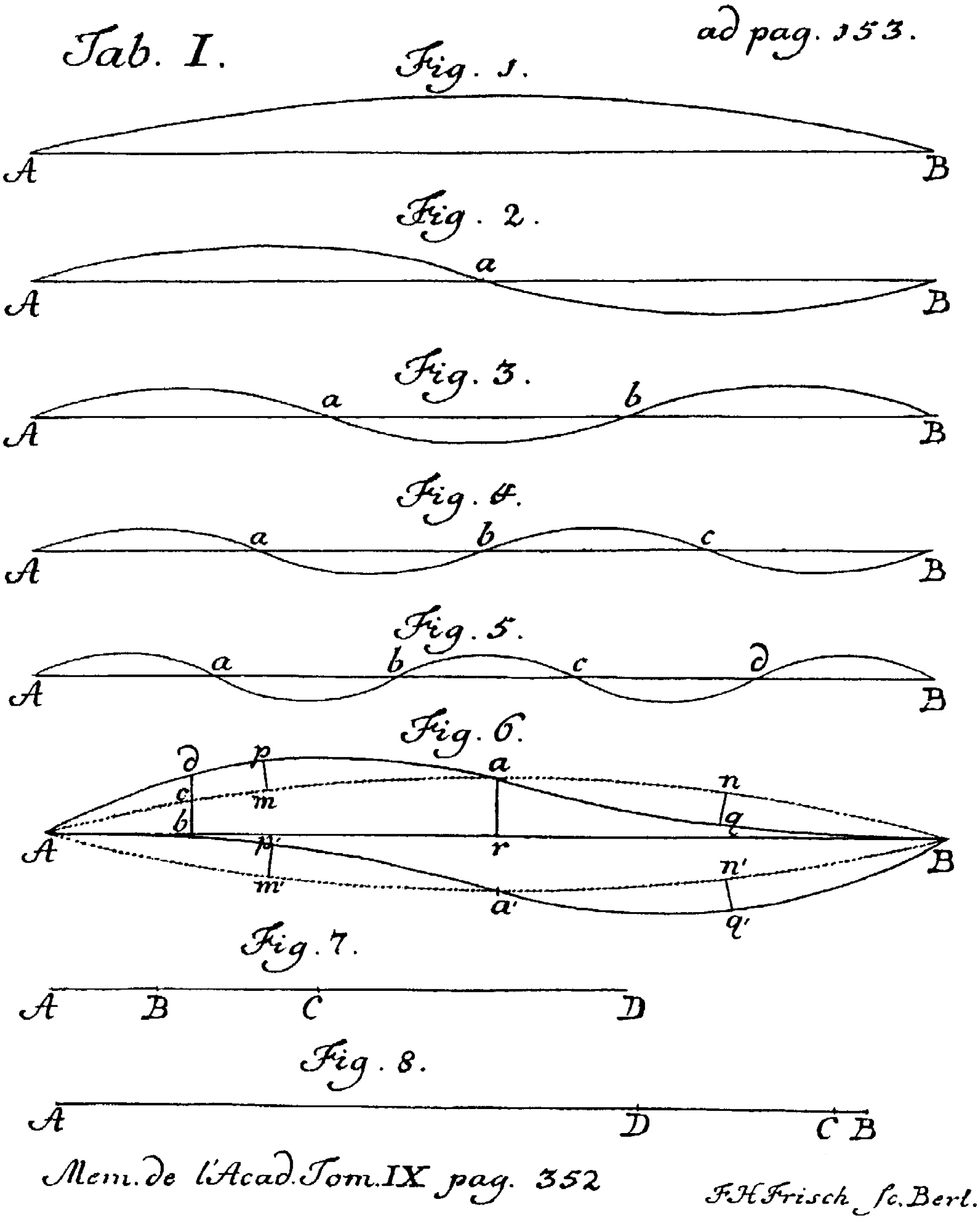
En combinant donc toutes ces courbes à l'imitation de la figure ſixième, pour laquelle nous n'avons combiné que les deux premieres figures, nous aurons généralement pour la même abſciſſe x cette équation

$$y = \alpha \text{ ſin } \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ ſin } \frac{2\pi x}{a} + \gamma \text{ ſin } \frac{3\pi x}{a} + \delta \text{ ſin } \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

dans laquelle les quantités α, β, γ, δ, &c ſont arbitraires affirmatives ou négatives.

XIII. Voilà donc cette infinité de courbes trouvées ſans aucun calcul, & notre équation eſt la même que celle de M. *Euler*; voyez les Mémoires de l'Académie pour l'Année 1748 page 85. Il eſt vrai que M. *Euler*, ne traite pas cette multitude infiniment infinie de générale, & qu'il ne la donne au § 30 que comme des cas particuliers ; mais c'eſt ſur quoi je ne ſuis pas encore aſſez éclairci : s'il y a encore d'autres courbes, je ne comprens pas dans quel ſens on peut les admettre.

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004



© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

Voici les *Remarques sur les mémoires précédens de M. Bernoulli* par Euler

REMARQUES SUR LES MEMOIRES PRECEDENS DE *M. BERNOULLI*,

PAR M. EULER.

I.

Il n'y a aucun doute, que M. *Bernoulli* n'ait infiniment mieux développé la partie phyſique, qui renferme la formation du ſon dans le mouvement des cordes, qu'aucun autre n'a fait avant lui. On s'étoit presque uniquement arrêté à la détermination méchanique du mouvement, dont une corde tenduë peut être ébranlée, ſans rechercher aſſez ſoigneuſement la nature des ſons, qui en ſont produits. Malgré l'infinité de manieres differentes dont on a trouvé qu'une corde peut être miſe en vibrations, on ne voyoit pas comme il ſeroit poſſible, qu'une même corde puiſſe rendre à la fois pluſieurs ſons differens; & c'eſt à M. *Bernoulli*, que nous ſommes redevables de cette heureuſe explication, qui eſt ſans doute de la derniere importance dans la Phyſique. Il eſt auſſi évident, que cette belle idée s'étend à toutes les autres eſpeces des corps ſonores, & que le même corps peut rendre à la fois tous les ſons differens, dont il eſt ſusceptible ſéparément; & c'eſt le ſujet que M. *Bernoulli* a traité avec le même ſuccès dans ſon ſecond Mémoire.

---

mouvement, ſoit toujours, ou une trochoïde allongée ſimple, ou un mélange de deux ou pluſieurs courbes de la même eſpece. Or quoiqu'un tel mélange ne pût plus être regardé comme une trochoïde, & que la ſeule poſſibilité de la combinaiſon de pluſieurs courbes de M. *Taylor* rende déjà ſa ſolution inſuffiſante; il me ſemble qu'elle eſt encore inſuffiſante à d'autres égards, & que le mouvement d'une corde pourroit être tel, qu'il ſeroit impoſſible de le rapporter à l'eſpece des trochoïdes Tayloriennes.

