De la sphère au plan

Groupe-lycée de l'IREM :
Françoise De LABACHELERIE
Chantal GEOFFROY
Michel MAGNENET
Alain PARMENTELAT

Sommaire

1 Présentation

Le programme de mathématiques en classe de Seconde des lycées d'enseignement général et technologique, en vigueur depuis septembre 2000, propose une liste, non exhaustive, de **thèmes d'études**, et stipule que chaque enseignant doit traiter au moins un thème dans chacun des trois grands chapitres *Statistiques, Calcul et fonctions, Géométrie.*

Dans cette liste, le thème ***Repérage sur la sphère ; application à la géographie, à l'astronomie*** a motivé pour nous ce travail sur la cartographie, dont nous vous présentons ici un extrait. En effet, ce sujet nous a paru intéressant pour plusieurs raisons.

D'abord, il permet de mener avec des élèves de Seconde, des activités mathématiques moins habituelles, et, par là peut-être, d'éveiller leur curiosité.

Ensuite, il représente une réelle mise en œuvre d'interdisciplinarité et de transversalité (mathématiques – géographie – histoire).

Enfin, il peut constituer pour le professeur de Première ou Terminale, un outil intéressant pour accompagner, voire susciter, des sujets possibles de TPE (Travaux Personnels Encadrés) dans lesquels les mathématiques pourraient trouver une place de choix.

L'étude que nous avons menée ne se cantonne donc pas au seul programme de Seconde, mais propose plutôt une approche plus large de l'ancrage des mathématiques dans la cartographie.

Les collègues sont vivement invités à nous faire part de leurs commentaires, questions, réactions sur cet article ainsi que sur leurs expérimentations avec des élèves, en contactant :
Françoise De Labachelerie – Lycée Jacques Duhamel – BP 8 – 39107 DOLE CEDEX
ou : francoisedelabachelerie@hotmail.com

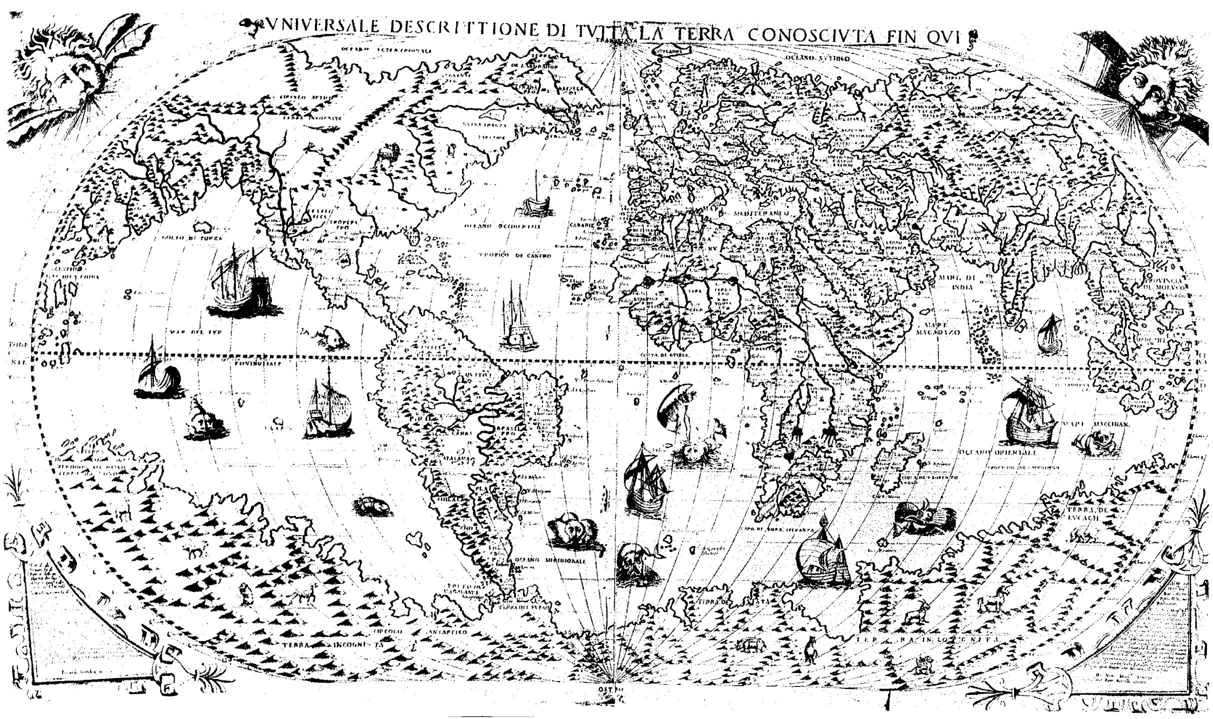
2 Introduction

Depuis l'Antiquité, nombreux sont ceux qui ont cherché à donner une représentation plane de la terre. On peut pour cela assimiler la surface terrestre à une sphère, puis essayer d'aplatir celle-ci. Mais on ne peut dérouler ou déplier une sphère pour l'aplatir sans la déchirer ou la froisser : autrement dit, toute représentation plane d'une sphère entraîne nécessairement des déformations.

Cependant, en observant plusieurs cartes, on constate qu'elles ne donnent pas toutes la même représentation du monde : la forme et la surface des continents varient de l'une à l'autre. Les déformations obtenues dépendent du type de projection choisie, c'est-à-dire de la façon dont à chaque point de la sphère on a associé un point du plan.

