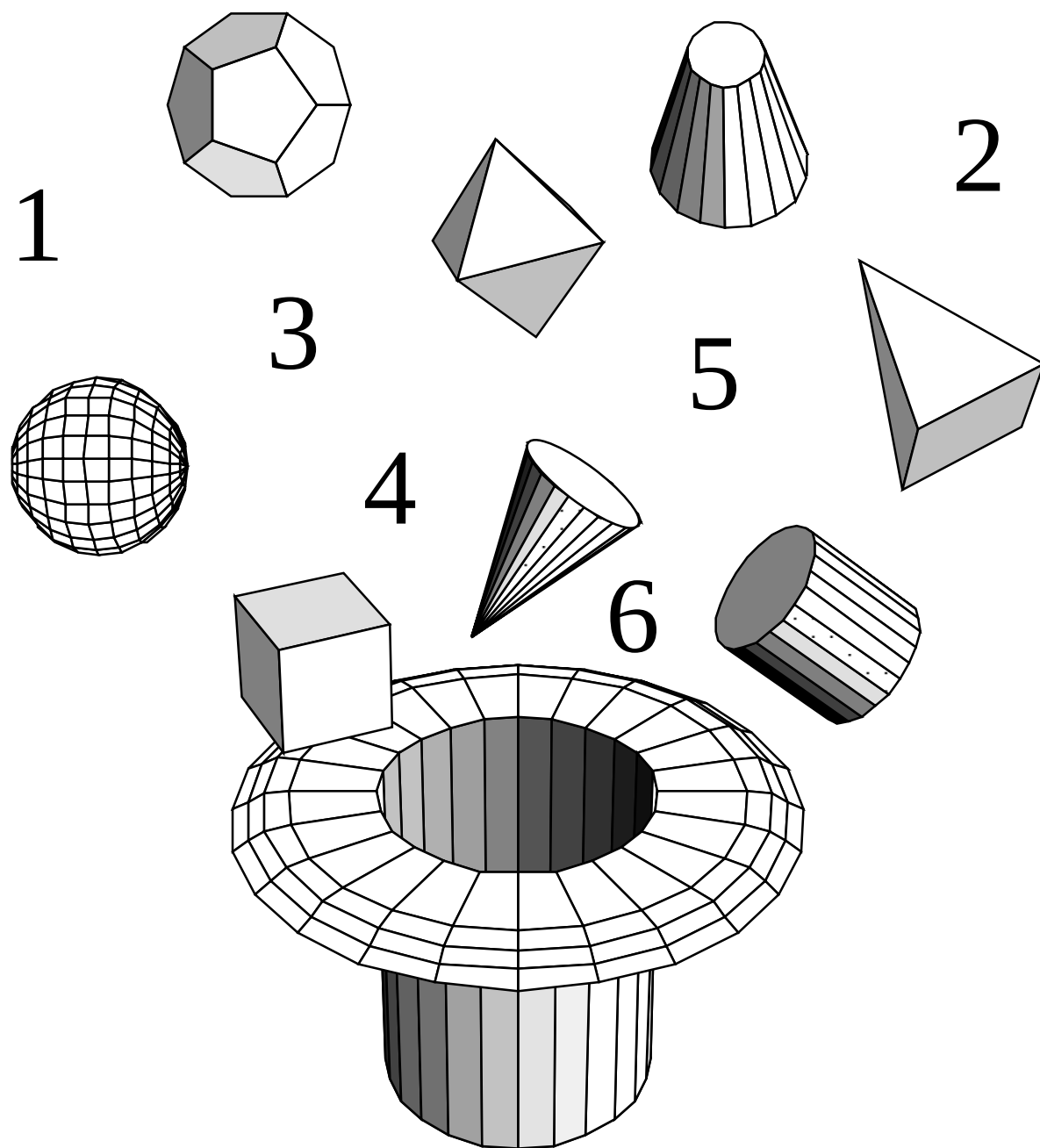


MATHÉMATIQUES VIVANTES



Bulletin de l'IREM
de BESANÇON

n° 69 – Novembre 2003

© Presses Universitaires Franc-Comtoises 2003

ISSN 1141-913X

Mathématiques vivantes

Bulletin IREM

n° 69, Novembre 2003

édité par François PÉTIARD

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Franche-Comté (IREM)

DIRECTRICE CLAUDE MERKER

TABLE DES MATIÈRES.

Table des matières (François Pétiard)	ici même
Une loi de groupe sur une conique	1
Test d'adéquation	11
De la sphère au plan	15

UNE LOI DE GROUPE SUR UNE CONIQUE

Michel HENRY

Sommaire

1	Une loi de composition sur une conique	1
2	Démonstration de l'associativité de la loi $\star$	3
3	Commentaires	7
4	Bibliographie	9

1 Une loi de composition sur une conique

Soit (Γ) une conique non dégénérée dans un plan projectif $(\mathcal{P})$, et soit E un point de (Γ) fixé. Soit (Δ) une droite de $(\mathcal{P})$ non sécante à (Γ) .

À tout couple de points A et B de (Γ) (distincts ou confondus), on fait correspondre le point P de (Γ) de la manière suivante (figure 1) : la droite (AB) (éventuellement tangente à (Γ) en A si $A = B$) coupe (Δ) en un point π non sur (Γ) ; la droite $(E\pi)$ recoupe (Γ) en un point P (éventuellement confondu avec E si $(E\pi)$ est tangente en E à (Γ)).

On note $P = A \star B$. Alors la loi $\star$ est une loi de groupe commutatif sur (Γ) .

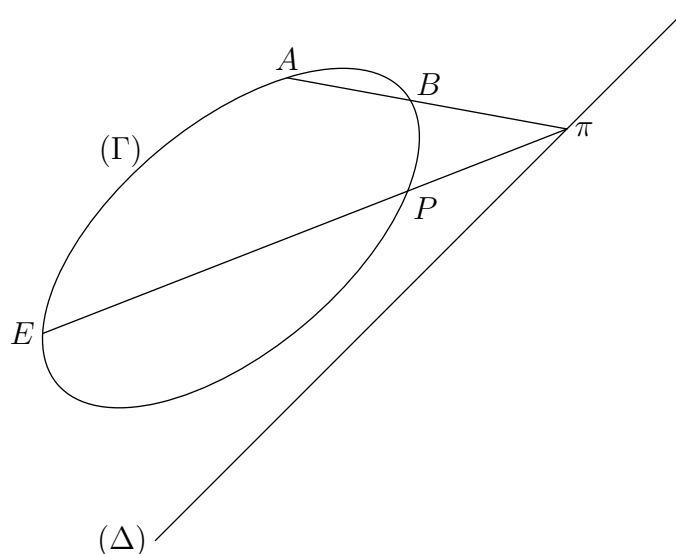


Figure 1

Seule l'associativité n'est pas évidente, les autres propriétés d'une loi de groupe sont aisément vérifiées :

1. Par construction, cette loi $\star$ est commutative (figure 1).

2. E en est un élément neutre :

si M est un point de (Γ) , (EM) coupe (Δ) en μ et (μE) recoupe (Γ) en M :
 $E \star M = M \star E = M$ (figure 2).

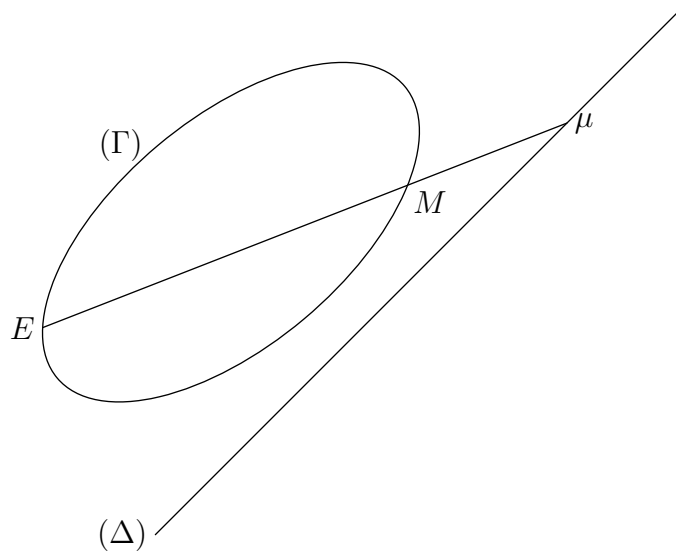


Figure 2

3. Soit $(E\varepsilon)$ la tangente en E à (Γ) qui coupe (Δ) en ε .

Soit $M \in (\Gamma)$, (εM) recoupe (Γ) en M' tel que $(MM') \cap (\Delta) = \varepsilon$.

Comme $(\varepsilon E) \cap (\Gamma) = E$, on a

$$M \star M' = M' \star M = E$$

Pour tout point M , on peut donc associer son symétrique M' pour la loi $\star$ (figure 3).

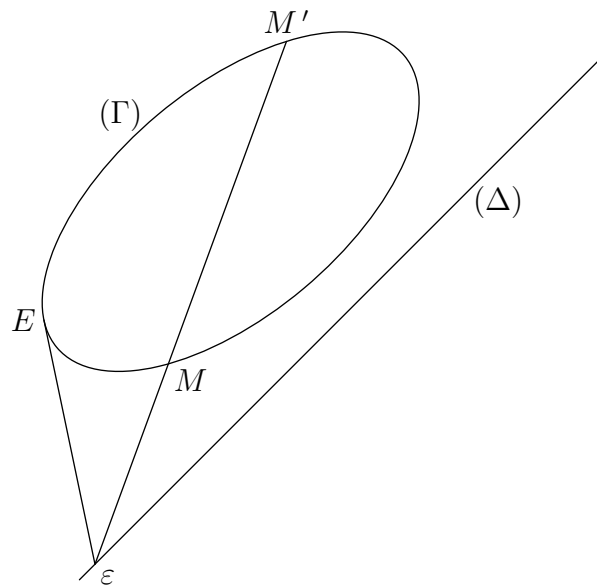


Figure 3

4. Remarquons que si (Δ) rencontre (Γ) (figure 4), la loi $\star$ ne peut être une loi de groupe car les points O_1 et O_2 d'intersection de (Δ) avec (Γ) sont par construction des éléments absorbants pour cette loi.