III. Si toutes les courbes, auxquelles la corde s'applique pendant ſon mouvement, étoient compriſes dans cette équation,

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \delta \sin \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

le ſentiment de M. *Bernoulli* ſeroit juſte; vu que prenant chaque terme ſéparément, une telle équation $y = \mu \sin \frac{m\pi x}{a}$ donne toujours une des trochoïdes aſſignées par *Taylor*; & notre équation ſeroit formée de pluſieurs trochoïdes. Mais, dés que le nombre des termes dans cette équation devient infini, il me paroit encore douteux, ſi l'on peut dire, que la courbe ſoit compoſée d'une infinité de trochoïdes: le nombre infini ſemble détruire la nature d'une telle compoſition. Cependant j'avouë, que M. *Bernoulli* auroit pu parvenir à la découverte de toutes ces courbes par le ſeul raiſonnement fondé ſur la compoſition des trochoïdes Tayloriennes, & que l'équation rapportée, quand même elle ſeroit continuée à l'infini, en eſt une ſuite fort naturelle.

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

3 Le travail de Fourier[3]

La théorie des cordes vibrantes eut une influence manifeste sur Fourier. En premier lieu, l'équation des cordes vibrantes joua le rôle de paradigme pour l'équation de la chaleur. Fourier traita l'équation $\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} = 0$ de la même manière que Bernoulli l'équation $\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} = 0$. Fourier montre sur de nombreux exemples que la série de Fourier converge vers $\frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big)$ (p. 407 de la *Théorie analytique de la chaleur*) et pense que c'est vrai pour une fonction arbitraire. La preuve est seulement donnée en 1829 par Dirichlet pour les fonction continues et monotones par morceaux (on dit maintenant à variations bornées).

Ces résultats sont le point de départ de l'une des principales préoccupations des analystes du XIX^{e} siècle, l'étude des séries trigonométriques, centrée sur le problème de la convergence et des relations intégration et coefficients. L'évolution de cette théorie est en liens étroits avec l'approfondissement des notions de nombres réels, d'ensembles, de fonction et d'intégrale. Mais avant 1920, il n'y avait pas beaucoup de contacts entre cette théorie et le développement de l'analyse fonctionnelle telle que nous l'entendons actuellement. (on est encore loin de l'espace de Hilbert).

Quelques éléments biographiques :

Joseph Fourier (1768–1830), orphelin à 10 ans, est un brillant élève. Il étudia au collège militaire d'Auxerre jusqu'à 14 ans et y enseigna à partir de 16 ans et demi. Dès le 9 décembre 1789, il présente un mémoire sur les équations algébriques dont les rapporteurs sont Monge, Legendre et Cousin. En 1793, il prend part au comité révolutionnaire d'Auxerre, et entre autres, assure avec succès le ravitaillement et la fourniture d'armes à Orléans. Il est dénoncé à la Convention. Après la chute de Robespierre, il choisit l'emploi nouvellement créé « instituteur salarié par la nation ». Il entre ensuite à l'École normale créée en 1794 (qui disparut presque aussitôt pour être recréée plus tard). De 1795 à 1798, Fourier enseigne les mathématiques (calcul différentiel, calcul intégral, statique, dynamique, hydrostatique, probabilités) à l'École polytechnique. Bonaparte, lors de l'expédition d'Égypte fonde une réplique de l'institut de France ; il nomme Monge président et Fourier secrétaire perpétuel. Après son retour en France, Fourier est nommé par Bonaparte préfet de l'Isère fin 1801. Malgré cette charge, il écrit des milliers de pages sur l'Égypte et la *Théorie analytique de la chaleur*. Fourier envoie en 1807 son « Premier mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides ». Le secrétaire perpétuel, Delambre, demande à Lagrange, Laplace, Lacroix et Monge d'être rapporteurs. Lagrange s'oppose fermement à ce qu'écrit Fourier sur les séries trigonométriques et le mémoire n'est pas publié. Le même sujet est soumis à concours. Fourier envoie son manuscrit en septembre 1811. Les rapporteurs sont les trois même L. , Fourier eut le prix avec des réserves :

« Cette pièce renferme les véritables équations différentielles de la transmission de la chaleur, soit à l'intérieur des corps, soit à leur surface : et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur. »

[3] Ce paragraphe est directement issu de « Séries de Fourier et ondelettes » de Kahane et Lemarié-Rieusset

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

Après la chute de l'Empire, Fourier, en disgrâce, est nommé directeur du bureau des statistiques grâce à la protection de son ancien élève le Comte de Chabrol. En mai 1816, il est élu à l'institut, mais Louis XVIII refuse de valider l'élection ; il est réélu en 1817, l'élection est cette fois validée ; il en devient secrétaire perpétuel cinq ans plus tard.

Fourier meurt en 1830. Sa réputation ne cessera de croître à l'étranger alors qu'elle décline en France. Ses œuvres seront éditées par Darboux (1888–90)

Examinons d'un peu plus près « la théorie de la chaleur ».

L'équation $\dfrac{\partial \nu}{\partial t} = \dfrac{K}{CD}\left(\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \nu}{\partial z^2}\right)$ est écrite pour la première fois dans l'ouvrage page 118 après l'étude de nombreux exemples de diffusion de chaleur où interviennent des équations dont des fonctions exponentielles ou trigonométriques sont solutions.

142.

THÉORÈME IV.

Il est facile de déduire des théorèmes précédents les équations générales de la propagation de la chaleur.

Supposons que les différents points d'un solide homogène d'une forme quelconque, aient reçu des températures initiales qui varient successivement par l'effet de l'action mutuelle des molécules, et que l'équation v = f (x, y, z, t) *représente les états successifs du solide, on va démontrer que la fonction* v *de quatre variables satisfait nécessairement à l'équation*

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C.D}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right).$$

Les conditions aux limites sont données dans les paragraphes suivants (n° 143, 145). Il reste ensuite à résoudre cette équation. Pour cela, il commence par examiner le cas stationnaire (premier membre nul dans une plaque de longueur infinie (deux variables) ; c'est l'objet des paragraphes 166 et suivants dans lesquels la solution fonction de deux variables est choisie comme produit de deux fonctions d'une variable, la solution est paragraphe 167. La solution générale étant combinaison linéaire de ces solutions particulières.

Les deux extraits ci-dessous montrent la démarche de Fourier pour trouver les coefficients d'une série trigonométrique.

Dans celui-ci, Fourier résout un système d'une infinité d'équations ayant autant d'inconnues. Remarquons que Fourier donne la définition d'une série convergente au paragraphe 177.

171.

Nous reprendrons maintenant l'équation

$$1 = a \cos. y + b \cos. 3y + c \cos. 5y + d \cos. 7y + \text{etc.}.$$

dans laquelle il faut déterminer les coëfficients a, b, c, d, etc. Pour que cette équation subsiste, il est nécessaire que les constantes satisfassent aux équations que l'on obtient par des différentiations successives, ce qui donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
1 &= a \cos. y + b \cos. 3y + c \cos. 5y + d \cos. 7y + \text{etc.}\\
0 &= a \sin. y + 3\,b \sin. 3y + 5\,c \sin. 5y + 7\,d \sin. 7y + \text{etc.}\\
0 &= a \cos. y + 3^2 b \cos. 3y + 5^2 c \cos. 5y + 7^2 d \cos. 7y + \text{etc.}\\
0 &= a \sin. y + 3^3 b \cos. 3y + 5^3 c \cos. 5y + 7^3 d \cos. 7y + \text{etc.},
\end{aligned}$$

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

ainsi de suite à l'infini.

