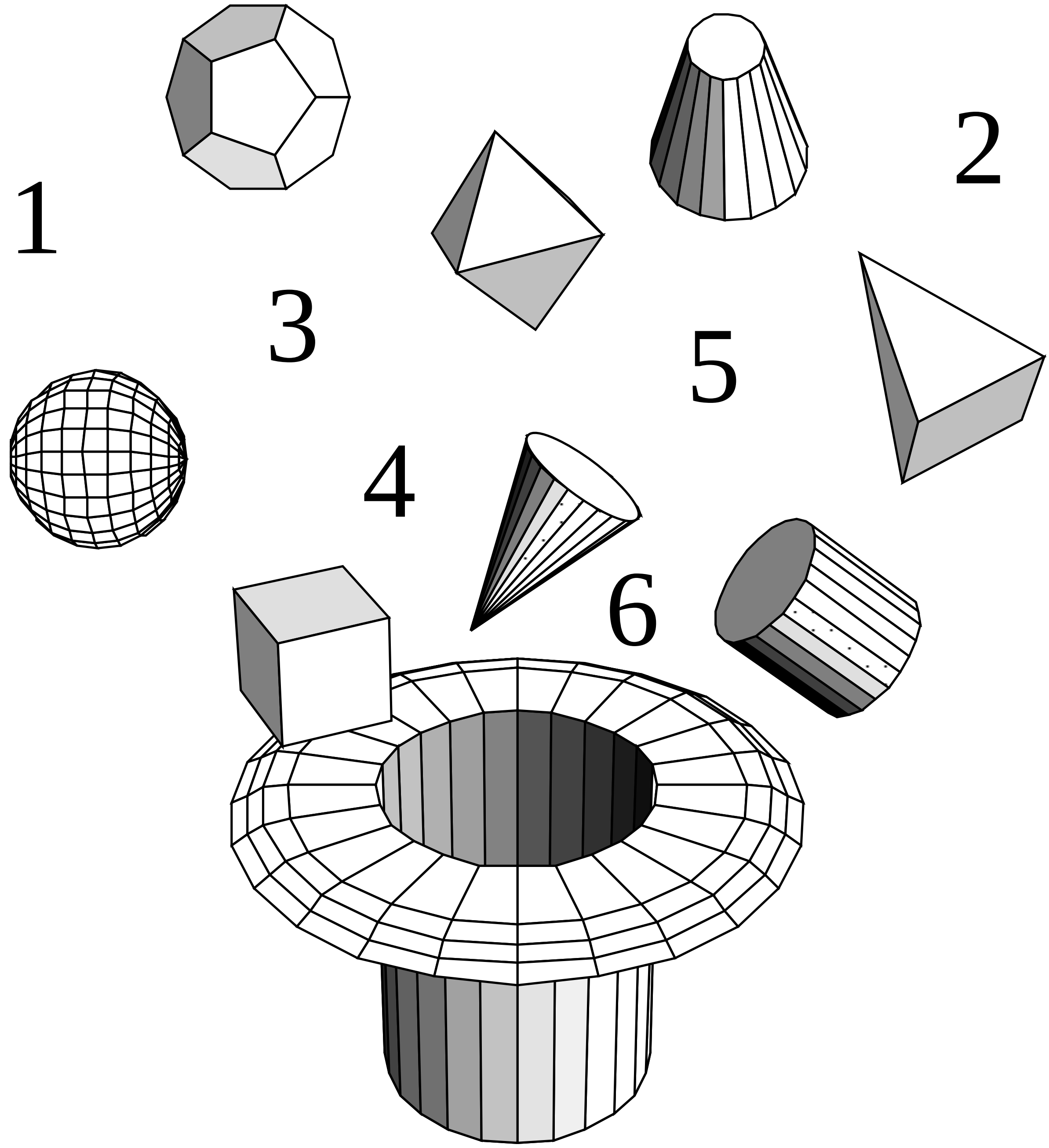
# MATHÉMATIQUES VIVANTES




Bulletin de l'IREM
de BESANÇON

n° 68 – mars 2003

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pufc

Presses Universitaires Franc-Comtoises

ISSN 1141-913X

# Mathématiques vivantes

## Bulletin IREM

## n° 68, mars 2003

**édité par François PÉTIARD**

Presses Universitaires Franc-Comtoises 2003
Diffusé par l'IREM de Franche-Comté

**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Franche-Comté (IREM)**

Directrice Claude MERKER

Cette brochure a été réalisée en $\LaTeX\, 2_\varepsilon$.