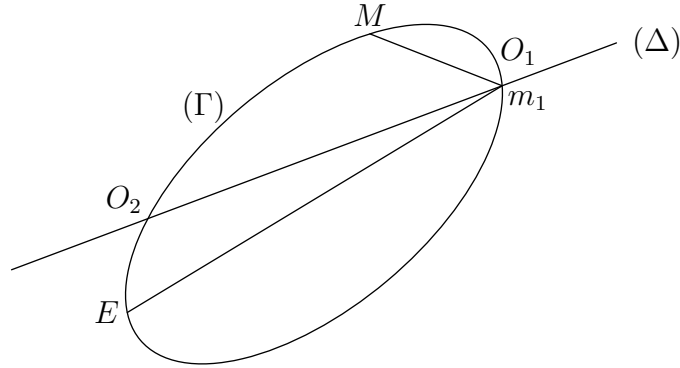


Figure 4

2 Démonstration de l'associativité de la loi $\star$

Soit (Γ) une conique non dégénérée dans un plan projectif et (Δ) une droite de ce plan qui ne rencontre pas (Γ) .

Soit deux points quelconques A et B de (Γ) . On leur fait correspondre sur (Γ) le point $P = A \star B$ tel que $(AB) \cap (\Delta) = \pi$ et $(E\pi) \cap (\Gamma) = P$ (figure 5).

Si $A = B$, (AB) est la tangente en A à (Γ) .

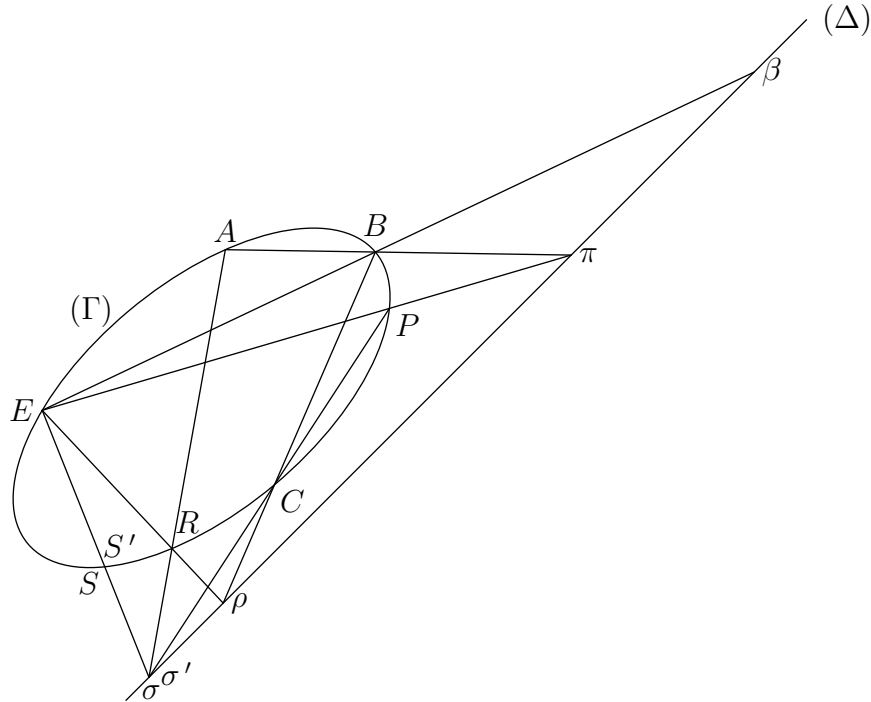


Figure 5

Soit un troisième point quelconque C de (Γ) et le point $R = B \star C$ construit de même : $(BC) \cap (\Delta) = \rho$ et $(E\rho) \cap (\Gamma) = R$.

La loi $\star$ est associative si et seulement si $A \star R = P \star C$. On construit donc les points :

$$\begin{aligned}\sigma &= (PC) \cap (\Delta) \text{ sur } (\Delta) \text{ et } S = (E\sigma) \cap (\Gamma) = P \star C \text{ sur } (\Gamma), \text{ et} \\ \sigma' &= (AR) \cap (\Delta) \text{ sur } (\Delta) \text{ et } S' = (E\sigma') \cap (\Gamma) = A \star R \text{ sur } (\Gamma).\end{aligned}$$

Montrer que $S = S'$ revient donc à montrer que $\sigma = \sigma'$.

Pour cela, on va montrer que σ et σ' sont les images d'un même point $\beta = (EB) \cap (\Delta)$ dans une même involution sur (Δ) .

On démontre d'abord un lemme pratique, intervenant par deux fois dans ce qui suit, sachant que toute correspondance homographique sur une droite projective ne se réduisant pas à l'identité, admet deux points doubles, réels ou imaginaires.

1. Lemme : une involution déterminée par une homographie

Lemme :

Soit $\mathcal{H}$ une homographie sur une droite projective complexe (Δ) , ayant les deux points doubles m_1 et m_2 supposés distincts. Soit (μ, μ') et (ν, ν') deux couples de points homologues dans $\mathcal{H}$. On suppose que ces deux couples sont distincts et ne coïncident pas non plus avec m_1 et m_2 .

Alors, les couples (m_1, m_2) , (μ, ν') et (μ', ν) sont en involution.

Démonstration

Ces trois couples sont distincts et déterminent une homographie unique $\mathcal{T}$.

Comme m_1 et m_2 sont points doubles de $\mathcal{H}$, on a (propriété des points doubles d'une homographie) :

$$(m_1 m_2 \mu \mu') = (m_1 m_2 \nu \nu')$$

et par double permutation dans le dernier birapport,

$$(m_1 m_2 \mu \mu') = (m_2 m_1 \nu' \nu)$$

Cette égalité suffit pour conclure.

En effet, désignons par m' l'image de m_2 par $\mathcal{T}$, on a ainsi quatre couples de points homologues distincts : (m_1, m_2) , (m_2, m') , (μ, ν') et (μ', ν) . Cette homographie conservant le birapport de quatre points distincts, on a :

$$(m_1 m_2 \mu \mu') = (m_2 m' \nu' \nu)$$

Il vient donc $(m_2 m_1 \nu' \nu) = (m_2 m' \nu' \nu)$, ce qui montre que $m' = m_1$ et que les points m_1 et m_2 sont en involution par $\mathcal{T}$.

Alors, $\mathcal{T}$ est une involution, car pour tout couple (α, α') de points homologues dans $\mathcal{T}$, α et α' sont en correspondance réciproque :

posant $\alpha'' = \mathcal{T}(\alpha')$, on a par conservation homographique du birapport :

$$(m_1 m_2 \alpha \alpha') = (m_2 m_1 \alpha' \alpha'') = (m_1 m_2 \alpha'' \alpha'),$$

ce qui montre que $\alpha'' = \alpha$ et que α et α' sont en involution par $\mathcal{T}$.

Ainsi les couples homologues (μ, ν') et (μ', ν) sont aussi en involution par $\mathcal{T}$.

2. Les points σ et β se correspondent dans une involution $\mathcal{T}$

On s'intéresse à la sous-figure 6 suivante, extraite de la figure 5 :

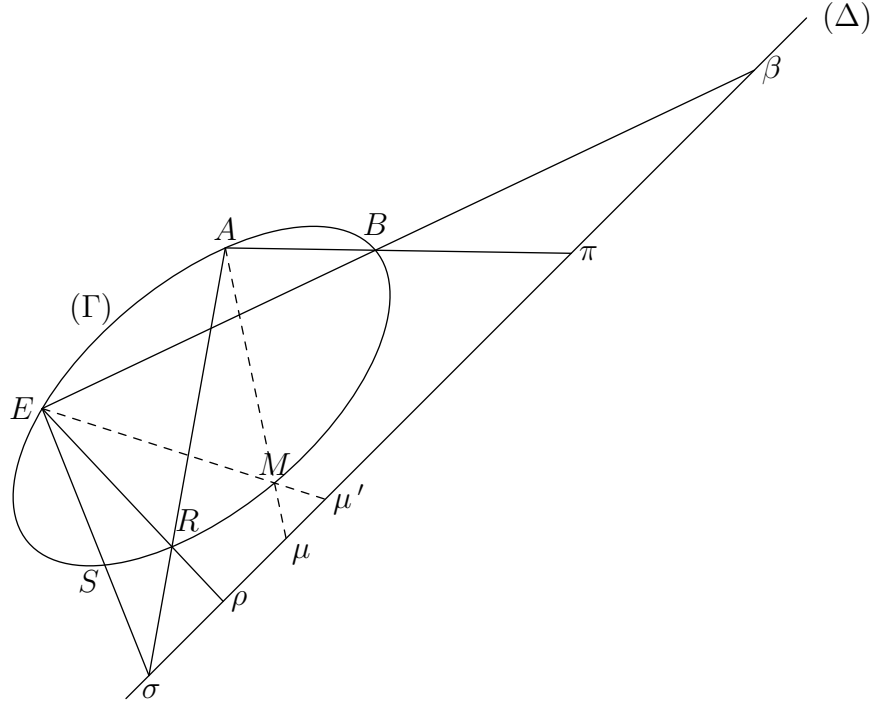


Figure 6

On considère les points A et E de (Γ) comme les sommets distincts de deux « projections » des points de (Γ) sur (Δ) : à tout point M de (Γ) , on fait correspondre les points $\mu = (AM) \cap (\Delta)$ et $\mu' = (EM) \cap (\Delta)$ sur (Δ) .

- La correspondance $\mu \mapsto \mu'$ est homographique : quel que soit le repère choisi sur (Δ) , la relation entre leurs abscisses est homographique, car cette correspondance est algébrique et bijective de la droite (projective) (Δ) sur elle-même.
En effet, l'algébricité provient de la construction de μ et μ' à la règle à partir des points A et M d'une part et E et M d'autre part, situés sur la même conique (Γ) . La bijection est évidente par construction.
- Soit $\mathcal{H}$ cette homographie sur (Δ) . On a les correspondances

$$\begin{aligned} \pi &= (AB) \cap (\Delta) \mapsto \beta = (EB) \cap (\Delta) && \text{(projections de } B) \\ \sigma &= (AR) \cap (\Delta) \mapsto \rho = (ER) \cap (\Delta) && \text{(projections de } R) \end{aligned}$$

Remarquons que comme $A \neq E$, on a $\pi \neq \beta$ et $\sigma \neq \rho$.

