

COMMENT FAIRE DU NEUF AVEC DU VIEUX ? OU LE PRINCIPE DE PERMANENCE. QUE VALENT -1×-1 , $\sqrt{-1}$ ET $\text{Log}(-1)$?

*Hombeline LANGUEREAU
IREM de Franche-Comté*

Sommaire

Introduction	21
Remarques	22
Quelques points de repères sur le signe $-$	22
Qu'est ce qu'un nombre négatif ?	22
Que vaut moins par moins ?	23
Introduction de $\sqrt{-1}$ pour la résolution de l'équation du troisième degré.	23
Quelle est la signification de $\text{Log}(-1)$? La controverse Leibniz, Bernoulli	24
Bibliographie	27
Annexes	28

Introduction

Les nombres négatifs ne posent de problème à aucun d'entre nous et pourtant il a fallu lever beaucoup d'obstacles pour les accepter. C'est ce que l'on verra à travers cet exposé. Dès maintenant précisons que L. Carnot, en 1803, se posait des questions existentielles sur les nombres négatifs.

Dans l'histoire des élèves, comme dans l'histoire des mathématiques, on élabore des concepts dans un ensemble fixé que l'on étend ensuite à d'autres en cherchant à préserver les propriétés obtenues.

Quand on peut le faire, il n'y a pas de problème et l'élève peut se demander pourquoi l'enseignant passe autant de temps sur des résultats aussi simples (par exemple démontrer que $2^{1/4} = 2^{2/8}$).

Quand on ne peut pas, c'est l'enseignant qui se demande pourquoi, après un bon cours enrichi de nombreux exemples et contre-exemples, suivi d'exercices en tous genres, il y a beaucoup d'erreurs le jour du contrôle et même beaucoup d'années plus tard.

Remarques

Cet exposé est ciblé sur les nombres négatifs. Bien que le problème ne soit pas complètement étranger, j'ignore zéro (zéro peut marquer un manque, être un chiffre qui représente rien, être un zéro opératoire, ou un zéro origine, c'est-à-dire lié au choix d'une origine sur un axe).

Les problèmes de l'acceptation des nombres négatifs et des nombres complexes se posent tout au long du XVIII^e siècle. En regardant les textes, on constate que les problèmes sont étroitement liés.

Cet exposé doit beaucoup à la culture acquise au sein des IREM, soit lors de conférences ou d'ateliers de la commission Inter-Irem, de colloques ou d'universités d'été, soit à travers les publications citées en bibliographie.

Quelques points de repères sur le signe —

Pour cela voir l'Annexe 1 extraite de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* de Jules Molke tome 1 volume 1 fascicule 1 (10 août 1904).

Plus généralement, le livre de Cajori F. *a history of mathematical notations* est une excellente référence en ce qui concerne l'histoire des notations.

Qu'est ce qu'un nombre négatif ?

Quand on a deux nombres (positifs), il est naturel de les additionner $a + b = c$ puis il est naturel de retrouver a en connaissant b et c , c'est la soustraction. Cette opération n'est pas toujours possible dans \mathbb{N} . Toutefois, au cours de calculs, on peut être amené à écrire $a - b$ avec $b > a$ et aboutir à un résultat juste. En conséquence, dans un premier temps, on acceptera d'écrire $3 - 5$ et même -2 au cours d'un calcul mais on refusera ce résultat, qu'on nommera éventuellement racines fausses, (l'histoire est la même pour les complexes comme nous le verrons plus loin). Les valeurs négatives sont en quelque sorte des intermédiaires de calcul fort pratiques. En revanche écrire -2 de manière isolée demandera du temps.

Les interprétations naturelles de nombres négatifs se font en termes de débit/crédit ou en terme de avance/recule, comme on le remarque dans les textes originaux.

Malgré tout, en 1637, Descartes (1596-1650) propose dans sa géométrie d'accepter comme solution d'une équation non seulement les nombres négatifs (les fausses racines) mais encore ceux qui pourraient comporter une racine de nombre négatif (les nombres imaginaires ou impossibles). Il énonce ce qui deviendra le théorème fondamental de l'algèbre¹ démontré pour la première fois par Gauss en 1799.

Si un problème a pour solution un nombre négatif, on peut soit accepter cette solution, soit conclure que le problème est en quelque sorte mal posé (voir par exemple D'Alembert ou Lacroix).

Les quantités négatives isolées ne sont pas vraiment acceptées par D'Alembert comme en témoigne l'article NÉGATIF de l'Encyclopédie méthodique (voir Annexe 3).

¹Toute équation algébrique de degré n admet n racines complexes.

Ces quantités acceptées, il faut pouvoir les

additionner (les règles sont justifiées par une interprétation externe aux mathématiques) ;

multiplier (le produit de deux nombres négatifs n'a alors qu'un sens interne aux mathématiques) ;

comparer entre elles et aux nombres positifs (en lien avec le double sens de $a \div b = c$ qui peut signifier « combien de fois b est-il contenu dans a ? » à savoir la division euclidienne ou « quelle est la quantité c qui, multipliée par b , vaut a ? »). Ces deux points de vue fourniront une argumentation à d'Alembert (1717-1783) comme le montre le texte en Annexe 4. On remarquera également à travers les textes la difficulté à réunir nombres positifs et nombres négatifs dans un même corps de nombres.

En résumé, on peut conférer au nombre négatif deux statuts :

C'est un nombre qu'il est pratique d'utiliser pour la résolution des équations par exemple.

C'est un nombre que l'on accepte comme solution d'un problème.

Que vaut moins par moins ?

La définition de $+$ par $+$ ou $-$ par $+$ ne pose pas de problème majeur. En effet l'interprétation intuitive donne le résultat. Il n'en n'est pas de même pour $-$ par $-$. C'est là que le principe de permanence peut intervenir. En cherchant à conserver la distributivité par exemple, c'est ce que propose S. Stevin (voir l'Annexe 2). Une autre approche consiste à dire que les nombres négatifs ne sont que des solutions de problèmes mal posés, qu'en conséquence si le problème était bien posé, ils seraient tous les deux positifs ce qui entraîne que leur produit ne peut être que positif (voir l'article NÉGATIF en Annexe 3). C'est cette dernière idée que développe Lacroix dans son ouvrage d'enseignement (voir Annexe 5).

Introduction de $\sqrt{-1}$ pour la résolution de l'équation du troisième degré.

Remarquons que l'équation de degré trois est liée aux problèmes géométriques non résolus par les grecs qui sont la duplication du cube ($x^3 = a$) et la trisection de l'angle (voir le chapitre de mathématiques et mathématiciens consacré à ce sujet par exemple).

Pour nous, la définition d'une équation ne pose pas de problème. Nous classons les équations algébriques par degrés, puis nous cherchons à les résoudre degré après degré. En revanche tant que zéro et les nombres négatifs n'étaient pas acceptés, ce que nous appelons l'équation du second degré était vue non pas comme un seul cas mais comme six (pour n'avoir que des coefficients positifs) et tant que la puissance n'était pas dégagée de l'aspect géométrique à savoir la puissance un représente une longueur, la puissance deux une surface, la puissance trois un volume, les degrés supérieurs n'avaient pas de sens.

Les mathématiciens ont su très tôt résoudre l'équation du second degré, le cas $x^2 + 1 = 0$ est réglé : il n'y a pas de solution.

Le mathématicien arabe Al Khayyam né en 1201 (?) (traduit en français en 1851) essaie de classer les équations algébriques de degré au plus quatre d'après le nombre de leurs termes. Il résout géométriquement les équations du troisième degré par intersections de coniques et fait appel à ses successeurs pour les résoudre algébriquement.

Luca Pacioli écrit en 1494 dans sa Summa qu'il est impossible de résoudre les équations du quatrième degré suivantes $ax^4 + bx^2 = cx$ et $ax^4 + b^x = cx^2$ à coefficients évidemment positifs et que nous ramenons à des équations du troisième degré. Ce qu'il exprimait « *Impossibile censo de censo e censo eguale a cosa* ». C'est au début du XVI^e siècle que les savants se hasarderont à contredire Pacioli et résoudront le problème. Le traité ou figure la résolution de l'équation du troisième degré est celui de J. Cardan paru en 1545 et intitulé (en abrégé) *Ars Magna*.

R. Bombelli résout algébriquement, dans son traité de 1572, l'équation du troisième degré $x^3 = 15x + 4$ qui admet trois racines réelles, et pour laquelle on ne peut éviter le recours aux nombres complexes. D'après Dedron et Itard, c'est dans ce traité qu'apparaît la première étude solide des nombres imaginaires.

Dans un premier temps, on calcule sur des nombres qui n'ont pas de légitimité mais qui permettent d'obtenir les résultats que l'on souhaite ; dans un deuxième, on leur donne un statut, dans un troisième, on travaille dessus.

Si les nombres complexes arrivent au XVI^e siècle, il faudra attendre le début du XIX^e siècle pour leur accorder un véritable statut. C'est l'objet du livre d'Argand : « *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* » paru à Paris en 1806. Comme le titre l'indique, Argand fait appel à une représentation géométrique pour justifier les calculs sur les impossibles qu'il représente comme des segments orientés (c'est quasiment la préhistoire du calcul vectoriel) et il définit ce que nous appelons aujourd'hui le plan d'Argand. Plus tard Gauss, partant de la représentation des réels comme points d'une droite, propose de représenter les complexes comme points d'un plan.

Les références bibliographiques relatives à ce paragraphe sont : *Mathématiques au fil des âges* p. 103, 104, 105 et surtout *Images, imaginaires, imaginations* pp. 123 à 150

Quelle est la signification de $\text{Log}(-1)$? La controverse Leibniz, Bernoulli

Ce paragraphe repose sur les articles de Jean Luc Verley l'un publié par L'APMEP (repris dans l'ouvrage sur les logarithmes à paraître chez Ellipses) et l'autre extrait de *l'abrégé d'histoire des mathématiques*.

Comme nous venons de le voir, les nombres complexes sont introduits par les algébristes italiens de la renaissance pour récupérer les solutions réelles des équations algébriques par l'intermédiaire de formules de résolution non applicables dans le champ réel. Ces nombres complexes furent utilisés avec une confiance croissante jusqu'au milieu du XVII^e siècle. L'un des adeptes les plus fervent de ces « nombres impossibles » fut le mathématicien flamand Albert Girard qui, dans *l'invention nouvelle en algèbre* (1629), énonce le principe de permanence suivant lequel on peut appliquer au champ complexe toutes les identités obtenues dans le champ réel. On retrouve tout au long du XVIII^e siècle ce « recours aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre » : les techniques de manipulations des premiers algébristes utilisaient exclusivement la structure de corps de l'ensemble des nombres complexes et ce concept de « généralité de l'algèbre » est la reconnaissance

implicite de cette structure de corps commune aux réels et aux complexes, avec aussi, bien sûr, le principe du prolongement analytique qui ne sera pas énoncé correctement avant Weierstrass.

Dans la seconde moitié du XVII^e siècle apparaissent les premiers développements en série des fonctions élémentaires. La notion de convergence n'étant pas encore dégagée (on sait qu'il faudra pour cela attendre le début du XIX^e siècle avec Gauss, Abel et Cauchy), les calculs sont en fait effectués dans l'anneau des séries formelles : les propriétés des fonctions élémentaires s'obtiennent par des manipulations algébriques et les techniques de différentiation et d'intégration du calcul infinitésimal ont un caractère formel. Connue sous le nom d'Analyse algébrique, cette étude des algorithmes illimités de nombres réels ou complexes et celle des méthodes spéciales permettant de représenter, à l'aide de tels algorithmes, les fonctions élémentaires sera le cœur des recherches des analystes du XVIII^e siècle.

Ce traitement algébrique, dénué de préoccupations de convergence — c'est inutile —, introduisit systématiquement les nombres complexes dans l'étude des fonctions élémentaires : sachant que, pour x réel, on a :

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$$

alors e^z , pour z complexe, est la série $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Ayant l'exponentielle définie pour les nombres complexes, il est naturel d'étendre la fonction logarithme définie sur les réels aux valeurs complexes en gardant ses propriétés.

En fonction du *principe de permanence* du passage du réel au complexe, on ne mettait pas en doute, au début du XVIII^e siècle, l'*existence* d'une *fonction* (donc univoque!) L , définie pour tout nombre complexe non nul et possédant les propriétés du logarithme réel, à savoir :

1. C'est la fonction réciproque de l'exponentielle, soit $e^{L(z)} = z$
2. Elle vérifie l'équation fonctionnelle du logarithme :

$$L(zz') = L(z) + L(z')$$

3. Elle vérifie l'équation différentielle habituelle :

$$dL = \frac{dz}{z}$$

L'extension au cas complexe de la fonction logarithme allait, pour la première fois, faire apparaître un phénomène qui était resté caché tant que l'argument était réel, celui des fonctions multiformes. Si on cherche un nombre complexe $Z = X + iY$ tel que $e^{X+iY} = x + iy$, pour $z = x + iy \neq 0$, il résulte immédiatement de la périodicité de la fonction exponentielle complexe que si Z_0 est une solution, alors, pour tout entier relatif k , le nombre complexe $Z = Z_0 + 2k\pi i$ est encore solution. Plus précisément, si

$$z = |z|(\cos(t) + i \sin(t))$$

on aura la solution générale :

$$Z = \text{Log}(|z|) + it + 2k\pi i$$

où $\text{Log}(|z|)$ est le logarithme habituel du nombre positif $|z|$. Si l'on convient d'appeler logarithme de z tout Z obtenu ci-dessus, alors la relation fonctionnelle

$$\text{Log}(zz') = \text{Log}(z) + \text{Log}(z')$$

n'est vraie que pour un choix convenable des déterminations de ces logarithmes.

Dans la recherche d'une fonction univoque, les déterminations des valeurs explicites des logarithmes des nombres réels négatifs conduisaient à d'insolubles contradictions et donnèrent lieu à une mémorable controverse épistolaire, dont Euler analyse les éléments, entre Leibniz et Jean Bernoulli dans les années 1712-13 (voir Annexe 6). On retrouve, dans chacune des raisons invoquées, la référence à une des trois propriétés (1), (2), (3). La deuxième version du texte d'Euler (écrit directement en français par son auteur) est disponible sur <http://gallica.bnf.fr>, on peut en lire de larges extraits dans la brochure de l'APMEP.

Les difficultés et contradictions rencontrées ne pouvaient être « dénouées » que par la reconnaissance du caractère multiforme du logarithme complexe, ce qui constituait une rupture par rapport au principe de permanence, une cassure épistémologique par rapport aux conceptions leibniziennes. Euler explique avec beaucoup de détails comment « il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes » ; tout nombre réel positif a une infinité de logarithmes complexes dont un seul est réel : c'est le passage au complexe qui fait apparaître la situation générale de mesure d'un angle, définie à un multiple de 2π près. Sous forme moderne, la démonstration d'Euler pour trouver les logarithmes de $x = \cos(t) + i \sin(t)$, c'est-à-dire les solutions de l'équation $e^y = x$, x donné précédemment, consiste à résoudre d'abord l'équation « approchée » :

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \cos(t) + i \sin(t)$$

qui admet les n solutions :

$$y_n^{(k)} = n \left[\cos\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) - 1 \right] + i n \sin\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

il fait alors tendre n vers l'infini pour chaque k fixé, d'où les solutions :

$$y^{(k)} = i(t + 2k\pi)$$

La manière dont Euler manipule ici les infiniment petits et grands est très caractéristique des débuts du calcul infinitésimal et déconcertante pour le lecteur moderne habitué à la rigueur weierstrassienne.

L'absence des concepts ensemblistes, et des notations correspondantes, rendait difficile l'interprétation de l'équation fonctionnelle 2. Mais il est frappant de voir avec quelle clarté Euler décrit la situation. Le signe « = » a au moins trois significations dans ce texte. L'égalité habituelle entre nombres complexes. L'inclusion ensembliste qu'Euler définit parfaitement en disant qu'il prend, dans les deux égalités $2\text{Log}(a) = \text{Log}(a^2)$ et $2\text{Log}(-a) = \text{Log}(a^2)$, « le signe de = pour marquer que les deux valeurs de $2\text{Log}(a)$ et $2\text{Log}(-a)$ se rencontrent parmi les valeurs de $\text{Log}(a^2)$ ». Quelques lignes plus bas, on trouve la définition de l'addition ensembliste qui donne tout son sens à l'équation fonctionnelle et permet d'écrire :

$$\text{Log}(a^2) = \text{Log}(a) + \text{Log}(a) = \text{Log}(-a) + \text{Log}(-a)$$

l'égalité étant cette fois l'égalité ensembliste.

