

LA RÈGLE NON GRADUÉE À DEUX BORDS

Bernard BETTINELLI

Sommaire

Introduction	15
La règle associée aux gabarits	16
La règle non graduée seule	19
Conclusion	32

Introduction

Après avoir conçu, commercialisé le matériel de la Moisson des Formes en 1994 et avoir fait des expérimentations à différents niveaux de l'École primaire, j'ai senti le besoin de compléter ce jeu de gabarits par un instrument qui puisse élargir le champ des possibilités offertes par ce matériel : une règle non graduée de largeur adaptée au matériel. La règle ou le double-décimètre est dans toutes les trousse, avec sa graduation en centimètres et millimètres, tellement prégnante qu'il est impensable de demander à des enfants d'en faire abstraction ; j'ai donc décidé de créer cette pièce supplémentaire dans la Moisson des Formes, différente de toutes les autres parce qu'elle n'est pas porteuse d'une forme mais du concept de droite.

Cette règle se différencie des autres par sa nudité (aucune graduation ne la borde), et des pièces de la Moisson par son aspect (transparent). Mais elle s'y associe par sa largeur, dimension qui lui permet de découper les figures pour en calculer l'aire et surtout de reconstruire **seule**, par dessin, toutes les pièces du jeu, grandeur nature, comme je le montre dans ce document.

En outre, de même que la règle et le compas ont justifié la construction pyramidale des Éléments d'Euclide sur la base de ses postulats, la construction instrumentale de la géométrie métrique du Collège avec la règle à deux bords, seule, permet de mettre en application ses éléments spécifiques (médiatrice, bissectrice, perpendiculaire et parallèle) et de faire comprendre ses démonstrations fondamentales — en particulier le théorème de Thalès.

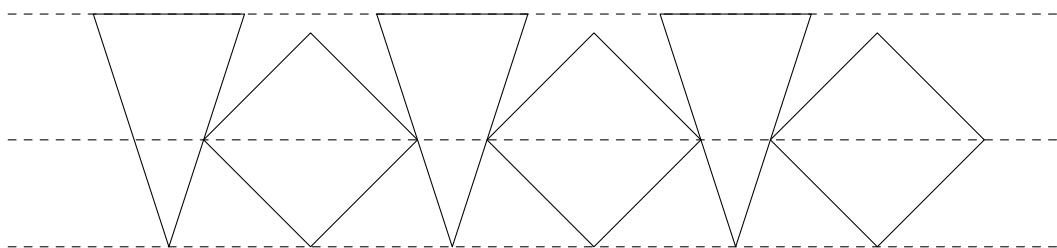
La règle associée aux gabarits

1. La règle non graduée et les alignements

Alignements de pièces ; frises

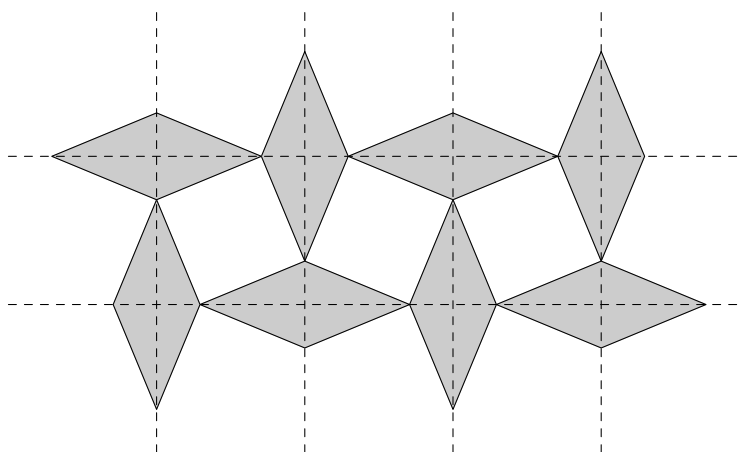
Le premier usage de la règle, avant même qu'elle soit associée au crayon, est d'aligner correctement plusieurs pièces sur une base commune.

Par le dessin, ce besoin d'aligner se fait encore plus pressant. Pour réaliser une frise, par exemple, il est nécessaire d'aligner dans certains cas une base, mais dans d'autres plusieurs lignes parallèles, comme dans l'exemple ci-dessous, inventé par un enfant de 8 ans, où il a tracé 2 droites parallèles, distantes de la hauteur d'un triangle d'or, puis une troisième pour que les carrés aient une diagonale horizontale et soient posés sur la même base que les triangles :



Pavages

Le plus souvent, les pavages sont réalisés par accollement des pièces qui le constituent. Mais on peut inventer un pavage mêlant une pièce gabarit et un trou de forme fixe n'existant pas dans les pièces du jeu. Dans ce cas, pour que les trous restent superposables, il est important de ne pas placer le gabarit au jugé. Par exemple, on fait un beau pavage avec un losange répété en alignant par alternance ses diagonales dans 2 directions perpendiculaires :



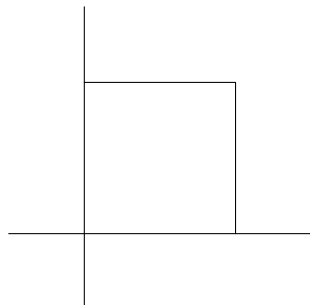
2. La règle non graduée et le dessin géométrique

Étoiles ; figures inscrites et circonscrites

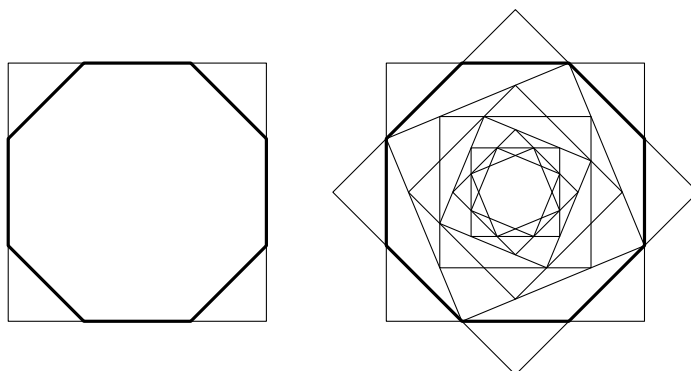
Avec une règle, on peut joindre 2 points par un segment. Ce qui permet de dessiner une figure avec une pièce-gabarit, puis d'en relier les sommets de façon à créer une figure inscrite ou une étoile.

On peut aussi, à l'inverse, prolonger un côté, ou plusieurs. Un octogone régulier permet ainsi de dessiner un carré circonscrit en prolongeant un côté sur deux.

C'est ainsi qu'on se saisit de n'importe quelle pièce dans laquelle on a reconnu un angle droit : carré, rectangle, quart de disque, triangle rectangle et qu'on prolonge à la règle 2 côtés consécutifs pour créer 2 droites perpendiculaires.



Si on propose de dessiner une configuration complexe à l'aide d'une seule pièce-gabarit, on sent très vite que la règle est l'accessoire essentiel de cette activité. Voici par exemple un grand carré fait avec l'octogone en prolongeant un côté sur deux. Ce qui ouvre la porte à des extensions infinies : 2 carrés autour de l'octogone permettent un nouvel octogone extérieur et on peut recommencer... 2 carrés dans l'octogone permettent un nouvel octogone intérieur et on peut recommencer... (invention d'un enfant de CM1).



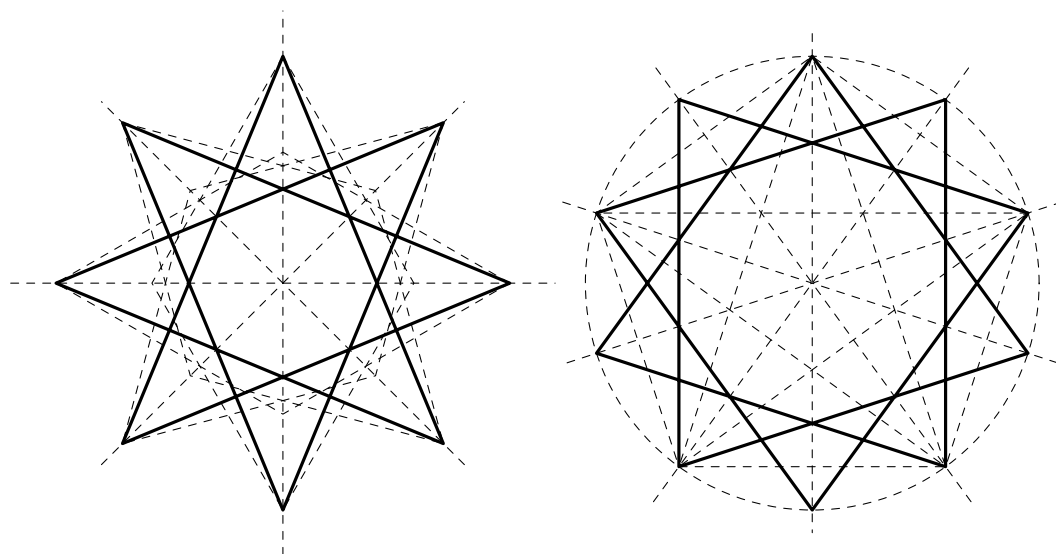
Lignes remarquables

Les lignes remarquables des figures : médiatrices des segments, bissectrices des angles, médianes ou hauteurs des triangles, ... sont autant d'occasions de se saisir de la règle.