# Table des matières.

# Présentation

## Stage d'histoire des mathématiques initiation
## C. Merker et H. Languereau

L'IREM de Besançon a proposé deux stages d'histoire des mathématiques en janvier 2003.

Ces stages ont pour vocation à accueillir toute personne curieuse de l'évolution des concepts mathématiques. Les thèmes du stage des 27, 28 et 29 janvier changeant tous les ans, de nombreux participants s'y retrouvent régulièrement ce qui peut conduire à une autocensure de nouveaux collègues. Pour pallier cet inconvénient, nous avons proposé un stage « initiation » qui s'est déroulé le jeudi 16 et le vendredi 17 et dont nous vous proposons un compte-rendu.

La présentation du stage est la suivante :

IREM
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ
**Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques**
FACULTÉ DES SCIENCES
ET DES TECHNIQUES
Route de Gray – La Bouloie
25030 BESANCON CEDEX
Téléphone : 03 81 66 62 25

Le stage IREM *Histoire des Mathématiques, initiation* se déroulera sur deux jours successifs : jeudi 16 janvier SALLE 303B, vendredi 17 janvier SALLE 324B.

**Jeudi 16 Janvier 2003 matin : Hombeline LANGUEREAU**

Comment faire du neuf avec du vieux ?

Exemples : donner du sens à : $(-1) \times (-1)$, racine carrée de $-1$, $\log(-1)$

**Références bibliographiques :**

- *Images, imaginaires, imagination* IREM Ellipses
- *Mathématiques au fil des âges* IREM Gauthiers-Villars
- *Fragments d'histoire des mathématiques* Brochure APMEP n° 41 (pour la controverse des logarithmes imaginaires)

**Jeudi 16 Janvier 2003 après-midi et Vendredi 17 Janvier 2003 matin : C.MERKER**

Quadratures depuis Archimède jusqu'au XVII$^{e}$ siècle. Exhaustion, méthode mécanique, méthode des indivisibles et son évolution de Cavalieri à Pascal.

Documents utilisables en TP :

- Volume du paraboloïde , par Archimède
- Aire de la première révolution de spirale, par Cavalieri
- Volume du solide l'hyperbole, par Torricelli
- Aire de la cycloïde, par Roberval, par Pascal

**Références bibliographiques :**

- *Le trésor d'Archimède* Bernard Bettinelli IREM de Besançon (ici)
- *Mathématiques au fil des âges* IREM Gauthiers-Villars
- *La naissance du calcul infinitésimal au* XVII$^{e}$ *siècle* J.P. Cléro E. Barbin Centre de Documentation des Sciences Humaines Paris 1980
- *Fragments d'histoire des mathématiques* Brochure APMEP nř65
- *Cahiers du Séminaire d'Épistémologie et d'Histoire des Sciences*, n° 17 1983 Université de Nice

**Vendredi 17 Janvier 2003 après-midi : Hombeline LANGUEREAU**

Chronologie rapide de l'histoire des probabilités. Présentation du problème des partis.

**Références bibliographiques :**

- *Théorie analytique des probabilités* Pierre Simon Laplace Ed.J. Gabay
- *M:ATH, Mathématiques : Approche par des Textes Historiques* IREM de Paris VII.

# Narration de stage

*Claude MERKER*
*IREM de Franche-Comté*

## Sommaire



*Pour la deuxième journée du stage IREM sur l'histoire des mathématiques, nous avons choisi de raconter comment s'était constituée au* XVII$^{e}$ *siècle une méthode très originale et inventive pour calculer les mesures d'objets courbes (lignes, surfaces, volumes) : la méthode des indivisibles (MDI dans le texte).*

*La naissance et l'évolution de cette théorie, dont la durée de vie n'a pas dépassé 50 ans, ressemblent à celles d'une théorie physique. La méthode a vu le jour parce qu'il y avait des problèmes nouveaux. Elle a tenté de comprendre le nouveau par l'ancien et de ramener tout à un petit nombre de principes. Elle a évolué avec des aller et retour, des confrontations au réel, des modifications substantielles lorsque l'adéquation est par trop fausse (paradoxes), jusqu'à aboutir à une méthode des indivisibles tout à fait autre que celle des origines, dans laquelle les indivisibles sont devenus divisibles !*