Bien que le mémoire d'Euler soit pour nous d'une remarquable clarté, il ne convainquit pas tous ses contemporains ; d'Alembert, par exemple, ne parvint pas à concevoir la multivocité. Ce mémoire montrait aussi que l'expression u^v , pour u et v complexes, a, en général, une infinité de valeurs. Par manque de notations convenables, les fonctions multiformes furent encore l'objet de considérations embrouillées jusqu'au début du XIX^e siècle.

Bibliographie

Textes originaux

Site web de la BNF : <http://gallica.bnf.fr>

Les IREM ont reproduit de nombreux textes originaux notamment l'IREM de Paris VII.

L'éditeur J. Gabay s'est spécialisé dans la reproduction des ouvrages anciens.

J. MOLK, *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Paris, Gauthiers-Villars, 1904 (Fac-similé Gabay)

F. S. LACROIX, *Éléments d'algèbre à l'usage de l'école des quatre-nations*, Paris, Veuve Courcier, 1820 (13^e éd.)

S. STEVIN, *L'arithmétique*, 1585.

D'ALEMBERT, *L'encyclopédie*, Panckoucke, 1785 ; (fac-simile ACL ou Gallica.bnf)

A. L. CAUCHY, *Cours d'analyse*, 1821.

L. EULER, *De la controverse entre MM. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*, Mémoires de l'Académie de Berlin (1749), Opera 17 p. 195-232 (sur Gallica)

L. EULER, *Éléments d'algèbre*, trad. Française, an III.

Bibliographie secondaire

IREM, *Mathématiques au fil des âges*, Éd. Gauthiers Villars, 1987.

A. DAHAN-DALMEDICO et J. PEIFFER, *Une histoire des mathématiques*, Seuil, Collection Points Sciences, 1986 (E.O. 1981)

J. DIEUDONNÉ, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, 1986

J. DIEUDONNÉ *et alii*, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1986 (E.O. 1978)

IREM, *Images, imaginaires, imagination*, Ellipses, 1998

IREM, Université Paris VII, brochures 61, 79 et M:A.T.H. tomes 1, 2.

CAJORI, *A history of mathematical notations*, vol. 1, Open Court Paperback, 1974

APMEP, *Fragments d'histoire des mathématiques*, brochure 41, 1981.

D.S.B. (*Dictionary of Scientific Biography*), Scribners.

P. DEDRON et J. ITARD, *Mathématiques et mathématiciens*, Magnard, 1959, nombreuses rééditions.

Annexes

Annexe 1

Encyclopédie des Sciences mathématiques, Tome 1, fasc. 1, Teubner, Leipzig ; Gauthier-Villars, Paris. 1904.

On ne sait rien de certain sur l'origine du signe +, mais on possède des chartes et des manuscrits où la conjonction « et » est représentée par une forme spéciale de la lettre *t*, parfois avec un trait plus ou moins court, en haut à gauche, se raccordant avec la barre verticale du *t* (chartes liégeoises de 1298, 1383, ...); ce trait manque toutefois souvent (Bibl. Darmstadt, ms. 2640, 13^e siècle, fol. 108). Aux 15^e et 16^e siècles on se servait d'ailleurs plutôt du mot « et » que du mot « plus » [cf. *C. Le Paige*, Ann. Soc. scient. Bruxelles 16 (1891/92), p. 74]. D'autres conjectures ont été émises par *A. de Morgan* [Trans. Cambr. philos. Soc. 11 (1871), p. 203, (1864)] et *Ch. Henry* [Revue archéol. (2) 38 (1879), p. 3].

Léonard de Pise écrit souvent « et », rarement « plus », pour indiquer l'addition [cf. Liber abbaci 1202; dans le texte qui nous est parvenu et qui est de 1228, fol. 191; Scritti di *L. Pisano* pubb. da *B. Boncompagni* 1, Rome 1857, p. 414]; il écrit « minus » pour indiquer la soustraction. [Sur l'origine des locutions « plus » et « minus » voir *G. Eneström*, Interméd. math. 1 (1894), p. 119 (Question 5) et Bibl. math. (2) 13 (1899), p. 105.] *N. Chuquet* et *Luc Paciolo* emploient les signes \bar{p} ou \tilde{p} et \bar{m} ou \tilde{m} pour plus (più) et moins (meno, minus), [Triparty, fol. 62, Bull. bibl. 13, p. 710; Summa, fol. 92, ...]; la conjecture suivant laquelle le signe + serait une abréviation du mot « plus » semble toutefois peu probable [cf. *A. de Morgan* Arithmetical Books, Londres 1847, p. 19].

On ne sait rien de certain sur l'origine du signe −; c'est peut-être une simple barre servant aux marchands pour séparer l'indication de la tare, appelée longtemps *minus*, de celle du poids total de la marchandise; d'après *L. Rodet* [Actes Soc. philol. Alençon 8 (1879), p. 105] ce signe serait copié sur un signe hiéroglyphique égyptien. On a aussi cherché l'origine de notre signe − dans le signe employé par *Héron* et *Diophante* et qui se serait transformé en T avant de devenir −. D'autres ont émis l'hypothèse que le signe − aurait son origine dans l'ὀβελός des grammairiens alexandrins. Aucune de ces hypothèses n'est appuyée de preuves plausibles.

Pendant longtemps on a écrit ÷ au lieu de −; au 17^e siècle on rencontre encore le signe ÷ dans les Pays-Bas. *F. Viète* n'écrivait $a - b$ que pour $a > b$; il désigne par $a = b$ la valeur absolue de la différence de a et de b , c'est-à-dire $a - b$ si $a > b$ ou $b - a$ si $a < b$ [cf. *Isagoge*, fol. 5; éd. *F. Schooten*, p. 5; trad. *F. Ritter*, p. 233].

Le zéro apparaît au 17^e siècle comme signe d'une différence entre deux nombres quelconques égaux. *A. Girard* [Inv., sign. D₁ recto] envisage nettement zéro comme un *nombre*; avant lui, on envisageait comme impossible une équation qui n'aurait admis que la racine zéro. Dès le septième siècle, les Hindous ont, il est vrai, essayé de multiplier et de *diviser* par zéro.

Si, dans une construction logique de l'Arithmétique, l'introduction des nombres négatifs doit, peut-être, précéder celle des nombres fractionnaires [au sujet de l'ordre dans lequel il convient de traiter les 4 opérations fondamentales, voir *A. Capelli*, Rendic. Accad. Napoli (3) 6 (1900), p. 138], il est certain que, historiquement, les nombres négatifs ont été employés beaucoup plus tard que les fractions. Les arithméticiens grecs calculaient seulement avec des différences où le terme passif est plus grand que le terme actif. Toutefois *Diophante* ne se préoccupe pas d'établir ce caractère, et, d'autre part, il connaît la règle des signes tant pour la multiplication que pour le passage d'un terme d'un membre dans un autre [Opera 1, p. 12/15). On trouve ensuite chez les Hindous des traces de calcul avec des nombres négatifs; *Brahmagupta* (7^e siècle) dit déjà « dette retranchée de zéro devient un bien, et bien devient une dette ... ; si on doit retrancher un bien d'une dette, ou une dette d'un bien, on en fait la somme. » [Cf. *L. Rodet*, J. asiatique (7) 11 (1878), p. 25]; de même *Bhâskara Açârya* (12^e siècle) qui distingue aussi la valeur positive et la valeur négative d'une racine carrée [Vijaganita (Algèbre) chap. 1, sect. II, n° 3; éd. *H. T. Colebrooke*, Alg., p. 135]; un point placé sur un nombre le transforme en son symétrique. Les Arabes n'allèrent guère plus loin. Au 15^e siècle, *N. Chuquet* interprète des nombres négatifs, [Triparty, fol. 84^b, 151^a, 157^a, 159^b; Bull. bibl. 13 (1880), p. 738; 14 (1881), p. 419, 424, 427], mais il reste assez longtemps sans être imité. *M. Stifel* nomme les nombres négatifs « *numeri absurdi* » par opposition aux « *numeri veri* », mais il les dit *plus petits que zéro* [Arith., fol. 48^a, 248^a, 249^b]. *S. Stevin* fait usage de solutions négatives d'équations

numériques. A. Girard, par ses découvertes sur les éléments de la théorie des équations, leur donne droit de cité au même titre qu'aux nombres naturels ; il dit déjà [Inv., sign. F₃ verso] « la solution par – s'explique en Géométrie en rétrogradant et le – recule là où le + avance ». Les calculs effectués systématiquement sur les nombres négatifs sont postérieurs à R. Descartes.

Annexe 2

Simon Stevin. L'Arithmétique. 1585.

Troisième distinction des quatre numérations de multinomies radicaux entiers.

THÉORÈME

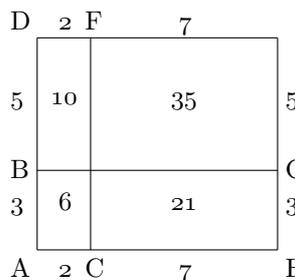
Plus multiplié par plus donne produit plus, & moins multiplié par moins, donne produit plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produit moins.

Explication du donné. Soit $8 - 5$ multiplié par $9 - 7$, en cette sorte : -7 fois -5 font $+35$ ($+35$, par ce que, comme dict le théorème, $-$ par $-$, fait $+$) Puis -7 fois 8 fait -56 (-56 , par ce que, comme dict est au théorème, $-$ par $+$, fait $-$) Et semblablement soit $8 - 5$, multiplié par le 9 , & donneront produits $72 - 45$. Puis ajoutez $+72 + 35$, font 107 . Puis ajoutez les $-56 - 45$, font -101 . Et soustrait le 101 de 107 reste 6 , pour produit de telle multiplication. De laquelle la disposition des caractères de l'opération est telle :

$$\begin{array}{r} 8 \quad - \quad 5 \\ \hline 9 \quad - \quad 7 \\ - \quad 56 \quad + \quad 35 \\ \hline 72 \quad - \quad 45 \\ \hline 6 \end{array}$$

Explication du requis. Il faut démontrer par le dict donné, que $+$ multiplié par $+$, fait $+$, & que $-$ par $-$, fait $+$, & que $+$ par $-$, ou $-$ par $+$, fait $-$.
Démonstration. Le nombre à multiplier $8 - 5$, vaut 3 , & le multiplicateur $9 - 7$ vaut 2 . Mais multipliant 2 par 3 , le produit est 6 . Doncques le produit cy dessus aussi 6 , est le vrai produit. Mais le même est trouvé par multiplication, là où nous avons dict que $+$ multiplié par $+$, donne produit $+$, & $-$ par $-$ donne produit $+$, & $+$ par $-$, ou $-$ par $+$, donne produit $-$, doncques le théorème est véritable.

Autre démonstration géométrique.



Soit AB $8 - 5$ (à sçavoir $AD8 - DB5$) Puis AC $9 - 7$ (à sçavoir $AE9 - EC7$) leur produit sera CB : ou bien selon la multiplication précédente $ED72 - EF56 - DG45 + GF35$, lesquelles nous démontrerons être égales à CB en cette sorte. De tout le $ED + GF$, soustrait EF , & DG , reste CB .
Conclusion. Plus doncques multiplié par plus, donne produit plus. & moins multiplié par moins, donne produit plus. & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produit moins ; ce qu'il falloit démontrer.

Annexe 3

D'Alembert. Encyclopédie méthodique. Panckoucke. 1785.

NÉGATIF, adj. (*Alg.*, quantités négatives, en algèbre, sont celles qui sont affectées du signe $-$, & qui sont regardées par plusieurs mathématiciens, comme plus petites que zéro. Cette dernière idée n'est cependant pas juste, comme on le verra dans un moment. V. QUANTITÉ.

Les quantités négatives sont le contraire des positives : où le positif finit, le négatif commence. Voy.

POSITIF.

Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, & que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données. Dire que la quantité négative est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir. Ceux qui prétendent que 1 n'est pas comparable à -1 , & que

le rapport entre 1 & -1 est différent du rapport entre -1 & 1, sont dans une double erreur : 1° parce qu'on divise tous les jours, dans les opérations algébriques, 1 par -1 : 2° l'égalité du produit de -1 par -1 , & de $+1$ par $+1$, fait voir que 1 est à -1 comme -1 est à 1.

Quand on considère l'exactitude et la simplicité des opérations algébriques sur les quantités *negatives*, on est bien tenté de croire que l'idée précise que l'on doit attacher aux quantités négatives doit être une idée simple, & n'être point déduite d'une métaphysique alambiquée. Pour tâcher d'en découvrir la vraie notion, on doit d'abord remarquer que les quantités qu'on appelle *negatives*, & qu'on regarde faussement comme au-dessous du zéro, sont très souvent représentées par des quantités réelles, comme dans la géométrie, où les lignes *negatives* ne diffèrent des positives que par leur situation à l'égard de quelque ligne au point commun. Voyez COURBE. De là il est assez naturel de conclure que les quantités *negatives*, que l'on rencontre dans le calcul, sont en effet des quantités réelles auxquelles il faut attacher une idée autre que celle qu'on avait supposée. Imaginons, par exemple, qu'on cherche la valeur d'un nombre x , qui, ajouté à 100, fasse 50, on aura, par les règles de l'Algèbre, $x + 100 = 50$, & $x = -50$; ce qui fait voir que la quantité x est égale à 50, & qu'au lieu d'être ajoutée à 100, elle doit en être retranchée; de sorte qu'on aurait dû énoncer le problème ainsi : trouver une quantité x qui, étant retranchée de 100, donne 50 pour reste; en énonçant le problème ainsi, on aurait $100 - x = 50$, & $x = 50$; la forme *negative* de x ne subsisterait plus. Ainsi, les quantités *negatives* indiquent réellement, dans le calcul, des quantités positives, mais qu'on a supposées dans une fausse position. Le signe $-$ que l'on trouve avant une quantité, sert à redresser & à corriger une erreur que l'on a faite dans l'hypothèse, comme l'exemple ci-dessus le fait voir très clairement. Voyez ÉQUATION.

Remarquez que nous ne parlons ici que des quantités *negatives* isolées, comme $-a$, ou des quantités $a - b$, dans lesquelles b est plus grand que a ; car, pour celles où $a - b$ est positif, c'est-à-dire, où b est plus petit que a , le signe ne fait aucune difficulté.

Il n'y a donc point réellement & absolument de quantité *negative* isolée : -3 pris abstraitement ne présente à l'esprit aucune idée; mais, si je dis qu'un homme a donné à un autre -3 écus, cela veut dire en langage intelligible, qu'il lui a ôté 3 écus.

Voilà pourquoi le produit de $-a$ par $-b$, donne $+ab$: car a & b étant précédés du signe $-$ par la supposition, c'est une marque que ces quantités a , b , se trouvent mêlées & combinées avec d'autres à qui on les compare, puisque, si elles étaient considérées comme seules & isolées, les signes $-$, dont elles sont précédées, ne présenteraient rien de net à l'esprit.

Donc ces quantités $-a$ & $-b$ ne se trouvent précédées du signe $-$, que parce qu'il y a quelqu'erreur tacite dans l'hypothèse du problème ou dans l'opération : si le problème était bien énoncé, ces quantités $-a$, $-b$, devraient se trouver chacune avec le signe $+$, & alors leur produit serait $+ab$; car que signifie la multiplication de $-a$ par $-b$? c'est qu'on retranche b de fois la quantité *negative* $-a$: or, par l'idée que nous avons donnée ci-dessus des quantités *negatives*, ajouter ou poser une quantité *negative*, c'est en retrancher une positive; donc, par la même raison, en retrancher une *negative*, c'est en ajouter une positive; & l'énonciation simple et naturelle du problème doit être, non de multiplier $-a$ par $-b$, mais $+a$ par $+b$; ce qui donne le produit $+ab$. Il n'est pas possible, dans un ouvrage de la nature de celui-ci, de développer davantage cette idée; mais elle est si simple, que je doute qu'on puisse lui en substituer une plus nette & plus exacte; & je crois pouvoir assurer que, si on l'applique à tous les problèmes que l'on peut résoudre, & qui renferment des quantités *negatives*, on ne la trouvera jamais en défaut. Quoi qu'il en soit, les règles des opérations algébriques sur les quantités *negatives*, sont admises par tout le monde, & reçues généralement comme exactes, quelqu'idée qu'on attache d'ailleurs à ces quantités. Sur les ordonnées *negatives* d'une courbe & leur situation par rapport aux ordonnées positives, voyez COURBE.