Le support des lignes remarquables est important pour la recherche de points d'intersection. Voici 2 exemples complexes :

Le premier consiste à chercher à inscrire un carré dans un losange-gabarit quelconque. Le losange étant dessiné, ses diagonales sont tracées et prises comme support de la seconde position du losange par échange des diagonales. Les 4 points d'intersection des côtés forment un carré inscrit. Les diagonales du carré inscrit servent de support à 2 nouvelles positions du losange et l'ensemble offre 3 possibilités d'octogones réguliers qui servent de points de base à une étoile à 8 branches.

Le second part du pentagone régulier. Comme le nombre des sommets est impair, on ne peut tracer directement ses axes de symétrie. En traçant l'étoile inscrite, on les obtient, ainsi que le centre. Le cercle circonscrit coupe les axes en 10 points d'un décagone régulier qui servent de points de base à la construction de l'étoile à 10 branches.

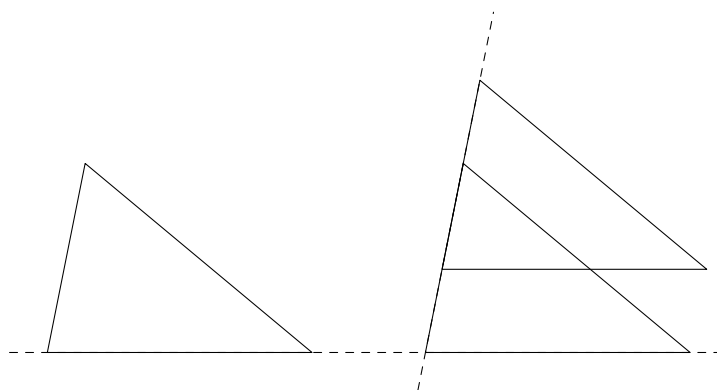


3. La règle non graduée et les transformations

Nous allons voir que la règle sert à la construction des parallèles, des translations et homothéties.

Translation d'une pièce

Le problème est de faire glisser une pièce sans la faire tourner. Un moyen simple consiste à dessiner le contour de la pièce, à poser la règle sur un côté, et à glisser la pièce vers une autre position. En général on impose une position d'arrivée à un point particulier de la pièce. Dans ce cas, il faut jouer avec 2 ou plusieurs glissements successifs du type précédent :

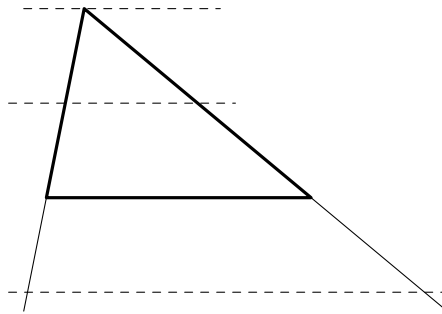


Homothétie d'une pièce

On peut reprendre l'observation faite plus haut : en posant la règle sur un triangle, un bord sur un côté, elle découpe un triangle homothétique mais plus petit. Et ceci est propre aux triangles.

À l'inverse, on peut ajouter une bande autour d'une pièce, sur 1, 2, ou plusieurs côtés, et observer dans quels cas la figure agrandie est homothétique de la pièce. La combinaison permet de graduer 2 côtés d'un triangle et de mettre en acte le théorème de Thalès. Et en particulier le fait que la parallèle à un côté d'un triangle passant par le milieu d'un

deuxième côté passe aussi par le milieu du troisième côté, et réciproquement, que la droite qui passe par les milieux de 2 côtés d'un triangle est parallèle au troisième (théorème des milieux).

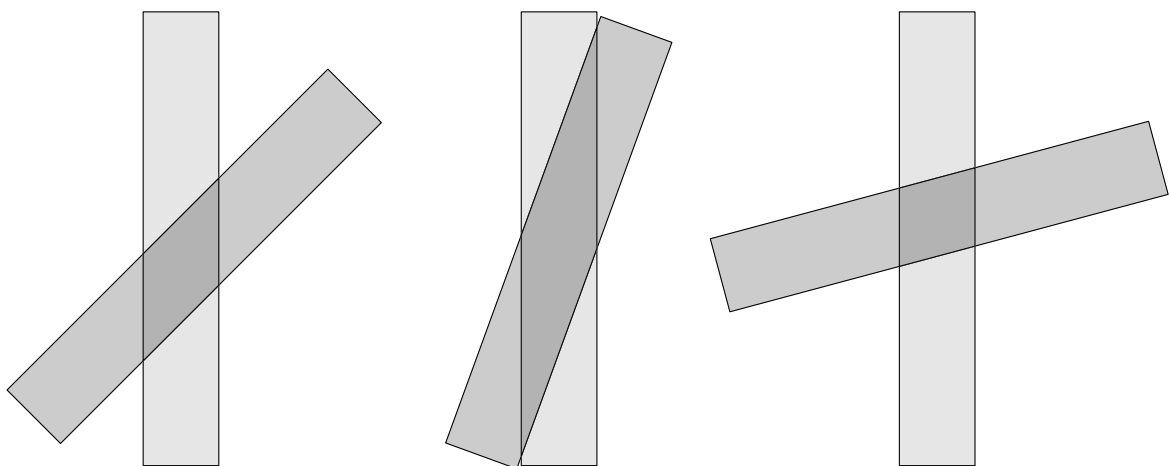


La règle non graduée seule

L'ultime défi proposé par la règle est de ne plus servir d'auxiliaire aux pièces-figures du jeu, mais de jouer un « one man's show » et de se proposer comme unique instrument. Et les possibilités qu'on découvre sont étonnantes ; elles vont exploiter simultanément la possibilité de chaque bord de tracer des traits droits et l'écartement fixe de la règle que j'appellerai ∂ pour les explications proposées.

1. Croisements de bandes et losanges

La première observation à faire, pour tirer parti de la règle seule, est que chaque fois que 2 bandes dessinées avec les 2 bords de la règle — donc de même largeur — se croisent, l'intersection est nécessairement un losange. En effet, l'aire du parallélogramme intersection est le produit de sa base par sa hauteur, et on peut choisir la base parmi l'un des couples de côtés parallèles ou l'autre. Dans tous les cas, la hauteur est ∂ et l'aire est indépendante du calcul : donc la base est toujours de même longueur.



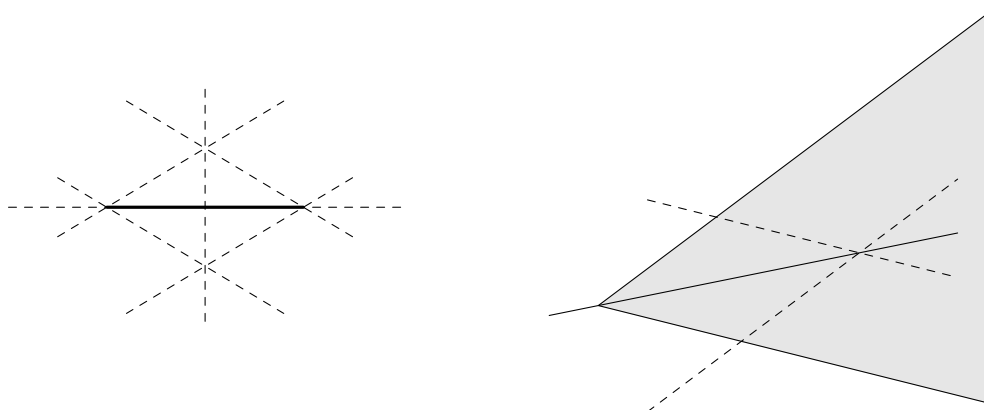
Dans la suite, le recours à 2 parallèles obtenues en traçant les 2 bords de la règle dans une position donnée sera constant, et chaque fois qu'il sera question de bandes, elles seront obtenues par ce moyen.

2. Losanges adaptés à un segment ou à un secteur

Les losanges ont de grandes qualités, et la possibilité de créer une infinité de losanges, chacun adapté à une situation rencontrée, est la clé du pouvoir de la règle.