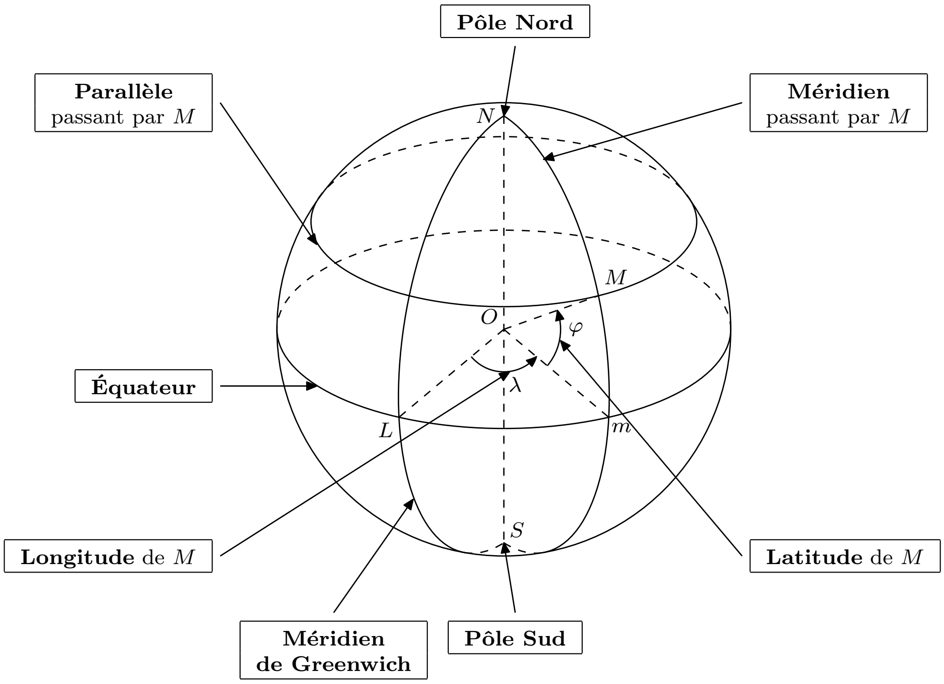
Nous avons recensé quelques projections cartographiques susceptibles d'intéresser l'enseignement secondaire :

- deux projections azimutales (ou projections sur un plan à partir d'un point) : la projection gnomonique et la projection stéréographique.
- deux projections cylindriques (ou projections sur un cylindre, que l'on déroule ensuite pour obtenir une surface plane) : la projection isocylindrique (dite aussi cylindrique de Lambert) et la projection de Mercator.
- une projection conique (ou projection sur un cône, que l'on déroule ensuite pour obtenir une surface plane).



Référence : catalogue de la vente Sotheby's du 15 avril 1980

3 Repérage d'un point sur le globe terrestre



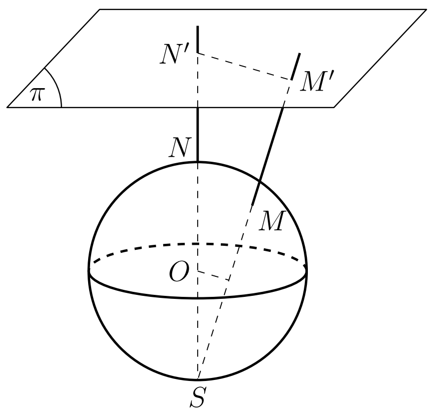
4 Différents types de projections

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE

Soit S le pôle Sud, (π) un plan parallèle au plan équatorial, et soit M un point de la sphère distinct du point S.

On appelle **image de M par la projection stéréographique sur (π) à partir du pôle Sud,** le point M', intersection de la droite (SM) et du plan (π).

Remarque : le point S n'a pas d'image par cette projection.

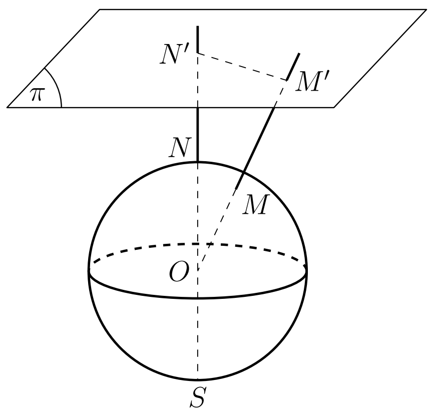


PROJECTION GNOMONIQUE

Soit (π) un plan strictement parallèle au plan équatorial, et soit M un point de la sphère (équateur exclu).

On appelle **image de M par la projection gnomonique sur (π),** le point M', intersection de la droite (OM) et du plan (π).

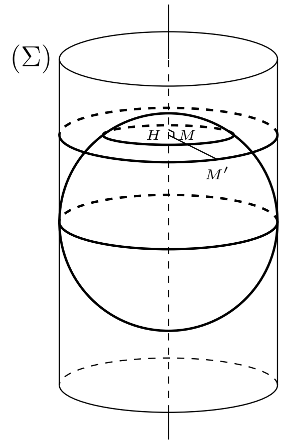
Remarque : deux points antipodiques ont la même image par cette projection.