Nous ajouterons seulement à ce que nous avons dit dans cet article, que, dans la solution d'un problème géométrique, les quantités *negatives* ne sont pas toujours d'un côté opposé aux positives, mais d'un côté opposé à celui où l'on les a supposées dans le calcul. Je suppose, par exemple, que l'on ait l'équation d'une courbe entre les rayons partant d'un centre ou pole, que j'appelle y , & les angles correspondants que je nomme z ; en sorte que y , par exemple, $= \frac{aa}{a + b \cos(z)}$, il est évident que, lorsque $\cos(z)$ sera $= -1$, alors, si a est $> b$, y sera dans une position directement contraire à celle qu'elle avait lorsque $\cos(z) = 1$, cependant l'une & l'autre valeur de y seront sous une forme positive dans l'équation. Mais, si a est $< b$, alors la valeur algébrique de y sera *negative*, & y devra être prise du même côté que quand $\cos(z) = 1$, c'est-à-dire, du côté contraire à celui vers lequel on a supposé qu'elle devait être prise. Il se présente encore d'autres cas, en géométrie, où les quantités *negatives* paraissent se trouver du côté où elles ne devraient pas être; mais les principes que nous venons d'établir, & ceux que nous avons posés ou indiqués à l'article ÉQUATION, suffiront pour résoudre ces sortes de difficultés. Nous avons expliqué, dans cet article, en quoi les racines *negatives* des équations différaient des racines imaginaires; c'est que les premières donnent une solution du problème envisagé sous un aspect un peu différent, & qui ne diffère point même dans le fond de la

question proposée ; mais les imaginaires ne donnent aucune solution possible du problème, de quelque manière qu'on l'envisage. C'est que les racines *néga-* tives, avec de légers changements à la question, peuvent devenir positives, au lieu que les imaginaires ne le peuvent jamais. Je suppose que j'aie $bby = x^3 - a^3$, ou en faisant $b = 1$, $y = x^3 - a^3$; lorsque x est $< a$, y devient *négative*, & doit être prise de l'autre côté (voyez COURBE) ; pourquoi cela ? c'est que, si on avait reculé l'axe d'une quantité c , ce qui est absolument arbitraire, en sorte qu'au lieu des coordonnées x & y , on eût eu les coordonnées, x & z , telles que z fût $= y + c$, alors on aurait eu $z = c + x^3 - a^3$; & en faisant $x < a$, z n'aurait plus été *négative*, ou plutôt aurait continué à être encore positive pendant un certain temps : d'où l'on voit que la valeur *néga-* tive de y , $x^3 - a^3$, appartient aussi bien à la courbe que les valeurs positives ; ce qui a été développé plus au long au mot COURBE. Au contraire, si on avait $y = \sqrt{xx - aa}$, & que x fût $< a$, alors on aurait beau transporter l'axe, la valeur de y resterait imaginaire ; ainsi, les racines *négatives* indiquent des solutions réelles, parce que ces racines deviennent positives par de légers changements dans la solution ; mais les racines imaginaires indiquent des solutions impossibles, parce que ces racines ne deviennent jamais ni positives ni réelles par ces mêmes changements. Voyez ÉQUATION & RACINE.

Quand on a dit plus haut que le *négatif* commence où le positif finit, cela doit s'entendre avec cette restriction, que le positif ne devienne pas imaginaire. Par exemple, soit $y = xx - aa$, il est visible que, si $x > a$, y sera positif ; que, si $x = a$, y sera $= 0$, & que, si $x < a$, y sera *négatif*. Ainsi, dans ce cas, le positif finit où $y = 0$, & le *négatif* commence alors ; mais, si on avait $y = \sqrt{xx - aa}$, alors $x > a$ donne y positif & $x = a$ donne $y = 0$; mais $x < a$ donne y imaginaire.

Le passage du positif au *négatif* se fait toujours par zéro, ou par l'infini. Soit, par exemple, $y = x - a$, on aura y positif tant que $x > a$, y *négatif* lorsque $x < a$, & $y = 0$ lorsque $x = a$; dans ce cas, le passage se fait par zéro. Mais, si $y = \frac{1}{x - a}$, on aura y positif tant que x est $> a$, y *négatif* lorsque x est $< a$, & $y = \infty$ lorsque $x = a$; le passage se fait alors par l'infini.

Ce n'est pourtant pas à dire qu'une quantité qui passe par l'infini ou par le zéro, devienne nécessairement de positive, *négative* ; car elle peut rester positive. Par exemple, soit $y = \frac{1}{a - x^2}$, ou $y = \frac{1}{a - x^2}$; lorsque $a = x$, y est $= 0$ dans le premier cas, & $= \infty$ dans le second ; mais soit que a soit $> x$, ou que a soit $< x$, y demeure toujours positive. V. MAXIMUM. (O)

Annexe 4

D'Alembert. Encyclopédie méthodique. Panckoucke. 1785.

QUANTITÉS, en termes d'Algèbre, sont des nombres indéterminés, ou que l'on rapporte à l'unité en général. Voyez NOMBRE.

Les *quantités* sont proprement le sujet de l'algèbre, qui roule entièrement sur leur calcul. Voyez ALGÈBRE & CALCUL.

On marqué ordinairement les *quantités* connues par les premières lettres de l'alphabet, a, b, c, d , &c. & les *quantités* inconnues par les dernières, z, y , &c.

Les *quantités* algébriques sont ou positives ou négatives.

On appelle *quantité positive* celle qui est au-dessus de zéro, & qui est précédée, ou que l'on suppose être précédée du signe $+$, voyez POSITIF.

Quantités négatives sont celles qui sont regardées comme moindres que rien, & qui sont précédées du signe $-$, voyez NÉGATIF.

Puis donc que $+$ est le signe de l'addition, & $-$ celui de la soustraction, il s'ensuit qu'il ne faut pour produire une *quantité positive*, qu'ajouter une *quantité réelle* à rien ; par exemple $0 + 3 = +3$; & $0 + a = +a$. De même pour produire une *quantité*

négative il ne faut que retrancher une *quantité réelle* de 0 ; par exemple $0 - 3 = -3$; & $0 - a = -a$.

Éclaircissons ceci par un exemple. Supposez que vous n'avez point d'argent, & que quelqu'un vous donne cent écus ; vous aurez alors cent écus plus que rien, & ce sont ces cent écus qui constituent une *quantité positive*.

Si au contraire vous n'avez point d'argent, & que vous deviez cent écus, vous aurez alors cent écus moins que rien ; car vous devez payer ces cent écus pour être dans la condition d'un homme qui n'a rien & qui ne doit rien : cette dette est une *quantité négative*.

De même dans le mouvement local, le progrès peut être appelé une *quantité positive*, & le retour une *quantité négative* ; à cause que le premier augmente & le second diminue le chemin qu'on peut avoir déjà fait.

Si l'on regarde en géométrie une ligne tirée vers quelque côté que ce soit comme une *quantité positive*, celle que l'on mènera du côté opposé sera une *quantité négative*. Voyez COURBE.

Selon quelques auteurs, les *quantités* négatives sont les défauts des positives.

Selon ces mêmes auteurs, puisqu'un défaut peut excéder un autre (car, par exemple, le défaut de 7 est plus grand que celui de 3); une *quantité* négative prise un certain nombre de fois, peut être plus grande qu'une autre.

D'où il suit que les *quantités* négatives sont homogènes entr'elles.

Mais, ajoutent-ils, puisque le défaut d'une *quantité* positive prise tel nombre de fois que l'on voudra, ne peut jamais surpasser la *quantité* positive, & qu'elle devient toujours plus défective: les *quantités* négatives sont hétérogènes aux positives; d'où ils concluent que les *quantités* négatives étant hétérogènes aux positives, & homogènes aux négatives, il ne peut y avoir de rapport entre une *quantité* positive & une négative, mais il peut s'en trouver entre deux négatives. Par exemple, $-3a : -5a :: 3 : 5$. Le rapport est ici le même que si les *quantités* étoient positives. Mais ils prétendent observer qu'entre 1 & -1 , & entre -1 & 1, la raison est tout-à-fait différente. Il est vrai pourtant d'un autre côté que $1 : -1 :: -1 : 1$, puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; ainsi la notion que donnent les auteurs des *quantités* négatives n'est pas parfaitement exacte. Voyez NÉGATIF.

Addition des quantités. 1°. Si les *quantités* exprimées par la même lettre ont aussi le même signe, on ajoutera les nombres dont elles sont précédées,

comme dans l'arithmétique ordinaire.

2°. Si elles ont différents signes, l'addition devient une soustraction, & l'on ajoute au restant le signe de la plus grande *quantité*.

3°. On ajoute les *quantités* exprimées par différentes lettres par le moyen du signe +, comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{array}{r} 4a + 2b - 2c - 5d - 9 \\ 5a + 2b + 2c + 2d - 39 \\ \hline 9a + 4b - 3d - 48 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ \hline c \\ \hline a - b + c \end{array}$$

Soustraction des *quantités*, voyez SOUSTRACTION.

Multiplication & division des *quantités*, voyez MULTIPLICATION ou DIVISION.

Continuation des *quantités*, voyez COMBINAISON, PERMUTATION, &c.

1°. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise deux *quantités* positives l'une par l'autre, il en résulte une *quantité* positive.

2°. Quand on multiplie ou qu'on divise une *quantité* négative par une positive, le produit & le quotient sont négatifs.

3°. En multipliant ou divisant deux *quantités* négatives l'une par l'autre, il en résulte une *quantité* positive.

4°. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise une *quantité* positive par une négative, ce qui en vient est une *quantité* négative. (E)

Annexe 5

S. Lacroix. *Éléments d'Algèbre. 13^e édition. 1820.*

61. On apprend par les exemples précédens qu'il peut se trouver dans les énoncés des problèmes du premier degré, certaines contradictions que l'Algèbre fait non seulement connaître, mais dont elle indique encore la rectification en rendant soustractives certaines *quantités* qu'on avait regardées comme additives, ou additives certaines *quantités* que l'on avait regardées comme soustractives, ou en donnant pour les inconnues des valeurs affectées du signe $-$.

Voilà ce qu'il faut entendre lorsqu'on dit communément que les valeurs affectées du signe $-$, et qu'on appelle *solutions négatives*, résolvent, dans un sens opposé à son énoncé, la question où elles se rencontrent.

Il suit de là qu'on peut regarder comme ne formant, à proprement parler, qu'une seule question, celles dont les énoncés sont liés entre eux de manière que les solutions qui satisfont à l'un des énoncés, peuvent, par un simple changement de signe, satisfaire à l'autre.

62. Puisque les *quantités* négatives résolvent, dans un certain sens, les problèmes qui leur donnent naissance, il est à propos d'examiner de plus près l'usage de ces *quantités*, et d'abord de s'assurer de la manière dont il convient d'effectuer les opérations indiquées à leur égard.

On a ci-dessus fait usage des règles des signes, trouvées précédemment pour chacune des opérations fondamentales; mais ces règles n'ont point été démontrées sur des *quantités* isolées. Pour la soustraction, par exemple, on a supposé qu'il fallait retrancher de a l'expression $b - c$, dans laquelle la *quantité* négative $-c$ était précédée d'une *quantité* positive b . On réduirait bien $b - c$ à $-c$, un faisant $b = 0$, ce qui changerait le résultat en $a + c$; mais le raisonnement employé à l'endroit cité, supposant l'existence de la *quantité* b ne paraît pas comprendre ce cas; et comme la théorie des *quantités* négatives étant à la fois l'une des plus importantes et des plus épineuses de l'Algèbre, il est à propos de l'appuyer

sur des bases solides. Pour parvenir à ce but, il faut remonter à l'origine des quantités négatives.

La plus grande soustraction que l'on puisse opérer sur une quantité, c'est de la retrancher d'elle-même ; et dans ce cas, on a zéro pour reste : ainsi, $a - a = 0$. Mais lorsque la quantité à retrancher dépasse celle dont il faut la retrancher, on ne peut plus effectuer en entier la soustraction ; on ne fait qu'opérer, dans la quantité à soustraire, une réduction égale à la quantité dont elle devrait être ôtée. Lorsque de 3, par exemple, il faut retrancher 5, ou qu'on a la quantité $3 - 5$, en ôtant d'abord 3 de 5, on décompose 5 en deux parties 3 et 2 dont la soustraction successive reviendrait à celle de 5, et par là, au lieu de $3 - 5$ on a l'expression équivalente $3 - 3 - 2$ qui se réduit à -2 . Le signe $-$ qui précède 2 montre que c'est ce dont il s'en faut que la soustraction ait pu s'opérer toute entière ; en sorte que si l'on eût ajouté 2 à la première des quantités, on aurait eu $3 + 2 - 5$, ou zéro. On exprime donc, au moyen des signes algébriques, l'idée qu'on doit attacher à la quantité négative $-a$, en formant l'équation $a - a = 0$, ou en regardant les symboles $a - a$, $b - b$, etc. comme équivalents à zéro.

Cela posé, on conçoit que si l'on joint à la quantité quelconque a le symbole $b - b$, qui n'est au fond que zéro, on ne changera point la valeur de cette quantité, et que par conséquent l'expression $a + b - b$ n'est une autre manière d'écrire la quantité a ; ce qui est d'ailleurs évident, puisque les termes $+b$ et $-b$ se détruisent.

Mais ayant, par ce changement de forme, fait entrer dans la composition de a les quantités $+b$ et $-b$, on voit que pour soustraire l'une quelconque de ces quantités, il suffit de l'effacer. Si c'est $+b$ qu'on veut

soustraire de a , on l'effacera, et il restera $a - b$, ce qui s'accorde avec la convention établie n° 2 ; si c'est, au contraire, $-b$, on effacera cette dernière quantité, et il restera $a + b$, comme on le conclurait du n° 20.

À l'égard de la multiplication, on remarquera que le produit de $a - a$ par $+b$, doit être $ab - ab$, parce que le multiplicande étant égal à zéro, le produit doit aussi être zéro ; et le premier terme étant ab , le second doit nécessairement être $-ab$, pour détruire ce premier.

On conclura de là que $-a$ multiplié par $+b$ doit donner $-ab$.

En multipliant a par $b - b$, on aura encore $ab - ab$, parce que le multiplicateur étant égal à zéro, le produit sera aussi égal à zéro ; et il faudra par conséquent que le second terme soit $-ab$ pour détruire le premier $+ab$.

Donc $+a$ multiplié par $-b$ doit donner $-ab$.

Enfin si l'on multiplie $-a$ par $b - b$, le premier terme $-$ du produit étant, d'après ce qui précède, $-ab$, il faudra que le second terme soit $+ab$, puisque le produit doit être nul en même temps que le multiplicateur.

Donc $-a$ multiplié par $-b$ doit donner $+ab$.

En rapprochant ces résultats, on en déduit les mêmes règles que celles du numéro 31.

Le signe d'un quotient, combiné avec celui du diviseur, suivant les règles propres à la multiplication, devant reproduire le signe du dividende, on conclura de ce qui vient d'être dit, que la règle des signes, donne n° 42, convient encore au cas actuel, et que par conséquent *les quantités monômes, lorsqu'elles sont isolées, se combinent, par rapport à leurs signes, de même que lorsqu'elles font partie des polynômes.*

Annexe 6

Leonhardi Euleri. Opera omnia I₁₇

DE LA CONTROVERSE ENTRE MRS. LEIBNIZ ET BERNOULLI SUR LES LOGARITHMES DES NOMBRES NEGATIFS ET IMAGINAIRES

Commentatio 1 6 8 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [5] (1749), 1751, p. 139-179

Quoique la doctrine des logarithmes soit si solidement établie que les vérités qu'elle renferme, semblent aussi rigoureusement démontrées que celles de la Géométrie, les Mathématiciens sont pourtant encore fort partagés sur la nature des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires ; et quand on ne trouve pas cette controverse fort agitée, la raison en est apparemment qu'on n'a pas voulu rendre suspecte la certitude de tout ce qu'on avance dans

les parties pures de la Mathématique, en développant devant les yeux de tout le monde les difficultés et même les contradictions auxquelles les sentimens des Mathématiciens sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires sont assujettis. Car, bien que leurs sentimens puissent être fort differens sur des questions qui regardent la Mathématique appliquée, où les diverses manieres d'envisager les objets et de les ramener à des idées précises peuvent donner lieu

à des controverses réelles, on a toujours prétendu que les parties pures de la Mathématique étoient entièrement délivrées de tout sujet de dispute, et qu'il ne s'y trouvoit rien dont on ne fût en état de démontrer ou la vérité ou la fausseté.