Ces équations devant avoir lieu lorsque $x = 0$, on aura

$$1 = a + b + c + d + e + f + g + \ldots \text{ etc.}$$
$$0 = a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + 9^2 e + 11^2 f + \ldots \text{ etc.}$$
$$0 = a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + \ldots \text{ etc.}$$
$$0 = a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + \ldots \text{ etc.}$$
$$0 = a + 3^8 b + 5^8 c + \ldots \text{ etc.}$$
etc.

Le nombre de ces équations est infini comme cèlui des indéterminées $a, b, c, d, e \ldots$ etc. La question consiste à éliminer toutes les inconnues, excepté une seule.

172.

Pour se former une idée distincte du résultat de ces éliminations, on supposera que le nombre des inconnues $a, b, c, d \ldots$ etc., est d'abord défini et égal à m. On emploiera les m, premières équations seulement, en effaçant tous les termes où se trouvent les inconnues qui suivent les m premières. Si l'on fait successivement $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$, $m = 5$, ainsi de suite, on trouvera dans chacune de ces suppositions, les valeurs des indéterminées. La quantité a, par exemple, recevra une valeur pour le cas de deux inconnues, une autre pour le cas de trois inconnues, ou pour le cas de quatre inconnues, ou successivement pour un plus grand nombre. Il en sera de même de l'indéterminée b, qui recevra autant de valeurs différentes que l'on aura effectué de fois l'élimination ; chacune des autres indéterminées est pareillement susceptible d'une infinité de valeurs différentes. Or la valeur d'une des inconnues, pour le cas ou leur nombre est infini, est la limite vers laquelle tendent continuellement les valeurs qu'elle reçoit au moyen des éliminations successives. Il s'agit donc d'examiner si, à mesure que le nombre des inconnues augmente, chacune des valeurs $a, b, c, d, \ldots$ etc. ne converge point vers une limite finie, dont elle approche continuellement.

Supposons que l'on emploie les sept équations suivantes :

$$1 = a + b + c + d + e + f + g$$
$$0 = a + 3^2\, b + 5^2\, c + 7^2\, d + 9^2\, e + 11^2\, f + 13^2\, g$$
$$0 = a + 3^4\, b + 5^4\, c + 7^4\, d + 9^4\, e + 11^4\, f + 13^4\, g$$
$$0 = a + 3^6\, b + 5^6\, c + 7^6\, d + 9^6\, e + 11^6\, f + 13^6\, g$$
$$0 = a + 3^8\, b + 5^8\, c + 7^8\, d + 9^8\, e + 11^8\, f + 13^8\, g$$
$$0 = a + 3^{10}\, b + 5^{10}\, c + 7^{10}\, d + 9^{10}\, e + 11^{10}\, f + 13^{10}\, g$$
$$0 = a + 3^{12}\, b + 5^{12}\, c + 7^{12}\, d + 9^{12}\, e + 11^{12}\, f + 13^{12}\, g.$$

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

Les six équations qui ne contiennent plus g, sont :

$$(13^2-1^2)+\quad b(13^2-3^2)+\quad c(13^2-5^2)+\quad d(13^2-7^2)+\quad e(13^2-9^2)+\quad f(13^2-$$
$$(13^2-1^2)+3^2\,b(13^2-3^2)+5^2\,c(13^2-5^2)+7^2\,d(13^2-7^2)+9^2\,e(13^2-9^2)+11^2 f(13^2-$$
$$(13^2-1^2)+5^4\,b(13^2-3^2)+5^4\,c(13^2-5^2)+7^4\,d(13^2-7^2)+9^4\,e(13^2-9^2)+11^4 f(13^2-$$
$$(13^2-1^2)+3^6\,b(13^2-3^2)+5^6\,c(13^2-5^2)+7^6\,d(13^2-7^2)+9^6\,e(13^2-9^2)+11^6 f(13^2-$$
$$(13^2-1^2)+3^8\,b(13^2-3^2)+5^8\,c(13^2-5^2)+7^8\,d(13^2-7^2)+9^8\,e(13^2-9^2)+11^8 f(13^2-$$
$$(13^2-1^2)+3^{10}b(13^2-3^2)+5^{10}c(13^2-5^2)+7^{10}d(13^2-7^2)+9^{10}e(13^2-9^2)+11^{10}f(13^2-$$

En continuant l'élimination, on obtiendra l'équation finale en a, qui est :

$$a(13^2-1^2)(11^2-1^2)(9^2-1^2)(7^2-1^2)(5^2-1^2)(3^2-1^2)=13^2.11^2.9^2.7^2.5^2.3^2.1^2.$$

177.

C'est ainsi qu'on est parvenu à effectuer entièrement les éliminations et à déterminer les coëfficients a, b, c, d, etc., de l'équation

$$1=a\cos.x+b\cos.3x+c\cos.5x+d\cos.7x+e\cos.9x,+\text{etc.}$$

La substitution de ces coëfficients, donne l'équation suivante :

$$\frac{\pi}{4}=\cos.y-\frac{1}{3}\cos.3y+\frac{1}{5}\cos.5y-\frac{1}{7}\cos.7y$$
$$+\frac{1}{9}\cos.9y-\frac{1}{11}\cos.11y+\text{etc.}$$

Le second membre est une fonction de y, qui ne change point de valeur quand on donne à la variable y une valeur comprise entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Il serait aisé de prouver que cette série est toujours convergente, c'est-à-dire que, en mettant au lieu de y un nombre quelconque, et en poursuivant le calcul des coëfficients, on approche de plus en plus d'une valeur fixe, en sorte que la différence de cette valeur à la somme des termes calculés, devient moindre que toute grandeur assignable. Sans nous arrêter à cette démonstration, que le lecteur peut suppléer, nous ferons remarquer que la valeur fixe, dont on approche continuellement, est $\frac{1}{4}\pi$, si la valeur attribuée à y est comprise entre o et $\frac{1}{2}\pi$, mais qu'elle est $-\frac{1}{4}\pi$, si y est comprise entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$; car, dans ce second intervalle, chaque terme de la série change de signe. En général la limite de la série est alternativement positive et négative; au reste, la convergence n'est point assez rapide pour procurer une approximation facile, mais elle suffit pour la vérité de l'équation.

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

L'extrait ci-dessous contient l'écriture des coefficients telle que nous la connaissons.

220.

On voit par-là que les coëfficients $a\,b\,c\,d\,e\,f\ldots$ etc., qui entrent dans l'équation

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x + \text{etc.}$$

et que nous avons trouvés précédemment par la voie des éliminations successives, sont des valeurs intégrales définies exprimées par le terme général $S(\sin. ix.\varphi x\, dx)$, i étant le numéro du terme dont on cherche le coëfficient. Cette remarque est importante, en ce qu'elle fait connaître comment les fonctions entièrement arbitraires peuvent aussi être développées en séries de sinus d'arcs multiples. En effet, si la fonction φx est représentée par l'ordonnée variable d'une courbe quelconque dont l'abscisse s'étend depuis $x=o$ jusqu'à $x=\pi$, et si l'on construit sur cette même partie de l'axe la courbe trigonométrique connue, dont l'ordonnée est $y=\sin. x$; il sera facile de se représenter la valeur d'un terme intégral. Il faut concevoir que pour chaque abscisse x, à laquelle répond une valeur de φx, et une valeur de $\sin. x$, on multiplie cette dernière valeur par la première, et qu'au même point de l'axe on élève une ordonnée proportionnelle au produit $\varphi x.\sin. x$. On formera, par cette opération continuelle, une troisième courbe, dont les ordonnées sont celles de la courbe trigonométrique, réduite proportionnellement aux ordonnées de la courbe arbitraire qui représente φx. Cela posé, l'aire de la courbe réduite étant prise depuis $x=o$ jusqu'à $x=\pi$, donnera la valeur exacte du coëfficient de $\sin. x$; et quelle que puisse être la courbe donnée qui répond à φx, soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit qu'elle ne dépende d'aucune loi régulière, il est évident qu'elle servira toujours à réduire d'une manière quelconque la courbe trigonométrique; en sorte que l'aire de la courbe réduite a, dans tous les cas possibles, une valeur déterminée qui donne celle du coëfficient de $\sin. x$ dans le développement de la fonction. Il en est de même du coëfficient suivant b ou $S(\varphi x.\sin. 2x\, dx)$.