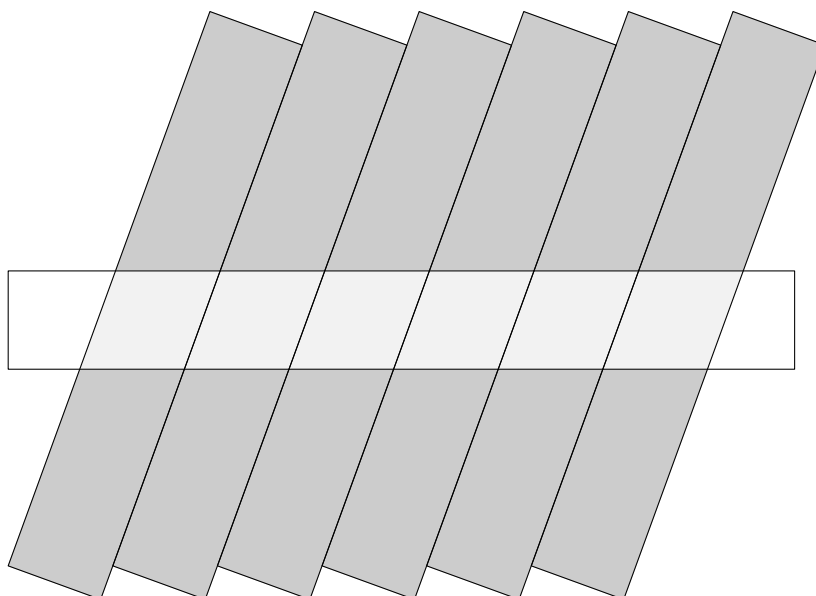
En premier lieu, tout segment donné, de longueur supérieure à ∂ , est diagonale d'un losange obtenu en trouvant les 2 seules positions de la règle, entre ses 2 extrémités, chacune passant par un bord. L'autre diagonale — facile à dessiner à la règle — donne la médiatrice du segment et son milieu.

En second lieu, dans un secteur angulaire donné, il est facile de créer un losange en plaçant la règle successivement contre les 2 bords et à l'intérieur du secteur. Et une de ses diagonales est bissectrice intérieure du secteur.

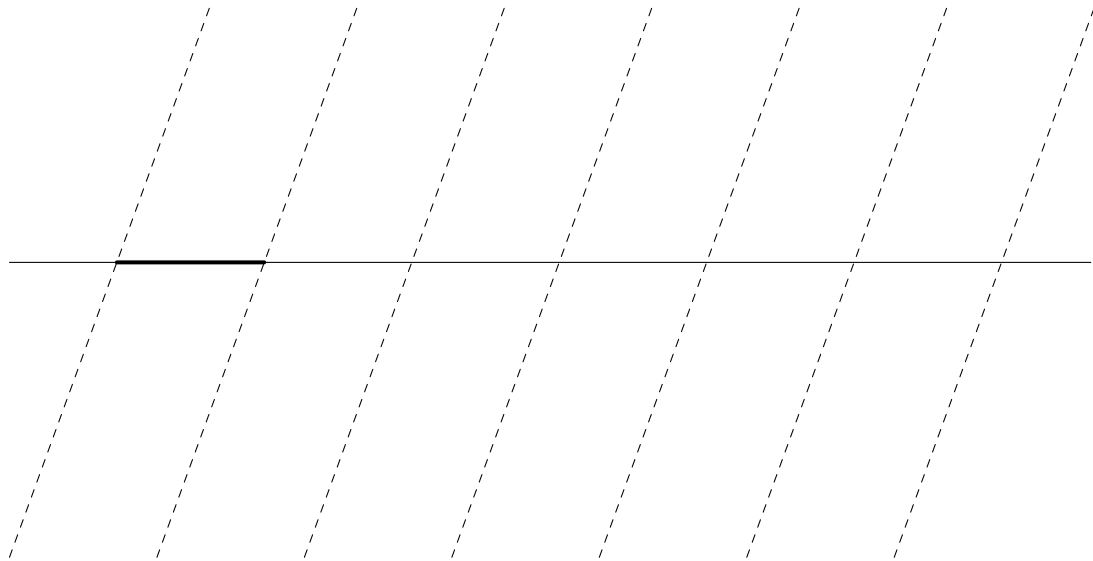


3. Reports de longueur sur une droite

La deuxième observation concerne les séries de bandes parallèles (de largeur ∂) : toute série de ce type est coupée par une bande de même largeur suivant un « train » de losanges isométriques. En effet, ces losanges ont deux à deux un côté commun — donc tous leurs côtés ont même longueur — et les mêmes angles — par parallélisme.



De nombreuses conséquences sont à tirer de cette observation. En particulier, un segment donné, de longueur supérieure à ∂ , peut être « reporté » ou multiplié à l'aide d'une série de bandes accolées dont la première passe par ses extrémités, comme ci-dessous.

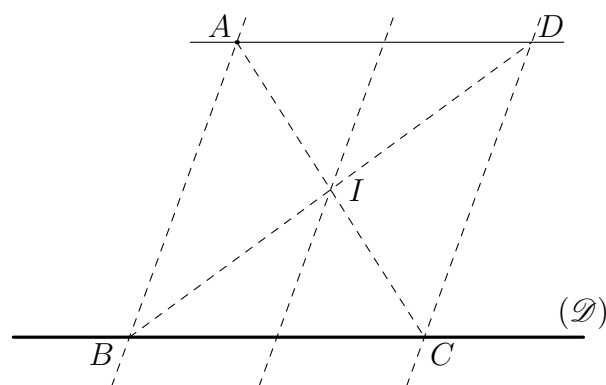


On peut aussi construire le symétrique d'un point par rapport à un centre, ce qui est équivalent à un report.

4. Parallèles

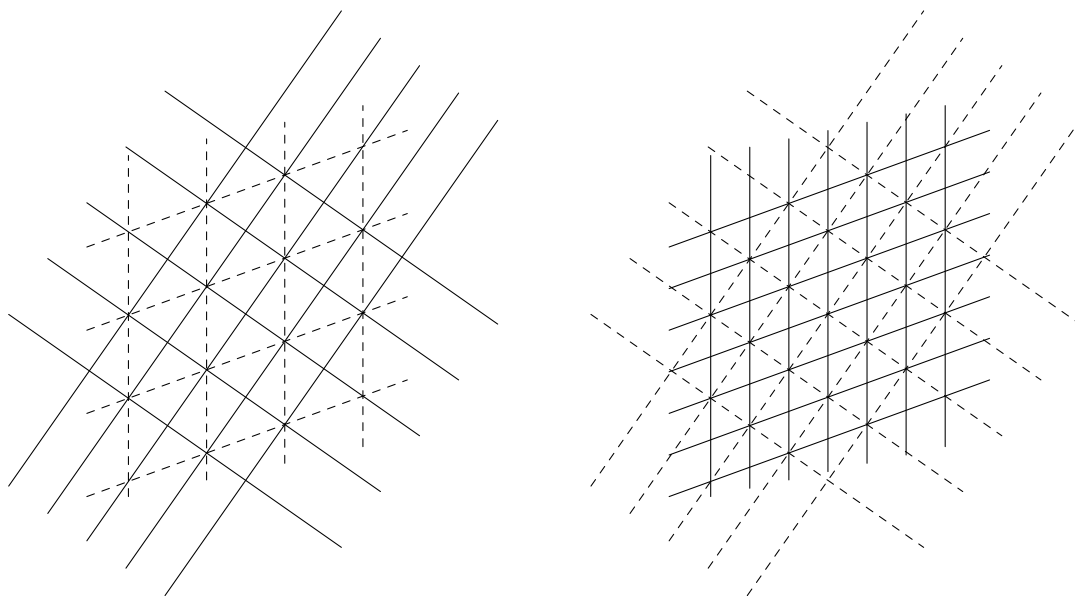
Pour tracer la parallèle à $(\mathcal{D})$ passant par A , on peut couper $(\mathcal{D})$ par 2 bandes dont une « passe par A ». L'intersection I de (AC) avec la parallèle médiane est le milieu de $[AC]$. (BI) coupe la troisième parallèle en D et I est aussi milieu de $[BD]$ et, donc, $ABCD$ est un parallélogramme.

(AD) est la parallèle à $(\mathcal{D})$ passant par A .