Comme la doctrine des logarithmes appartient sans contredit à la Mathématique pure, on sera bien surpris d'apprendre qu'elle ait été jusqu'ici assujettie à des controverses tellement embarrassées que, de quelque parti qu'on se déclare, on tombe toujours en des contradictions qu'il semble tout à fait impossible de lever. Cependant, si la vérité doit se soutenir partout, il n'y a aucun doute que toutes ces contradictions, quelque ouvertes qu'elles paroissent, ne peuvent être qu'apparentes, et qu'il n'y sauroit manquer des moyens pour sauver la vérité, quoique nous ne sachions point de quel endroit nous puissions tirer ces moyens.

Cette controverse sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires se trouve agitée avec assez de force dans le Commerce littéraire²⁾ entre M. LEIBNIZ et M. JEAN BERNOULLI. Ces deux grands Mathématiciens, à qui nous sommes pour la plupart redevables de l'Analyse des infinis, furent tellement partagés sur cet article, qu'il n'y avoit pas moyen de les mettre d'accord la dessus, quoique l'un et l'autre n'ait eu en vuë que la vérité, et qu'ils fussent également éloignés de soutenir leurs sentimens avec opiniâtreté. Mais chacun a trouvé dans le sentiment de l'autre tant de contradictions, que ç'auroit été une complaisance trop outrée, si l'un avoit changé son sentiment en faveur de l'autre. Car il faut remarquer que les contradictions que ces deux Grands hommes se reprochoient, étoient réelles, et point du tout du nombre de celles qui ne paroissent telles qu'à la partie opposée, entêtée de son propre sentiment.

Pour mettre donc cette remarquable controverse dans tout son jour, j'exposerai ici séparément les sentimens de M. BERNOULLI et de M. LEIBNIZ ; j'y ajouterai ensuite tous les argumens dont chacun s'est servi pour maintenir son sentiment, et enfin je détaillerai les objections qu'on peut faire, tant contre les argumens que contre chaque sentiment même, et je ferai sentir en toutes leurs forces toutes les contradictions auxquelles l'un et l'autre de ces deux sentimens est assujetti, afin qu'on soit d'autant mieux en état de juger combien il doit être difficile de découvrir la vérité et de la garantir contre toutes les objections, après que les deux plus grands hommes y ont travaillé en vain.

²*Virorum celeberr. GOT. GUL. LEIBNITII et IOHAN. BERNOULLII commercium philosophicum et mathematicum*, t. 2, ab anno 1700 ad annum 1716. Lausannae et Genevae 1745, p. 269, 276, 278, 282, 287, 292, 296, 298, 303, 305, 312, 315. A. G.

³L. c. p. 269. A. G.

⁴L. c. p. 276. A. G.

SENTIMENT DE M. BERNOULLI

M. BERNOULLI soutint que les logarithmes des nombres négatifs étoient les mêmes que ceux des nombres affirmatifs, ou que le logarithme du nombre négatif $-a$ étoit égal au logarithme du nombre affirmatif $+a$. Ainsi le sentiment de M. BERNOULLI porte qu'il y a $l - a = l + a$.

M. LEIBNIZ a donné occasion à cette déclaration de M. BERNOULLI, lorsqu'il avança, dans la CXC Epitre du Commerce³⁾, que la raison de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme ou la mesure de cette raison, c. à d. le logarithme de -1 , qui est l'exposant de cette raison, étoit imaginaire. Là dessus, M. BERNOULLI déclara, dans la CXCI Epitre⁴⁾, qu'il n'étoit point de même avis, et qu'il croyoit même que les logarithmes des nombres négatifs étoient non seulement réels, mais aussi égaux aux logarithmes des mêmes nombres pris positivement. M. BERNOULLI fortifia aussi son sentiment par les raisons suivantes.

1. RAISON

Pour prouver que $l - x = l + x$, quelque nombre qu'on marque par x , il recourt aux différentiels ; et puisque le différentiel de $l - x$ est $\frac{-dx}{-x}$ ou $\frac{dx}{x}$ de même que celui de $l + x$, il en conclut que ces quantités mêmes $l - x$ et $l + x$, dont les différentiels sont égaux, doivent être égales entr'elles, et partant qu'il est $l - x = l + x$.

2. RAISON

Cette raison est tirée de la nature de la courbe logarithmique. Pour la faire mieux comprendre, soit *VBM* (Fig. 1, p. 35) une Logarithmique décrite sur l'axe *OAP*, qui est en même tems son asymptote. Soit la soutangente de cette Logarithmique qui est, comme on sait, constante, = 1 ; et que l'appliquée fixe *AB* soit aussi = 1. Cela posé, si l'on nomme une abscisse quelconque $AP = x$, prise depuis le point fixe *A*, et l'appliquée qui y répond $PM = y$, on sait que x exprime le logarithme de y , ou que $x = ly$.

Donc, prenant les différentiels, on aura pour cette courbe logarithmique cette équation différentielle $dx = \frac{dy}{y}$ ou $ydx = dy$. Cette équation demeurant la même, quoiqu'on mette $-y$ au lieu de y , M. BERNOULLI conclut de là que cette courbe *VBM* est accompagnée, en vertu de la loi de continuité, de la branche *vbm*, qui lui est égale et semblable, étant située de l'autre part de l'axe *OP*, de sorte que cet axe soit en même tems un diamètre de la courbe entière. Et partant, puisque la même abscisse *AP* répond, également aux deux appliquées *PM* et *Pm*,

dont l'une est la négative de l'autre, de sorte que posant $PM = y$ il est $Pm = -y$, il s'ensuit que x est aussi bien le logarithme de $-y$ que de $+y$, par conséquent $l - y = l + y$.

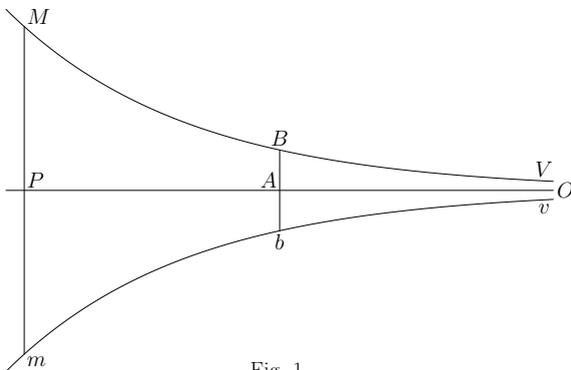


Fig. 1.

3. RAISON

Comme tout revient à prouver que la Logarithmique est composée de deux branches égales, situées de part et d'autre de l'asymtote OP , M. BERNOULLI apporte encore une autre raison qui est, qu'en considérant les courbes comprises dans cette équation plus générale $dx = \frac{dy}{y^n}$ on est d'accord que toutes ces courbes, lorsque l'exposant n est un nombre impair, ont deux branches telles que l'axe sur lequel sont prises les abscisses x , en est un diamètre. Donc il faut que cette propriété ait aussi lieu, si $n = 1$; or dans ce cas, on aura la Logarithmique de l'article précédent; d'où il s'ensuit donc que tant le logarithme de $PM = +y$ que le logarithme de $Pm = -y$ est le même $= AP = x$.

4. RAISON

Puisqu'il est certain, par la nature des logarithmes, que le logarithme d'une puissance quelconque p^n est égal au logarithme de la racine p multiplié par l'exposant n , ou que $lp^n = nlp$, il s'ensuit que prenant pour p un nombre négatif $-a$, il y aura $l(-a)^n = nl(-a)$. Soit $n = 2$, et il sera $l(-a)^2 = 2l(-a)$. Or parce que $(-a)^2 = a^2$, nous aurons $l(-a)^2 = la^2 = 2la$; d'où il s'ensuit que $2l(-a) = 2la$, et partant $l - a = l + a$. Cela se montre plus promptement de cette manière: Puisque $(-a)^2 = (+a)^2$, il sera $l(-a)^2 = l(+a)^2$, ou bien $2l - a = 2l + a$, et par conséquent $l - a = l + a$:

Toutes les autres raisons qu'on peut alléguer pour prouver ce sentiment, se réduisent aisément à une des quatre que je viens d'exposer. Je m'en vai donc étaler les objections qu'on fait contre ce sentiment, et les raisons dont il est appuyé.

1. OBJECTION

M. LEIBNIZ opposa contre la première raison, que la règle de différentier le logarithme d'une quantité variable x , en divisant le différentiel de x par la quantité même x , n'avoit lieu, que lorsque x marquoit une quantité positive, de sorte qu'on se

trompoit en posant le différentiel de $l - x$ égal à $\frac{-dx}{-x}$ ou à $\frac{dx}{x}$. Or il faut avouer que cette objection est non seulement extrêmement faible, n'étant soutenue par aucune raison valable, mais qu'elle renverseroit tout à fait le calcul différentiel des logarithmes. Car, comme ce calcul roule sur des quantités variables, c. à d. sur des quantités considérées en général, s'il n'étoit pas vrai généralement qu'il fût $d.lx = \frac{dx}{x}$, quelque quantité qu'on donne à x , soit positive ou négative, ou même imaginaire, on ne pourroit jamais se servir de cette règle, la vérité du calcul différentiel étant fondée sur la généralité des règles qu'il renferme. Or M. LEIBNIZ n'auroit pas eu besoin de se tenir à cette objection pour maintenir son sentiment, puisqu'il auroit pu attaquer la raison de M. BERNOULLI par une objection beaucoup plus forte que voilà.

2. OBJECTION

M. BERNOULLI voulant prouver par l'égalité des différentiels, qu'il étoit $l - x = l + x$, prouveroit par le même raisonnement que $l2x = lx$; car le différentiel de $l2x$ est $\frac{2dx}{2x} = \frac{dx}{x}$ tout comme celui de lx . Et partant, si le raisonnement de M. BERNOULLI étoit juste, il s'ensuivroit que non seulement $l - x = l + x$, mais aussi que $l2x = lx$ et en général $lnx = lx$, quelque nombre que marque n ; conséquence que M. BERNOULLI lui même n'accorderoit jamais. Or on sait que lorsque les différentiels de deux quantités variables sont égaux, il n'en suit pas davantage que ce que ces quantités variables diffèrent entr'elles d'une quantité constante; et on n'en sauroit conclure qu'elles fussent égales. Ainsi, quoique le différentiel de $x + a$ soit dx aussi bien que celui de x , la conséquence seroit bien fautive, si l'on en vouloit conclure que $x + a = x$. Par cette raison, il est donc clair que, puisque le différentiel de $l - x$ et de $l + x$ est le même $\frac{dx}{x}$, les quantités $l - x$ et $l + x$ ne diffèrent entr'elles que d'une quantité constante, ce qui est également évident, vu que $l - x = l - 1 + lx$. Et de là on comprend aussi aisément que puisque $lnx = lx + ln$, le différentiel de lnx doit être égal au différentiel de lx . Il est vrai que M. BERNOULLI suppose $l - 1 = 0$, de même qu'il est $l1 = 0$, de sorte qu'il seroit $l - x = lx + l - 1 = lx$. Mais comme c'est précisément ce que M. BERNOULLI veut prouver par ce raisonnement, on voit bien que cette supposition ne peut pas être admise.

3. OBJECTION

On peut opposer la même chose contre la seconde raison de M. BERNOULLI, quand il veut prouver par l'équation différentielle de la Logarithmique $ydx = dy$, que cette courbe a deux branches semblables situées de part et d'autre de l'axe. Car, non seulement cette équation demeure la même, si l'on met $-y$ au lieu de y , mais aussi si l'on met $2y$, ou en général ny pour y ; d'où il suivroit que cette courbe

eût une infinité de branches, et que l'abscisse x fût le logarithme commun, non seulement de y et de $-y$, mais aussi de $2y$, et en général, de ny , quelque nombre que soit n . Ainsi, par la même raison qu'on est en droit de nier l'infinité des branches de la Logarithmique, on niera aussi l'existence des deux branches, que M. BERNOULLI veut établir.

4. OBJECTION

Cette objection est encore dirigée contre les deux branches de la courbe logarithmique. Car, quoiqu'on puisse sûrement conclure l'existence d'un diamètre d'une courbe, lorsque son équation entre les coordonnées x et y est telle qu'elle demeure inaltérée, si l'on met $-y$ à la place de y , cependant ce critère n'est juste que lorsque l'équation pour la courbe est algébrique, ou renfermée en termes finis. Car on sait qu'une équation différentielle est beaucoup plus générale que l'équation finie d'où elle a été tirée, et qu'elle renferme une infinité de courbes qui ne sont pas comprises dans l'équation finie. Ainsi l'équation de la parabole $yy = ax$ a pour différentielle $2ydy = adx$; mais cette même équation différentielle convient également à cette équation générale $yy = ax \pm ab$, qui renferme à la fois une infinité de paraboles. Il en est de même de l'équation différentielle de la Logarithmique $ydx = dy$, qui convient aussi bien à cette équation finie $x = lny$, qu'à celle-ci $x = ly$, qu'on a pourtant uniquement en vue. De là, il s'ensuit qu'on ne peut pas juger de la forme d'une courbe, en ne considérant que son équation différentielle.

5. OBJECTION

Celle-ci regarde la troisième raison qui est sans doute beaucoup plus forte. Car, si toutes les courbes comprises dans cette équation générale $dx = \frac{dy}{y^n}$, où n marque un nombre impair, sont douées d'un diamètre, la même propriété doit avoir lieu, si $n = 1$, ce qui est le cas de la Logarithmique. Mais, puisque cette propriété n'est évidente, qu'entant qu'on considère les équations intégrales de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, qu'on peut toujours assigner algébriquement hormis le cas $n = 1$, de même manière qu'on doit excepter ce cas, lorsque la question roule sur l'intégrabilité de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, on sera en droit de faire la même exception, lorsqu'il s'agit du jugement d'un diamètre. Donc, si l'on ne peut pas prouver par quelque autre raison, que la Logarithmique ait un diamètre, cet argument tiré de l'équation générale $dx = \frac{dy}{y^n}$ n'est pas convaincant. Pour en montrer plus clairement l'insuffisance, je ferai voir, même dans les courbes algébriques, des cas où une équation générale renferme des courbes toutes douées d'un diamètre, et que néanmoins il en faut excepter un cas particulier. Qu'on considère cette équation

$$y = \sqrt{ax + \sqrt[4]{a^3(b+x)}},$$

et on ne doutera pas de conclure que les courbes exprimées par cette équation n'ayent un diamètre, puisqu'en réduisant l'équation $y = \sqrt{ax + \sqrt[4]{a^3(b+x)}}$ à la rationalité, on obtient une équation du huitième degré, où tous les exposants de y sont des nombres pairs. Cependant, quelque sûre que paraisse cette conclusion, il en faut pourtant excepter le cas où $b = 0$; car alors l'équation $y = \sqrt{ax + \sqrt[4]{a^3x}}$ étant délivrée des signes radicaux ne monte qu'au quatrième degré devenant

$$y^4 - 2axy - 4aaxy + aaxx - a^3x = 0,$$

laquelle, à cause du terme $4aaxy$, est destituée de diamètre. De tout cela, il s'ensuit donc que cet argument de M. BERNOULLI n'est pas assez rigoureux pour démontrer son sentiment.

6. OBJECTION

Je passe à la quatrième raison de M. BERNOULLI, qui est sans doute la plus forte; car on ne sauroit révoquer en doute aucun article qui y sert de fondement, sans renverser les principes les mieux établis de l'Analyse et de la doctrine des logarithmes. Car on ne sauroit nier que $(-a)^2 = (+a)^2$, donc il n'y a aucun doute que leurs logarithmes ne soient égaux, c. à d. $l(-a)^2 = l(+a)^2$. Ensuite, il est également certain qu'il est en général $lp^2 = 2lp$, donc il y a $l(-a)^2 = 2l - a$ et $l(+a)^2 = 2l + a$; et partant, il sera sans contredit $2l - a = 2l + a$. Les moitiés de ces deux quantités seront donc aussi incontestablement égales entr'elles et, par conséquent, il sera $l - a = la$, tout comme M. BERNOULLI le soutient.