- Soit m_1 et m_2 les points doubles de $\mathcal{H}$ sur (Δ) .
Par définition de $\mathcal{H}$, m_1 et m_2 sont les points d'intersection de (Δ) avec (Γ) , et, comme dans notre situation (Δ) ne coupe pas (Γ) , m_1 et m_2 sont distincts et imaginaires.
- L'homographie conserve le birapport de quatre points distincts : si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre points distincts de (Δ) et $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ leurs images par $\mathcal{H}$, on a :

$$(\alpha' \beta' \gamma' \delta') = (\alpha \beta \gamma \delta)$$

Mais de plus, si m_1 et m_2 sont les deux points doubles distincts de $\mathcal{H}$, on a pour tout couple $(\alpha, \alpha'), (\beta, \beta')$ de points homologues :

$$(m_1 m_2 \alpha \alpha') = (m_1 m_2 \beta \beta')$$

– Dans notre situation présente, on a donc

$$(m_1 m_2 \pi \beta) = (m_1 m_2 \sigma \rho),$$

et par suite de l'invariance du birapport par double permutation, on a finalement :

$$(m_1 m_2 \pi \beta) = (m_2 m_1 \rho \sigma)$$

- Les trois couples de points distincts (m_1, m_2) , (π, ρ) et (β, σ) déterminent sur (Δ) une homographie $\mathcal{T}$ unique.
- La relation précédente entraîne que $\mathcal{T}$ est une involution d'après le lemme.
- Cette involution, aussi déterminée par les deux couples (m_1, m_2) et (π, ρ) , fait donc correspondre β et σ . On a donc :

Proposition : Propriété de σ

σ est l'image de β dans l'involution $\mathcal{T}$ déterminée de manière unique par les couples de points homologues (m_1, m_2) et (π, ρ) .

3. Les points σ' et β se correspondent dans l'involution $\mathcal{T}$

Appliquons le même raisonnement à la figure 7 extraite de la figure 5 suivante :

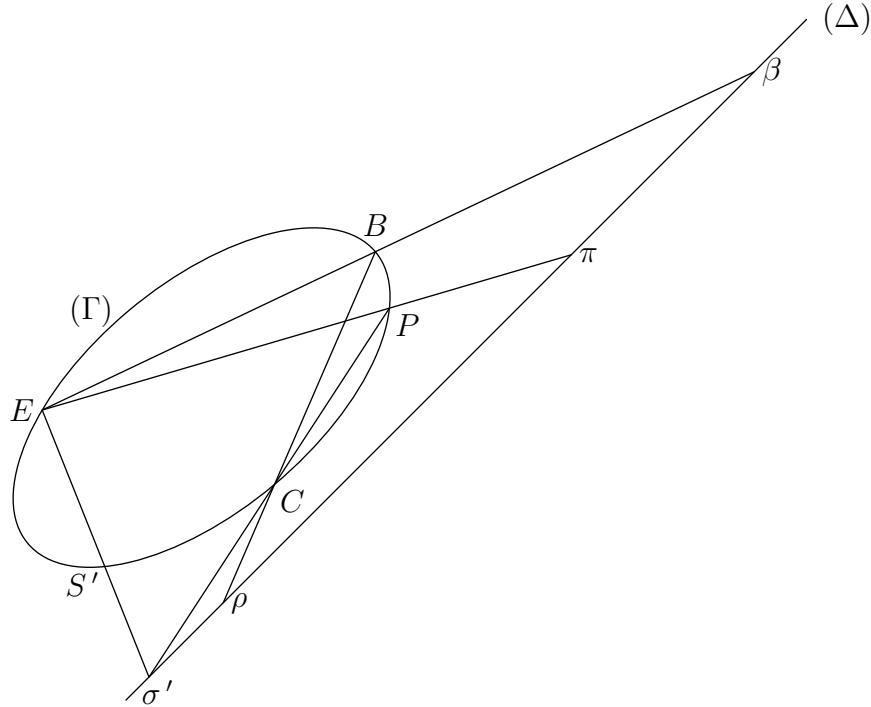


Figure 7

- On considère cette fois-ci les points E et C de (Γ) comme sommets de deux projections de (Γ) sur (Δ) , qui déterminent une homographie $\mathcal{H}'$ sur (Δ) pour laquelle :

$$\begin{array}{lll} \pi & \longmapsto & \sigma' & (\text{projetés de } P) \\ \beta & \longmapsto & \rho & (\text{projetés de } B) \\ m_1 & \longmapsto & m_1 & (\text{projetés de } m_1 \text{ et } m_2, \text{ intersections} \\ m_2 & \longmapsto & m_2 & \text{imaginaires de } (\Gamma) \text{ et } (\Delta)). \end{array}$$

- Par hypothèse, E et C sont distincts, donc les couples homologues (m_1, m_1) , (m_2, m_2) , (π, σ') et (β, ρ) sont distincts. Comme m_1 et m_2 sont les deux points doubles de l'homographie $\mathcal{H}'$, on a l'égalité des birapports :

$$(m_1 m_2 \pi \sigma') = (m_1 m_2 \beta \rho)$$

et comme le birapport est invariant par double permutation,

$$(m_1 m_2 \pi \sigma') = (m_2 m_1 \rho \beta)$$

- Les trois couples de points distincts (m_1, m_2) , (π, ρ) et (σ', β) déterminent sur (Δ) une homographie $\mathcal{T}'$ unique.
- D'après le lemme, cette dernière relation entraîne que $\mathcal{T}'$ est une involution dans laquelle σ' et β se correspondent.

On a donc :

Proposition : Propriété de σ'

σ' est l'image de β dans l'involution $\mathcal{T}'$ déterminée de manière unique par les couples de points homologues (m_1, m_2) et (π, ρ) .

Les propriétés de σ et σ' montrent donc que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ et que σ et σ' sont confondus.

De là, découle que les points $S = (E\sigma) \cap (\Gamma)$ et $S' = (E\sigma') \cap (\Gamma)$ sont confondus, ce qu'il fallait démontrer.

3 Commentaires

Cette démonstration directe de la propriété évite deux écueils :

1. L'appel au théorème de Pascal dont l'énoncé est immédiatement équivalent à la propriété étudiée : si six points sont situés sur une conique (Γ) donnée dans un plan projectif, alors les côtés opposés de l'hexagone (éventuellement croisé) qu'ils déterminent se coupent en des points alignés (sur une droite projective).
2. La transformation du problème posé dans la généralité projective en un problème euclidien par le biais d'une transformation perspective adéquate, transformant (Γ) en un cercle. Les propriétés géométriques intervenant dans une telle démonstration sont alors limitées au théorème de Ménélaüs, conséquence immédiate de la propriété de Thalès, et à la définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle et à son invariance quelle que soit la sécante passant par ce point. Mais cette méthode a l'inconvénient de conduire à l'étude de nombreux cas de figure, suivant que les points considérés sont réels ou imaginaires, à distance finie ou à l'infini.

La démonstration proposée utilise les connaissances de base suivantes :

Soit (Δ) une droite projective réelle (que l'on pourra injecter dans sa complexifiée) munie d'un repère projectif dans lequel un point α , distinct du point à l'infini de (Δ) , est repéré par son abscisse a dans le repère affine sous-jacent. Deux points α et β de (Δ) étant donnés, on désigne par $\overline{\alpha\beta}$ la différence $b - a$ de leurs abscisses s'ils sont à distance finie. Si l'un d'entre eux est le point à l'infini de (Δ) , on note $\overline{\alpha\beta} = \infty$.

1. Birapport de quatre points distincts de (Δ)

1. Un repère projectif de (Δ) étant choisi, le birapport de quatre points distincts de (Δ) , $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, donnés dans cet ordre, est défini par :

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\overline{\alpha\gamma}}{\overline{\beta\gamma}} \div \frac{\overline{\alpha\delta}}{\overline{\beta\delta}}, \quad \text{avec la convention } \frac{\infty}{\infty} = 1.$$

Cette valeur ne dépend pas du repère choisi sur (Δ) . Comme $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont distincts, le birapport est différent de 0 et de 1.

2. Le birapport de quatre points distincts sur (Δ) ne change pas si on permute deux points en même temps que les deux autres, par exemple :

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\beta\alpha\delta\gamma)$$

3. Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont distincts ainsi que $\alpha, \beta, \gamma, \delta'$, alors l'égalité des birapports $(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma\delta')$ entraîne $\delta = \delta'$.

2. Homographie sur (Δ)

1. Une homographie $\mathcal{H}$ sur (Δ) est une bijection de (Δ) sur elle-même, telle que si μ a pour image μ' , les abscisses de μ et μ' dans un repère projectif donné sont en relation homographique non dégénérée :

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{avec } ad - bc \neq 0$$

et la convention $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x = -\frac{d}{c}, \text{ alors } \mu' = \infty, \text{ le point à l'infini de } (\Delta) \\ \text{si } \mu = \infty, \text{ alors } \mu' \text{ a pour abscisse } x' = \frac{a}{c} \end{array} \right.$

2. μ et μ' sont alors en relation homographique dans tout autre repère projectif de (Δ) .
3. Toute relation algébrique et bijective entre un point μ et un point μ' de (Δ) est homographique.
4. Une homographie conserve le birapport de quatre points distincts : si $(\alpha, \alpha'), (\beta, \beta'), (\gamma, \gamma'), (\delta, \delta')$ sont quatre couples distincts de points homologues, on a :

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha'\beta'\gamma'\delta')$$

5. Une homographie est entièrement déterminée par la donnée de trois couples de points homologues.
6. Toute homographie admet deux points doubles (c'est-à-dire tels que $m_1 = \mathcal{H}(m_1)$ et $m_2 = \mathcal{H}(m_2)$), réels ou imaginaires, distincts ou confondus.

7. Si les points doubles m_1 et m_2 d'une homographie $\mathcal{H}$ sont distincts et si (α, α') et (β, β') sont deux couples de points homologues par $\mathcal{H}$, on a l'égalité des birapports :

$$(m_1 m_2 \alpha \alpha') = (m_1 m_2 \beta \beta')$$

3. Involution

1. Une involution $\mathcal{T}$ sur (Δ) est une homographie telle qu'il existe un couple de points (α, α') en relation réciproque : $\alpha' = \mathcal{T}(\alpha)$ et $\alpha = \mathcal{T}(\alpha')$ (on dit que α et α' sont en involution).
2. Dans ce cas, tous les couples de points homologues sont en involution :

$$\text{pour tout } \mu \text{ de } (\Delta), \text{ on a : } \mu' = \mathcal{T}(\mu) \iff \mu = \mathcal{T}(\mu').$$

3. Une involution est entièrement déterminée par la donnée de deux couples distincts de points homologues.

4 Bibliographie

DELTHEIL Robert et CAIRE Daniel, *Compléments de Géométrie*, J. B. Baillièrre et Fils éditeurs, Paris, 1951.