PROJECTION ISOCYLINDRIQUE

Soit (Σ) un cylindre d'axe, l'axe des pôles, tangent à la sphère à l'équateur, et soit M un point de la sphère autre qu'un pôle.

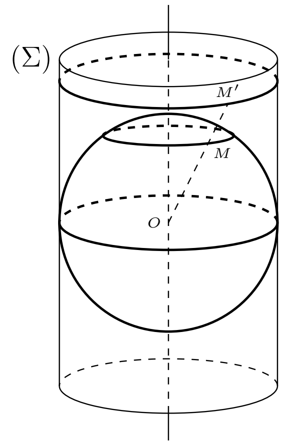
> On appelle **image de M par la projection isocylindrique sur le cylindre (Σ),** le point M', intersection du cylindre (Σ) et de la demi-droite $[HM)$, H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles.



PROJECTION CYLINDRIQUE DE MERCATOR

Soit (Σ) un cylindre d'axe, l'axe des pôles, tangent à la sphère à l'équateur, et soit M un point de la sphère autre qu'un pôle.

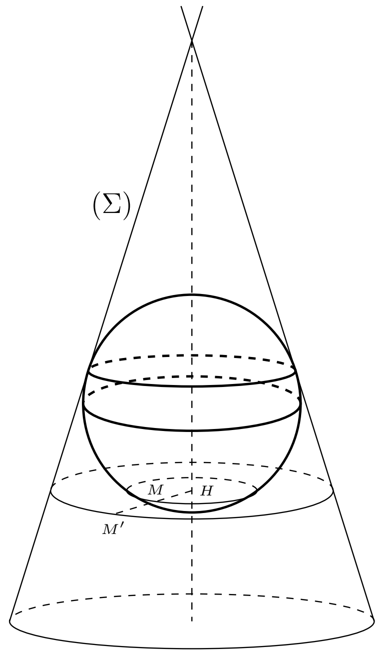
> On appelle **image de M par la projection cylindrique de Mercator sur le cylindre (Σ),** le point M', intersection du cylindre (Σ) et de la demi-droite $[OM)$.



PROJECTION CONIQUE

Soit (Σ) un cône d'axe, l'axe des pôles, tangent à la sphère selon un parallèle, et soit M un point de la sphère autre qu'un pôle.

> On appelle **image de M par la projection conique sur le cône (Σ),** le point M', intersection du cône (Σ) et de la demi-droite $[HM)$, H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles.



Nous présentons dans les pages suivantes l'une de ces projections : la projection gnomonique.

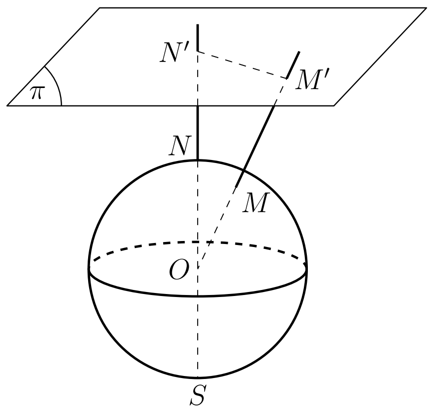
5 Projection gnomonique

a. Définition

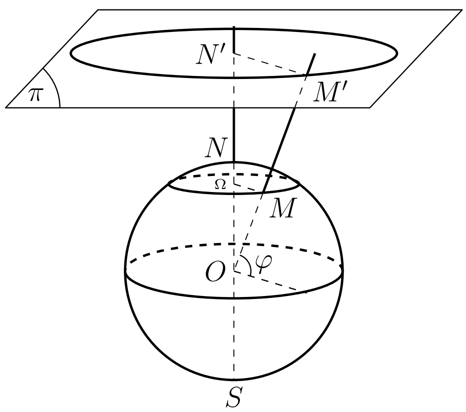
Soit (π) un plan strictement parallèle au plan équatorial, et soit M un point de la sphère (équateur exclu).

On appelle **image de M par la projection gnomonique sur (π),** le point M', intersection de la droite (OM) et du plan (π).

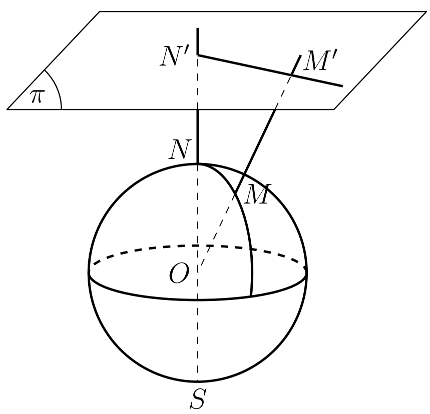
Remarque : deux points situés aux antipodes ont la même image par cette projection. On se limite dans la suite de cette étude à l'hémisphère Nord.



b. Parallèles et méridiens



Les parallèles se projettent en des cercles concentriques qui ont pour centre le projeté N' du pôle Nord N et un rayon proportionnel à $\text{cotan}(\varphi)$.