Mais si ce raisonnement est juste, on en tirera aussi d'autres conséquences, que personne, et encore moins M. BERNOULLI, ne sauroit accorder; car on prouvera de la même façon que les logarithmes des quantités imaginaires seroient aussi bien réels que ceux des nombres négatifs. Car, il est certain que $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$, donc il sera aussi $l(a\sqrt{-1})^4 = la^4$, et de plus $4l(a\sqrt{-1}) = 4la$, par conséquent $l(a\sqrt{-1}) = la$. Outre cela, puisqu'il est $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = a^3$, il sera $l\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = la^3$, et partant $3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = 3la$, donc $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = la$, ce qu'on ne sauroit admettre sans renverser toute la doctrine des logarithmes.

Il seroit donc, selon le système de M. BERNOULLI, non seulement $l - 1 = l1 = 0$, mais aussi $l\sqrt{-1} = 0$, $l - \sqrt{-1} = 0$ et $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$. Or, M. BERNOULLI ayant si heureusement réduit la quadrature du cercle aux logarithmes des nombres imaginaires, si le logarithme de $\sqrt{-1}$ étoit $= 0$, toute cette belle découverte seroit fautive, par laquelle il a fait voir que le rayon est à la quatrième partie de la circonférence, comme $\sqrt{-1}$ à $l\sqrt{-1}$. Donc, posant le

rapport du diamètre à la circonférence = $1 : \pi$, il sera $\frac{1}{2}\pi = \frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ et partant $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui seroit absurde, s'il étoit $l\sqrt{-1} = 0$. Il n'est pas donc vrai que $l\sqrt{-1} = 0$, d'où il faut conclure que quelque solide que paroisse la 4^{me} raison, elle doit être sujette à caution, puisqu'il en suivroit aussi bien $l\sqrt{-1} = 0$ que $l - 1 = 0$. Par conséquent, on ne peut pas dire que le sentiment de M. BERNOULLI soit suffisamment prouvé.

Il est ici fort étonnant que, soit qu'on embrasse le sentiment de M. BERNOULLI, ou qu'on le rejette, on tombe également en des embarras insurmontables, et même en des contradictions. Car, si l'on soutient que $l - a = l + a$ ou $l - 1 = l + 1 = 0$, on est obligé d'avouër qu'il est aussi $l\sqrt{-1} = 0$, puisque $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}l - 1$. Or il seroit non seulement absurde de soutenir que les logarithmes des quantités imaginaires ne soient pas imaginaires, mais il seroit aussi faux que $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui est néanmoins rigoureusement prouvé. Ainsi, en se déclarant pour le sentiment de M. BERNOULLI, on tombe en contradiction avec des vérités très solidement établies.

Posons que le sentiment de M. BERNOULLI soit faux, et qu'il n'y ait point $l - 1 = 0$; car c'est à quoi se réduit le sentiment de M. BERNOULLI; et on sera obligé d'accuser de fausseté quelque ces opérations sur lesquelles le raisonnement de la 4^{me} raison est fondé; ce qu'on ne pourra faire non plus sans tomber en contradiction avec d'autres vérités démontrées. Pour rendre cela plus évident, soit $l - 1 = \omega$, et s'il n'est pas $\omega = 0$, son double 2ω ne sera non plus $= 0$, or 2ω est le logarithme du carré de -1 , lequel étant $= +1$, le logarithme de $+1$ ne seroit plus $= 0$, ce qui est une nouvelle contradiction. De plus, $-x$ est aussi bien $= -1 \cdot x$ que $= \frac{x}{-1}$, donc $l - x = lx + l - 1 = lx - l - 1$; il seroit donc $l - 1 = -l - 1$, sans qu'il fût $l - 1 = 0$; or c'est une contradiction de dire qu'il soit $+a = -a$ sans qu'il soit $a = 0$.

Soit donc qu'on dise l'une ou l'autre de ces deux choses; ou que le sentiment de M. BERNOULLI est vrai ou qu'il est faux, on se plonge, également dans le plus grand embarras, ayant à combattre avec des contradictions ouvertes. Cependant, il faut absolument, ou que ce sentiment soit vrai ou qu'il soit faux, et il ne paroît point d'autre parti à prendre. Quel moyen donc de se tirer d'affaire et de sauver la vérité contre de si grandes contradictions? Je passe à l'examen du sentiment de M. LEIBNIZ.

SENTIMENT DE M. BERNOULLI

M. LEIBNIZ soutint que les logarithmes de tous les nombres négatifs, et à plus forte raison ceux des nombres imaginaires, étoient imaginaires; ou, puisque $l - a = la + l - 1$, il soutint que $l - 1$ étoit une quantité imaginaire.

J'ai déjà remarqué que M. LEIBNIZ soutenoit que la raison de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme de cette raison ou $l - 1$ étoit imaginaire. On voit bien que toutes les objections faites contre le système de M. BERNOULLI servent à fortifier ce sentiment, et que les raisons alléguées pour le sentiment de M. BERNOULLI doivent être contraires à celui de M. LEIBNIZ. Cependant, on peut apporter des raisons particulières pour confirmer le sentiment de M. LEIBNIZ, qui seront le sujet de mon examen qui suit.

1. RAISON

Ayant fait voir que le logarithme du nombre $1 + x$ est égal à la somme de cette serie

$$l(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \text{etc.},$$

d'où l'on voit d'abord, que si $x = 0$, il doit être $l1 = 0$, maintenant pour avoir le logarithme de -1 , il faut mettre $x = -2$; d'où l'on obtient

$$l - 1 = -2 - \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{5} \cdot 32 - \frac{1}{6} \cdot 64 - \text{etc.}$$

Or, il n'y a aucun doute que la somme de cette serie divergente ne sauroit être $= 0$; donc, il est certain que $l - 1$ n'est pas $= 0$. Le logarithme de -1 sera donc imaginaire, puisqu'il est d'ailleurs clair qu'il ne sauroit être réel, c. à d. ou positif ou négatif.

2. RAISON

Soit $y = lx$, et posant e pour le nombre dont le logarithme $= 1$, dont la valeur approchée est, comme on sait, $e = 2,718281828459$, puisqu'il sera $yle = lx$, on en tirera $x = e^y$. Ainsi le logarithme du nombre x étant l'exposant d'une puissance de e qui est égale au nombre x , il est clair qu'aucun exposant réel d'une puissance de e ne sauroit produire un nombre négatif, et partant, pour que e^y devienne -1 , ni $y = 0$, ni aucun nombre réel mis pour y sauroit remplir cette condition. Et posant en général pour x un nombre négatif $-a$, dont on suppose le logarithme $= y$, l'équation $e^y = -a$ sera toujours impossible, ou la valeur de y imaginaire.

3. RAISON

Puisqu'en général la valeur de e^y s'exprime par cette serie infinie

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{y^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.},$$

qui est toujours convergente, quelque grand nombre qu'on mette pour y , de sorte que les objections tirées de la nature de suites divergentes, comme dans la première raison, ne trouvent pas lieu ici, ainsi le logarithme du nombre x étant posé $= y$, on aura

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.},$$

et partant, si y marque le logarithme de -1 , ou qu'il soit $x = -1$, on aura cette égalité

$$-1 = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.},$$

à laquelle, comme il est d'abord clair, ne sauroit satisfaire la valeur $y = 0$, vu qu'il en résulteroit $-1 = +1$. Par conséquent, il est certain que le logarithme de -1 n'est pas $= 0$.

Je me contente d'avoir apporté ces trois raisons, puisque les autres argumens par lesquels on peut confirmer le sentiment de M. LEIBNIZ, sont déjà contenus dans les objections faites contre le système de M. BERNOULLI. Cependant, ces trois raisons que je viens d'exposer, sont sujettes aux objections suivantes.

1. OBJECTION

Contre la première raison, on dira d'abord que l'accroissement continue des termes qui sont tous négatifs, de cette suite

$$-2 - \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{5} \cdot 32 - \frac{1}{6} \cdot 64 - \text{etc.}$$

n'est pas une marque sûre que la somme de cette suite ne sauroit être $= 0$. Car si cette série géométrique

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - \text{etc.}$$

donne pour le cas $x = -2$ celle-ci

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{etc.}$$

et pour le cas $x = -3$ celle-ci

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \text{etc.},$$

pourquoi, dira-t-on, ne seroit il pas possible que la somme d'une série dont les termes croissent, ayant partout le même signe, ne fût $= 0$. Pour en donner un exemple, on n'a qu'à ajouter à la dernière série termes pour termes celle-ci

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$$

et on aura effectivement

$$0 = 2 + 2 + 10 + 26 + 82 + 242 + 730 + \text{etc.}$$

Donc, si la somme de cette série est $= 0$, quelle absurdité seroit-il donc de soutenir qu'il fût aussi

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{5} \cdot 32 - \frac{1}{6} \cdot 64 - \text{etc.},$$

et partant, la première raison n'est pas convaincante.

2. OBJECTION

La seconde raison est telle qu'on pourroit aussi s'en servir pour prouver le sentiment opposé. Car, puisqu'il y a $x = e^y$ supposant y le logarithme du nombre x ; toutes les fois que y est une fraction ayant pour dénominateur un nombre pair, il faut avouer qu'alors la valeur de e^y et partant aussi de x , est aussi bien négative qu'affirmative. Ainsi, si $\frac{m}{2n}$ est un logarithme, le nombre x qui lui répond étant $e^{m:2n} = \sqrt{e^{m:n}}$, sera tant affirmatif que négatif; de sorte

que dans ce cas, tant x que $-x$ aura le même logarithme $\frac{m}{2n}$. Donc, puisque les logarithmes ne sont pas des nombres rationnels, et par conséquent équivalens à des fractions dont les numérateurs et dénominateurs sont infiniment grands, on pourra toujours regarder les dénominateurs comme des nombres pairs; il s'ensuit que le même logarithme qui convient au nombre positif $+x$, conviendra aussi au nombre négatif $-x$.

3. OBJECTION

La troisième raison est sans doute la plus forte, puisqu'elle semble exclure absolument les nombres négatifs du nombre de ceux à qui répondent des logarithmes réels. Car il est clair que, quelque nombre réel qu'on mette pour y , la valeur de cette série

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

ne sauroit jamais devenir négative, de sorte qu'aucun logarithme réel ne sauroit répondre à un nombre négatif. Cependant, cette série n'étant vraie qu'entant qu'elle découle de la formule finie e^y , les objections précédentes ont ici également lieu. Car, si e^y peut donner un nombre négatif, il importe fort peu, si la série qui lui est égale en donne aussi un ou non? Pour reconnoître cela, on n'a qu'à considérer une formule radicale, comme $\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$, qui est aussi

bien $\frac{+1}{\sqrt{(1-x)}}$ que $\frac{-1}{\sqrt{(1-x)}}$, quoique la série égale

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \text{etc.}$$

ne donne que sa valeur affirmative, quelque nombre qu'on mette pour x .

M. LEIBNIZ ne manqueroit pas de répondre à ces objections; et comme la première ne prouve pas le contraire de son sentiment, et qu'elle ne rend que douteuse la première raison, il ne perdrait rien de renoncer à cette première raison, et de s'en tenir principalement aux autres. Car, au fond, la seconde objection ne détruit point son sentiment qui se réduit uniquement à prouver que $l - 1$ n'est pas $= 0$; or la seconde objection ne porte aucune atteinte à cela, vu que si e^y doit être $= -1$, l'exposant y ne sauroit être aucune fraction de la forme $\frac{m}{2n}$, pour que le signe radical puisse fournir une

valeur négative. Car on conviendra aisément que, soit qu'on mette pour y un nombre affirmatif plus grand que zéro, ou un nombre négatif quelconque pour y , la valeur de la puissance e^y ne devient jamais $= -1$. Donc, si y n'est pas imaginaire, il faudroit qu'il fût $e^y = -1$ dans le cas $y = 0$. Mais dans ce cas s'évanouît toute ambiguïté de signes, qui pourroit avoir lieu à cause des signes radicaux, et il est indubitablement $e^0 = +1$. Et si l'on vouloit dire qu'on put regarder 0 comme $\frac{0}{2}$, et e^0 comme $\sqrt{e^0} = \sqrt{1}$, dont la valeur seroit aussi $= -1$, ce

seroit une exception fort foible, puisque par la même raison on prouveroit que $-a = +a$; car, posant $a = a^{\frac{2}{2}} = \sqrt{a^2}$, on en tireroit aussi bien $a = -a$ que $a = +a$. Pour prévenir ces sortes de conséquences fausses, on n'a qu'à remarquer qu'une telle expression $a^{\frac{m}{2n}}$ n'a deux valeurs, l'une affirmative et l'autre négative, que lorsque la fraction $\frac{m}{2n}$ est réduite à ses plus petits termes, et que le dénominateur demeure encore un nombre pair. Ainsi, comme la valeur de ces puissances, a^1, a^2, a^3, a^4 , etc. n'est pas ambiguë, aussi celle-cy a^0 ne sauroit être ambiguë. Il est donc toujours $a^0 = +1$, ce qui suffit pour détruire la seconde objection ; et la troisième n'a aucune force qu'entant que la seconde subsiste.

Il paroît donc que le sentiment de M. LEIBNIZ est mieux fondé, puisqu'il n'est pas contraire à la découverte de M. BERNOULLI, qu'il est

$$l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1},$$

puisque M. LEIBNIZ soutient que le logarithme de -1 , et à plus forte raison celui de $\sqrt{-1}$, est imaginaire. Mais, en adoptant le sentiment de M. LEIBNIZ, on se jette dans les difficultés et contradictions susmentionnées. Car, si $l-1$ étoit imaginaire, son double, c. à d. le logarithme de $(-1)^2 = +1$, le seroit aussi, ce qui ne convient pas avec le premier principe de la doctrine des logarithmes, en vertu duquel on suppose $l+1 = 0$.

De quelque côté donc qu'on se tourne, soit qu'on embrasse le sentiment de M. BERNOULLI ou celui de M. LEIBNIZ, on rencontre toujours de si grands obstacles à maintenir son parti, qu'on ne se sauroit mettre à l'abri des contradictions. Cependant, il semble que si l'un de ces deux sentimens est faux, l'autre doit nécessairement être vrai, et qu'il n'y a point de milieu à choisir. Voilà donc une question extrêmement importante, qui est d'établir la doctrine des logarithmes de telle sorte qu'elle ne soit plus assujettie à aucune contradiction.

Mais, après avoir bien pesé les contradictions qui se trouvent de part et d'autre, on sera porté à croire qu'une telle conciliation est une chose tout à fait impossible ; et les ennemis des Mathématiques ne manqueront pas d'en tirer des conséquences fort fâcheuses contre la certitude de cette science. Car, quand les Pyrrhoniens ont attaqué toutes les sciences, on conviendra aisément qu'il s'en faut beaucoup que les objections qu'ils ont apportées contre aucune science, approchent seulement, à l'égard de leur solidité, des objections que je viens d'exposer contre la doctrine des logarithmes.

Cependant, je ferai voir si clairement, qu'il n'y restera plus le moindre doute, que cette doctrine est solidement établie, et que toutes les difficultés susmentionnées ne tirent leur origine que d'une

seule idée peu juste ; de sorte que, dès qu'on rectifiera cette idée, toutes ces difficultés et contradictions, quelque fortes qu'elles ayent pu paroître, s'évanouiront d'abord, et alors toute cette doctrine des logarithmes se soutiendra si bien, qu'on sera en état de résoudre aisément toutes les objections qui ont paru irrésolubles auparavant. Sans ce développement, qui a pourtant été inconnu jusqu'ici aux Mathématiciens, je ne sai pas de quel oeil on devoit envisager la doctrine des logarithmes : d'un côté, on devoit avouer qu'elle est vraie, et aussi solidement établie qu'aucune autre partie de l'Analyse ; or de l'autre côté, on ne sauroit disconvenir que cette même doctrine seroit assujettie à des contradictions auxquelles il seroit impossible de répondre. On seroit par conséquent obligé d'avouer que la Mathématique, et même l'Analyse, renferme des mystères incompréhensibles à nos esprits. Ensuite, si ces mystères n'ont été tels qu'à cause d'une seule idée qui n'étoit pas entièrement exacte, on en tirera cette conséquence fort importante, qu'il est extrêmement dangereux de juger des choses dont on ne se peut former que des idées imparfaites : or il est bien certain que hormis les Mathématiques, le nombre des idées distinctes et complètes est fort petit.