Géométrie métrique, vecteurs, groupe euclidien, géométrie projective, homographie, coniques en géométrie projective, géométrie anallagmatique, groupe conforme de l'espace.

TEST D'ADÉQUATION

Séminaire IREM du 20 juin 2003

Groupe de travail : statistiques et probabilités

IREM de Besançon.

Sommaire

1	Introduction	11
2	Étude de la moyenne	12
3	Étude de la distance séparant les fréquences observées de 1/6	12
4	Conclusion	13

1 Introduction

Le propos est d'illustrer sur un exemple une démarche développée par le groupe « statistiques et probabilité », le 5 mars 2003 devant les professeurs de mathématiques de l'Académie. Comme le dit si justement Yves Ducl : « Comment, à partir de l'observation d'un échantillon, décider par une argumentation de nature statistique qu'un modèle mathématique est en adéquation avec la réalité ? »

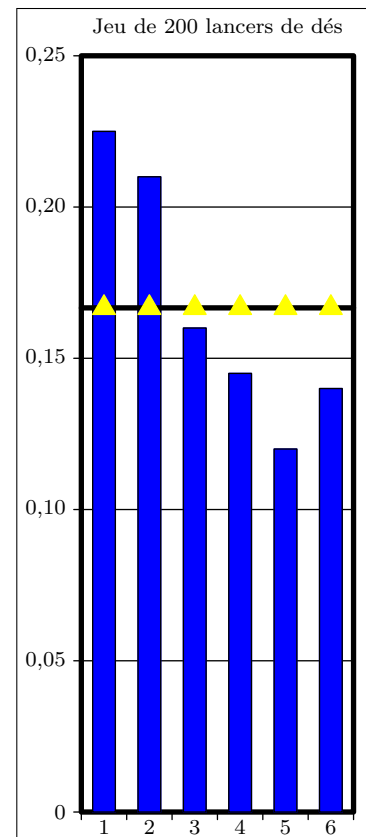
Prenons un dé.

Avant de jouer avec ce dé on aimerait savoir s'il est bien équilibré. Dans cette question, il y a un modèle mathématique qui se cache : chaque face a autant de chance de sortir, on dit que les événements sont « équiprobables ».

Pour vérifier ce modèle on peut jouer 200 fois avec le dé, construire une statistique de cet échantillon, et en faire le traitement habituel : représentation graphique, paramètres de position et de dispersion.

On trouve :

Faces	Effectifs	Fréquences	Modèle	Distance
1	45	0,225	1/6	0,003 403
2	42	0,21	1/6	0,001 878
3	32	0,16	1/6	0,000 044
4	29	0,145	1/6	0,000 469
5	24	0,12	1/6	0,002 178
6	28	0,14	1/6	0,000 711
	200			0,008 683



La moyenne des points dans l'échantillon est de 3,145.

La distance entre les fréquences observées et celles attendues est

$$d^2 = \sum_{i=1}^6 \left(f_i - \frac{1}{6} \right)^2 \simeq 0,008683$$

2 Étude de la moyenne

La moyenne observée 3,145 est différente de celle espérée du dé parfait : 3,5.

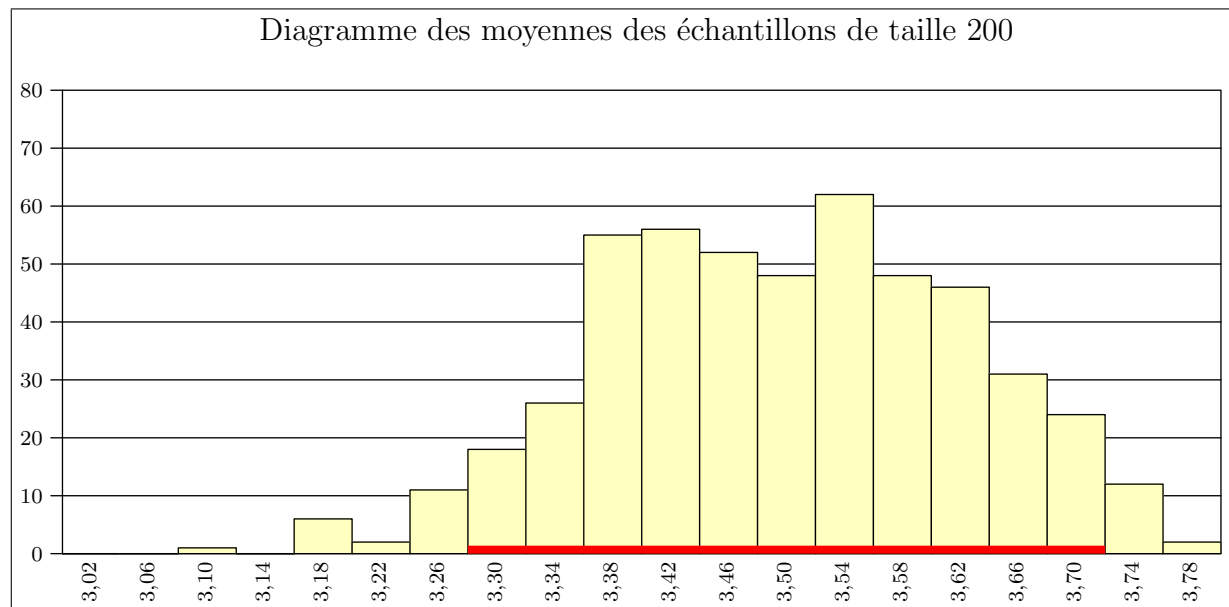
Pour savoir si cette différence est significative ou si elle est la conséquence d'une fluctuation d'échantillonnage, utilisons la méthode suivante :

Avec un tableur et la fonction `Int(6xAleat+1)` on simule un dé parfait.

On construit 500 échantillons de taille 200 de ce dé parfait.

Une étude statistique (graphique, paramètres) des moyennes de ces échantillons nous permet de mieux cerner les fluctuations d'échantillonnage des moyennes des échantillons de taille 200.

On constate statistiquement que la répartition des moyennes a un histogramme en forme de cloche, que 5 % des moyennes sont inférieures à 3,3, 5 % sont supérieures à 3,7 donc que 90 % des moyennes sont entre 3,3 et 3,7.



On adopte la règle de décision suivante : si la moyenne observée dans l'échantillon fabriqué à partir de mon dé n'est pas dans cet intervalle je décide de dire qu'il y a peu de chance que mon dé soit parfait.

Pour l'instant mon dé a moins de 10 % de chance d'être parfait.

3 Étude de la distance séparant les fréquences observées de $1/6$

La distance observée 0,008 683 n'est pas nulle.

Pour savoir si cette distance est la conséquence d'un dé mal fait ou si elle est due à une fluctuation d'échantillonnage, utilisons la même méthode :

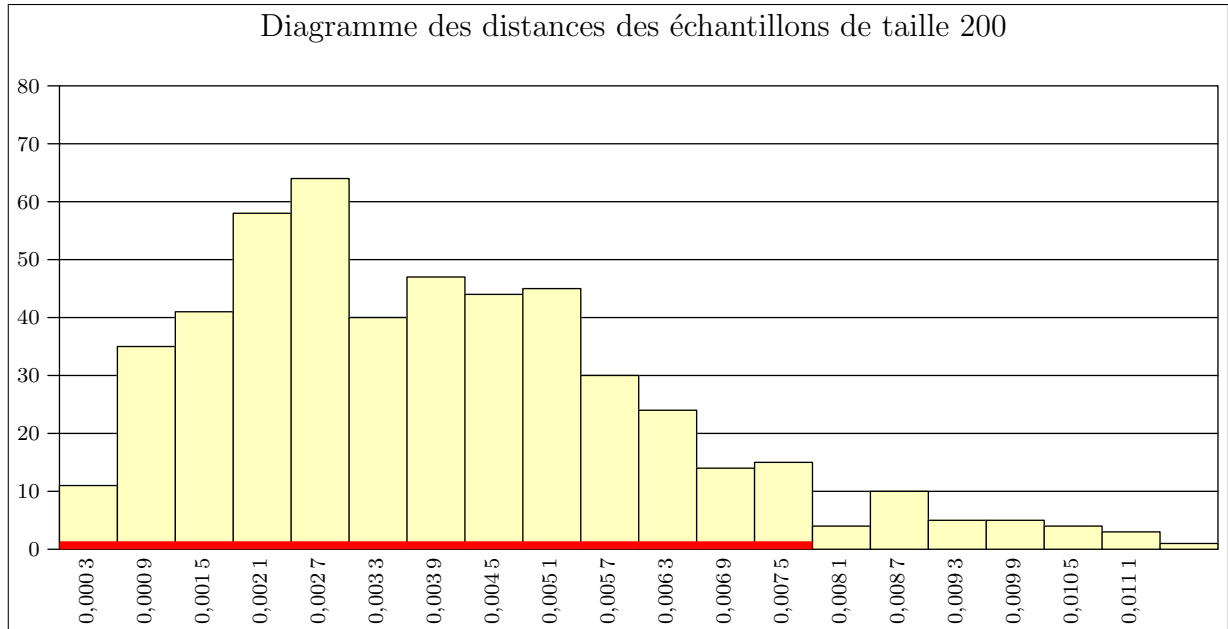
Une étude statistique (graphique, paramètres, déciles) des distances calculées à partir des échantillons simulés de taille 200 nous permet de mieux cerner les fluctuations d'échantillonnage des distances.

Test d'adéquation

On constate statistiquement que l'histogramme des distances a une forme dissymétrique très particulière.

On constate que 90 % des distances sont inférieures à 0,008.

On adopte la règle de décision suivante : si la distance observée dans l'échantillon fabriqué à partir de mon dé est plus grande que 0,008, je décide de dire qu'il y a peu de chance que mon dé soit parfait.



Avec ce critère, mon dé a moins de 10 % de chance d'être parfait.

Je refuse donc de croire que mon dé est conforme au modèle.

4 Conclusion

Cette démarche est l'occasion d'étudier, à partir d'un caractère discret des variables continues, de les observer statistiquement pour reconnaître des modèles mathématiques que les élèves pourront étudier plus tard.