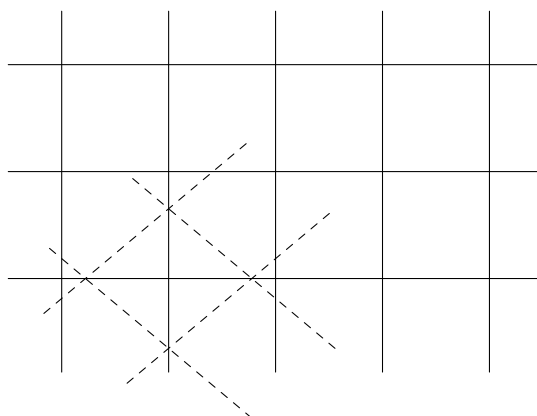


5. Réseaux de losanges, de rectangles, de carrés

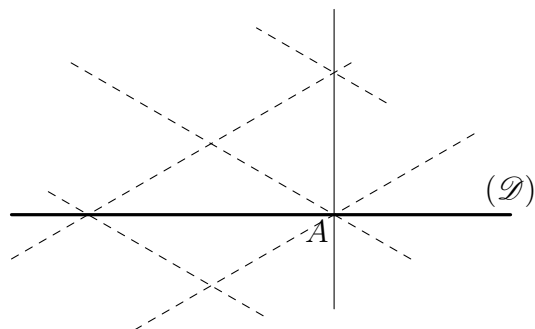
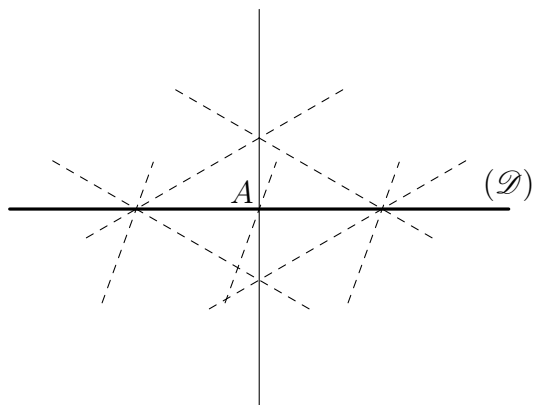
De même qu'on peut faire une série de parallèles, on peut en faire dans 2 directions, et créer ainsi un réseau de losanges. En traçant les diagonales, on obtient un réseau de rectangles. Et on peut créer des réseaux de mailles plus fines aux réseaux précédents grâce aux intersections des diagonales.



En combinant les deux observations, on crée facilement un quadrillage de maille ∂ . Il suffit de dessiner un losange quelconque (observation 1) et ses diagonales pour obtenir deux droites perpendiculaires. Puis en accolant la règle plusieurs fois à ces deux droites, on obtient le quadrillage (observation 2). Ce quadrillage, base de nombreuses constructions, sera désigné par Q .

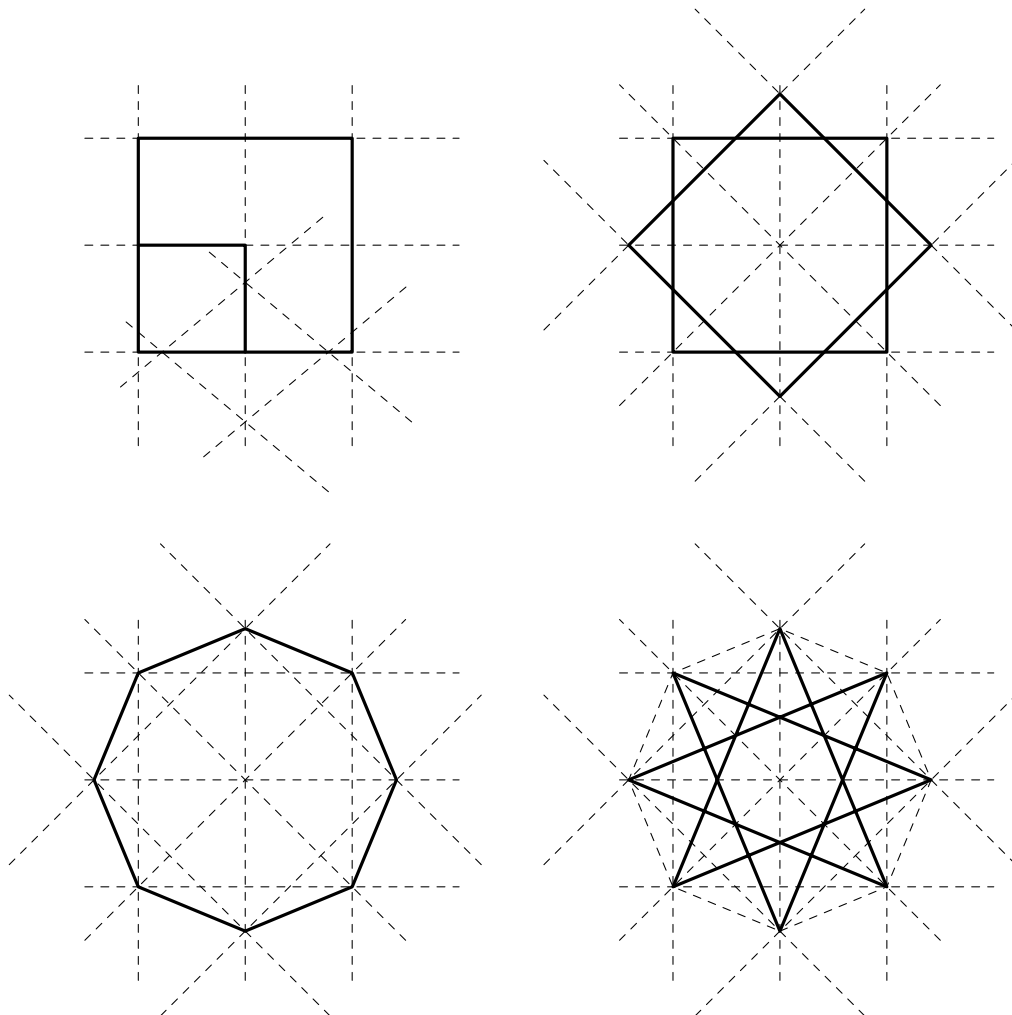


Mener la perpendiculaire à une droite passant par un point de cette droite constitue une autre application des réseaux d'auxiliaires de losanges et de rectangles imbriqués (mais on peut aussi l'obtenir comme médiatrice d'un segment porté par la droite et de milieu le point).

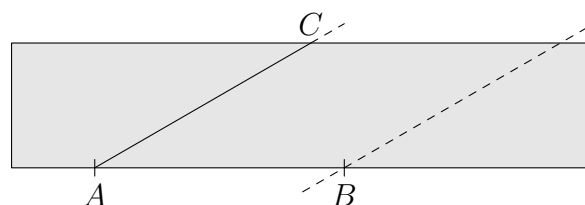


6. Figures remarquables

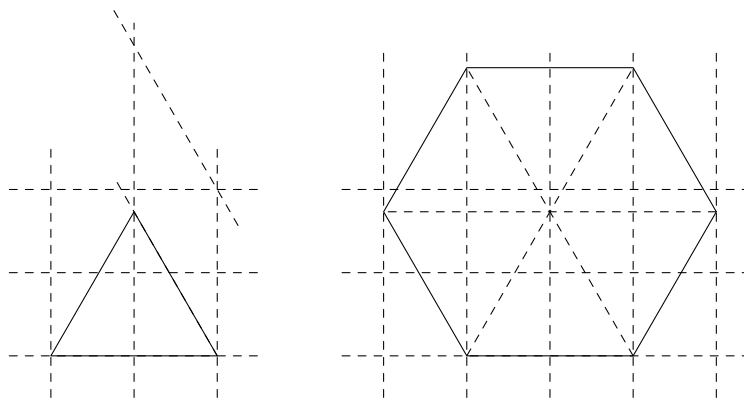
Étant capables de construire des parallèles et des angles droits, nous sommes en mesure de construire tout parallélogramme, rectangle, losange et carré avec la règle seule. À partir d'un carré, en traçant ses diagonales, on construit deux carrés imbriqués, un octogone régulier ou une étoile régulière à 8 branches.



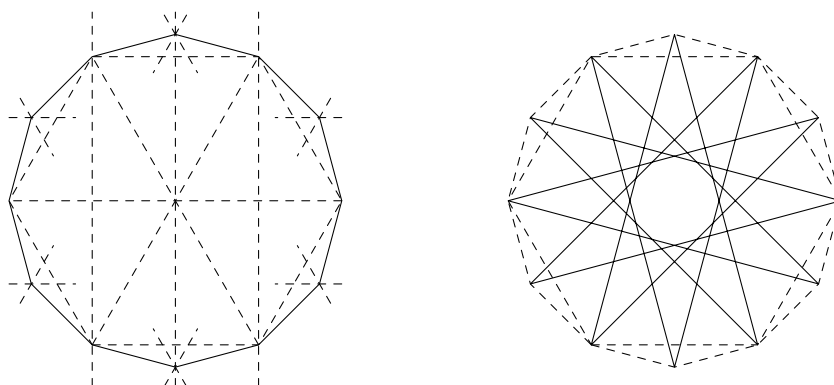
La troisième observation permet de rabattre un segment sur l'autre bord de la règle. Précisément, si $[AB]$ est donné (de longueur supérieure à ∂ !), on construit C sur l'autre bord de la règle placée le long de (AB) tel que : $AC = AB$.