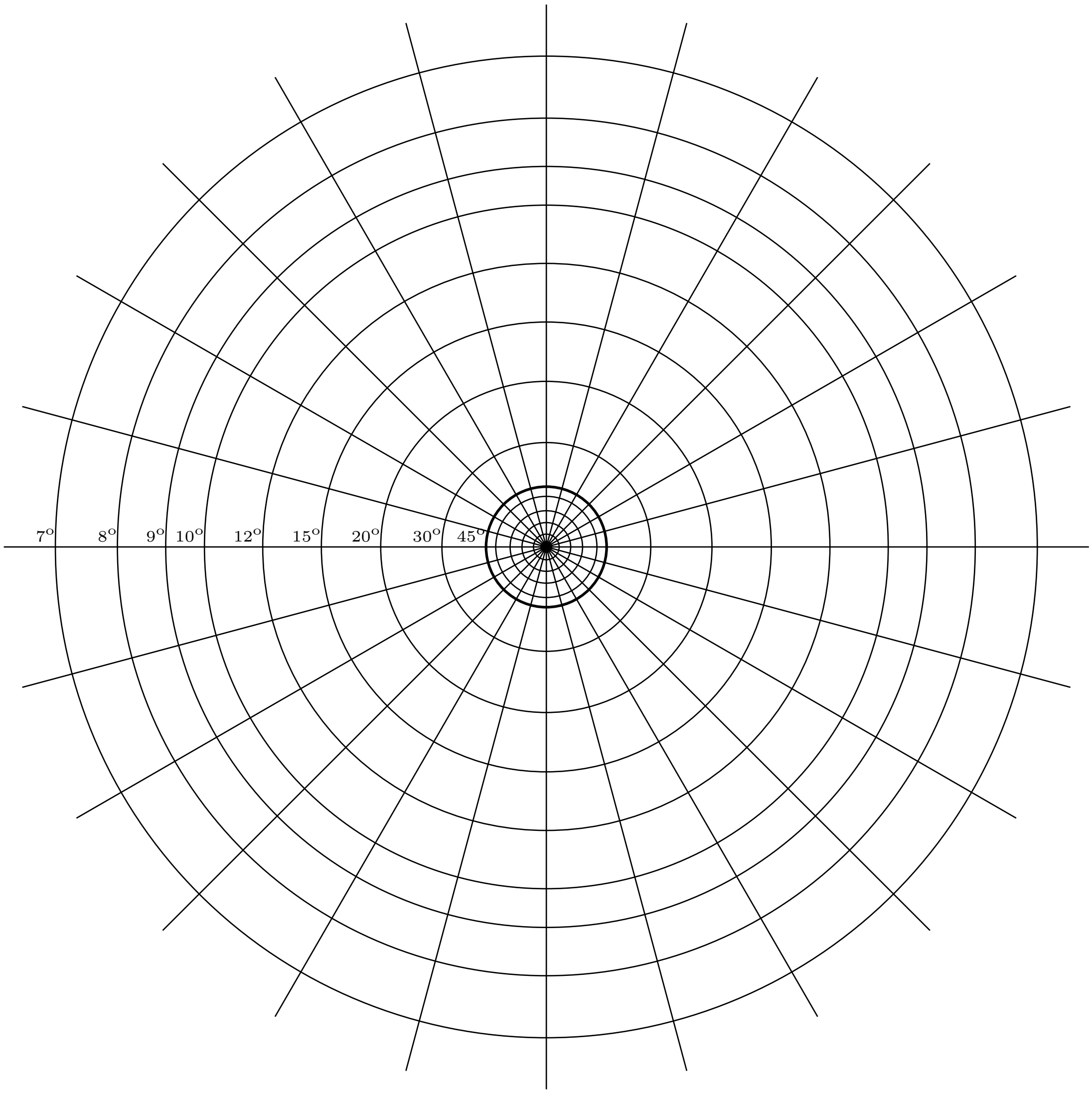


Les demi-méridiens (quarts de cercle de l'hémisphère Nord) ont pour projetés des demi-droites d'origine N'.

Des démonstrations sont proposées à la fin de cet article.