Michel Vendrely

DE LA SPHÈRE AU PLAN

Groupe-lycée de l'IREM :
Françoise De LABACHELERIE
Chantal GEOFFROY
Michel MAGNET
Alain PARMENTELAT

Sommaire

1	Présentation	15
2	Introduction	16
3	Repérage d'un point sur le globe terrestre	17
4	Différents types de projections	17
5	Projection gnomonique	19
6	Démonstrations	25

1 Présentation

Le programme de mathématiques en classe de Seconde des lycées d'enseignement général et technologique, en vigueur depuis septembre 2000, propose une liste, non exhaustive, de **thèmes d'études**, et stipule que chaque enseignant doit traiter au moins un thème dans chacun des trois grands chapitres *Statistiques*, *Calcul et fonctions*, *Géométrie*.

Dans cette liste, le thème ***Repérage sur la sphère ; application à la géographie, à l'astronomie*** a motivé pour nous ce travail sur la cartographie, dont nous vous présentons ici un extrait. En effet, ce sujet nous a paru intéressant pour plusieurs raisons.

D'abord, il permet de mener avec des élèves de Seconde, des activités mathématiques moins habituelles, et, par là peut-être, d'éveiller leur curiosité.

Ensuite, il représente une réelle mise en œuvre d'interdisciplinarité et de transversalité (mathématiques – géographie – histoire).

Enfin, il peut constituer pour le professeur de Première ou Terminale, un outil intéressant pour accompagner, voire susciter, des sujets possibles de TPE (Travaux Personnels Encadrés) dans lesquels les mathématiques pourraient trouver une place de choix.

L'étude que nous avons menée ne se cantonne donc pas au seul programme de Seconde, mais propose plutôt une approche plus large de l'ancrage des mathématiques dans la cartographie.

Les collègues sont vivement invités à nous faire part de leurs commentaires, questions, réactions sur cet article ainsi que sur leurs expérimentations avec des élèves, en contactant :
Françoise De LABACHELERIE – Lycée Jacques Duhamel – BP 8 – 39107 DOLE CEDEX
ou : francoisedelabachelerie@hotmail.com

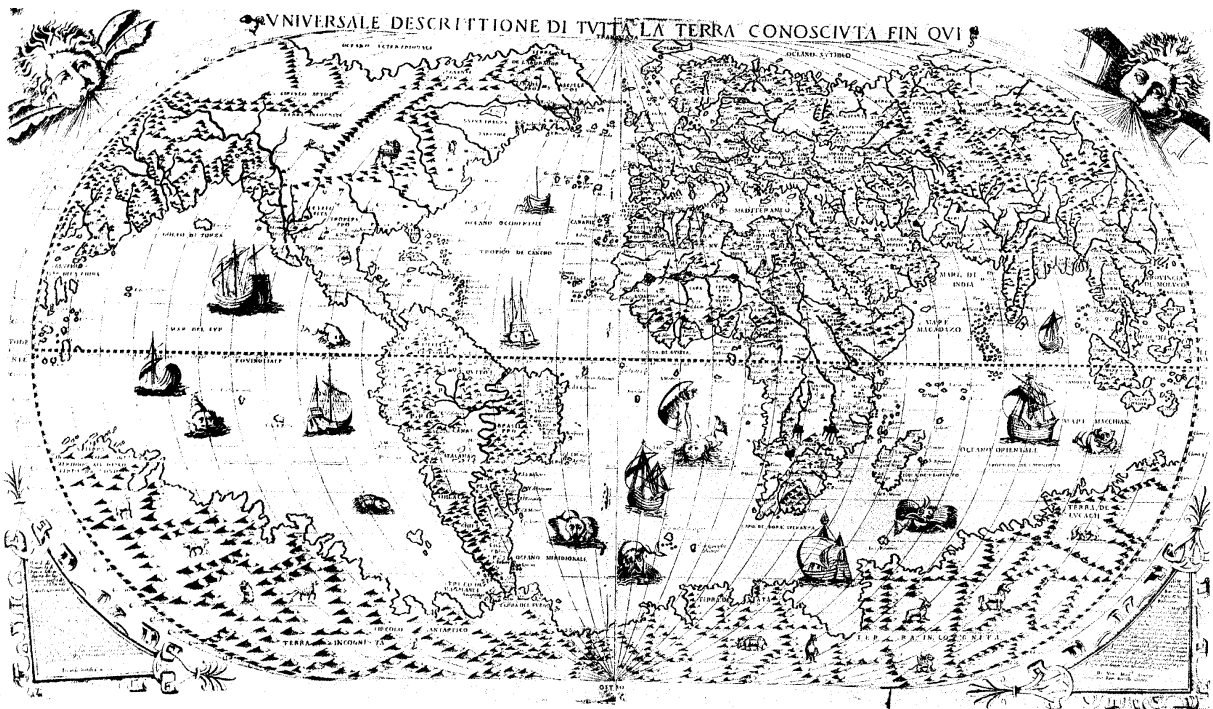
2 Introduction

Depuis l'Antiquité, nombreux sont ceux qui ont cherché à donner une représentation plane de la terre. On peut pour cela assimiler la surface terrestre à une sphère, puis essayer d'aplatir celle-ci. Mais on ne peut dérouler ou déplier une sphère pour l'aplatir sans la déchirer ou la froisser : autrement dit, toute représentation plane d'une sphère entraîne nécessairement des déformations.

Cependant, en observant plusieurs cartes, on constate qu'elles ne donnent pas toutes la même représentation du monde : la forme et la surface des continents varient de l'une à l'autre. Les déformations obtenues dépendent du type de projection choisie, c'est-à-dire de la façon dont à chaque point de la sphère on a associé un point du plan.

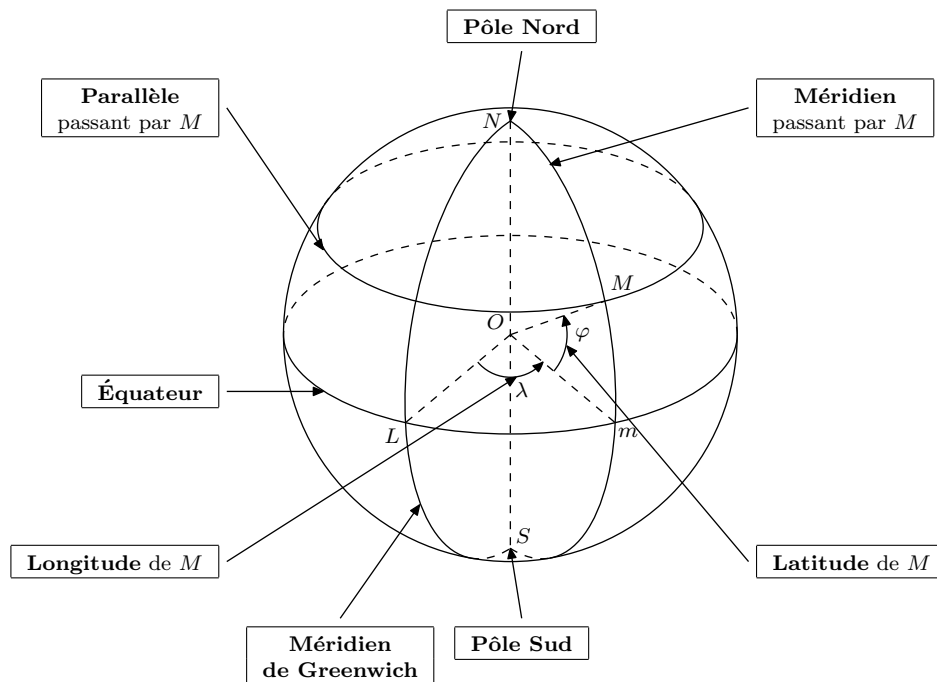
Nous avons recensé quelques projections cartographiques susceptibles d'intéresser l'enseignement secondaire :

- deux projections azimutales (ou projections sur un plan à partir d'un point) : la projection gnomonique et la projection stéréographique.
- deux projections cylindriques (ou projections sur un cylindre, que l'on déroule ensuite pour obtenir une surface plane) : la projection isocylindrique (dite aussi cylindrique de Lambert) et la projection de Mercator.
- une projection conique (ou projection sur un cône, que l'on déroule ensuite pour obtenir une surface plane).



Référence : catalogue de la vente Sotheby's du 15 avril 1980

3 Repérage d'un point sur le globe terrestre



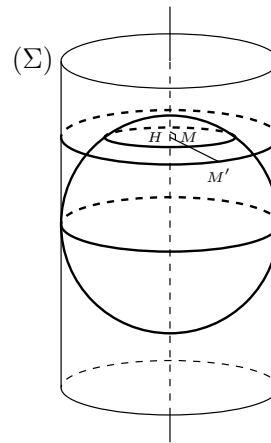
4 Différents types de projections

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE	
Soit S le pôle Sud, (π) un plan parallèle au plan équatorial, et soit M un point de la sphère distinct du point S. On appelle image de M par la projection stéréographique sur (π) à partir du pôle Sud, le point M', intersection de la droite (SM) et du plan (π). Remarque : le point S n'a pas d'image par cette projection.	
PROJECTION GNOMONIQUE	
Soit (π) un plan strictement parallèle au plan équatorial, et soit M un point de la sphère (équateur exclu). On appelle image de M par la projection gnomonique sur (π), le point M', intersection de la droite (OM) et du plan (π). Remarque : deux points antipodiques ont la même image par cette projection.	

PROJECTION ISOCYLINDRIQUE

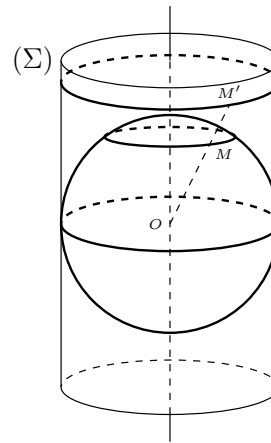
Soit (Σ) un cylindre d'axe, l'axe des pôles, tangent à la sphère à l'équateur, et soit M un point de la sphère autre qu'un pôle.

On appelle **image de M par la projection isocylindrique sur le cylindre (Σ)** , le point M' , intersection du cylindre (Σ) et de la demi-droite $[HM)$, H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles.