DENOUEMENT DES DIFFICULTES PRECEDENTES

Il faut d'abord avouer que si l'idée que Mrs. LEIBNIZ et BERNOULLI ont attachée au terme de logarithme, et que tous les Mathématiciens ont eue jusqu'ici, étoit parfaitement juste, il seroit absolument impossible de délivrer la doctrine des logarithmes des contradictions que je viens de proposer. Or, l'idée des logarithmes étant tirée de leur origine, dont nous avons une parfaite connoissance, comment seroit-il possible qu'elle fût défectueuse ? Lorsqu'on dit que le logarithme d'un nombre proposé est l'exposant de la puissance d'un certain nombre pris à volonté, laquelle devient égale au nombre proposé ; il semble qu'il ne manque rien à la justesse de cette idée. Cela est aussi bien vrai ; mais on accompagne communément cette idée d'une circonstance qui ne lui convient point : c'est qu'on suppose ordinairement, presque sans qu'on s'en aperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un seul logarithme, et pour peu qu'on y réfléchisse, on trouvera que toutes les difficultés et contradictions dont la doctrine des logarithmes sembloit embarrassée, ne subsistent qu'entant qu'on suppose qu'à chaque nombre ne répond qu'un seul logarithme. Je dis donc, pour 'faire disparoître toutes ces difficultés et contradictions, qu'en vertu même de la définition donnée, il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes ; ce que je démontrerai dans le theoreme suivant.

THEOREME

Il y a toujours une infinité de logarithmes qui conviennent également à chaque nombre proposé ; ou, si y marque le logarithme du nombre x , je dis que y renferme une infinité de valeurs différentes.

DEMONSTRATION

Je me bornerai ici aux logarithmes hyperboliques, puisqu'on sait que les logarithmes de toutes les autres especes sont à ceux-cy dans un rapport constant ; ainsi, quand le logarithme hyperbolique du nombre x est nommé $= y$, le logarithme tabulaire de ce même nombre sera $= 0,4342944819 \dots y$.

Or, le fondement des logarithmes hyperboliques est que, si ω signifie un nombre infiniment petit, le logarithme du nombre $1 + \omega$ sera $= \omega$, ou que $l(1 + \omega) = \omega$. De là il s'ensuit que $l(1 + \omega)^2 = 2\omega$, $l(1 + \omega)^3 = 3\omega$ et en général

$$l(1 + \omega)^n = n\omega.$$

Mais, puisque ω est un nombre infiniment petit, il est évident que le nombre $(1 + \omega)^n$ ne sauroit devenir égal à quelque nombre proposé x , à moins que l'exposant n ne soit un nombre infini. Soit donc n un nombre infiniment grand et qu'on pose

$$x = (1 + \omega)^n$$

et le logarithme de x , qui a été nommé $= y$ sera $y = n\omega$. Donc, pour exprimer y par x , la première formule donnant $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$ et $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$, cette valeur étant substituée pour ω dans l'autre formule produira

$$y = nx^{\frac{1}{n}} - n = lx.$$

D'où il est clair que la valeur de la formule $nx^{\frac{1}{n}} - n$ approchera d'autant plus du logarithme de x , plus le nombre n sera pris grand, et si l'on met pour n un nombre infini, cette formule donnera la vraie valeur du logarithme de x . Or, comme il est certain que $x^{\frac{1}{2}}$ a deux valeurs différentes, $x^{\frac{1}{3}}$ trois, $x^{\frac{1}{4}}$ quatre et ainsi de suite, il sera également certain que $x^{\frac{1}{n}}$ doit avoir une infinité de valeurs différentes, puisque n est un nombre infini. Par conséquent, cette infinité de valeurs différentes de $x^{\frac{1}{n}}$ produira aussi une infinité de valeurs différentes pour lx , de sorte que le nombre x doit avoir une infinité de logarithmes. C. Q. F. D.

De là, il s'ensuit que le logarithme de $+1$ n'est pas seulement $= 0$, mais qu'il y a encore une infinité d'autres quantités dont chacune est également le logarithme de $+1$. Cependant, on comprend aisément que tous ces autres logarithmes, hormis le premier 0 , seront des quantités imaginaires ; de sorte que dans le calcul, on est en droit de ne regarder que 0 comme le logarithme de $+1$, tout de même que lorsqu'il s'agit de la racine cubique de 1 , on ne se sert que de 1 , quoique ces quantités imaginaires

$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ soient également des racines cubiques de 1 . Mais quand on veut comparer le logarithme de 1 avec les logarithmes de -1 , ou de $\sqrt{-1}$, qui sont tous, à ce que je ferai voir dans la suite, imaginaires, il faut considérer le logarithme de 1 dans toute son étendue ; et alors toutes les difficultés et contradictions rapportées cy-dessus disparaîtront d'elles mêmes.

Car, soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, etc. les logarithmes imaginaires de l'unité, qui lui répondent aussi bien que 0 , et on comprendra aisément qu'il peut être $2l - 1 = l + 1$, quoique tous les logarithmes de -1 soient imaginaires ; car, pour satisfaire à l'équation $2l - 1 = l + 1$, il suffit que le double de tous les logarithmes de -1 se trouvent parmi les logarithmes imaginaires de $+1$. De même, puisque $4l\sqrt{-1} = l + 1$, chaque logarithme de $\sqrt{-1}$ multiplié par 4 se doit rencontrer dans la série $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, etc. Ainsi, les égalités $2l - 1 = l + 1$ et $4l\sqrt{-1} = l + 1$ se peuvent maintenir, sans qu'on soit obligé de soutenir qu'il soit ou $l - 1 = 0$ ou $l\sqrt{-1} = 0$, comme M. BERNOULLI a prétendu. Mais tout cela sera mis dans tout son jour, quand je déterminerai actuellement tous les logarithmes de chaque nombre proposé, ce qui sera le sujet des problèmes suivants.

PROBLEME 1

Déterminer tous les logarithmes qui répondent à un nombre affirmatif proposé $+a$ quelconque.

SOLUTION

Puisque a est un nombre positif, il aura certainement un logarithme réel qui se trouve par les règles assés connus. Soit donc A ce logarithme réel du nombre a , et puisque $a = 1 \cdot a$, il sera $la = l1 + A$: ou bien, chaque logarithme de l'unité étant ajouté à A , donnera un logarithme du nombre proposé a ; et, pour trouver tous ses logarithmes, on n'a qu'à chercher tous les logarithmes de l'unité $+1$. Prenant donc y pour marquer un logarithme quelconque de $+1$, les valeurs de y doivent être tirées de l'équation du theoreme en y mettant $x = 1$, et on aura cette équation

$$y = n1^{\frac{1}{n}} - n,$$

qui se change en

$$1 + \frac{y}{n} = 1^{\frac{1}{n}}$$

et la délivrant des exposans rompus, on aura

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = 1$$

où n marque un nombre infini. Cette équation, étant maintenant pour ainsi dire rationnelle, chacune de ses racines donnera une valeur convenable pour y , c'est à dire un logarithme de $+1$. Or, pour trouver toutes les racines de cette équation, on sait qu'il les faut tirer des facteurs de la formule $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1$, en supposant chaque facteur $= 0$. Mais, en général, il est

Comment faire du neuf avec du vieux ? ou le principe de permanence

démontré que d'une telle formule $p^n - q^n$ un facteur quelconque est

$$p^2 - 2pq \cos \frac{2\lambda\pi}{n} + q^2,$$

où λ marque un nombre entier quelconque et π l'angle de 180° , ou la moitié de la circonférence d'un cercle dont le rayon = 1 ; de sorte que donnant à λ successivement toutes les valeurs possibles qui sont $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \text{etc.}$, on obtienne enfin tous les facteurs de la formule $p^n - q^n$. Et partant, toutes les racines de l'équation $p^n - q^n = 0$ seront comprises dans cette expression générale

$$p = q \left(\cos \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2\lambda\pi}{n} \right)$$

qui se trouve en posant

$$p^2 - 2pq \cos \frac{2\lambda\pi}{n} + qq = 0.$$

Donc, toutes les racines de notre équation trouvée $(1 + \frac{y}{n})^n - 1 = 0$, posant $p = 1 + \frac{y}{n}$ et $q = 1$, seront contenues dans cette expression générale

$$1 + \frac{y}{n} = \cos \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2\lambda\pi}{n}.$$

Or, puisque n marque un nombre infini, l'arc $\frac{2\lambda\pi}{n}$ sera infiniment petit ; il sera donc

$$\cos \frac{2\lambda\pi}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \sin \frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n},$$

d'où il s'ensuit

$$1 + \frac{y}{n} = 1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n} \sqrt{-1},$$

et partant

$$y = \pm 2\lambda\pi \sqrt{-1}.$$

On n'a qu'à substituer maintenant pour λ successivement toutes les valeurs déterminées qu'elle renferme, savoir $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \text{etc.}$ à l'infini ; et tous les logarithmes de l'unité, ou toutes les valeurs possibles de $l1$ seront

$$0, \pm 2\pi \sqrt{-1}, \pm 4\pi \sqrt{-1}, \pm 6\pi \sqrt{-1}, \pm 8\pi \sqrt{-1}, \text{etc.}$$

Donc, tous les logarithmes du nombre proposé a , dont on sait déjà le logarithme réel A , seront $A, A \pm 2\pi \sqrt{-1}, A \pm 4\pi \sqrt{-1}, A \pm 6\pi \sqrt{-1}, A \pm 8\pi \sqrt{-1}, \text{etc.}$

C. Q. F. T.

De là, il est clair que chaque nombre positif n'a qu'un seul logarithme réel, et que tous ses autres logarithmes infinis sont imaginaires. Cependant, tous ces logarithmes imaginaires jouissent de la même propriété que le réel, et on s'en pourroit servir également dans le calcul en observant les mêmes règles. Car, soient $A, B, C, D, \text{etc.}$ les logarithmes réels des nombres positifs $a, b, c, d, \text{etc.}$ de sorte qu'il soit en général

$$la = A \pm 2\lambda\pi \sqrt{-1}, lb = B \pm 2\mu\pi \sqrt{-1}, lc = C \pm 2\nu\pi \sqrt{-1}, \text{etc.}$$

Maintenant soit $c = ab$, et on sait qu'il sera $C = A + B$; or, prenant les logarithmes en général, on verra aussi que la somme des logarithmes des facteurs a, b est toujours égale au logarithme du produit $ab = c$. Car on aura

$$la + lb = A + B \pm 2\zeta\pi \sqrt{-1}$$

mettant pour ζ un nombre quelconque entier qui peut résulter en ajoutant les termes $\pm 2\lambda\pi \sqrt{-1}$ et $\pm 2\mu\pi \sqrt{-1}$. Or il est clair que mettant $A + B = C$, cette expression de $la + lb$ convient parfaitement avec celle-cy $lc = C \pm 2\nu\pi \sqrt{-1}$. Le même accord se trouvera aussi dans la division, l'élevation aux puissances et l'extraction des racines, où l'on fait usage des logarithmes. Mais pour ce qui regarde l'extraction des racines, comme le nombre des racines est toujours égal à l'exposant du signe radical, cette manière d'exprimer les logarithmes généralement a cet avantage sur la manière ordinaire, qu'elle nous découvre toutes les racines ; au lieu que par la méthode ordinaire on ne trouve dans chaque cas qu'une racine, savoir la réelle et qui est en même tems positive ; ce qu'on reconnoitra plus évidemment, lorsque j'aurai déterminé tous les logarithmes des nombres tant négatifs qu'imaginaires.

PROBLEME 2

Déterminer tous les logarithmes qui répondent à un nombre négatif quelconque $-a$.

SOLUTION

Puisque $-a = -1 \cdot a$, il sera $l - a = la + l - 1$ et, prenant pour la le logarithme réel de a , on aura tous les logarithmes du nombre négatif $-a$, si l'on cherche tous les logarithmes de -1 . Mais ayant vu que, mettant y pour le logarithme du nombre x en général, il est $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$, d'où l'on tire $1 + \frac{y}{n} = x^{\frac{1}{n}}$ et partant $(1 + \frac{y}{n})^n - x = 0$. Donc, y exprimera tous les logarithmes de -1 , si l'on met $x = -1$, de sorte que tous les logarithmes de -1 seront les racines de cette équation

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0,$$

posant le nombre n infiniment grand. .

Or on sait que de cette équation générale $p^n + q^n = 0$, toutes les racines se trouvent de la résolution de cette formule.

$$p^2 - 2pq \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} + q^2 = 0,$$

prenant pour λ successivement tous les nombres entiers tant affirmatifs que négatifs et partant, on aura

$$p = q \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \right).$$

Donc, les racines de cette équation proposée $(1 + \frac{y}{n})^n + 1 = 0$ seront toutes comprises dans cette formule générale

$$1 + \frac{y}{n} = \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{(2\lambda-1)\pi}{n},$$

laquelle à cause de $n = \infty$ se change en

$$y = \pm(2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1}.$$

Par conséquent, mettant pour λ successivement toutes les valeurs qui lui conviennent, tous les logarithmes de -1 seront

$$\pm\pi\sqrt{-1}, \pm3\pi\sqrt{-1}, \pm5\pi\sqrt{-1}, \pm7\pi\sqrt{-1}, \pm9\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

Donc, si nous posons $l + a = A$, ou que A marque le logarithme réel du nombre positif $+a$, tous les logarithmes du nombre négatif $-a$ seront :

$$A \pm \pi\sqrt{-1}, \quad A \pm 3\pi\sqrt{-1}, \quad A \pm 5\pi\sqrt{-1}, \quad A \pm 7\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

dont le nombre est infini. C. Q. F. T.

De là, il est clair que tous les logarithmes d'un nombre négatif quelconque sont imaginaires, et qu'il n'y a aucun nombre négatif dont un de ses logarithmes soit réel. M. LEIBNIZ a eu donc raison de soutenir que les logarithmes des nombres négatifs étoient imaginaires. Cependant, puisque les nombres affirmatifs ont aussi une infinité de logarithmes imaginaires, toutes les objections de M. BERNOULLI contre ce sentiment perdent leur force. Car, quoiqu'il soit $l - 1 = \pm(2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1}$, le logarithme de son carré sera $l(-1)^2 = \pm 2(2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1}$, expression qui se trouve parmi les logarithmes de $+1$, de sorte qu'il demeure vrai que $2l - 1 = l + 1$, quoique nul des logarithmes de -1 se trouve parmi les logarithmes de $+1$. Soit A le logarithme réel du nombre positif $+a$ et que p marque en général tous les nombres pairs et q tous les impairs entiers, et ayant en général

$$l + 1 = \pm p\pi\sqrt{-1} \text{ et } l - 1 = \pm q\pi\sqrt{-1}$$

et

$$l + a = A \pm p\pi\sqrt{-1} \text{ et } l - a = A \pm q\pi\sqrt{-1},$$

d'où l'on voit que

$$l(-a)^2 = 2l - a = 2A \pm 2q\pi\sqrt{-1}.$$

Or, $2q$ étant $= p$ et $2A$ le logarithme réel de a^2 , on voit que $2A \pm p\pi\sqrt{-1}$ est la formule générale des logarithmes de a^2 ; ainsi il est $l(-a)^2 = la^2$ ou bien $2l - a = 2l + a$, sans qu'il soit $l - a = l + a$; ce qui seroit sans doute contradictoire, si les nombres $+a$ et $-a$ n'avoient qu'un seul logarithme; car alors on auroit raison de conclure qu'il fût $l - a = l + a$, s'il étoit $2l - a = 2l + a$. Mais, dès qu'on tombe d'accord que tant $-a$ que $+a$ ont une infinité de logarithmes,

cette conséquence, toute nécessaire qu'elle fût auparavant, n'est plus juste, puisque pour qu'il soit $2l - a = 2l + a$, il suffit que les doubles de tous les logarithmes de $-a$ se rencontrent dans les logarithmes de $+aa$. Ce qui peut arriver, comme nous voyons, sans qu'aucun des logarithmes de $-a$ soit égal à aucun des logarithmes de $+a$.