Il faut en général, pour construire les valeurs des coëfficients $a\,b\,c\,d\,e\ldots$ etc., imaginer que les courbes, dont les équations sont

$$y=\sin. x,\ y=\sin. 2x,\ y=\sin. 3x,\ y=\sin. 4x,\ \text{etc.},$$

ont été tracées pour un même intervalle sur l'axe des x, depuis $x=o$ jusqu'à $x=\pi$; et qu'ensuite on a changé ces courbes en multipliant toutes leurs ordonnées par les ordonnées correspondantes d'une même courbe, dont l'équation est $y=\varphi x$. Les équations des courbes réduites, sont:

$$y=\sin. x.\varphi x, y=\sin. 2x.\varphi x, y=\sin. 3x.\varphi x, y=\sin. 4x.\varphi x.. \text{etc.}$$

Les aires de ces dernières courbes, prises depuis $x=o$ jusqu'à $x=\pi$, seront les valeurs des coëfficients $a\,b\,c\,d$ etc., dans l'équation

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x + \text{etc.}$$

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

4 Le mémoire de Dirichlet de 1829

Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859) vient à Paris pour étudier les mathématiques en 1822. Il retourne en Allemagne en 1826. Pour survivre à Paris, il est précepteur des enfants du maréchal Fay. C'est durant cette période qu'il rencontre Fourier. Il finit sa carrière en succédant en 1855 à Gauss à Gottingen.

Dirichlet, dans l'article *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, paru en janvier 1929 en français dans le journal de Crelle, énonce le théorème qui porte son nom : La série de Fourier de f en x converge, sous certaines conditions vers $\frac{1}{2}\Big(f(x+0)+f(x-0)\Big)$. Ce théorème, qui est le premier théorème sur la convergence des séries de Fourier, eut immédiatement une grande influence non seulement dans la communauté restreinte des chercheurs mais aussi dans l'enseignement. Ce résultat est, par exemple cité et démontré par A. A. Cournot (1801–1877) dans *Leçons sur les fonctions* paru en 1841. Il sera précisé par C. Jordan (1838–1921) dont le nom est associé à ce résultat.

Voici cet article, extrait du journal de Crelle :

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

9.
Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

(Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

Les séries de sinus et de cosinus, au moyen desquelles on peut représenter une fonction arbitraire dans un intervalle donné, jouissent entre autres propriétés remarquables aussi de celle d'être convergentes. Cette propriété n'avait pas échappée au géomètre illustre qui a ouvert une nouvelle carrière aux applications de l'analyse, en y introduisant la manière d'exprimer les fonctions arbitraires dont il est question; elle se trouve énoncée dans le Mémoire qui contient ses premières recherches sur la chaleur. Mais personne, que je sache, n'en a donné jusqu'à présent une démonstration générale. Je ne connais sur cet objet qu'un travail dû à M. Cauchy et qui fait partie des Mémoires de l'Académie des sciences de Paris pour l'année 1823. L'auteur de ce travail avoue lui même que sa démonstration se trouve en défaut pour certaines fonctions pour lesquelles la convergence est pourtant incontestable. Un examen attentif du Mémoire cité m'a porté à croire que la démonstration qui y est exposée n'est pas même suffisante pour les cas auxquels l'auteur la croit applicable. Je vais, avant d'entrer en matière, énoncer en peu de mots les objections auxquelles la démonstration de M. Cauchy me parait sujette. La marche que ce géomètre célèbre suit dans cette recherche exige que l'on considère les valeurs que la fonction $\varphi(x)$ qu'il s'agit de développer, obtient, lorsqu'on y remplace la variable x par une quantité de la forme $u + v\sqrt{-1}$. La considération de ces valeurs semble étrangère à la question et l'on ne voit d'ailleurs pas bien ce que l'on doit entendre par le résultat d'une pareille substitution lorsque la fonction dans laquelle elle a lieu, ne peut pas être exprimée par une formule analytique. Je présente cette objection avec d'autant plus de confiance, que l'auteur me semble partager mon opinion sur ce point. Il insiste en effet dans plusieurs de ces ouvrages sur la nécessité de définir d'une manière précise

le sens que l'on attache à une pareille substitution même lorsqu'elle est faite dans une fonction d'une loi analytique régulière; on trouve surtout dans le Mémoire qu'il a inseré dans le 19ième cahier du journal polytechnique pag. 567 et suiv. des remarques sur les difficultés que font naître les quantités imaginaires placées sans des signes de fonctions arbitraires. Quoi qu'il en soit de cette première observation, la démonstration de M. Cauchy donne encore lieu à une autre objection qui parait ne laisser aucun doute sur son insuffisance. La considération des quantités imaginaires conduit l'auteur à un résultat sur le décroissement des termes de la série, qui est loin de prouver que ces termes forment une suite convergente. Le résultat dont il s'agit peut être énoncé comme il suit, en supposant que l'intervalle que l'on considère, s'etende depuis zéro jusqu'à 2π.

„Le rapport du terme dont le rang est n, à la quantité $A\frac{\sin nx}{n}$ (A désignant une constante determinée dépendante des valeurs extrêmes de la fonction) diffère de l'unité prise positivement d'une quantité qui diminue indéfiniment, à mesure que n devient plus grand."

De ce résultat et de ce que la série, qui a $A\frac{\sin nx}{n}$ pour terme général, est convergente, l'auteur conclut que la série trigonométrique générale l'est également. Mais cette conclusion n'est pas permise, car il est facile de s'assurer que deux séries (du moins lorsque, comme il arrive ici, les termes n'ont pas tous le même signe) peuvent être l'une convergente, l'autre divergente, quoique le rapport de deux termes de même rang diffère aussi peu que l'on veut de l'unité prise positivement lorsque les termes sont d'un rang très avancé.

On en voit un exemple très simple dans les deux séries, ayant l'une pour terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et l'autre $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. La première de ces séries est convergente, la seconde au contraire est divergente, car en la soustraiant de la première on obtient la série divergente:

$$-1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}-\text{etc.}$$

et cependant le rapport de deux termes correspondans, qui est $1\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$, converge vers l'unité à mesure que n croît.