On utilise cela pour construire un triangle équilatéral de côté multiple de ∂ . On part d'un carré de côté $2.\partial$ et on rabat un de ses côtés sur la médiane parallèle au côté. On en déduit la construction d'un hexagone régulier ou d'un réseau isométrique (formé de triangles équilatéraux) à partir du quadrillage Q .



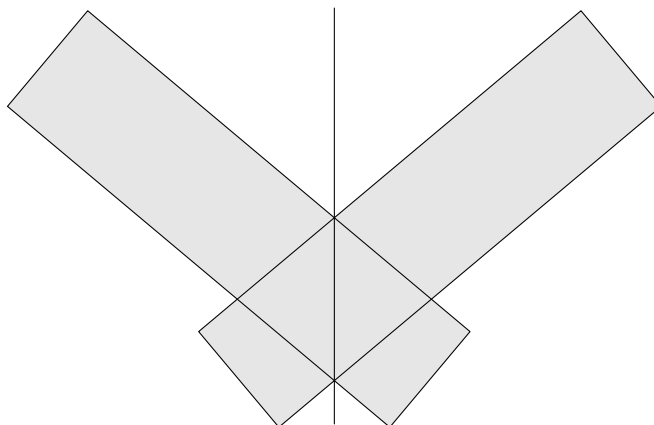
Partant de l'hexagone régulier, on peut encore doubler rapidement le nombre de ses côtés et obtenir ainsi un dodécagone régulier ou une étoile à 12 branches (on obtient les nouveaux sommets en plaçant la règle le long des bords de chaque secteur central de l'hexagone).



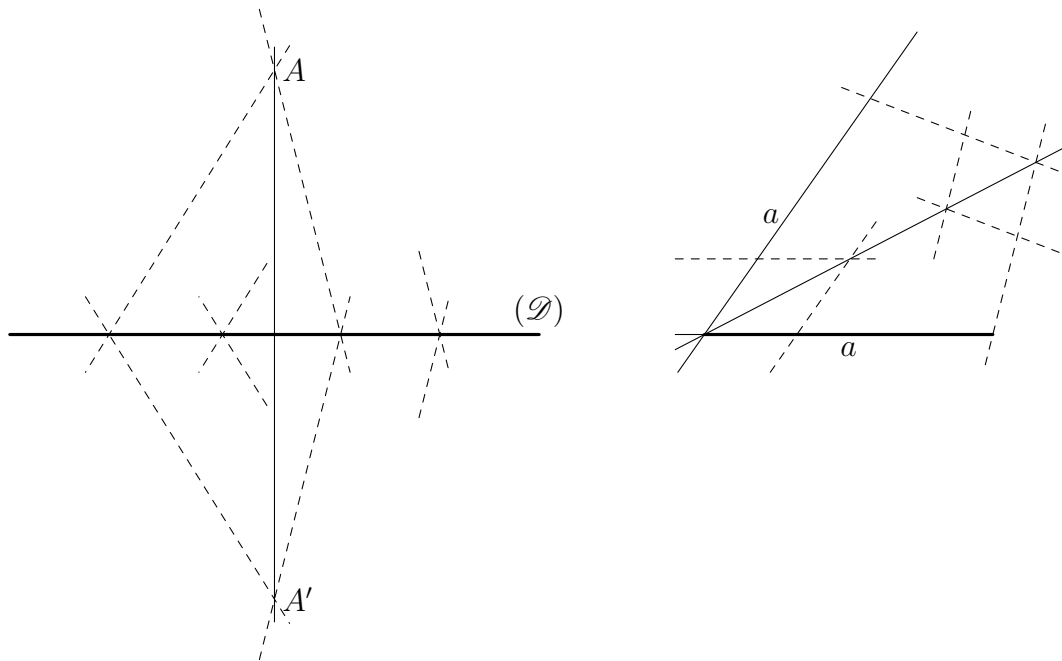
La figure classique la plus difficile à construire — même avec une règle et un compas — est sans conteste le pentagone régulier. Son cas sera envisagé à part dans un prochain paragraphe.

7. Réflexion

La quatrième observation exploite les symétries propres aux losanges.

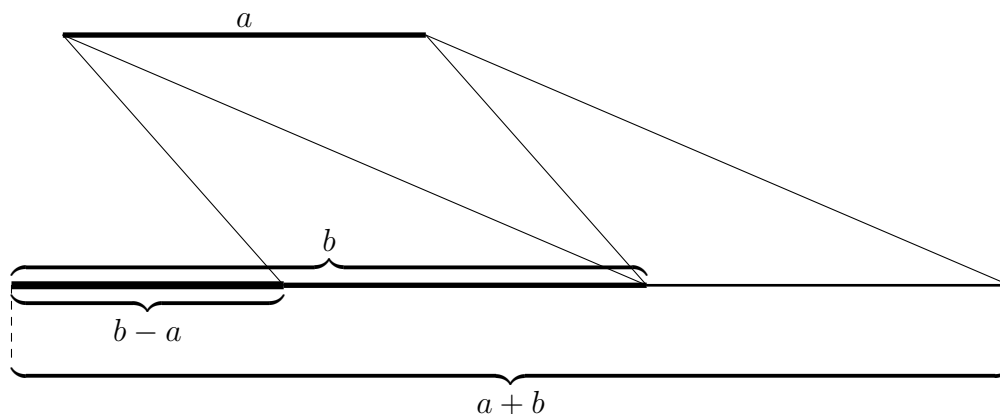


On peut ainsi construire la droite symétrique d'une droite ou le point symétrique d'un point (vu comme intersection de deux droites) par rapport à un axe.



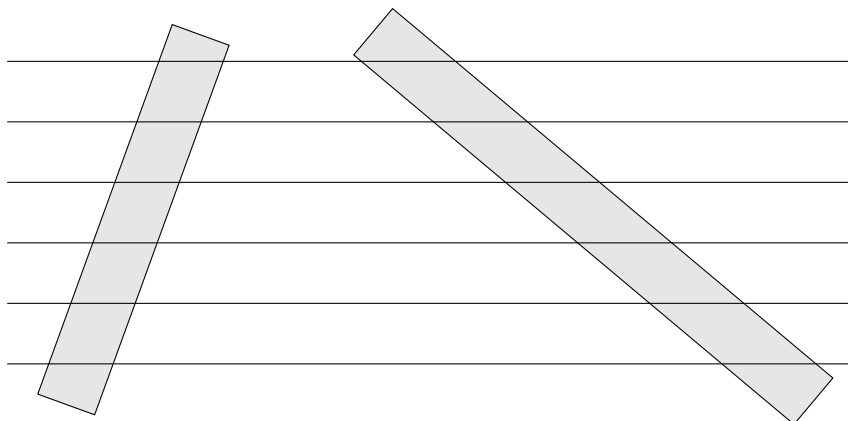
Ce qui fournit la construction de la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné (hors de la droite) ainsi que le report d'un segment sur l'autre bord d'un secteur.

Cette dernière liberté combinée avec la capacité de tracer des parallèles, permet de déplacer un segment en tout point du plan et dans toutes les directions. Ce qui permet donc de construire la somme et la différence de 2 longueurs.



8. Parallèles équidistantes et théorème de Thalès

Une des plus belles applications des « trains de losanges » (observation 2) sert de base au théorème de Thalès.



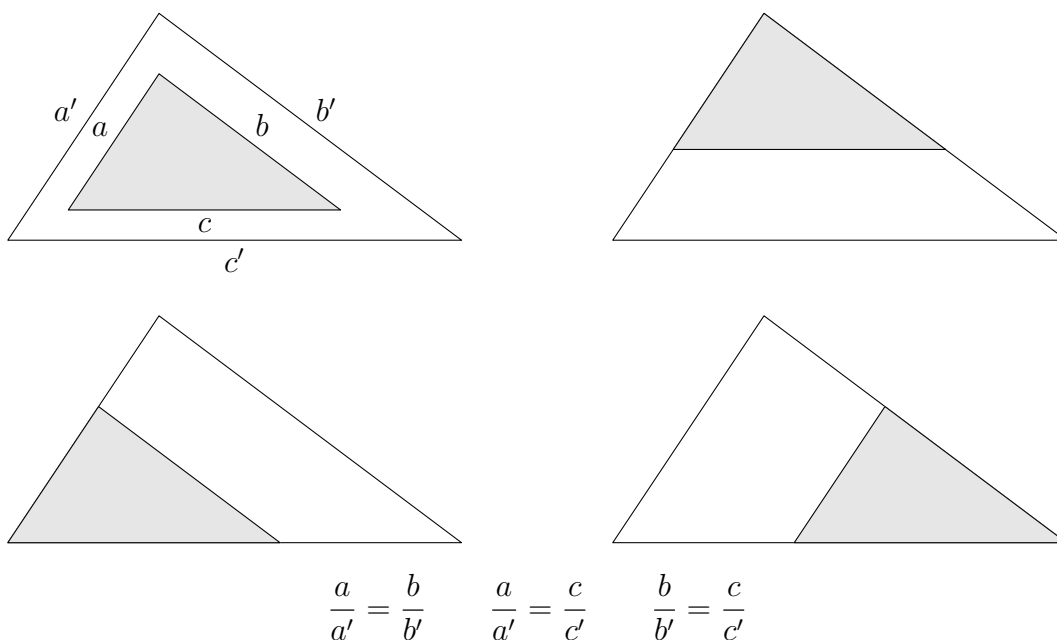
Elle peut se formuler ainsi : si une famille de parallèles découpe sur une sécante des segments de même longueur, alors elles sont équidistantes et découpent sur toute autre sécante des segments de même longueur.