Il faut cependant avouer que toutes les valeurs de $2l - a$ sont différentes des valeurs de $2l + a$, vu qu'il est

$$2l + a = 2A \pm 2p\pi\sqrt{-1} \text{ et } 2l - a = 2A \pm 2q\pi\sqrt{-1},$$

où $2p$ marque un nombre parement pair, et $2q$ un nombre impairement pair quelconque. Mais il faut remarquer que les logarithmes de $+a^2$, comme d'un nombre affirmatif dont le logarithme réel est $= 2A$, sont compris dans cette formule générale $la^2 = 2A \pm p\pi\sqrt{-1}$, où p marque un nombre pair quelconque sans en excepter zero. Cela remarqué, il est clair que toutes les valeurs de $2l - a$ sont comprises dans celles de la^2 , aussi bien que celles de $2l + a$. Ainsi, quoiqu'on puisse dire que $2l - a = la^2$ et $2l + a = la^2$, prenant le signe de $=$ pour marquer que les valeurs de $2l - a$ ou de $2l + a$ se rencontrent parmi les valeurs de la^2 , on ne sauroit dire, à la vérité, qu'il soit $2l - a = 2l + a$. Néanmoins, comme dans les formules $l + a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$ et $l - a = A \pm q\pi\sqrt{-1}$ les nombres p et q sont indéterminés, rien n'oblige qu'en doublant ces logarithmes on prenne pour p et q les mêmes nombres. Ainsi pour faire ces multiplications dans toute leur étendue, que $p, p', p'', p''', \text{ etc.}$ marquent des nombres pairs quelconques égaux ou inégaux et $q, q', q'', q''', \text{ etc.}$ des nombres impairs égaux ou inégaux entr'eux, ces duplications se feront de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} l + a = A \pm p\pi\sqrt{-1} \\ l + a = A \pm p'\pi\sqrt{-1} \\ \hline 2l + a = 2A \pm (p + p')\sqrt{-1} \\ \\ l - a = A \pm q\pi\sqrt{-1} \\ l - a = A \pm q'\pi\sqrt{-1} \\ \hline 2l - a = 2A \pm (q + q')\pi\sqrt{-1} \end{array}$$

Ici maintenant $p + p'$ marquant la somme de deux nombres pairs quelconques et $q + q'$ la somme de deux nombres impairs quelconques, tant $p + p'$ que $q + q'$ marquera un nombre pair quelconque; et partant, il sera $p + p' = q + q'$, donc $2l - a = 2l + a$. Par conséquent, dans ce sens, on pourra soutenir qu'il est $2l - a = 2l + a$, sans qu'il soit $l - a = l + a$. De même manière, il sera

$$\begin{array}{l} 3l + a = 3A \pm (p + p' + p'')\sqrt{-1} = 3A \pm p\pi\sqrt{-1} = l + a^3, \\ 3l - a = 3A \pm (q + q' + q'')\sqrt{-1} = 3A \pm q\pi\sqrt{-1} = l - a^3, \end{array}$$

car $p+p'+p''$ produit tous les nombres pairs et convient par conséquent avec p ; pareillement, $q+q'+q''$ produit tous les nombres impairs et convient avec q . Or, puisque $q+q'+q''+q'''$ produit tous les nombres pairs, cette expression sera équivalente avec p ; donc les quadruples seront

$$4l+a = 4A \pm (p+p'+p''+p''')\sqrt{-1} = 4A \pm p\pi\sqrt{-1} = l+a^4,$$

$$4l-a = 4A \pm (q+q'+q''+q''')\sqrt{-1} = 4A \pm p\pi\sqrt{-1} = l-a^4.$$

Ainsi, cette manière de trouver les logarithmes des puissances tant de $+a$ que de $-a$ s'accorde parfaitement bien avec les principes connus tant des puissances que des logarithmes, et toutes les objections rapportées cy-dessus n'ont plus aucune prise sur ces vérités démontrées. Le même accord s'observera aussi dans les logarithmes des quantités imaginaires, que je m'en vai développer dans le problème suivant.

PROBLEME 2

Déterminer tous les logarithmes d'une quantité imaginaire quelconque.

SOLUTION

Il est démontré que toute quantité imaginaire, quelque compliquée qu'elle soit, se réduit toujours à cette forme $a + b\sqrt{-1}$, où a et b sont des quantités réelles. Je pose maintenant

$$\sqrt{(aa+bb)} = c$$

et $\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$ et $\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ seront le cosinus et le sinus d'un certain angle qu'il sera aisé de trouver par les tables. Soit donc cet angle = φ , qui marque en même tems la quantité de l'arc de cercle qui est sa mesure, le sinus total étant posé = 1. On aura donc

$$a = c \cos \varphi \text{ et } b = c \sin \varphi,$$

et la formule imaginaire dont il faut chercher tous les logarithmes, sera

$$a + b\sqrt{-1} = c(\cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi)$$

ou, puisque c est un nombre affirmatif, soit C son logarithme réel, et on aura

$$l(a + b\sqrt{-1}) = C + l(\cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi).$$

Il s'agit donc de chercher tous les logarithmes de la quantité imaginaire $\cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi$, laquelle étant mise pour x , ses logarithmes seront les valeurs de y tirées de cette équation

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x = 0$$

n marquant un nombre infini. Mais pour pouvoir comparer cette équation avec la forme générale $p^n - q^n = 0$, je remarque que

$$x = \cos \varphi + y\sqrt{-1} \cdot \sin \varphi = \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n,$$

dont la vérité est suffisamment prouvée ailleurs. Car on sait que

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1 \cdot 2} + \frac{\varphi^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\varphi^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.}$$

et

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\varphi^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{etc.}$$

Or, puisque n est un nombre infini, il sera

$$\left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{1} - \frac{\varphi^2}{1 \cdot 2} - \frac{\varphi^3\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\varphi^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\varphi^5\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{etc.},$$

d'où il est clair que

$$\left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = \cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi.$$

Nous aurons donc

$$p = 1 + \frac{y}{n} \text{ et } q = \frac{1 + \varphi\sqrt{-1}}{n}$$

pour l'équation à résoudre $p^n - q^n = 0$. Mais, ayant vu déjà que chacune des racines de cette équation est contenuë dans cette formule générale

$$p = q \left(\cos \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2\lambda\pi}{n} \right),$$

prenant pour λ tous les nombres entiers, ou affirmatifs ou négatifs, il sera pour notre cas

$$1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right) \left(\cos \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2\lambda\pi}{n}\right)$$

et parce que, à cause du nombre n infini, il est

$$\cos \frac{2\lambda\pi}{n} = 1 \text{ et } \sin \frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n},$$

il sera

$$1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right) \left(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

ce qui donne

$$y = \varphi\sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1},$$

d'où tous les logarithmes de la formule

$\cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi$ seront

$$\varphi\sqrt{-1}, \quad (\varphi \pm 2\pi)\sqrt{-1}, \quad (\varphi \pm 4\pi)\sqrt{-1}, \quad (\varphi \pm 6\pi)\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

et les logarithmes de la formule imaginaire $a + b\sqrt{-1}$, posant

$$c = \sqrt{(aa+bb)} \text{ et } \text{tang } \varphi = \frac{b}{a}, \text{ ou } \cos \varphi = \frac{a}{c} \text{ et } \sin \varphi = \frac{b}{c}$$

et de plus

$$lc = C,$$

seront

$$C + \varphi\sqrt{-1}, \quad C + (\varphi \pm 2\pi)\sqrt{-1}, \quad C + (\varphi \pm 4\pi)\sqrt{-1}, \quad C + (\varphi \pm 6\pi)\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

C.Q.F.T.

De là, il est clair que tous les logarithmes d'une quantité imaginaire sont aussi imaginaires; car, lorsque ou $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pm 2\lambda\pi$, qui sont les cas où quelcun de ces logarithmes pourroit devenir réel, cela ne peut arriver que lorsque $\text{tang}\varphi = \frac{b}{a} = 0$; il seroit donc $b = 0$ et la quantité $a + b\sqrt{-1}$ que cesseroit d'être imaginaire. Donc, si l'on prend p pour signifier chaque nombre pair, ou affirmatif ou négatif, tous les logarithmes de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ seront renfermés dans cette formule générale

$$C + (\varphi + p\pi)\sqrt{-1},$$

où C est le logarithme réel de la quantité affirmative $\sqrt{(aa + bb)} = c$, et l'arc ou l'angle φ est pris tel qu'il est $\sin\varphi = \frac{b}{c}$ et $\cos\varphi = \frac{a}{c}$. Or, puisqu'il y a une infinité d'angles qui conviennent au même sinus $\frac{b}{c}$ et cosinus $\frac{a}{c}$, qui sont tous compris dans la formule $\varphi + p\pi$, on pourroit omettre le terme $p\pi$, et dire que le logarithme de $a + b\sqrt{-1}$ est en général $= C + \varphi\sqrt{-1}$; puisque cet angle φ renferme déjà tous ces angles. Cependant, si l'on prend pour φ le plus petit angle affirmatif qui répond au sinus $\frac{b}{c}$ et au cosinus $\frac{a}{c}$, la formule générale des logarithmes de $a + b\sqrt{-1}$ sera $= C + (\varphi + p\pi)\sqrt{-1}$.

Si l'angle φ est tel, qu'il tient une raison commensurable avec π ou la circonférence du cercle, ce sera toujours une marque qu'une certaine puissance de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ devient réelle. Car soit $\varphi = \frac{\mu}{\nu}\pi$, et puisqu'il est $l(a + b\sqrt{-1}) = C + (\frac{\mu}{\nu}\pi + p\pi)\sqrt{-1}$, il sera

$$l(a + b\sqrt{-1})^\nu = \nu C + (\mu + \nu p\pi)\sqrt{-1},$$

d'où l'on voit que si $\mu + \nu p$ est un nombre pair ou seulement μ pair, la puissance $(a + b\sqrt{-1})^\nu$ sera un nombre réel affirmatif, et même $= c^\nu = (\sqrt{(aa + bb)})^\nu$; or si $\mu + \nu p$ ou seulement μ est un nombre impair, la puissance $(a + b\sqrt{-1})^\nu$ sera un nombre négatif $-c^\nu$.

Jusqu'ici, on auroit pu croire qu'il seroit indifférent de donner à π quelque valeur que ce soit, puisqu'il ne paroît rien, ni dans les logarithmes des nombres affirmatifs $l + a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$, ni dans ceux des nombres négatifs $l - a = A \pm q\pi\sqrt{-1}$, d'où nous puissions comprendre pourquoi la lettre π dût plutôt marquer la demi-circonférence d'un cercle décrit du rayon = 1 que tout autre nombre. Mais à présent, où il s'agit des logarithmes des nombres imaginaires, la raison en devient évidente; puisqu'il faut comparer l'angle φ à π , de sorte que si l'on donnoit à π toute autre valeur que celle de deux

angles droits, les formules deviendroient fausses, et ne seroient plus d'accord avec celles que nous avons trouvées pour les nombres affirmatifs et négatifs.

Pour faire voir cela plus clairement, supposons $c = 1$ et $C = 0$, pour avoir cette formule $\cos\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi$, dont tous les logarithmes seront renfermés dans cette formule générale,

$$l(\cos\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi) = (\varphi + p\pi)\sqrt{-1}$$

p marquant un nombre entier pair quelconque, soit affirmatif, soit négatif, ou même zero.

De là, nous tirerons premièrement d'abord les formules supérieures pour les logarithmes des nombres réels affirmatifs ou négatifs. Car, soit $\varphi = 0$, et à cause de $\cos\varphi = 1$ et $\sin\varphi = 0$, il sera $l + 1 = p\pi - 1$ ou bien en détaillant

$$l + 1 = 0, \quad \pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 4\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 8\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

or, mettant $\varphi = \pi = 180^\circ$, à cause de $\cos\varphi = -1$ et $\sin\varphi = 0$, il sera

$$l - 1 = (1 + p)\pi\sqrt{-1} = q\pi\sqrt{-1},$$

prenant q pour marquer un nombre impair quelconque. On aura donc

$$l - 1 = \pm\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 3\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 5\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 7\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

Dévelopons maintenant aussi les cas les plus simples des nombres imaginaires, et soit

1. $\varphi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$, et à cause de $\cos\varphi = 0$ et $\sin\varphi = +1$, il sera

$$l + \sqrt{-1} = (\frac{1}{2} + p)\pi\sqrt{-1};$$

donc tous les logarithmes de $+\sqrt{-1}$ seront

$$\begin{aligned} & +\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{5}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{9}{2}\pi\sqrt{-1}, \\ & \quad +\frac{13}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{17}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.} \\ & -\frac{3}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{7}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{11}{2}\pi\sqrt{-1}, \\ & \quad -\frac{15}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{19}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Ajoutant ici deux valeurs quelconques ensemble pour avoir le logarithme de $l(+\sqrt{-1})^2$ c'est à dire de $l - 1$, on trouvera ou $\pm\pi\sqrt{-1}$, ou $\pm 3\pi\sqrt{-1}$, ou $\pm 5\pi\sqrt{-1}$, etc., qui sont tous des logarithmes de -1 .

2. Soit $\varphi = 270^\circ = \frac{3}{2}\pi$, et à cause de $\cos\varphi = 0$ et $\sin\varphi = -1$, il sera

$$l - \sqrt{-1} = (-\frac{1}{2} + p)\pi\sqrt{-1};$$

donc tous les logarithmes de $-\sqrt{-1}$ seront contenus dans les expressions suivantes

Comment faire du neuf avec du vieux ? ou le principe de permanence

$$\begin{aligned}
 & +\frac{3}{2}\pi\sqrt{-1}, +\frac{7}{2}\pi\sqrt{-1}, +\frac{11}{2}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad +\frac{15}{2}\pi\sqrt{-1}, +\frac{19}{2}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.} \\
 & -\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}, -\frac{5}{2}\pi\sqrt{-1}, -\frac{9}{2}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad -\frac{13}{2}\pi\sqrt{-1}, -\frac{17}{2}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.},
 \end{aligned}$$

où il est clair, comme auparavant, que deux valeurs quelconques étant ajoutées ensemble donnent $q\pi\sqrt{-1}$, posant q pour un nombre impair quelconque, ce qui est le logarithme de -1 ou de $(-\sqrt{-1})^2$. De plus, si l'on ajoute un logarithme quelconque de $-\sqrt{-1}$ à un logarithme quelconque de $+\sqrt{-1}$, pour avoir un logarithme du produit $(+\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1})$ qui est $= +1$, on ne trouvera en effet que des logarithmes de $+1$. Et il est clair, de même, qu'il sera $l(+\sqrt{-1}) - l(-\sqrt{-1}) = l - 1$ ou $l(-\sqrt{-1}) - l(+\sqrt{-1}) = l - 1$, tout comme la nature de ces expressions exige.

3. Soit $\varphi = 60^\circ = \frac{1}{3}\pi$ ou $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; on trouvera

$$l^{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}} = \left(\frac{1}{3} + p\right) \pi\sqrt{-1},$$

de sorte que tous les logarithmes de cette expression imaginaire $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$\begin{aligned}
 & +\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{7}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{13}{3}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad +\frac{19}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{25}{3}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.} \\
 & -\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{17}{3}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad -\frac{23}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{29}{3}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.},
 \end{aligned}$$

où il est clair que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutés ensemble produisent $q\pi\sqrt{-1}$ ou quelcun des logarithmes de -1 , puisque

$$\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1.$$

4. Soit $\varphi = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$ ou $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ et $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et l'on trouvera

$$l^{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}} = \left(\frac{2}{3} + p\right) \pi\sqrt{-1}.$$

Ainsi tous les logarithmes de la formule imaginaire $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$\begin{aligned}
 & +\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{14}{3}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad +\frac{20}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{26}{3}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.} \\
 & -\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{10}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{16}{3}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad -\frac{22}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{28}{3}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.},
 \end{aligned}$$

et puisque

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1,$$

on verra qu'on obtient effectivement les logarithmes de $+1$ en ajoutant ensemble trois quelconques de ces logarithmes.