**PROJECTION CYLINDRIQUE DE MERCATOR**

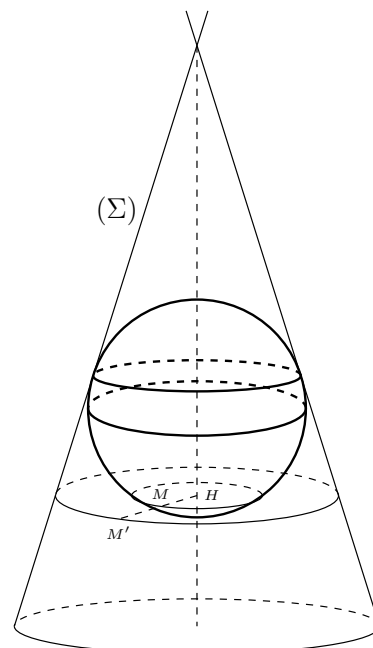
Soit (Σ) un cylindre d'axe, l'axe des pôles, tangent à la sphère à l'équateur, et soit M un point de la sphère autre qu'un pôle.

On appelle **image de M par la projection cylindrique de Mercator sur le cylindre (Σ)** , le point M' , intersection du cylindre (Σ) et de la demi-droite $[OM)$.

**PROJECTION CONIQUE**

Soit (Σ) un cône d'axe, l'axe des pôles, tangent à la sphère selon un parallèle, et soit M un point de la sphère autre qu'un pôle.

On appelle **image de M par la projection conique sur le cône (Σ)** , le point M' , intersection du cône (Σ) et de la demi-droite $[HM)$, H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles.



Nous présentons dans les pages suivantes l'une de ces projections : la projection gnomonique.

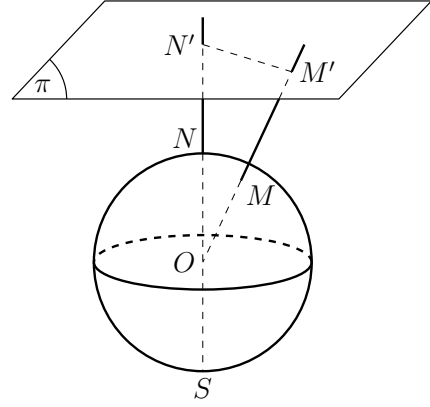
5 Projection gnomonique

a. Définition

Soit (π) un plan strictement parallèle au plan équatorial, et soit M un point de la sphère (équateur exclu).

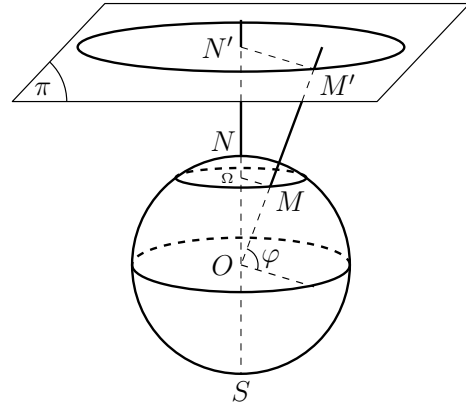
On appelle **image de M par la projection gnomonique sur (π)** , le point M' , intersection de la droite (OM) et du plan (π) .

Remarque : deux points situés aux antipodes ont la même image par cette projection. On se limite dans la suite de cette étude à l'hémisphère Nord.

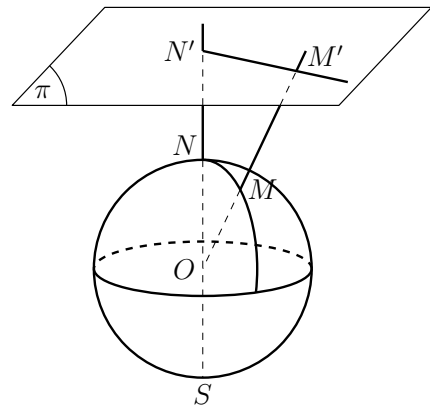


b. Parallèles et méridiens

Les parallèles se projettent en des cercles concentriques qui ont pour centre le projeté N' du pôle Nord N et un rayon proportionnel à $\cotan(\varphi)$.



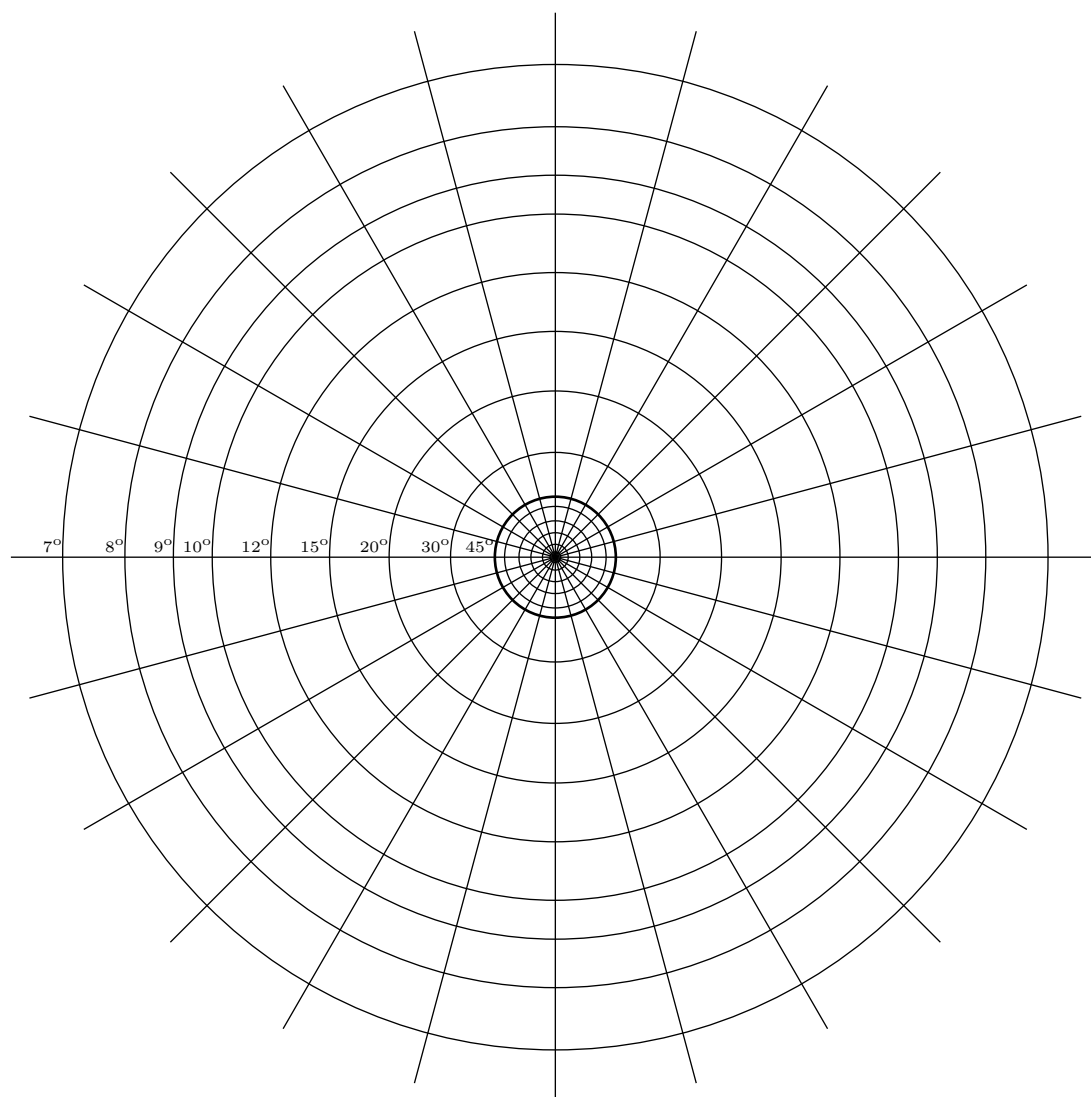
Les demi-méridiens (quarts de cercle de l'hémisphère Nord) ont pour projetés des demi-droites d'origine N' .



Des démonstrations sont proposées à la fin de cet article.

Trame de la carte de l'hémisphère Nord obtenue par projection gnomonique

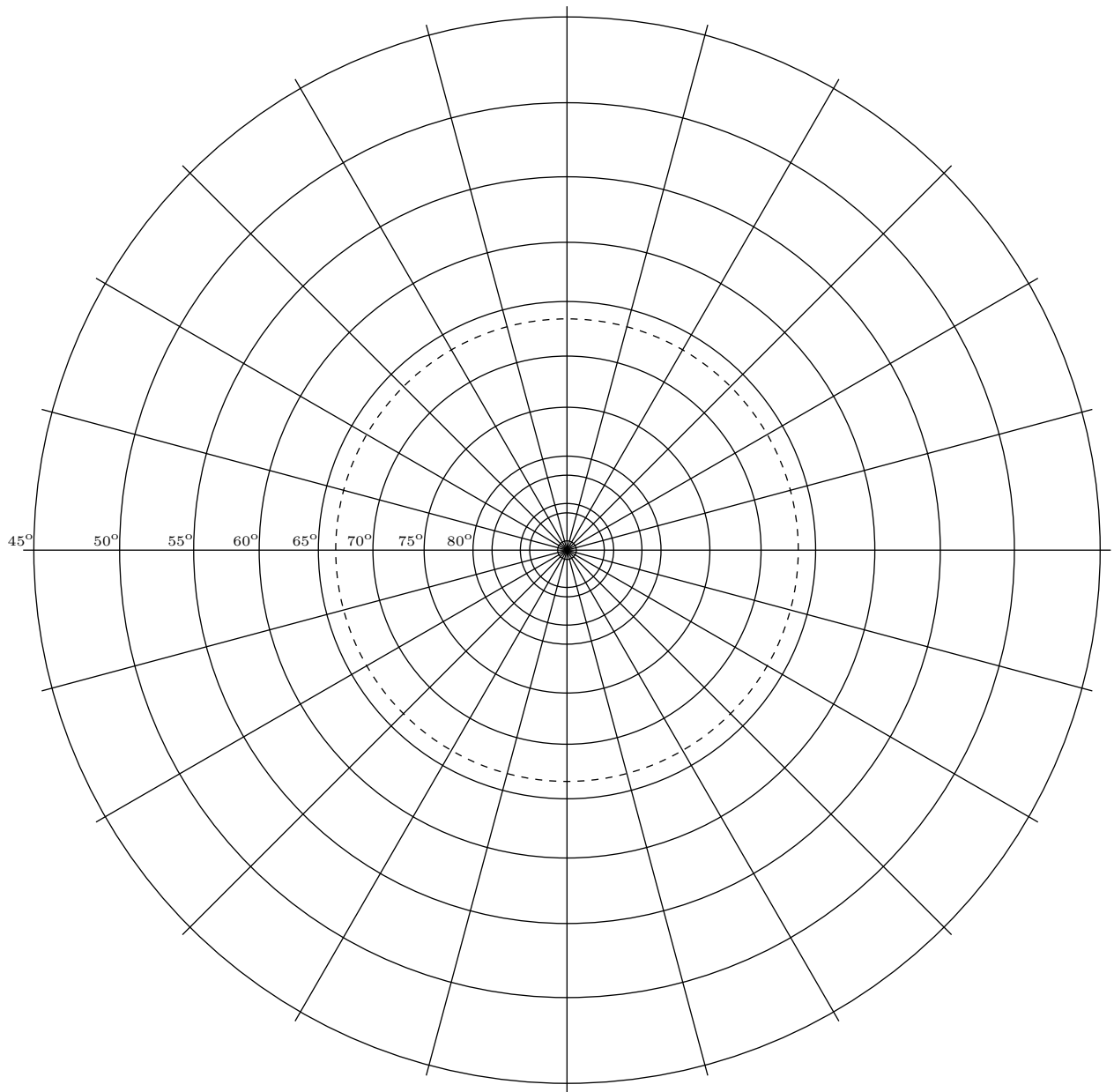
φ (°)	7	8	9	10	12	15	20	30	45	50	59	68	78	85
$r/R = \cos(\varphi)$	0,993	0,990	0,988	0,985	0,978	0,966	0,940	0,866	0,707	0,643	0,515	0,375	0,208	0,087
$r'/R = \cotan(\varphi)$	8,144	7,115	6,314	5,671	4,705	3,732	2,747	1,732	1,000	0,839	0,601	0,404	0,213	0,087