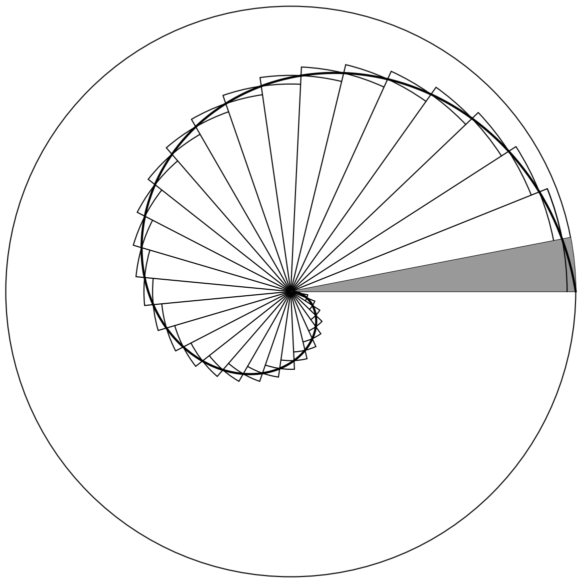
*Pendant les six heures de ce stage nous avons répercuté différents travaux : ceux de Bernard Bettinelli, sur Archimède, d'Ettore Bortolotti, François De Gandt, Évelyne Barbin-le Rest sur Cavalieri, Torricelli, Roberval. Les références précises de ces sources sont données à la fin. Pour ne pas alourdir le texte, il n'y aura pas d'appels de note, ni de citations bien délimitées. Bien sûr, l'auteure de ces lignes répercute ces articles et brochures à sa manière, et rien ne vous empêche de recourir aux sources pour savoir ce qu'ils ont vraiment dit. Seule la partie concernant Pascal est propre à l'auteure de la narration.*

La méthode des indivisibles *stricto sensu*, celle de Cavalieri, repose sur un principe simple qui emporte l'adhésion alors que l'on ne peut pas le démontrer, (tout au plus on peut faire appel à un dangereux principe de permanence pour passer du fini à l'infini), elle est un exemple étonnant de certitude–par–l'évidence qui court-circuite la rigueur mathématique, elle nous plonge dans le désarroi. Même ses avatars n'ont pas eu d'avenir, on en est sorti en la quittant vraiment. Le dépaysement est donc assuré.

C'est à Archimède trois siècles avant J.C. que nous devons les premiers calculs de mesures d'objets courbes. Il y a eu peu de choses nouvelles dans ce domaine entre Archimède et les savants du XVII^e. À tout seigneur tout honneur, nous avons commencé par

# Archimède

Et par la plus belle courbe de l'antiquité : la spirale. Elle est dessinée par un point qui se meut uniformément sur une demi-droite tournant uniformément autour de son origine (une courbe d'équation $r = a\theta$, dirait-on aujourd'hui). Archimède a montré que l'aire de sa première révolution était le tiers de celle du disque de même nom. Heureusement nous n'avons pas eu à lire Archimède dans le texte, Bernard Bettinelli l'avait fait pour nous. La spirale est découpée en secteurs d'angles égaux et encadrée par un double système de secteurs circulaires. La différence entre les deux figures encadrantes est égale au premier secteur circulaire (le plus grand), et peut donc être rendue plus petite que toute mesure donnée d'avance.



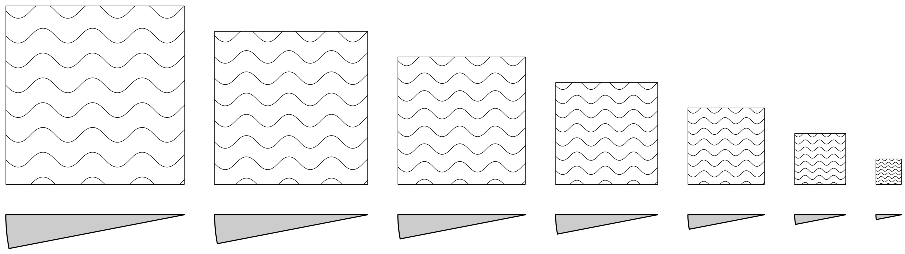
Archimède sait que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{1}{3}\,n.n^2 < 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

sa démonstration est géométrique, elle réajuste des carrés de côtés 1, 2, ..., $n$ et des rectangles créés pour la situation. Nous ne la faisons pas car

1. elle est très longue,
2. elle concerne des aires « droites », alors que l'objet du stage est de calculer des aires emprisonnées dans des bords courbes.