Je vais maintenant entrer en matière, en commençant par l'examen des cas les plus simples, auxquels tous les autres peuvent être ra-

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

menés. Désignons par h un nombre positif inférieur ou tout au plus égal à $\frac{\pi}{2}$ et par $f(\beta)$ une fonction de β qui reste continue entre les limites 0 et h; j'entends par là une fonction qui a une valeur finie et determinée pour toute valeur de β comprise entre 0 et h, et en outre telle que la différence $f(\beta+\varepsilon)-f(\beta)$ diminue sans limite lorsque ε devient de plus en plus petit. Supposons encore que la fonction reste toujours positive entre les limites 0 et h et qu'elle décroisse constamment depuis 0 jusqu'à h, en sorte que si p et q désignent deux nombres compris entre 0 et h, $f(p)-f(q)$ ait toujours un signe opposé à celui de $p-q$. Celà posé considérons l'intégrale

$$(1.)\quad \int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta$$

dans laquelle i est une quantité positive, et voyons ce que cette intégrale deviendra à mesure que i croît. Pour cela partageons la en plusieurs autres prises la première depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\frac{\pi}{i}$, la seconde depuis $\beta=\frac{\pi}{i}$ jusqu'à $\beta=\frac{2\pi}{i}$, et ainsi de suite, l'avant-dernière ayant pour limites $(r-1)\frac{\pi}{i}$ et $\frac{r\pi}{i}$, et la dernière $\frac{2\pi}{i}$ et h, $\frac{r\pi}{i}$ désignant le plus grand multiple de $\frac{\pi}{i}$ qui soit contenu dans h. Il est facile de voir que ces intégrales nouvelles, dont le nombre est $r+1$, sont alternativement positives et négatives, la fonction placée sous le signe somme étant évidemment toujours positive entre les limites de la première, négative entre les limites de la seconde et ainsi de suite. Il n'est pas moins facile de se convaincre que chacune d'elles est plus petite que la précédente, abstraction faite du signe. En effet ν désignant un entier $<r$, les expressions

$$\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta \quad\text{et}\quad \int_{\frac{\nu\pi}{i}}^{(\nu+1)\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta$$

représentent deux intégrales consécutives. Remplaçons dans la seconde β par $\frac{\pi}{i}+\beta$; elle se changera ainsi en celle-ci:

$$\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin(i\beta+\pi)}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)} f\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)\partial\beta$$

ou ce qui revient au même:

$$-\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)} f\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)\partial\beta.$$

Les deux intégrales qu'il s'agit de comparer ayant ainsi les mêmes limites, on voit sans peine que la seconde a une valeur numérique inférieure à celle de la première. Il suffit pour cela de remarquer qu'il suit de la supposition que nous avons faite sur la fonction $f(\beta)$, que $f\left(\frac{\pi}{i}+\beta\right)<f(\beta)$ et que d'un autre côté $\sin\left(\frac{\pi}{i}+\beta\right)>\sin\beta$, les arcs β et $\frac{\pi}{i}+\beta$ étant l'un et l'autre moindres que $\frac{\pi}{2}$, car il en résulte l'inégalité $\frac{f(\beta)}{\sin\beta}>\frac{f\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)}$, qui ayant lieu pour toutes les valeurs de β intermédiaires entre les limites $(\nu-1)\frac{\pi}{i}$ et $\frac{\nu\pi}{i}$, fait voir que, comme nous l'avons dit, chaque intégrale est plus grande que celle qui la suit, abstraction faite du signe. Cette circonstance a lieu a fortiori, lorsqu'on compare l'avant-dernière à la dernière, attendu que la différence des limites $\frac{r\pi}{i}$ et h de la dernière est inférieure à $\frac{\pi}{i}$ différence commune des limites de toutes les autres.

Examinons actuellement un peu plus en détail l'intégrale du rang ν, qui est

$$\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\beta} f(\beta)\,\partial\beta.$$

Comme la fonction de β qui se trouve sous le signe intégral est le produit des facteurs $\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}$, et $f(\beta)$, qui sont l'un et l'autre des fonctions continues de β entre les limites de l'intégration et comme d'un autre côté le premier de ces facteurs conserve toujours le même signe entre ces mêmes limites, on conclura en vertu d'un théorème connu, que l'intégrale que nous considérons est égale à l'intégrale du premier facteur multipliée par une quantité comprise entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite de l'autre facteur. Le second facteur décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde, la quantité dont il s'agit est comprise entre $f\left(\frac{(\nu-1)\pi}{i}\right)$ et $f\left(\frac{\nu\pi}{i}\right)$. En la désignant par ϱ_ν, no-

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

tre intégrale sera équivalente à

$$\varrho_\nu \int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\,\partial\beta.$$

L'intégrale que renfermee encore cette expression, dépend à la fois de ν et de i. Elle est positive ou négative selon que $\nu-1$ est pair ou impair; nous la désignerons désormais par K_ν, abstraction faite du signe. Nous aurons bientôt besoin de connaître la limite vers laquelle elle converge, lors que, ν restant invariable, i devient de plus en plus grand. Pour découvrir cette limite, remplaçons β par $\frac{\gamma}{i}$, γ étant une nouvelle variable. Nous aurons ainsi

$$\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin\gamma}{i\sin\left(\frac{\gamma}{i}\right)}\,\partial\gamma.$$

Sous cette forme, il est évident qu'elle converge vers la limite

$$\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma}\,\partial\gamma,$$

que pour abréger nous désignerons par k_ν, abstraction faite du signe.

On sait que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin\gamma}{\partial\gamma}\,\partial\gamma$ a une valeur finie et égale à $\frac{\pi}{2}$. Cette intégrale peut être partagée en une infinité d'autres, prises la première depuis $\gamma=0$ jusqu'à $\gamma=\pi$, la seconde depuis $\gamma=\pi$ jusqu'à $\gamma=2\pi$, et ainsi de suite. Ces nouvelles intégrales sont alternativement positives et négatives, chacune d'elles a une valeur numérique inférieure à celle de la précédente, et celle du rang ν est k_ν, abstraction faite du signe. La proposition qu'on vient de citer, revient donc à dire que la suite infinie

$$(2.)\quad k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 - \text{etc.}$$

est convergente et a une somme égale à $\frac{\pi}{2}$.

Les termes de cette suite allant toujours en décroissant, il suit d'une proposition connue que la somme de n premiers termes est supérieure ou inférieure à $\frac{\pi}{2}$, selon que n est impair ou pair et que cette somme qu'on peut désigner par S_n, diffère de $\frac{\pi}{2}$ d'une quantité moindre que le terme suivant k_{n+1}.

Reprenons actuellement l'intégrale (1.) et cherchons à déterminer la limite vers laquelle elle converge lorsque i croît indéfiniment. En

faisant ainsi croître le nombre i, les intégrales dans lesquelles nous avons décomposé l'intégrale (1.), changeront sans cesse de valeur en même temps que leur nombre augmentera; il s'agit de connaître le résultat de ce double changement lorsqu'il continue indéfiniment. Pour cela, prenons un nombre entier m (qu'il soit supposé pair pour plus de simplicité) et supposons que le nombre m reste invariable pendant que i croît. Le nombre r, qui croît sans cesse avec i, finira bientôt par surpasser le nombre invariable m, quelque grand qu'on l'ait choisi.