La preuve se fait en deux temps :

1. Une famille de parallèles équidistantes découpe sur toute sécante des segments de même longueur. Il suffit de construire la famille avec la règle puis de placer la règle le long de la sécante. On obtient un « train de losanges » donc tous les segments ont même longueur.
2. Si une famille de parallèles découpe sur une sécante des segments de même longueur, alors elles sont équidistantes. La règle, de même largeur que la première bande, découpe un « train de parallélogrammes » dont le premier est un losange ; donc ce sont tous des losanges isométriques et ils ont même hauteur.

Le théorème de Thalès — dans sa version rationnelle — s'en déduit aisément.

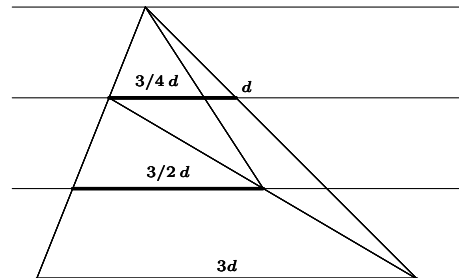
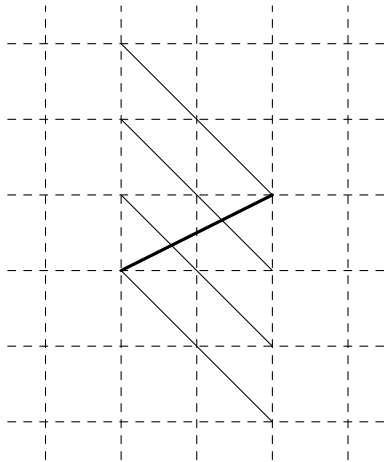
L'application aux triangles à côtés parallèles se montre à l'aide d'un gabarit du « petit triangle » qui peut prendre 3 positions dans les secteurs du « grand » qui correspondent à 3 configurations de Thalès. Pour que les rapports de Thalès soient conservés dans les translations du « petit triangle » et soient associés aux triangles — et non aux points — il suffit de les exprimer par les longueurs des côtés des triangles.



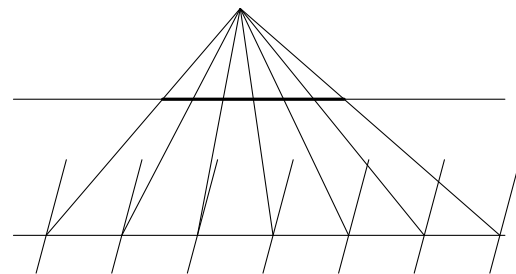
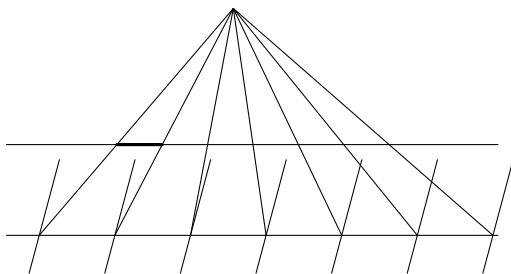
(2 positions suffisent, bien sûr !)

9. Applications du théorème de Thalès

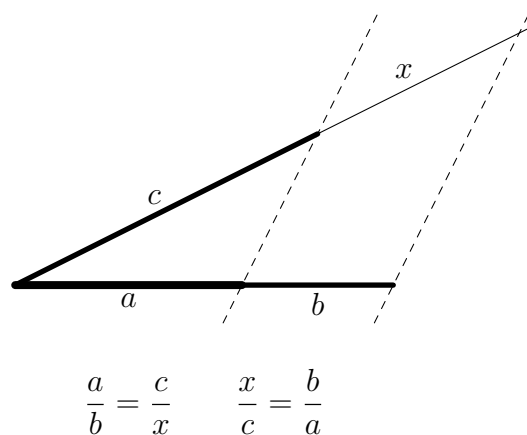
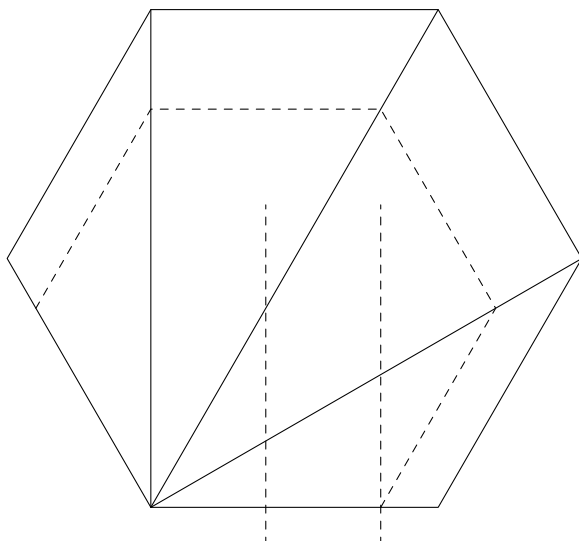
À partir de n bandes accolées, on peut partager ou multiplier n'importe quel segment.



On peut plus simplement construire une bande accolée au segment et multiplier un segment arbitraire sur l'autre bord. Ce dernier procédé permet de multiplier et diviser un segment de longueur inférieure à ∂ , d'en marquer le milieu et tracer la médiatrice.

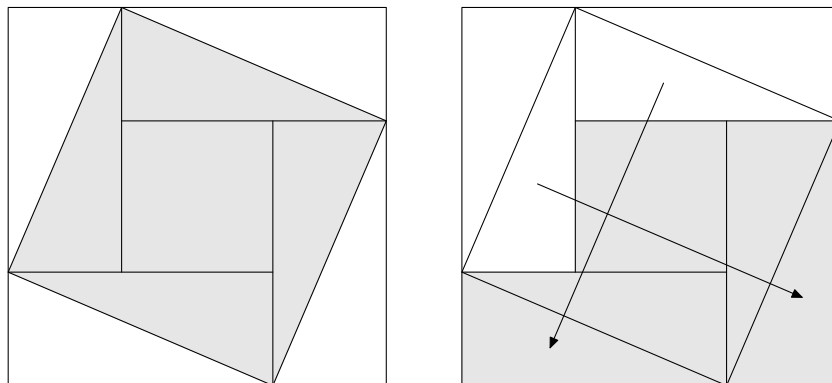


Enfin, le théorème de Thalès permet de construire des polygones de toute taille à partir de ceux que nous avons construits; ainsi que la quatrième proportionnelle à 3 longueurs données.



10. Quadrillages, aires, longueurs et trigonométrie élémentaire

La règle n'apporte aucune contribution à la compréhension du théorème de Pythagore. Les très nombreuses démonstrations de ce théorème que l'Histoire nous a laissées se fondent sur une propriété de conservation d'aire des rectangles : 4 exemplaires de tout rectangle peuvent être disposés en carré, images les uns des autres par rotation d'un quart de tour. On forme le carré (géométrique) de leurs diagonales dont l'aire peut être découpée en 5 pièces par le contour des rectangles. Le glissement de 2 pièces triangulaires permet de former la réunion des carrés des 2 dimensions du rectangle.