Les secteurs sont proportionnels aux carrés de même côté, et l'on peut transférer la double inégalité qui porte sur des carrés aux secteurs, par proportionnalité.



$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2$ devient la figure encadrante inférieure, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ la figure encadrante supérieure, tandis que $n.n^2$ devient le disque de première révolution (paradoxalement, c'est cette transformation « par proportionnalité » des $n$ carrés tous égaux en le disque qui a été la plus difficile à voir au stage !).
L'inégalité s'écrit donc :

$$\text{Figure encadrante inférieure} < \frac{1}{3}\,\text{Disque de première révolution} < \text{Figure encadrante supérieure}$$

Il y a alors deux figures fixes, A = le tiers du disque (connue) et B = la spirale (cherchée) toutes deux coincées entre deux figures encadrantes dont la différence peut être prise inférieure à toute mesure donnée. Archimède choisit comme mesure donnée celle de $\mathrm{B}-\mathrm{A}$, si B est supérieure à A et celle de $\mathrm{A}-\mathrm{B}$, si A est supérieure à B. Puis il montre que dans les deux cas c'est impossible, d'où le nom de « double réduction à l'absurde » donné à la méthode (prenons le premier cas : la figure encadrante supérieure $\mathscr{S}$ est à droite de B, la figure encadrante inférieure $\mathscr{I}$ est donc à droite de A. 

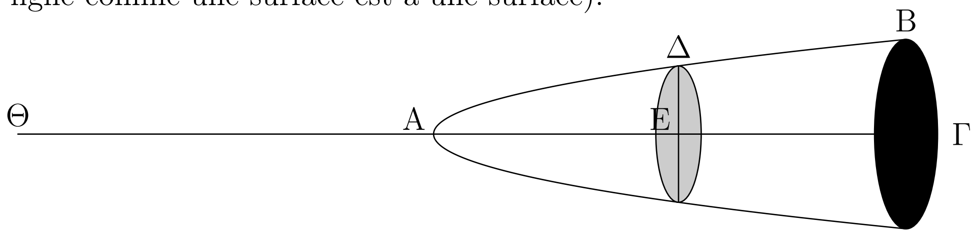
à cause de leur différence qui doit être inférieure à la mesure donnée $\mathrm{B}-\mathrm{A}$, or c'est absurde).

La démonstration nous cloue sur place par sa rigueur, mais comment Archimède en a-t-il eu l'idée ?
On voit que mesurer un objet, ce n'est pas trouver un nombre, mais un autre objet connu auquel on rapporte la mesure de l'objet inconnu.

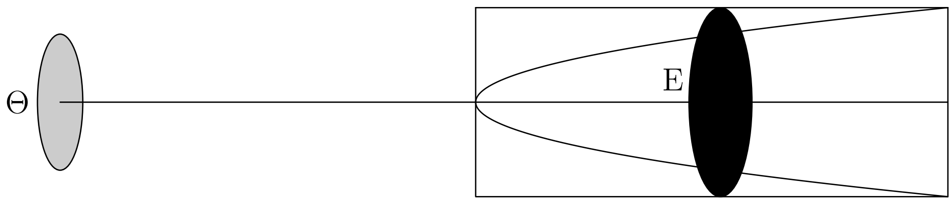
Nous avons aussi regardé une autre démonstration par cette méthode rigoureuse de double réduction à l'absurde : celle du volume du segment droit de paraboloïde de révolution, dont Archimède montre qu'il est égal à la moitié du cylindre circonscrit. Puis nous sommes passés à une toute autre preuve de ce même résultat. Paraboloïde et cylindre sont découpés en disques, dont les aires $\mathrm{A}_1$ et $\mathrm{A}_2$ (constante, déplacer le disque noir en E) vérifient la proportion

$$\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}}$$

(ceci n'est rien d'autre que la manière antique d'écrire l'équation de la parabole. Trois siècles avant J.C., on n'égale pas une longueur à un carré, mais on peut dire qu'une ligne est à une ligne comme une surface est à une surface).