Cela posé, partageons en deux groupes les intégrales dont la somme est équivalente à l'intégrale (1.). Le premier groupe comprendra les m premières de ces intégrales, et le second sera composé de toutes les suivantes. On aura pour la somme du premier groupe:

$$(3.)\quad K_1\varrho_1 - K_2\varrho_2 + K_3\varrho_3 - K_4\varrho_4 + \ldots - K_m\varrho_m$$

et le second, dont le nombre des termes croît sans cesse avec i, a pour premiers termes:

$$(4.)\quad K_{m+1}\varrho_{m+1} - K_{m+2}\varrho_{m+2} + \ldots$$

Considérons séparément ces deux groupes. Le nombre i croissant indéfiniment la somme (3.) convergera vers une limite qu'il est facile de déterminer. En effet, les quantités $\varrho, \varrho_2, \ldots \varrho_m$ qui sont comprises la première entre $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{i}\right)$, la seconde entre $f\left(\frac{\pi}{i}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{i}\right)$, et la dernière entre $f\left(\frac{(m-1)\pi}{i}\right)$ et $f\left(\frac{m\pi}{i}\right)$ convergent chacune vers la limite $f(0)$, lorsque, m restant invariable, i croît sans cesse. D'un autre côté nous avons vu que les quantités $K_1, K_2, \ldots K_m$ convergent dans les mêmes circonstances respectivement vers les limites $k_1, k_2, \ldots k_m$. Donc la somme (3.) converge vers la limite $f(0)(k_1 - k_2 + k_3 - \text{etc.} \ldots - k_m) = S_m f(0)$, ce qui veut dire que la différence entre la somme (3.) et $S_m f(0)$ finira toujours, abstraction faite du signe, par être constamment inférieure à ω, ω désignant une quantité positive aussi petite que l'on veut.

Considérons pareillement la somme (4.), dont le nombre des termes augmente sans cesse. Ses termes étant alternativement positifs et négatifs, et chacun d'eux ayant une valeur numérique inférieure à celle du terme précédent, comme nous l'avons vu plus haut, en considérant les intégrales que ces termes représentent, il suit d'un principe connu *),

*) Le principe sur lequel nous nous appuyons peut être énoncé de cette manière. Les lettres A, A', A'', ... désignant des quantités positives en nombre quelconque et telles que

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

que cette somme, quelque soit le nombre de ses termes, est positive comme son premier terme $K_{m+1}\varrho_{m+1}$ et a une valeur inférieure à celle de ce terme. Or, ce premier terme convergeant vers la limite $k_{m+1}f(0)$, il s'ensuit que la somme (4.) finira toujours par être inférieure à $k_{m+1}f(0)$ augmenté d'une quantité positive ω' aussi petite que l'on veut. En combinant ce résultat avec celui que nous avons obtenu sur la somme (3.), il n'y a qu'un instant, on verra que l'intégrale (1.) qui est la somme des expressions (3.) et (4.) finira toujours par différer de $f(0)\,S_m$ d'une quantité moindre, abstraction faite du signe, que $\omega+\omega'+f(0)k_{m+1}$, ω et ω' étant deux nombres d'une petitesse arbitraire. D'un autre côté S_m diffère de $\frac{\pi}{2}$ d'une quantité numériquement inférieure à k_{m+1}; donc l'intégrale finira toujours par différer de $\frac{\pi}{2}f(0)$ d'une quantité moindre que $\omega+\omega'+2f(0)k_{m+1}$, abstraction faite du signe.

Comme m peut être choisi tellement grand que k_{m+1} sait moindre que toute grandeur donnée, il s'ensuit que l'intégrale (1.) finira toujours, lorsque i croît sans limite, par différer constamment de $\frac{\pi}{2}f(0)$ d'une quantité moindre, abstraction faite du signe, qu'un nombre aussi petit que l'on veut. Il est ainsi prouvé, que l'intégrale (1.) converge vers la limite $\frac{\pi}{2}f(0)$ pour des valeurs croissantes de i.

Supposons maintenant que la fonction $f(\beta)$, au lieu d'être toujours décroissante depuis 0 jusqu'à h, soit constante et égale à l'unité. On pourra dans ce cas déterminer la limite vers laquelle converge l'intégrale (1.) par les mêmes considérations que nous venons d'employer; c'est ce qu'on voit tout de suite, en se rappellant que la démonstration précédente est fondée sur ce que les intégrales dans lesquelles nous avons decomposé l'intégrale (1.), forment une suite décroissante. Or, ce décroissement tient à deux choses, au décroissement du facteur $f(\beta)$ et à l'accroissement du diviseur $\sin\beta$. Si $f(\beta)$ devient un nombre constant, l'accroissement de $\sin\beta$ suffira toujours pour rendre chaque intégrale de la série plus petite

$A > A' > A'' >$ etc., la quantité $A - A' + A'' - A''' +$ etc. est positive et inférieure à A. Celà résulte immédiatement de que la quantité précedente peut être mise sous l'une et l'autre de ces deux formes:

$$(A-A') + (A''-A''') + \text{etc.};$$
$$A - (A'-A'') - (A'''-A^{\text{IV}}) - \text{etc.}$$

que la précédente. On trouvera ainsi, en supposant toujours h positive et tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, que l'intégrale $\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ converge vers la limite $\frac{\pi}{2}$. Il suit de là que l'intégrale $\int_0^h \frac{c\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$, dans laquelle c est une constante positive ou négative, converge vers la limite $c\frac{\pi}{2}$.

Nous avons supposé que la fonction $f(\beta)$ était décroissante et positive entre les limites 0 et h. La première circonstance ayant toujours lieu, c'est-à-dire la fonction étant telle que $f(p)-f(q)$ ait un signe contraire à celui de $p-q$ pour des valeurs p et q comprises entre 0 et h, supposons que $f(\beta)$ ne soit pas toujours positive. On prendra alors une constante positive c assez grande pour que $c+f(\beta)$ conserve toujours un signe positif depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=h$. L'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ étant égale à la différence de celles-ci: $\int_0^h [c+f(\beta)]\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ et $\int_0^h c\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$, sa limite sera la différence des limites vers lesquelles convergent ces dernières. Or ces dernières rentrent dans les cas précédemment examinés ($c+f(\beta)$ étant une fonction décroissante et positive) et convergent vers les limites $[c+f(0)]\frac{\pi}{2}$ et $c\frac{\pi}{2}$, d'où il suit que la première converge vers la limite $\frac{\pi}{2}f(0)$.

Considérons actuellement une fonction $f(\beta)$ croissante depuis 0 jusqu'à h. Dans ce cas $-f(\beta)$ sera une fonction décroissante. L'intégrale $\int_0^h -f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ convergera donc vers la limite $-\frac{\pi}{2}f(0)$, et par conséquent l'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ vers la limite $\frac{\pi}{2}f(0)$.

En réunissant ces résultats, on aura cet énoncé:

(5.) „Quelle que soit la fonction $f(\beta)$, pourvu qu'elle reste continue entre les limites 0 et h (h étant positive et tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$), et qu'elle croisse ou qu'elle décroisse depuis la première de ces limites jusqu'à la seconde, l'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ finira par différer constamment de $\frac{\pi}{2}f(0)$ d'une quantité moindre que tout nombre assignable, lorsqu'on y fait croître i au delà de toute limite positive."