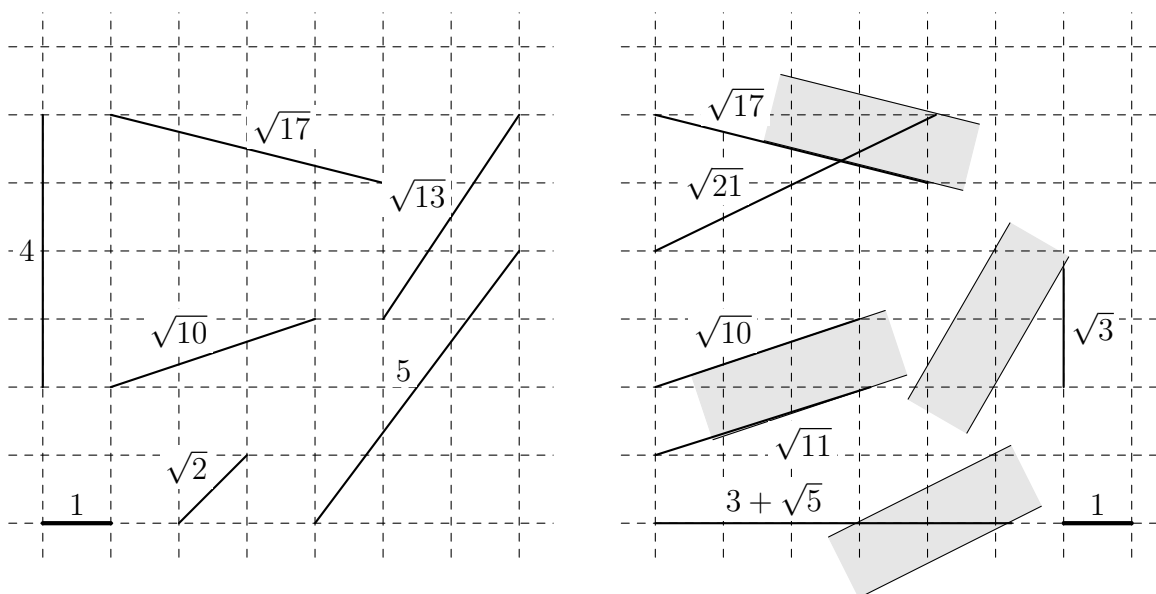


Le carré de la diagonale de tout rectangle a même aire que la réunion des carrés de ses 2 dimensions.

Appliquez cela au triangle demi-rectangle : théorème de Pythagore !

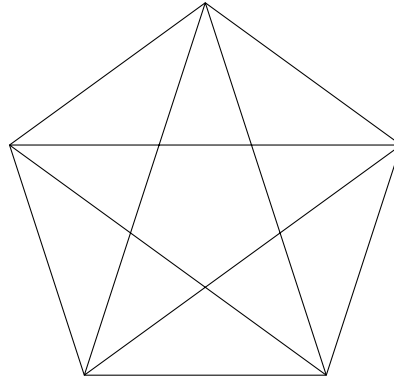
Mais la règle reprend du service pour exercer ce grand théorème. Le cadre est le quadrillage Q . ∂ étant l'unité de longueur, on peut mesurer l'aire de tout polygone dont les sommets sont des nœuds de Q par un nombre $\frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Par contre la longueur des segments d'extrémités des nœuds de Q ne s'exprime pas en général par des nombres rationnels. On peut, sur tout quadrillage construire des segments de longueur : $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{13}$... Mais la règle et son quadrillage Q permettent, par rabattement, de construire toute longueur de la forme $n + \sqrt{p} + \sqrt{q}$, $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$.



11. Le pentagone régulier

Il est nécessaire d'avoir repéré la proportion très particulière qui caractérise le pentagone régulier et que les artistes ont appelé proportion harmonique et Ghyka : nombre d'or. C'est le rapport de la diagonale d au côté c de tout pentagone régulier et sa valeur (exacte) est : $\frac{d}{c} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

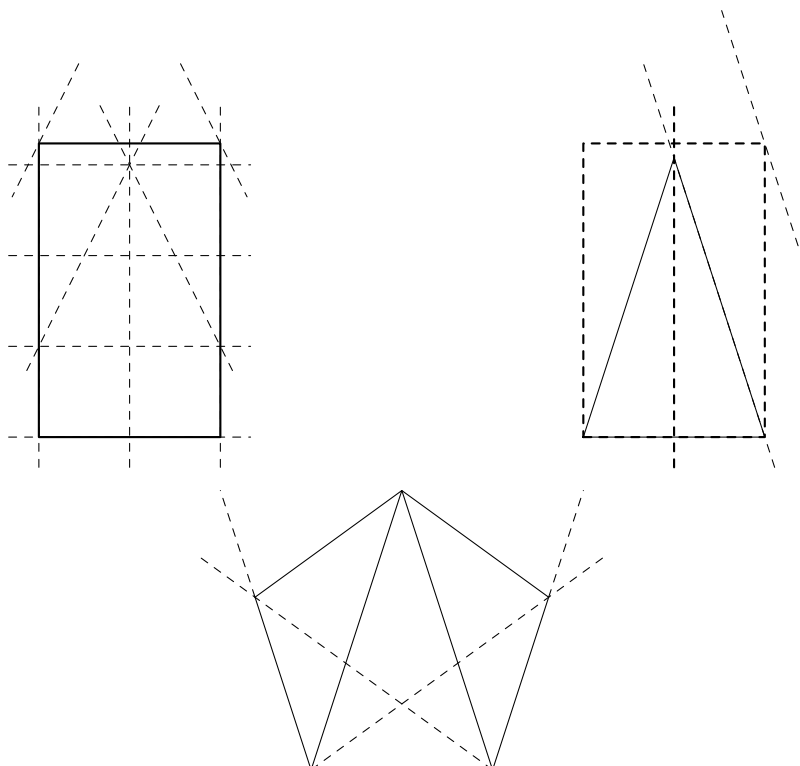


On appelle triangle d'or celui qui s'inscrit au centre du pentagone et rectangle d'or, un rectangle de dimensions d et c .

On construit d'abord un rectangle d'or de dimensions : 2∂ et $(1 + \sqrt{5})\partial$ (comme à la règle et au compas) à partir du quadrillage Q. Le triangle d'or s'en déduit par rabattement de sa longueur sur la médiane.

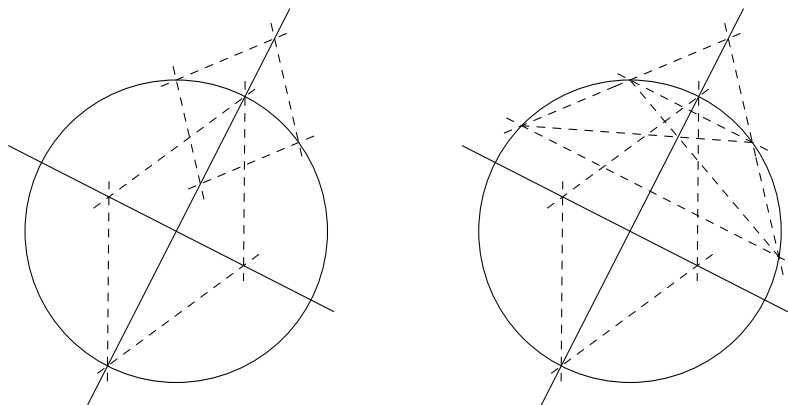
Trois sommets du pentagone sont en place. Pour les 2 derniers, plusieurs solutions se présentent. En particulier :

- ils sont chacun sur la bissectrice intérieure des secteurs de base du triangle d'or,
- ils sont chacun sur un côté parallèle à l'autre bissectrice.



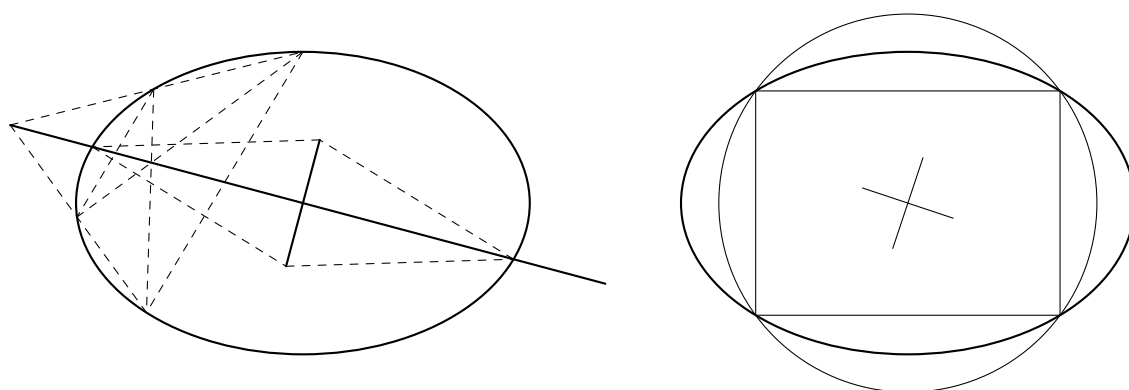
12. Centre d'un cercle ou d'une ellipse

Voici 2 constructions du centre d'un cercle donné :



1. À partir de 2 points du cercle, on construit un losange dont une diagonale est une corde. L'autre passe par le centre et donne un diamètre dont on trouve le milieu.
2. On peut aussi créer un trapèze isocèle en coupant le cercle par une bande. Son axe de symétrie donne un diamètre dont on trouve le milieu.