Archimède laisse $A_2$ en place, transporte $A_1$ en $\Theta$, le paraboloïde se retrouve donc massé en $\Theta$. Comme $A_1 \times A\Gamma = A_2 \times AE$, il y a équilibre entre les tranches correspondantes, et par conséquent entre les volumes complets. Or le centre de gravité du cylindre est en son milieu, pour que l'équilibre se réalise, il est nécessaire que le paraboloïde « pèse » deux fois moins. La preuve mécanique est beaucoup plus rapide que la démonstration rigoureuse.




Le livre « La méthode relative aux théorèmes mécaniques » dans lequel figure cette démonstration basée sur la loi du levier a été retrouvé en 1906 à Jérusalem. À propos de la démonstration de l'aire du segment de parabole qui repose sur les mêmes ressorts, Archimède dit :

*ce que nous venons de dire ne démontre sans doute pas ce qui précède, mais donne jusqu'à un certain point l'idée que la conclusion est juste. c'est pourquoi, reconnaissant nous-mêmes que la conclusion n'est pas démontrée, mais ayant dans l'idée qu'elle est exacte, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique (...)*

Il est vrai que si une tranche est un disque, elle ne pèse rien, et que si elle a la moindre épaisseur l'équilibre n'est plus rigoureux .

Archimède dit dans la lettre à Eratosthène, qui est une préface à ce livre

*(...) je mettrai d'abord par écrit ce qui m'a aussi été révélé en premier lieu par la mécanique ; notamment que tout segment de parabole vaut une fois et un tiers le triangle (...)*

ce par quoi nous voyons qu'il accorde une grande valeur à ce procédé mécanique d'invention.

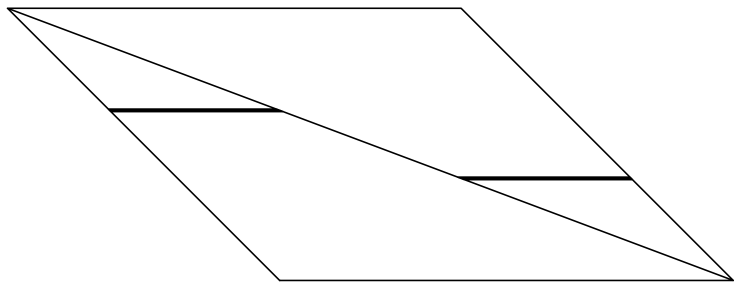
# Cavalieri, Torricelli, les paradoxes et ce que chacun en fait