5. Soit $\varphi = 240^\circ = \frac{4}{3}\pi$ ou $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ et $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, et l'on aura

$$l^{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}} = \left(\frac{4}{3} + p\right) \pi\sqrt{-1},$$

de sorte que tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$\begin{aligned}
 & +\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{10}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{16}{3}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad +\frac{22}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{28}{3}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.} \\
 & -\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{14}{3}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad -\frac{20}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{26}{3}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.},
 \end{aligned}$$

d'où l'on tirera comme auparavant, en ajoutant trois quelconques de ces logarithmes ensemble, quelcun des logarithmes de $+1$, puisqu'il est

$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1.$$

De même, deux de ces logarithmes quelconques ajoutés ensemble produiront un logarithme de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; car il est

$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Et puisqu'il est réciproquement

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

on verra aussi que la somme de deux logarithmes quelconques de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ produit un logarithme de $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

6. Soit $\varphi = 300^\circ = \frac{5}{3}\pi$ ou $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, et l'on aura

$$l^{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = \left(\frac{5}{3} + p\right) \pi\sqrt{-1}.$$

Par conséquent, les logarithmes de cette formule $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$\begin{aligned}
 & +\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{17}{3}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad +\frac{23}{3}\pi\sqrt{-1}, +\frac{29}{2}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.} \\
 & -\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{7}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{13}{3}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad -\frac{19}{3}\pi\sqrt{-1}, -\frac{25}{3}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.},
 \end{aligned}$$

où il est évident que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutés ensemble donnent un logarithme de -1 , conformément à ce qu'il est

$$\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1.$$

Et en général, on verra toujours que toutes les opérations qu'on fera avec ces logarithmes, sont parfaitement d'accord avec les opérations relatives faites avec les nombres qui leur conviennent, de sorte qu'on ne rencontrera plus le moindre inconvénient à l'égard des opérations en logarithmes et de celles qui leur répondent en nombres.

7. Soit $\varphi = 45^\circ = \frac{1}{4}\pi$ ou $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et l'on aura

$$l^{\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1}{4} + p\right) \pi\sqrt{-1}.$$

Ainsi, tous les logarithmes de cette expression imaginaire $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront

$$\begin{aligned}
 & +\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}, +\frac{9}{4}\pi\sqrt{-1}, +\frac{17}{4}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad +\frac{25}{4}\pi\sqrt{-1}, +\frac{33}{4}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.} \\
 & -\frac{7}{4}\pi\sqrt{-1}, -\frac{15}{4}\pi\sqrt{-1}, -\frac{23}{4}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad -\frac{31}{4}\pi\sqrt{-1}, -\frac{39}{4}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

8. Soit $\varphi = 135^\circ = \frac{3}{4}\pi$ ou $\cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\sin \varphi = +\frac{1}{\sqrt{2}}$, et l'on aura

$$l^{\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{3}{4} + p\right) \pi\sqrt{-1}.$$

Et partant, tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront

$$\begin{aligned}
 & +\frac{3}{4}\pi\sqrt{-1}, +\frac{11}{4}\pi\sqrt{-1}, +\frac{19}{4}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad +\frac{27}{4}\pi\sqrt{-1}, +\frac{35}{4}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.} \\
 & -\frac{5}{4}\pi\sqrt{-1}, -\frac{13}{4}\pi\sqrt{-1}, -\frac{21}{4}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad -\frac{29}{4}\pi\sqrt{-1}, -\frac{37}{4}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

Chacun de ces logarithmes étant ajouté à quelqu'un des précédents de $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ produit

un logarithme de la forme $q\pi\sqrt{-1}$ ou de -1 , tout comme il faut, puisque

$$\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = -1$$

9. Soit $\varphi = 225^\circ = \frac{5}{4}\pi$ ou $\cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\sin \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, et l'on aura

$$l^{\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{5}{4} + p\right) \pi\sqrt{-1}.$$

Donc, tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront

$$\begin{aligned}
 & +\frac{5}{4}\pi\sqrt{-1}, +\frac{13}{4}\pi\sqrt{-1}, +\frac{21}{4}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad +\frac{29}{4}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.} \\
 & -\frac{3}{4}\pi\sqrt{-1}, -\frac{11}{4}\pi\sqrt{-1}, -\frac{19}{4}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad -\frac{27}{4}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.},
 \end{aligned}$$

qui sont les négatifs des précédents; ce qui est aussi parfaitement bien d'accord avec les opérations analytiques, puisqu'il est

$$\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = 1 : \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

et partant

$$l^{\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}} = -l^{\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}}.$$

10. Soit $\varphi = 315^\circ = \frac{7}{4}\pi$ ou $\cos \varphi = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où l'on aura

$$l^{\frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{7}{4} + p\right) \pi\sqrt{-1}.$$

Par conséquent, tous les logarithmes de cette formule $\frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront

$$\begin{aligned}
 & +\frac{7}{4}\pi\sqrt{-1}, +\frac{15}{4}\pi\sqrt{-1}, +\frac{23}{4}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad +\frac{31}{4}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.} \\
 & -\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}, -\frac{9}{4}\pi\sqrt{-1}, -\frac{17}{4}\pi\sqrt{-1}, \\
 & \quad -\frac{25}{4}\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

Tous ces logarithmes des quatre derniers articles ont cette propriété, que chacun multiplié par 4 produit un logarithme de -1 , ce qui est conforme à la vérité, puisque les carrés-carrés de ces quatre formules

$$\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

produisent le nombre -1 .

Ces exemples suffisent pour faire voir que l'idée des logarithmes que je viens d'établir, est la véritable, et qu'elle est parfaitement d'accord avec toutes les opérations que la théorie des logarithmes renferme, de sorte qu'on n'y rencontre plus aucune difficulté, et que toutes les contradictions auxquelles cette doctrine paroissoit assujettie, disparaissent entièrement. Par conséquent, la grande controverse qui partagea autrefois Mrs. LEIBNIZ et BERNOULLI, est à présent parfaitement décidée, ensorte que ni l'un ni l'autre ne trouveroit plus le moindre sujet de refuser son consentement.

La belle découverte de M. BERNOULLI, de ramener la quadrature du cercle aux logarithmes imaginaires, se trouve aussi non seulement parfaitement d'accord avec cette théorie, mais elle en est une suite nécessaire, et est portée même par là à une infiniment plus grande étendue, puisque nous voyons que les logarithmes de tous les nombres, entant qu'ils sont imaginaires, dépendent tous de la quadrature du cercle. Ainsi, les logarithmes de $+1$ étant $\pm p\pi\sqrt{-1}$, il sera $\frac{l+1}{\sqrt{-1}}$ toujours une quantité réelle, mais qui renferme une infinité de valeurs, à cause de l'infinité des logarithmes de $+1$. Conséquemment à cela, si l'on pose le rapport du diamètre à la circonférence = $1 : \pi$, toutes les valeurs de cette expression $\frac{l+1}{\sqrt{-1}}$ seront les suivantes :

$$0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \pm 10\pi, \text{ etc.}$$

De même, les logarithmes de -1 étant divisés par $\sqrt{-1}$ fourniront les quantités réelles suivantes qui renferment également la quadrature du cercle. Car les valeurs de $\frac{l-1}{\sqrt{-1}}$ sont

$$\pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \pm 7\pi, \pm 9\pi, \text{ etc.}$$

De la même manière, on verra que les valeurs des expressions suivantes seront :

Les valeurs de	seront celles-cy à l'infini
$\frac{l(+\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$	$+\frac{1}{2}\pi, +\frac{5}{2}\pi, +\frac{9}{2}\pi, +\frac{13}{2}\pi, +\frac{17}{2}\pi, \text{ etc.}$
$\frac{l(-\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$	$-\frac{3}{2}\pi, -\frac{7}{2}\pi, -\frac{11}{2}\pi, -\frac{15}{2}\pi, -\frac{19}{2}\pi, \text{ etc.}$
$\frac{l(+\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$	$+\frac{3}{2}\pi, +\frac{7}{2}\pi, +\frac{11}{2}\pi, +\frac{15}{2}\pi, +\frac{19}{2}\pi, \text{ etc.}$
$\frac{l(-\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$	$-\frac{1}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi, -\frac{9}{2}\pi, -\frac{13}{2}\pi, -\frac{17}{2}\pi, \text{ etc.}$

et on tirera également des autres exemples développés cy-dessus de semblables expressions réelles qui renfermeront toutes la quadrature du cercle.

J'ai déjà fait sentir, le bel accord de ces logarithmes avec l'extraction des racines, ayant fait voir que les doubles tant des logarithmes de -1 que de $+1$, sont contenus parmi les logarithmes de $+1$, puisqu'il est

$$1 = (+1)^2 = (-1)^2;$$

de même puisque il est

$$1 = (+1)^3 = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3,$$

on verra que les triples des logarithmes de $+1$, de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et de $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ se trouvent parmi les logarithmes de $+1$. Mais je remarque ici de plus, comme 1 n'a que ces deux racines quarrées $+1$ et -1 , ainsi si l'on range les doubles de tous les logarithmes tant de $+1$ que de -1 dans une suite, on obtiendra la serie complete de tous les logarithmes de $+1$; car

$$2l + 1 \text{ est } 0, \pm 4\pi\sqrt{-1}, \pm 8\pi\sqrt{-1}, \pm 12\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

$$2l - 1 \text{ est } \pm 2\pi\sqrt{-1}, \pm 6\pi\sqrt{-1}, \pm 10\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

De la même manière, les trois racines cubiques de $+1$ étant

$$+1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ et } \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

si l'on range les triples de tous les logarithmes de ces trois racines dans une suite, il en résultera la suite complete des logarithmes de $+1$, car

$$3l + 1 \text{ donne } 0, \pm 6\pi\sqrt{-1}, \pm 12\pi\sqrt{-1}, \pm 18\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

$$3l \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \begin{cases} +2\pi\sqrt{-1}, +8\pi\sqrt{-1}, +14\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.} \\ -4\pi\sqrt{-1}, -10\pi\sqrt{-1}, -16\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.} \end{cases}$$

$$3l \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \begin{cases} +4\pi\sqrt{-1}, +10\pi\sqrt{-1}, +16\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.} \\ -2\pi\sqrt{-1}, -8\pi\sqrt{-1}, -14\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.} \end{cases}$$

Dans ces trois séries, chaque logarithme de $+1$ se trouve, et aucun ne s'y rencontre qu'une seule fois; ce qui est une marque, que l'unité n'a que ces trois racines cubiques, et qu'il faut les trois ensemble pour épuiser la nature de l'unité.

Il en est de même de toutes les autres racines de l'unité, et comme les racines quarré-quarrées de $+1$ sont

$$+1, -1, +\sqrt{-1}, \text{ et } -\sqrt{-1},$$

on verra que les quadruples des logarithmes de chacune de ces racines ne donnent que la quatrième partie des logarithmes de $+1$. Or, tous ces quadruples de toutes les quatre racines ensemble produisent toute la suite des logarithmes de $+1$. Il est aussi remarquable que tous les logarithmes d'une racine quelconque sont differens des logarithmes de toute autre racine du même nombre. Cependant, quoique ces deux logarithmes $l + 1$ et $l - 1$ soient differens entr'eux, il est néanmoins $2l + 1 = l + 1$ et $2l - 1 = l + 1$, sans qu'il soit $2l + 1 = 2l - 1$. De la même manière, ces trois logarithmes

$$l + 1, l \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ et } l \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

sont differens entr'eux; cependant, nonobstant cette inégalité, il est

$$3l + 1 = l + 1, 3l \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = l + 1, \text{ et } 3l \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = l + 1.$$

Nous voyons donc qu'il est essentiel à la nature des logarithmes que chaque nombre ait une infinité de logarithmes, et que tous ces logarithmes soient différents non seulement entr'eux, mais aussi de tous les logarithmes de tout autre nombre. Il en est de même des logarithmes que des angles ou des arcs de cercle; car, comme à chaque sinus et cosinus répond une infinité d'arcs différents, ainsi à chaque nombre convient une infinité de logarithmes différents. Mais il faut ici remarquer une grande différence qui est, que tous les arcs qui répondent au même sinus et cosinus, sont réels, au lieu que tous les logarithmes du même nombre sont imaginaires à la réserve d'un seul, lorsque le nombre donné est positif; car tous les logarithmes des nombres, tant négatifs qu'imaginaires, sont sans aucune exception imaginaires. Or, comme à un arc donné ne convient qu'un seul sinus et cosinus, ainsi à un logarithme proposé ne répond qu'un seul nombre; de sorte que c'est un problème qui n'admet qu'une seule solution, lorsqu'on demande le nombre qui convient à un logarithme proposé.

PROBLEME 4

Un logarithme quelconque étant proposé, trouver le nombre qui lui répond.

SOLUTION

Posons premièrement que le logarithme proposé soit une quantité réelle = f , et on sait que posant le nombre = e , dont le logarithme réel = 1, le nombre qui répond au logarithme f sera = e^f .

En second lieu, soit le logarithme proposé = $g\sqrt{-1}$ ou simplement imaginaire, et soit x le nombre qui lui répond. Puisque g est un nombre réel, qu'on le compare avec π , et qu'il soit $g = m\pi$, et il est clair, si m est un nombre entier ou pair ou impair, que le nombre x sera ou $+1$ ou -1 . Mais, pour tout autre cas quelconque, le nombre x sera imaginaire et, pour le trouver, on n'a qu'à prendre un arc de cercle = g , le rayon étant = 1 et ayant cherché son sinus et cosinus, le nombre cherché sera

$$x = \cos g + \sqrt{-1} \cdot \sin g.$$

En troisième lieu, soit le logarithme proposé une quantité imaginaire quelconque = $f + g\sqrt{-1}$, puisqu'on sait que toute quantité imaginaire se peut réduire à cette forme $f + g\sqrt{-1}$, en sorte que f et g soient des nombres réels. Cela posé, il est clair que le nombre cherché x sera le produit de deux nombres dont l'un aura pour logarithme f et l'autre $g\sqrt{-1}$. Par conséquent, le nombre qui répond au logarithme $f + g\sqrt{-1}$ sera

$$= e^f (\cos g + \sqrt{-1} \cdot \sin g).$$

C. Q. F. T.

On voit donc que le nombre qui répond au logarithme proposé $f + g\sqrt{-1}$, sera réel, lorsque $\sin g = 0$, c'est à dire lorsque $g = m\pi$, le coefficient m étant un nombre entier quelconque, ou affirmatif ou négatif. Dans ce cas, on voit de plus que si m est un nombre pair, à cause de $\cos g = +1$, le nombre cherché sera affirmatif, mais si m est un nombre impair, qu'à cause de $\cos g = -1$, le nombre cherché sera négatif = $-e^f$. Dans tous les autres cas où m , c'est à dire $\frac{g}{\pi}$, sera un nombre rompu ou même irrationnel, le nombre qui répond à ce logarithme $f + g\sqrt{-1}$ sera infailliblement imaginaire.

Par le moyen de cette règle, on pourra aussi se servir des logarithmes dans le calcul des nombres imaginaires. Pour en donner un exemple, qu'on cherche la valeur de cette expression

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^4 \left(\frac{+1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-1} = A.$$

Pour cet effet, on n'a qu'à prendre un logarithme quelconque de chaque facteur, et en faire les opérations conformément aux règles généralement reçues, en sorte :

$$\begin{aligned} l \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} &= \frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}, \text{ donc } 4l \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}, \\ l \frac{+1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}, \dots 3l \frac{+1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\pi\sqrt{-1}, \\ l \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} &= \frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}, \dots 2l \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{-1}, \\ &\text{et enfin } l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc la somme ou } lA = \frac{79}{12}\pi\sqrt{-1}$$

Par conséquent, le produit cherché sera

$$A = \cos \frac{79}{12}\pi + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{79}{12}\pi$$

ou bien

$$A = \cos \frac{7}{12}\pi + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{7}{12}\pi$$

Je remarque encore que le logarithme proposé étant = $f + g\sqrt{-1}$, le nombre répondant selon la règle commune, se trouve = $e^{f+g\sqrt{-1}}$. Or, cette expression est tout à fait équivalente à celle que nous venons de trouver. Car on sait d'ailleurs que $e^{g\sqrt{-1}} = \cos g + \sqrt{-1} \cdot \sin g$ et partant

$$e^{f+g\sqrt{-1}} = e^f \cdot e^{g\sqrt{-1}} = e^f (\cos g + \sqrt{-1} \cdot \sin g),$$

mais cette dernière expression est plus commode que la première, où les imaginaires entrent dans l'exposant.