Trame de la carte de l'hémisphère Nord obtenue par projection gnomonique

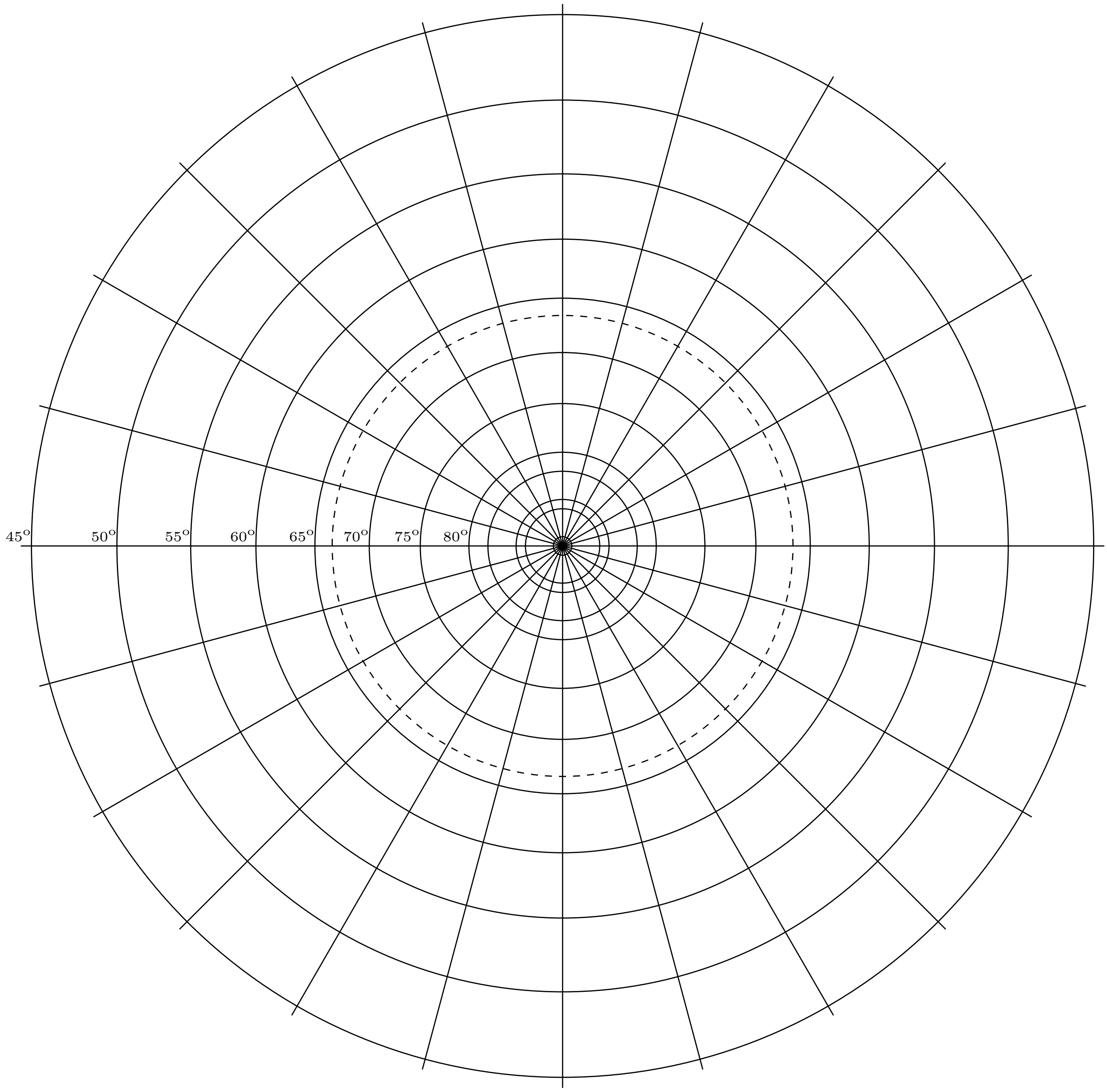
φ (°)	7	8	9	10	12	15	20	30	45	50	59	68	78	85
$r/R = \cos(\varphi)$	0,993	0,990	0,988	0,985	0,978	0,966	0,940	0,866	0,707	0,643	0,515	0,375	0,208	0,087
$r'/R = \text{cotan}(\varphi)$	8,144	7,115	6,314	5,671	4,705	3,732	2,747	1,732	1,000	0,839	0,601	0,404	0,213	0,087



Voir à la fin de l'article les calculs concernant la réalisation de cette trame.

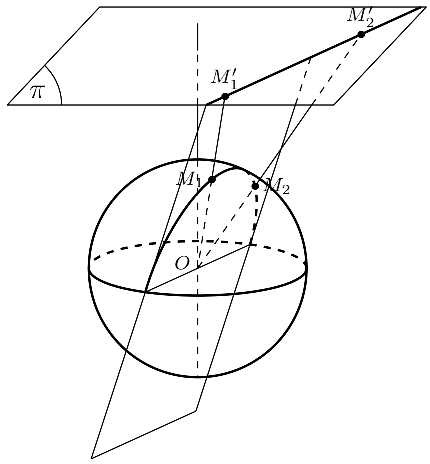
Trame de la carte de l'hémisphère Nord (latitude supérieure à 45°) obtenue par projection gnomonique

φ (°)	45	50	55	60	65	70	75	80	82	85	86	89
$r/R = \cos(\varphi)$	0,707	0,643	0,573	0,500	0,422	0,342	0,259	0,174	0,139	0,087	0,070	0,017
$r'/R = \text{cotan}(\varphi)$	1,000	0,839	0,700	0,866	0,466	0,364	0,268	0,176	0,140	0,087	0,070	0,017



Cette trame est extraite de la précédente avec un agrandissement de 10 environ.

c. Grands cercles



Les demi grands cercles[1] de l'hémisphère Nord (autre que l'équateur) ont pour projetés des droites.

d. Orthodromie

On appelle orthodromie le plus court chemin entre deux points d'une surface (plane ou courbe).

Par exemple :

- Dans un plan, les orthodromies sont des segments.
- Sur une sphère, les orthodromies sont des arcs de grands cercles.

La projection gnomonique conserve les orthodromies.