## 1.

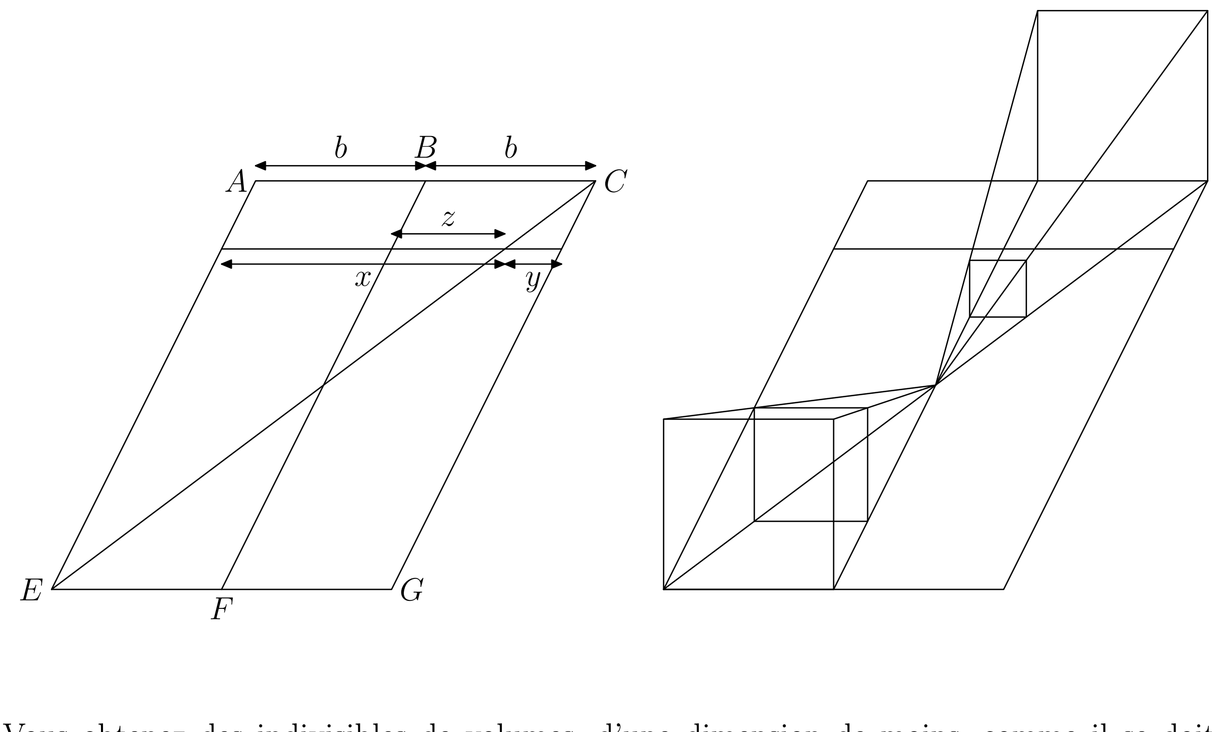
Cavalieri fait paraître, entre 1620 et 1635 sept volumes très difficiles à lire, à ce que l'on dit (même à l'époque), la *Géométrie par les indivisibles*. Une règle découpe dans une figure plane une ligne, qui en est un indivisible, en faisant varier la règle parallèlement à elle-même, il peut parler de « toutes les lignes » de la figure. De même il parlera de « tous les plans d'un volume » ; les indivisibles ont toujours une dimension de moins que le continu dans lequel ils sont découpés et que l'on cherche à mesurer. Cavalieri affirme et veut justifier le principe suivant : lorsqu'on a deux figures telles que tous les indivisibles de l'une ont un rapport constant à ceux de l'autre, alors les aires de ces deux figures sont dans le même rapport : « *Les continus suivent les proportions de leurs indivisibles (continua sequi indivisibiliorum proportionem)* », ou « *de même que un à un, ainsi de tous à tous (ut unum ad unum, ita omnes ad omnes)* »

## 2.

Cavalieri a une démarche intellectuelle : la méthode l'intéresse plus que le résultat. Ces derniers servent à corroborer la méthode. Par exemple, Cavalieri coupe un parallélogramme en deux triangles, découpe des indivisibles égaux chacun à chacun dans les deux triangles et retrouve bien ce que l'on savait d'avance, les aires sont dans le rapport un, comme leurs indivisibles.



Il teste le principe sur le volume d'une pyramide. Comme au stage, vous pouvez essayer. Prenez un parallélogramme (ci-dessous, à gauche), élevez des carrés perpendiculairement à son plan sur les lignes notées $b$, $x$, $y$, $z$ (sur le schéma de droite, c'est fait seulement pour $z$) et calculez ainsi le volume de la pyramide élevée sur $ACE$.



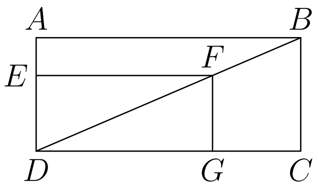

Vous obtenez des indivisibles de volumes, d'une dimension de moins, comme il se doit. La relation entre ces indivisibles : $x^2 + y^2 = 2b^2 + 2z^2$, se traduit en une relation entre les continus. On trouve que la pyramide a même mesure que le tiers du parallélépipède, chose déjà connue depuis l'Antiquité. Mais bien que la pyramide n'ait rien de courbe, la démonstration requiert de l'infini, du calcul intégral, dirait-on aujourd'hui.