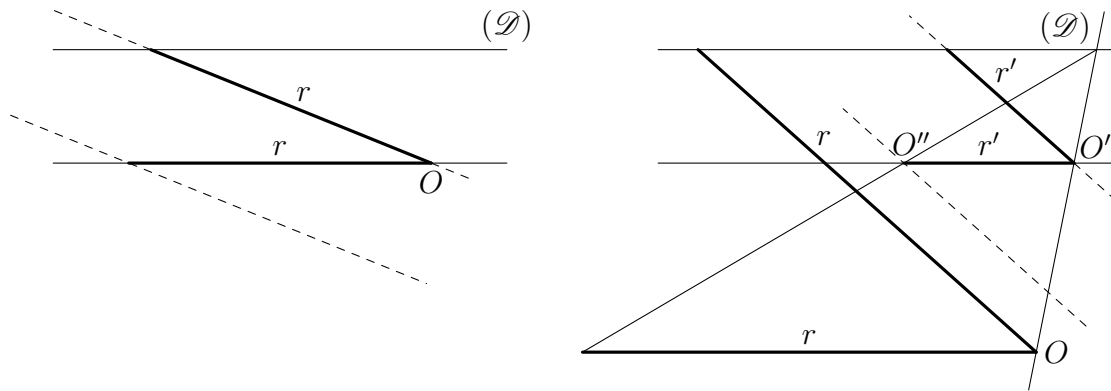
La seconde méthode pour tracer un diamètre du cercle se transpose par affinité pour donner un diamètre de l'ellipse dont on trace le milieu (si on veut aussi ses axes, il faut recourir au compas : on trace un cercle de même centre qui la coupe en 4 points formant un rectangle. Il n'y a plus qu'à tracer les axes de ce rectangle!).



13. Intersection d'une droite et d'un cercle

L'observation 3, qui nous a souvent servi dans les constructions précédentes à faire des rabattements, peut se voir comme construction de l'intersection d'une droite et d'un cercle (non tracé!) de rayon r ($r > \partial$) dont le centre O est à la distance ∂ de celle-ci.

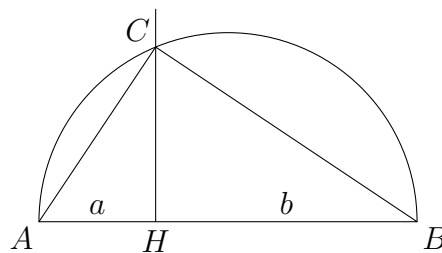
Le cas général se ramène à ce cas particulier. En supposant qu'on a placé un rayon r parallèlement à $(\mathcal{D})$, on part d'un point quelconque de $(\mathcal{D})$ comme centre d'homothétie. Le point O est transformé en O' , le rayon r en r' et le rabattement de r' sur $(\mathcal{D})$ fournit une intersection de $(\mathcal{D})$ et de $\mathcal{C}(O' ; r')$ — lorsqu'elle existe. La parallèle au rayon rabattu r' passant par O fournit alors le rabattement du rayon r (grâce au théorème de Thalès) et une intersection de $(\mathcal{D})$ et de $\mathcal{C}(O ; r)$. ($r > d'(O ; \mathcal{D})$). La seconde intersection s'obtient, soit en utilisant le rayon symétrique de r' par rapport à O' , soit en rabattant r' à partir de son autre extrémité O'' et en transformant par l'homothétie centrée sur $(\mathcal{D})$ telle que l'image de O'' soit O .



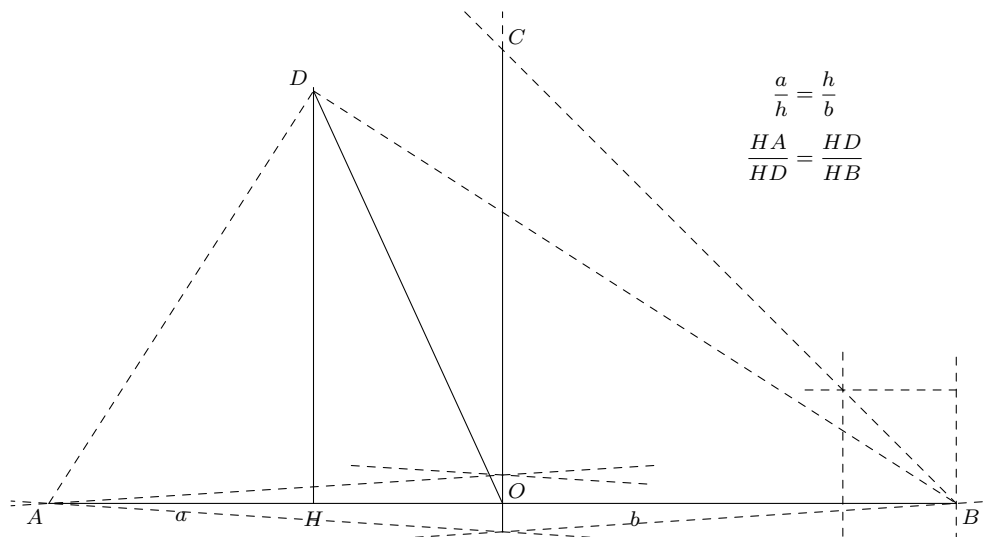
14. Moyenne géométrique

La face numérique de ce problème consiste à trouver, 2 nombres a et b étant donnés, un nombre x tel que : $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. La face géométrique consiste à construire un carré de côté x de même aire que le rectangle de dimensions a et b .

La solution d'Euclide à la règle et au compas est un incontournable et nous allons la copier ($HA = a$; $HB = b$; $HC = x$).



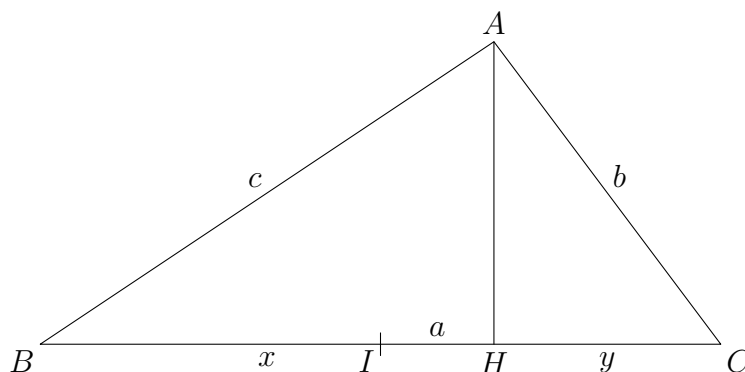
On commence par faire un segment $[AB]$ de longueur $a + b$; puis on construit son milieu O . La longueur OB est placée sur la perpendiculaire à (AB) passant par O en OC . On trace la perpendiculaire à (AB) passant par H puis on rabat le rayon $[OC]$ en $[OD]$ par la méthode précédente. HD est la moyenne géométrique de $HA = a$ et $HB = b$.



15. Intersection de deux cercles

Le dernier problème — et non le moindre ! — consiste à construire à la règle l'intersection de 2 cercles (non tracés !) ; ou ce qui est équivalent, construire un triangle de côtés a, b, c donnés, vérifiant l'inégalité triangulaire.

Il est clair que, comme les 2 problèmes précédents, celui-ci représente un défi pour l'imagination, intéressant en tant que tel ; mais que personne ne sera tenté de prendre une règle non graduée pour construire laborieusement ce qui peut être fait en 2 traits de compas !



Analysons la situation ($a = BC$; $b = CA$; $c = AB$; $b < c$; I milieu de $[BC]$; $(AH) \perp (BC)$; $h = AH$; $x = BH$; $y = HC$).

Par la seconde formule de la moyenne ou le théorème de Pythagore appliqué à AHB et AHC , on obtient une égalité qu'on peut transformer en proportion :

$$c^2 - b^2 = a(x - y) \iff \frac{IH}{c - b} = \frac{b + c}{2a}$$

La méthode (théorique) consiste à placer d'abord H par rapport à I en construisant IH comme quatrième proportionnelle à $(c - b)$, $(b + c)$ et $2a$; puis à déterminer l'intersection de la droite perpendiculaire à (BC) passant par H avec le cercle de centre C et rayon b (ou B et rayon c) ; ce qui donne la position du point A .

Conclusion

Ce travail — mis à part les derniers problèmes — a été proposé en 1998 dans les documents d'accompagnement de « La Moisson des Formes » pour le Collège. Il me paraît instructif, non pour remplacer les instruments classiques dans les constructions qui ont fait leur preuve depuis fort longtemps, mais pour comprendre en situation les raisonnements fondamentaux de la géométrie. En particulier, l'utilisation adaptée des caractéristiques des losanges (côtés de même longueur ; perpendicularité des diagonales ; symétries), des parallélogrammes, la mise en œuvre des translations et des homothéties, cette présentation limpide du théorème de Thalès qui mérite à elle seule d'accorder de l'intérêt à cet instrument et les applications du théorème de Pythagore qui mettent en exercice le concept difficile de radical.

J'ai pris connaissance, dernièrement, du travail de D. Berthe et B. Cazier (Repères-IREM n° 40) sur le même sujet ; mais les constructions et raisonnements proposés sont différents (à part sur quelques incontournables comme la construction d'une parallèle) et les deux articles ne font pas double emploi.