En effet, un arc de grand cercle sur le globe terrestre est projeté en un segment.

e. Non-conservation de certaines propriétés

Une projection gnomonique ne conserve $\left\{ \begin{array}{l} \text{ni les formes,} \\ \text{ni les rapports d'aires,} \\ \text{ni les rapports de distances.} \end{array} \right.$

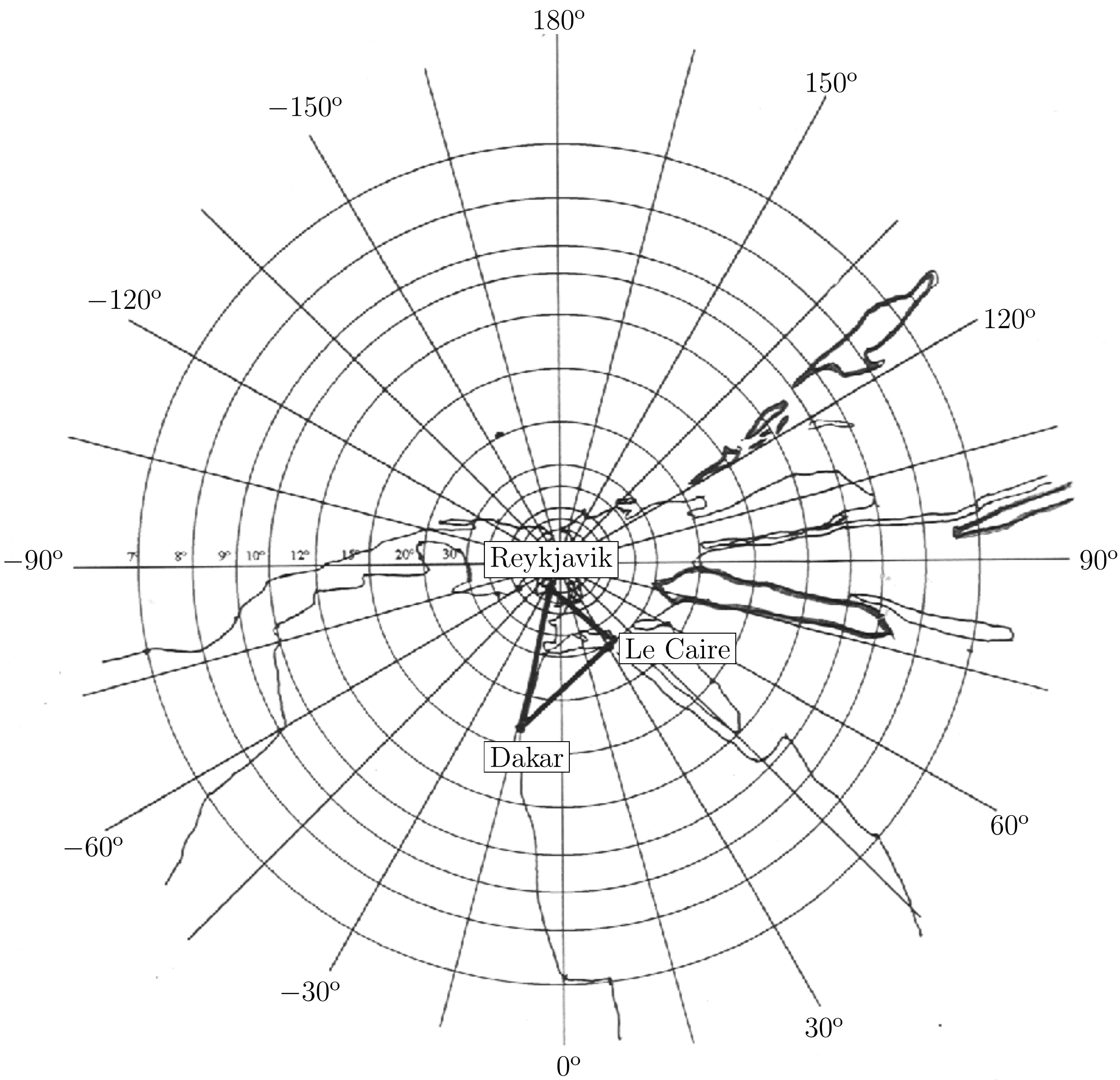
Par exemple, sur le globe terrestre, le triangle reliant les villes de Dakar, Le Caire et Reykjavik d'une part, et celui reliant Bordeaux, Helsinki et Reykjavik d'autre part sont « presque » équilatéraux : En calculant les distances sur le globe terrestre avec un rayon de 6 366 km, on obtient :

1. Dakar – Le Caire : 5 217 km,
   Le Caire – Reykjavik : 5 280 km,
   Reykjavik – Dakar : 5 480 km ;
2. Bordeaux – Helsinki : 2 382 km,
   Helsinki – Reykjavik : 2 397 km,
   Reykjavik – Bordeaux : 2 482 km.

Mais les images par projection gnomonique de ces triangles ne sont pas des triangles équilatéraux : voir les représentations dans les pages suivantes.