Voir à la fin de l'article les calculs concernant la réalisation de cette trame.

Trame de la carte de l'hémisphère Nord (latitude supérieure à 45°) obtenue par projection gnomonique

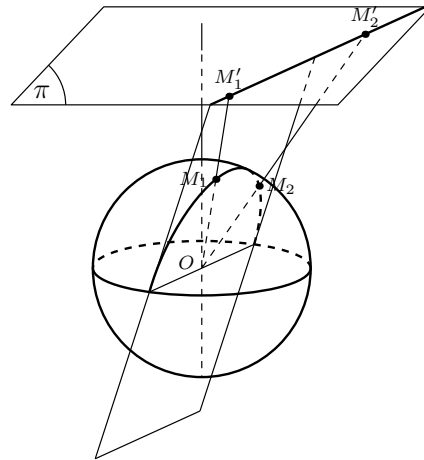
φ (°)	45	50	55	60	65	70	75	80	82	85	86	89
$r/R = \cos(\varphi)$	0,707	0,643	0,573	0,500	0,422	0,342	0,259	0,174	0,139	0,087	0,070	0,017
$r'/R = \cotan(\varphi)$	1,000	0,839	0,700	0,866	0,466	0,364	0,268	0,176	0,140	0,087	0,070	0,017



Cette trame est extraite de la précédente avec un agrandissement de 10 environ.

c. Grands cercles

Les demi grands cercles¹ de l'hémisphère Nord (autre que l'équateur) ont pour projetés des droites.



d. Orthodromie

On appelle orthodromie le plus court chemin entre deux points d'une surface (plane ou courbe).

Par exemple :

- Dans un plan, les orthodromies sont des segments.
- Sur une sphère, les orthodromies sont des arcs de grands cercles.

La projection gnomonique conserve les orthodromies.

En effet, un arc de grand cercle sur le globe terrestre est projeté en un segment.

e. Non-conservation de certaines propriétés

Une projection gnomonique ne conserve $\left\{ \begin{array}{l} \text{ni les formes,} \\ \text{ni les rapports d'aires,} \\ \text{ni les rapports de distances.} \end{array} \right.$

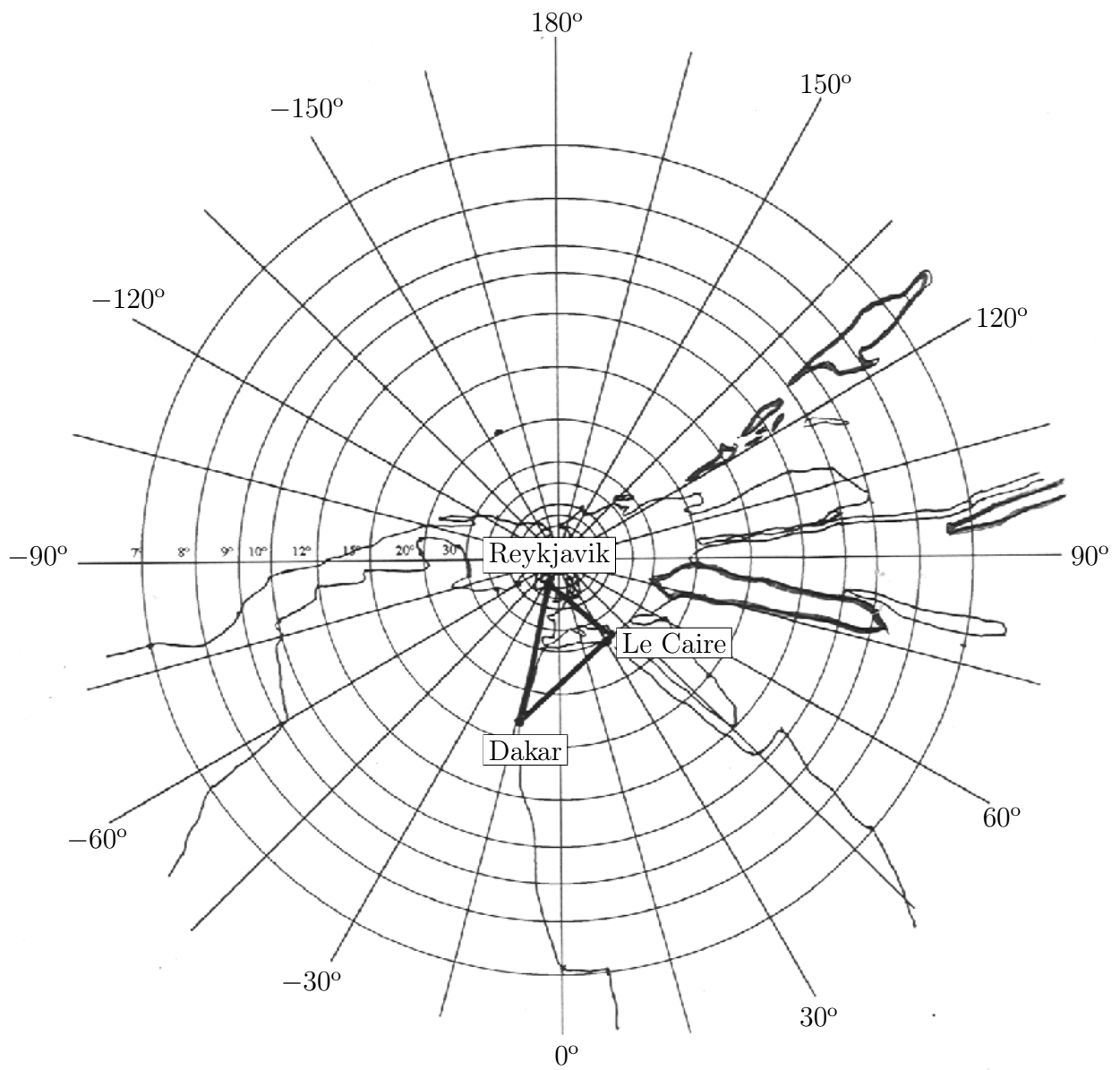
Par exemple, sur le globe terrestre, le triangle reliant les villes de Dakar, Le Caire et Reykjavik d'une part, et celui reliant Bordeaux, Helsinki et Reykjavik d'autre part sont « presque » équilatéraux : En calculant les distances sur le globe terrestre avec un rayon de 6 366 km, on obtient :

1. Dakar – Le Caire : 5 217 km,
Le Caire – Reykjavik : 5 280 km,
Reykjavik – Dakar : 5 480 km ;
2. Bordeaux – Helsinki : 2 382 km,
Helsinki – Reykjavik : 2 397 km,
Reykjavik – Bordeaux : 2 482 km.

Mais les images par projection gnomonique de ces triangles ne sont pas des triangles équilatéraux : voir les représentations dans les pages suivantes.