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

Désignons par g un nombre positif différent de zéro et inférieur à h, et supposons que la fonction reste continue et croisse ou décroisse depuis g jusqu'à h. L'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ convergera alors vers une limite qu'il est facile de découvrir. On pourroit y parvenir par des considérations analogues à celles que nous avons appliquées à l'intégrale (1.); mais il est plus simple de ramener ce nouveau cas à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède. La fonction n'étant donnée que depuis g jusqu'à h reste entièrement arbitraire pour les valeurs de β comprises entre 0 et g. Supposons que l'on entende par $f(\beta)$, pour les valeurs de β comprises entre 0 et g une fonction continue et croissante ou décroissante depuis 0 jusqu'à g, selon que $f(\beta)$ croît ou décroît depuis g jusqu'à h; supposons encore que $f(g-\varepsilon)$ diffère infiniment peu de $f(g+\varepsilon)$, si ε décroit sans limite; ayant satisfait d'une manière quelconque à ces conditions, ce qu'on peut toujours faire d'une infinité de manières, la fonction $f(\beta)$ remplira depuis 0 jusqu'à h les conditions exprimées dans l'énoncé (5.). Les intégrales

$$\int_0^g f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta \text{ et } \int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$$

convergeront donc l'une et l'autre vers la limite $\frac{\pi}{2}f(0)$. D'où l'on conclut que l'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ qui est la différence des précédentes, a zéro pour limite.

Ce nouveau résultat peut être réuni en un seul énoncé avec celui que nous avons obtenu plus haut. On aura ainsi:

(6.) „La lettre h désignant une quantité positive tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, et g une quantité également positive et en outre inférieure à h, l'intégrale

$$\int_g^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$$

dans laquelle la fonction $f(\beta)$ est continue entre les limites de l'intégration et a une marche toujours croissante ou toujours décroissante depuis $\beta=g$ jusqu'à $\beta=h$, convergera vers une certaine limite, lorsque le nombre i devient de plus en plus grand. Cette limite est égale à zéro, le seul cas excepté où g a une valeur nulle, dans ce cas elle a la valeur $\frac{\pi}{2}f(0)$."

Il est évident que ce résultat ne serait que légèrement modifié, si la fonction $f(\beta)$ présentait une solution de continuité pour $\beta=g$, et $\beta=h$, c'est-à-dire si $f(g)$ était différent de $f(g+\varepsilon)$ et $f(h)$ de $f(h-\varepsilon)$, ε désignant une quantité infiniment petite et positive, pourvu qu'alors les valeurs $f(g)$ et $f(h)$ ne fûssent pas infinies. Il faudrait seulement dans ce cas remplacer $f(0)$ par $f(\varepsilon)$ dans l'énoncé précédent, ce qu'on peut faire encore même quand il n'y pas de solution de continuité, attendu qu'alors $f(\varepsilon)$ est égale à $f(0)$.

Nous sommes maintenant en état de prouver la convergence des séries périodiques qui expriment des fonctions arbitraires entre des limites données. La marche que nous allons suivre nous conduira à établir la convergence de ces séries et à déterminer en même temps leurs valeurs. Soit $\varphi(x)$ une fonction de x, ayant une valeur finie et déterminée pour chaque valeur de x comprise entre $-\pi$ et π, et supposons qu'il s'agisse de développer cette fonction dans une série de sinus et de cosinus d'arcs multiples de x. La série qui résout cette question, est, comme l'on sait:

$$(7.)\quad \frac{1}{2\pi}\int\varphi(\alpha)\partial\alpha+\frac{1}{\pi}\left\{\begin{matrix}\cos x\int\varphi(\alpha)\cos\alpha\,\partial\alpha+\cos 2x\int\varphi(\alpha)\cos 2\alpha\,\partial\alpha\,\ldots\\ \sin x\int\varphi(\alpha)\sin\alpha\,\partial\alpha+\sin 2x\int\varphi(\alpha)\sin 2\alpha\,\partial\alpha\,\ldots\end{matrix}\right\}.$$

Les intégrales qui déterminent les coëfficiens constans, étant prises depuis $\alpha=-\pi$ jusqu'à $\alpha=\pi$, et x désignant une quantité quelconque comprise entre $-\pi$ et π (*Théorie de la Chaleur*, No. 232. et suiv.).

Considérons les $2n+1$ premiers termes de cette série (n étant un nombre entier) et voyons vers quelle limite converge la somme de ces termes, lorsque n devient de plus en plus grand. Cette somme peut être mise sous la forme suivante:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\partial\alpha\left[\tfrac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos 2(\alpha-x)+\ldots+\cos n(\alpha-x)\right],$$

ou en sommant la suite de cosinus,

$$(8.)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\partial\alpha.$$

Tout se réduit maintenant à déterminer la limite dont cette intégrale approche sans cesse, lorsque n croît indéfiniment. Pour cela nous la partagerons en deux autres prises l'une depuis $-\pi$ jusqu'à x, l'autre depuis x jusqu'à π. Si l'on remplace dans la première α par $x-2\beta$,

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

et dans la seconde α par $x+2\beta$, β étant une nouvelle variable, ces deux intégrales se changeront en celles-ci, abstraction faite du facteur $\frac{1}{\pi}$:

$$(9.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x-2\beta)\,\partial\beta \text{ et } \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x+2\beta)\,\partial\beta.$$

Considérons la seconde de ces deux intégrales. La quantité x étant inférieure ou tout au plus égale à π, abstraction faite du signe, $\frac{1}{2}(\pi-x)$ ne pourra tomber hors des limites 0 et π. Si $\frac{1}{2}(\pi-x)=0$, ce qui a lieu lorsque $x=\pi$, l'intégrale est nulle quelque que soit n; dans tous les autres cas elle convergera pour des valeurs croissantes de n vers une limite que nous allons déterminer. Supposons d'abord $\frac{1}{2}(\pi-x)$ inférieure ou tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, et remarquons que la fonction $\varphi(x+2\beta)$ peut présenter plusieurs solutions de continuité depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\frac{1}{2}(\pi-x)$, et qu'elle peut aussi avoir plusieurs maxima et minima dans ce même intervalle. Désignons par l, l', l'', ... $l^{(\nu)}$ rangées selon l'ordre de leur grandeur, les différentes valeurs de β, qui présentent l'une ou l'autre de ces circonstances, et décomposons notre intégrale en plusieurs autres prises respectivement entre les limites 0 et l, l' et l'', ... $l^{(\nu)}$ et $\frac{1}{2}(\pi-x)$. Toutes ces intégrales se trouveront dans le cas de l'énoncé (6.). Elles convergeront donc toutes vers la limite zéro à mesure que n croit, à l'exception de la première qui converge vers la limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x+\varepsilon)$, ε étant un nombre infiniment petit et positif. Si $\frac{1}{2}(\pi-x)$ était supérieure à $\frac{\pi}{2}$, ce qui arrivera lorsque x a une valeur négative, on partagerait l'intégrale en deux autres, l'une prise depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\frac{1}{2}\pi$, l'autre depuis $\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\beta=\frac{1}{2}(\pi-x)$. La première de ces nouvelles intégrales se trouvera dans le même cas que celle que nous venons de considérer, elle convergera donc vers la limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x+\varepsilon)$. Quant à la seconde, on peut la changer en celle-ci, en y remplaçant β par $\pi-\gamma$, γ étant une nouvelle variable:

$$\int_{\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(x+2\pi-2\gamma)\frac{\sin(2n+1)(\pi-\gamma)}{\sin(\pi-\gamma)}\partial\gamma,$$

ou ce qui revient au même, n étant un entier:

$$\int_{\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(x+2\pi-2\gamma)\frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\partial\gamma.$$