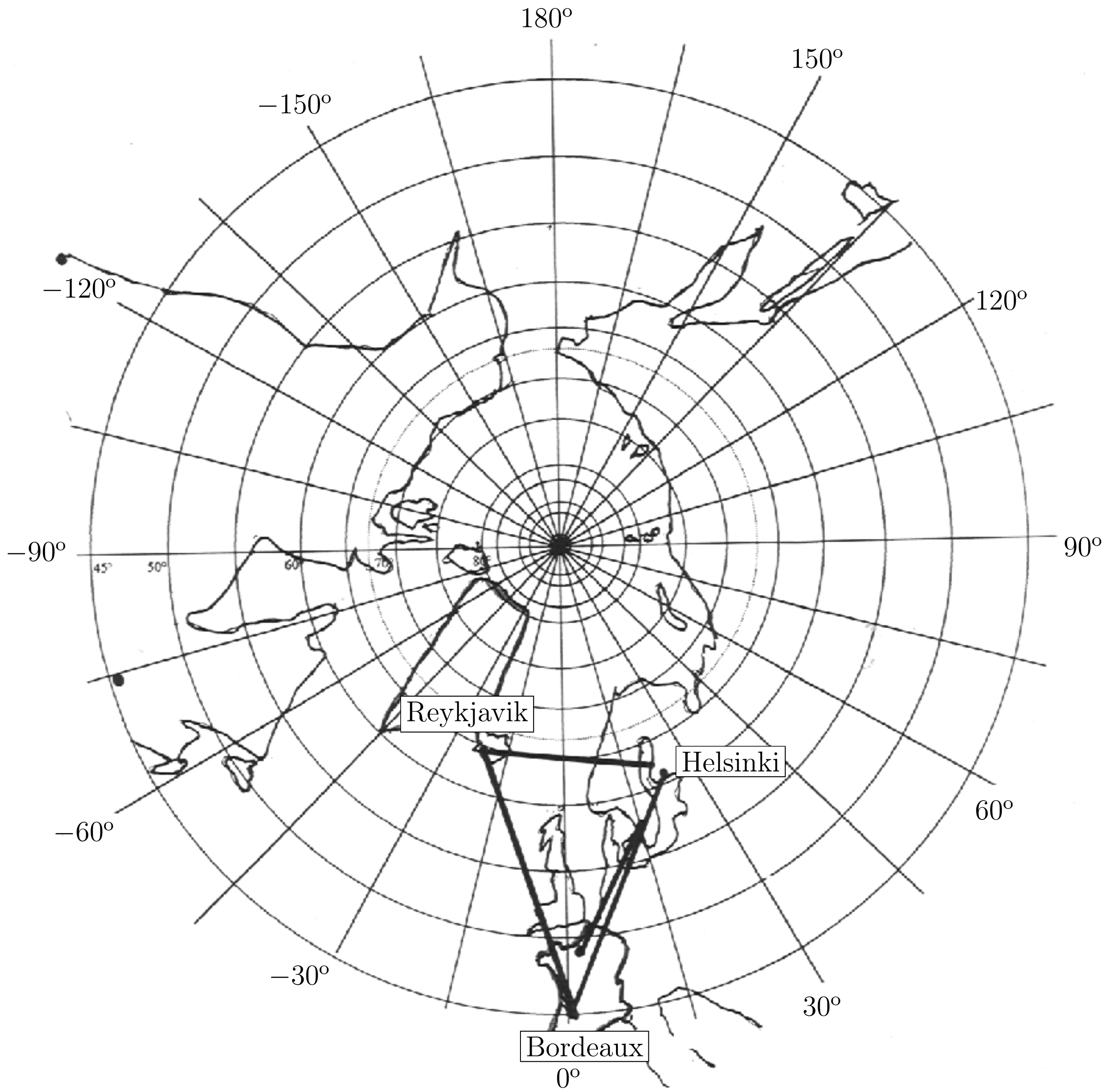
[1] Un grand cercle est l'intersection d'une sphère et d'un plan contenant le centre de celle-ci.

Représentation de l'hémisphère Nord obtenue par projection gnomonique



Villes	Latitude φ	Longitude λ
Dakar	14,8	-17
Le Caire	30	31,5
Reykjavik	64	-22

Représentation de l'hémisphère Nord (latitude supérieure à 45°) obtenue par projection gnomonique



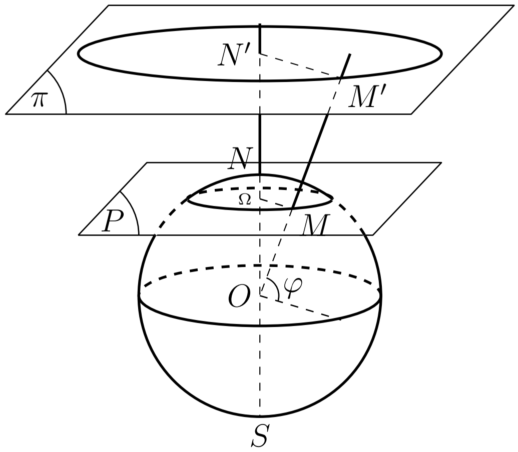
Villes	Latitude φ	Longitude λ
Helsinki	60	24
Bordeaux	45	−1
Reykjavik	64	−22

6 Démonstrations

a. Les parallèles (autres que l'équateur) ont pour projetés des cercles centrés sur N'

Démonstration :
soit Ω le centre du parallèle et (P) le plan le contenant. La restriction de la projection gnomonique au plan (P) est l'homothétie de centre O envoyant Ω en N'.
Par suite, l'image d'un cercle du plan (P) de centre Ω est un cercle du plan (π) de centre N'.

De plus, $\text{cotan}(\varphi) = \dfrac{M'N'}{ON'}$, soit :
$M'N' = ON'.\text{cotan}(\varphi)$ avec $0 < \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.



b. Les demi-méridiens ont pour projetés des demi-droites d'origine N'

Démonstration :
on considère le demi-méridien passant par M_1 ($M_1 \neq N$), et on note (Q) le demi-plan de frontière (NS) contenant ce demi-méridien.
(Q) et (π) sont perpendiculaires.
Soit $[N'x)$ la demi-droite intersection du demi-plan (Q) et du plan (π).
Tout point M du demi-méridien se projette en un point M' de $[N'x)$.
Réciproquement, tout point B' de $[N'x)$ est le projeté d'un point du demi-méridien, point d'intersection de (OB') et du demi-méridien.