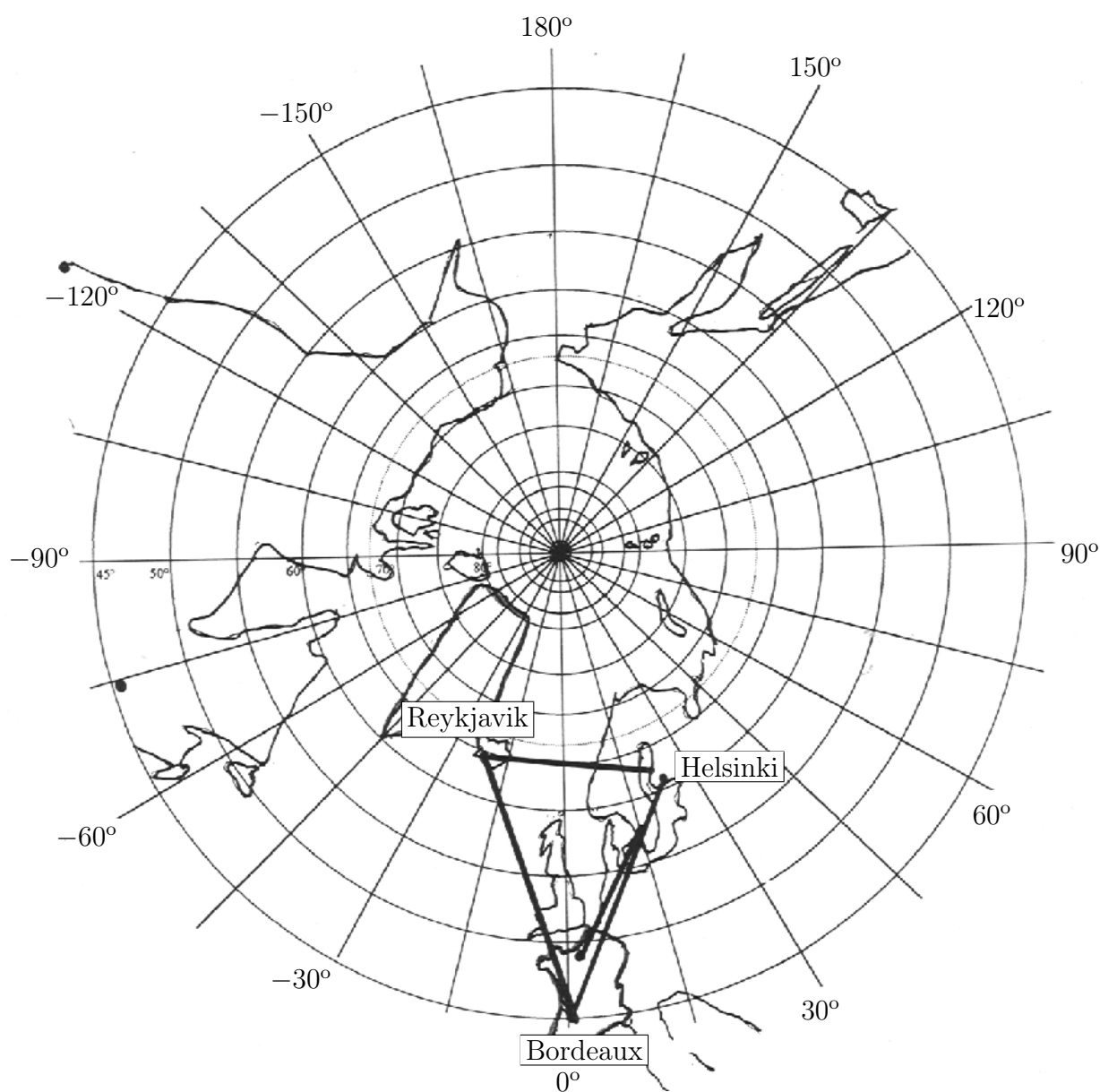
¹Un grand cercle est l'intersection d'une sphère et d'un plan contenant le centre de celle-ci.

Représentation de l'hémisphère Nord obtenue par projection gnomonique



Villes	Latitude φ	Longitude λ
Dakar	14,8	-17
Le Caire	30	31,5
Reykjavik	64	-22

Représentation de l'hémisphère Nord (latitude supérieure à 45°) obtenue par projection gnomonique



Villes	Latitude φ	Longitude λ
Helsinki	60	24
Bordeaux	45	-1
Reykjavik	64	-22

6 Démonstrations

a. Les parallèles (autres que l'équateur) ont pour projetés des cercles centrés sur N'

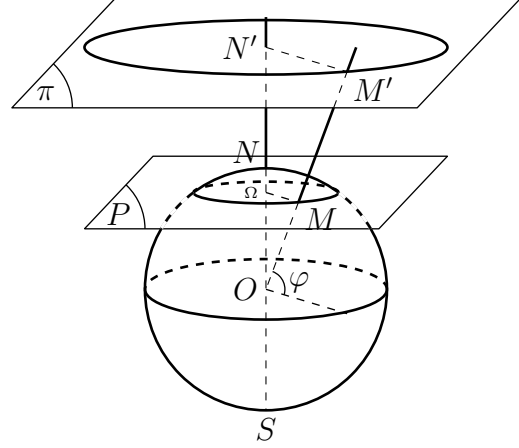
Démonstration :

soit Ω le centre du parallèle et (P) le plan le contenant. La restriction de la projection gnomonique au plan (P) est l'homothétie de centre O envoyant Ω en N' .

Par suite, l'image d'un cercle du plan (P) de centre Ω est un cercle du plan (π) de centre N' .

De plus, $\cotan(\varphi) = \frac{M'N'}{ON'}$, soit :

$$M'N' = ON' \cdot \cotan(\varphi) \text{ avec } 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$



b. Les demi-méridiens ont pour projetés des demi-droites d'origine N'

Démonstration :

on considère le demi-méridien passant par M_1 ($M_1 \neq N$), et on note (Q) le demi-plan de frontière (NS) contenant ce demi-méridien. (Q) et (π) sont perpendiculaires.

Soit $[N'x)$ la demi-droite intersection du demi-plan (Q) et du plan (π) .

Tout point M du demi-méridien se projette en un point M' de $[N'x)$.

Réciproquement, tout point B' de $[N'x)$ est le projeté d'un point du demi-méridien, point d'intersection de (OB') et du demi-méridien.

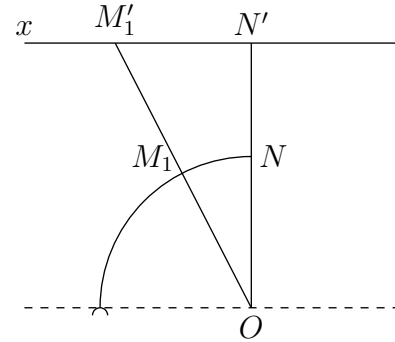


Figure dans le plan (Q)

c. L'image d'un (demi) grand cercle (autre que l'équateur) de l'hémisphère Nord est une droite

Démonstration :

on considère un demi grand cercle, et on note (R) le plan contenant ce demi grand cercle. (R) et (π) sont sécants.

Soit (d) la droite d'intersection du plan (R) et du plan (π) .

Tout point M du demi grand cercle se projette en un point M' de (d) .

Réciproquement, tout point B' de (d) est le projeté d'un point du demi grand cercle : le point d'intersection de (OB') et du demi grand cercle.

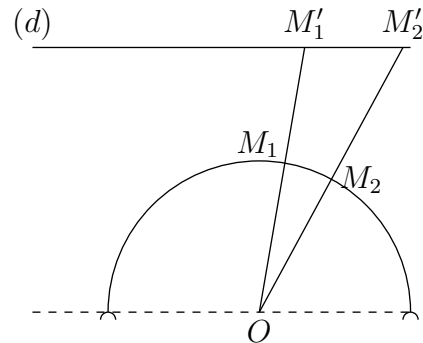


Figure dans le plan (R)

d. Échelle le long d'un parallèle

Considérons le cas où (π) est tangent à la sphère au pôle Nord.

Soit (C) le parallèle de latitude φ , Ω son centre et r son rayon.

Ce parallèle (C) se projette en un cercle de centre N de rayon r' .

Soit M_1 et M_2 deux points de (C) , M'_1 et M'_2 leurs projetés.

Soit ℓ la longueur de l'arc $\widehat{M_1M_2}$ associé à θ , ℓ' celle de l'arc $\widehat{M'_1M'_2}$ correspondant.

On a : $\ell = r\theta$ et $\ell' = r'\theta$, d'où $\frac{\ell'}{\ell} = \frac{r'}{r}$.

Or, en utilisant le théorème de Thalès dans les triangles $OM_1\Omega$ et OM'_1N , on obtient :

$$\frac{NM'_1}{\Omega M_1} = \frac{ON}{O\Omega} \text{ d'où } \frac{r'}{r} = \frac{R}{R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}$$

$$\text{soit } \frac{r'}{r} = \frac{1}{\sin(\varphi)} \text{ et par suite : } \boxed{\frac{\ell'}{\ell} = \frac{1}{\sin(\varphi)}}$$

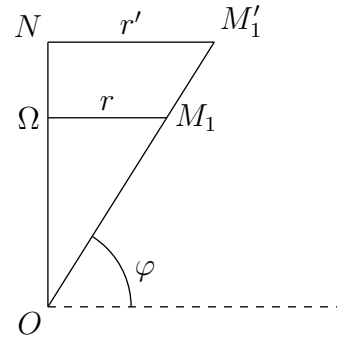
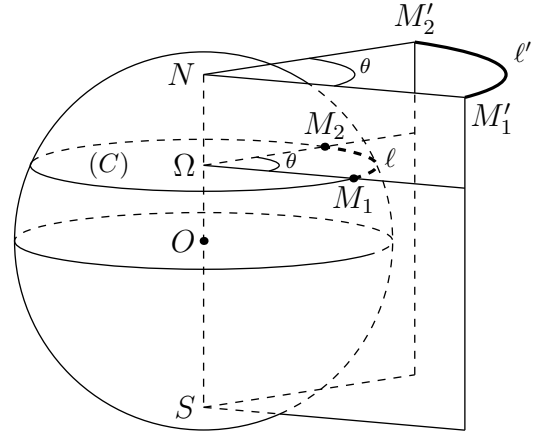


Figure dans le plan (ONM_1)

La déformation est donc faible pour les grandes latitudes (Nord), forte pour les petites latitudes.

Par exemple, si l'on prend $\ell = 100$ km :

Pour $\varphi = 80^\circ$, $\ell' \simeq 102$ km et pour $\varphi = 10^\circ$, $\ell' \simeq 578$ km.

e. Réalisation de la trame de la carte obtenue

En fonction du rayon terrestre R , nous avons :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{r}{R}, \text{ d'où : } r = R \cos(\varphi).$$

$$\text{Or } \frac{r'}{r} = \frac{1}{\sin(\varphi)}, \text{ donc } r' = \frac{R \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}.$$

$$\text{Soit : } \boxed{r' = R \cdot \cotan(\varphi)}$$

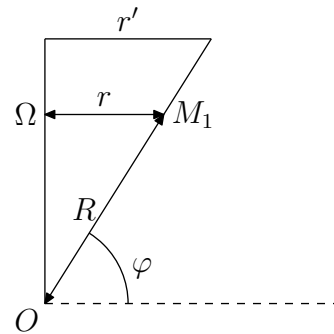


Figure dans le plan (ONM_1)

Presses Universitaires Franc-Comtoises
Université de Franche-Comté
25030 BESANCON CEDEX

Maquette et mise en page François Pétiard (IREM)

Imprimerie : Reprographie du
Département de Mathématiques

Dépôt légal 4^e trimestre 2003

**Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques
de Franche-Comté**

Département de Mathématiques. UFR Sciences et Techniques.

16 route de Gray. 25030 BESANCON CEDEX

Tél. : 03 81 66 62 25 - Fax : 03 81 66 62 34

Mél : iremfc@math.univ-fcomte.fr

Site web : <http://www-irem.univ-fcomte.fr>