Elle a ainsi une forme analogue à celle de la précédente; en la décomposant comme elle en plusieurs autres, on verra qu'elle converge vers la limite zéro, le seul cas excepté, où $\frac{1}{2}(\pi+x)$ a une valeur nulle, c'est-à-dire lorsque $x=-\pi$; dans ce cas elle approche continuellement de la limite $\varphi(\pi-\varepsilon)$, ε ayant toujours la même signification. En résumant tout ce qui précède, on trouvera que la seconde des intégrales (10.) est nulle lorsque $x=\pi$, qu'elle converge vers la limite $\frac{\pi}{2}[\varphi(\pi-\varepsilon)+\varphi(-\pi+\varepsilon)]$ lorsque $x=-\pi$, et que dans tous les autres cas elle approche continuellement de la limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x+\varepsilon)$. La première des intégrales (9.) est entièrement analogue à la seconde; en y appliquant des considérations semblables, on trouvera qu'elle est nulle lorsque $x=-\pi$, qu'elle converge vers la limite $\frac{\pi}{2}[\varphi(\pi-\varepsilon)+\varphi(-\pi+\varepsilon)]$ lorsque $x=\pi$ et que dans tous les autres cas elle a pour limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x-\varepsilon)$. Connoissant ainsi les limites de chacune des intégrales (9.), il est facile de trouver la limite dont l'intégrale (8.) approche sans cesse, lorsque n devient de plus en plus grand; il suffit pour celà de se rappeler que cette intégrale est égale à la somme des intégrales (9.) divisée par π. Or, l'intégrale (8.) étant équivalente à la somme des $2n+1$ premiers termes de la série (7.), il est prouvé que cette série est convergente et l'on trouve au moyen des résultats précédens qu'elle est égale à $\frac{1}{2}[\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x-\varepsilon)]$ pour toute valeur de x comprise entre $-\pi$ et π, et que pour chacune des valeurs extrêmes π et $-\pi$, elle est égale à $\frac{1}{2}[\varphi(\pi-\varepsilon)+\varphi(-\pi+\varepsilon)]$.

L'exposé précédent embrasse tous les cas; il se simplifie lorsque la valeur de x qu'on considère n'est pas une de celles qui présentent une solution de continuité. En effet les quantités $\varphi(x+\varepsilon)$ et $\varphi(x-\varepsilon)$ étant alors l'une et l'autre équivalentes à $\varphi(x)$, on voit que la série a pour valeur $\varphi(x)$.

Les considérations précédentes prouvent d'une manière rigoureuse que, si la fonction $\varphi(x)$, dont toutes les valeurs sont supposées finies et déterminées, ne présente qu'un nombre fini de solutions de continuité entre les limites $-\pi$ et π, et si en outre elle n'a qu'un nombre déterminé de maxima et de minima entre ces mêmes limites, la série (7.), dont les coëfficiens sont des intégrales définies dépendantes de la fonction $\varphi(x)$ est convergente et a une valeur généralement exprimée par

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

$\frac{1}{2}[\varphi(x+\varepsilon)+\varphi(x-\varepsilon)]$, où ε désigne un nombre infiniment petit. Il nous resterait à considérer les cas où les suppositions que nous avons faites sur le nombre des solutions de continuité et sur celui des valeurs maxima et minima cessent d'avoir lieu. Ces cas singuliers peuvent être ramenés à ceux que nous venons de considérer. Il faut seulement pour que la série (8.) présente un sens lorsque les solutions de continuité sont en nombre infini, que la fonction $\varphi(x)$ remplisse la condition suivante.

Il est nécessaire qu'alors la fonction $\varphi(x)$ soit telle que, si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et π, on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s. On sentira facilement la nécessité de cette restriction en considérant que les différens termes de la série sont des intégrales définies et en remontant à la notion fondamentale des intégrales. On verra alors que l'intégrale d'une fonction ne signifie quelque chose qu'autant que la fonction satisfait à la condition précédemment énoncée. On aurait un exemple d'une fonction qui ne remplit pas cette condition, si l'on supposait $\varphi(x)$ égale à une constante déterminée c lorsque la variable x obtient une valeur rationnelle, et égale à une autre constante d, lorsque cette variable est irrationnelle. La fonction ainsi définie a des valeurs finies et déterminées pour toute valeur de x, et cependant on ne saurait la substituer dans la série, attendu que les différentes intégrales qui entrent dans cette série, perdroient toute signification dans ce cas. La restriction que je viens de préciser, et celle de ne pas devenir infinie, sont les seules auxquelle la fonction $\varphi(x)$ soit sujette et tous les cas qu'elles n'excluent pas peuvent être ramenés à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède. Mais la chose, pour être faite avec toute la clarté qu'on peut désirer exige quelques détails liés aux principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale et qui seront exposés dans une autre note, dans laquelle je m'occuperai aussi de quelques autres propriétés assez remarquables de la série (7.).

Berlin, Janvier 1829.

5 Les successeurs immédiats

Riemann (1826–1866), postulant à l'université de Gottingen, présente en 1854 deux mémoires qui ne seront publiés qu'après sa mort : le premier mémoire concerne les séries trigonométriques[4]. Ce mémoire comporte une partie historique de la question, une partie dans laquelle Riemann définit son intégrale (en lien avec les séries trigonométriques puisque les coefficients s'obtiennent par intégration) et une partie dans laquelle il étudie les fonctions exprimables comme somme de séries trigonométriques.

Le mémoire de Riemann a ouvert de nombreuses pistes (il semblerait que K. Weierstrass (1815–1897) pensait que Riemann avait conscience qu'il existe des fonctions continues sans dérivée). Le mémoire de Riemann, publié en 1867 de manière posthume par R. Dedekind (1831–1916), a eu une grande influence. En premier lieu sur Georg Cantor (1845–1918) dont les recherches dans les années 1870–72 sur les séries trigonométriques le menèrent à la théorie des ensembles.

[4]le second choisi par Gauss est *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004

En conclusion, en nous limitant aux travaux de la première moitié du XIX^e siècle, ne sont apparus que des problèmes de convergence et de représentation dans le cadre des mathématiques et des problèmes globaux dans le cadre de la physique. La recherche d'un cadre général pour la théorie des séries trigonométriques ainsi que d'autres préoccupations comme les équations intégrales ont conduit à l'analyse fonctionnelle et à la topologie générale. Du point de vue de la physique, l'approche de Fourier ne rendant pas compte des phénomènes de localisation, la théorie des ondelettes répond à cette demande.

6 Bibliographie

Bourbaki N., *Histoire des mathématiques*, Masson, 1984

Dieudonne J., *History of fonctional analysis*, north-holland, 1981

Dirichlet P. G., *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction entre des limites données*, in Journal de Crelle 4, 157-169.

Du Bois-Reymond P., *Untersuchung über die konvergenz und divergenz der Fourierschen darstellungsformeln.*

Kahane J. P., Lemarié-Rieusset P. G., *Séries de Fourier et ondelettes*, Cassini, 1998

Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford university press, 1972.

Israel G., *La mathématisation du réel*, Science ouverte, Seuil, 1996

Lebesgue H., *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1906

Riemann B., *Œuvres complètes*, trad. Laugel, Paris, Gauthier-Villars, 1898.

© Presses universitaires de Franche-Comté – Université de Franche-Comté – 2004