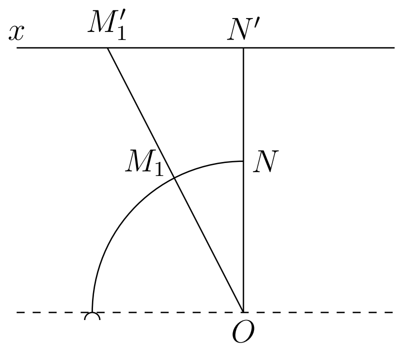


Figure dans le plan (Q)

c. L'image d'un (demi) grand cercle (autre que l'équateur) de l'hémisphère Nord est une droite

Démonstration :
on considère un demi grand cercle, et on note (R) le plan contenant ce demi grand cercle.
(R) et (π) sont sécants.
Soit (d) la droite d'intersection du plan (R) et du plan (π).
Tout point M du demi grand cercle se projette en un point M' de (d).
Réciproquement, tout point B' de (d) est le projeté d'un point du demi grand cercle : le point d'intersection de (OB') et du demi grand cercle.

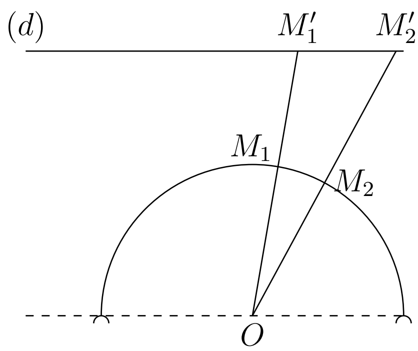
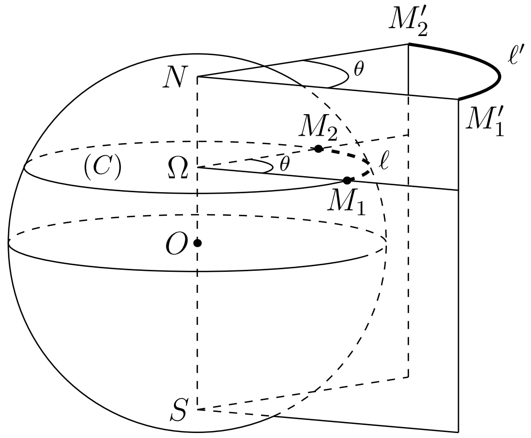


Figure dans le plan (R)

d. Échelle le long d'un parallèle



Considérons le cas où (π) est tangent à la sphère au pôle Nord.
Soit (C) le parallèle de latitude φ, Ω son centre et r son rayon.
Ce parallèle (C) se projette en un cercle de centre N de rayon r'.
Soit M_1 et M_2 deux points de (C), M'_1 et M'_2 leurs projetés.
Soit ℓ la longueur de l'arc $\widehat{M_1M_2}$ associé à θ, ℓ' celle de l'arc $\widehat{M'_1M'_2}$ correspondant.

On a : $\ell = r\theta$ et $\ell' = r'\theta$, d'où $\dfrac{\ell'}{\ell} = \dfrac{r'}{r}\cdot$

Or, en utilisant le théorème de Thalès dans les triangles $OM_1\Omega$ et OM'_1N, on obtient :

$$\frac{NM'_1}{\Omega M_1} = \frac{ON}{O\Omega} \text{ d'où } \frac{r'}{r} = \frac{R}{R\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$$

soit $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{1}{\sin(\varphi)}$ et par suite : $\boxed{\dfrac{\ell'}{\ell} = \dfrac{1}{\sin(\varphi)}}$

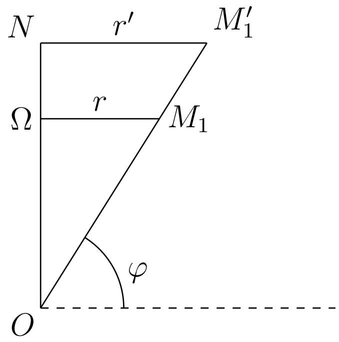


Figure dans le plan (ONM_1)

La déformation est donc faible pour les grandes latitudes (Nord), forte pour les petites latitudes.

Par exemple, si l'on prend $\ell = 100$ km :

Pour $\varphi = 80^o$, $\ell' \simeq 102$ km et pour $\varphi = 10^o$, $\ell' \simeq 578$ km.

e. Réalisation de la trame de la carte obtenue

En fonction du rayon terrestre R, nous avons :

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right) = \dfrac{r}{R}$, d'où : $r = R\cos(\varphi)$.

Or $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{1}{\sin(\varphi)}$, donc $r' = \dfrac{R\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}\cdot$

Soit : $\boxed{r' = R.\operatorname{cotan}(\varphi)}$

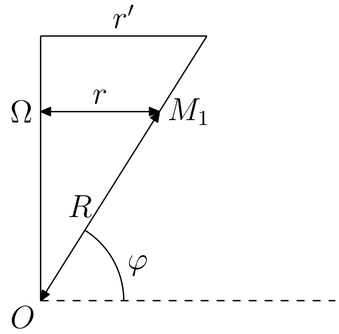


Figure dans le plan (ONM_1)