## 3.

Cavalieri veut être rigoureux. Il justifie sa démarche par l'égalité du *Livre des proportions* d'Euclide, c'est-à-dire (en langage modernisé) :
Si des grandeurs sont telles que $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$, alors elles vérifient aussi l'égalité $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \dfrac{a_1}{b_1}$.
Les $a_i$ et les $b_i$ sont les indivisibles, la première série d'égalités ne pose pas de problème, mais dire que les continus sont les sommes de leurs indivisibles n'est en tous cas plus du tout dans la manière euclidienne, Euclide ne considère pas des sommes infinies !
De plus on retrouve le même problème qu'avec les pesées archimédiennes, chaque ligne est de mesure nulle (en tant qu'aire) et une somme de zéros fait toujours zéro. Comme les indivisibles sont hétérogènes à la grandeur qui les produit, Cavalieri refuse de dire que le continu est composé d'indivisibles, il refuse d'ailleurs aussi de dire le contraire, il préfère dire qu'il ne prend pas parti. Mais alors comment s'appuyer sur une théorie des proportions, même étendue à l'infini ?
Le plus juste est de dire qu'il raisonne sur des agrégats d'indivisibles (*omnes lineae*), êtres mathématiques abstraits, et qu'il transfère ce qu'il a trouvé aux continus sensibles. D'ailleurs il cherche à montrer que ces agrégats ont la propriété euclidienne de grandeurs (en additionnant suffisamment de fois l'une, on arrive à dépasser l'autre). Cependant la question reste toujours celle-ci : peut-on légitimement transférer aux continus sensibles ce qu'on a démontré (et encore, c'est à vérifier) sur ces objets déspatialisés que sont les agrégats d'indivisibles ?

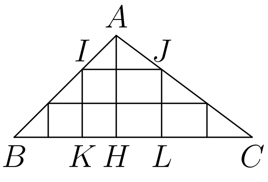
## 4.

Torricelli est plus connu pour avoir fait, avec du mercure, une expérience décisive qui attribue à la pesanteur de l'air la prétendue horreur de la nature pour le vide. Pourtant sa contribution à la MDI est fondamentale. Torricelli a dix ans de moins que Cavalieri. Il veut rendre accessibles les découvertes de son aîné. Il débusque et étudie des paradoxes.




Les indivisibles $EF$ (découpés dans le continu $ABD$), et $FG$ (découpés dans $BCD$) ont une proportion constante, différente de 1 et les deux continus $ABD$ et $BDF$ ont même aire. Donc, ici, les continus ne suivent pas les proportions de leurs indivisibles !

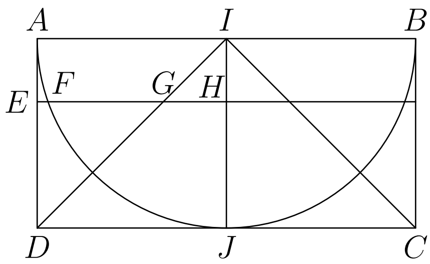
Cavalieri attribue la responsabilité du paradoxe au fait que la direction de découpage n'est pas la même ; il impose donc comme remède la direction du découpage. Mais Cavalieri lui-même présente cette autre situation où les continus sont les triangles inégaux $AHB$ et $AHC$, avec les indivisibles parallèles $IK$ et $JL$, égaux.




Pas plus que dans l'exemple précédent, les continus ne suivent les proportions de leurs indivisibles.

Cavalieri résout la difficulté en disant que les transits obliques $AB$ et $AC$ n'étant pas les mêmes, le principe n'est pas applicable (il revient d'ailleurs au même de dire que les transits droits $HB$ et $HC$ ne sont pas les mêmes).

Pour voir la manière dont Cavalieri trouve toujours une raison particulière, regardons le paradoxe du bol, plus ancien. Faisons tourner la figure ci-dessous autour de l'axe $IJ$. On obtient un cylindre, un cône, un « bol » qui est ce qui reste du cylindre lorsqu'on enlève la demi-sphère engendrée par le demi-cercle $AJB$. Il n'y a pas besoin de la MDI pour voir que le bol a même volume que le cône.




Mais elle fournit une belle démonstration, plus un paradoxe, énoncé par Galilée. On coupe les solides par des plans parallèles à la base. Comme $GH^2 = HE^2 - HF^2$, tous les plans du cône sont égaux à tous les plans du bol (le découpage induit sur le bol est une couronne de rayons $HE$ et $HF$).

À chaque instant les deux solides que sont le cône $IGH$ et la portion de bol au dessus de la droite $EH$ sont égaux. Galilée trouve paradoxal que tout à la fin, le cône (et sa base) se réduise à un point, tandis que la portion ultime de bol (et sa base) est un cercle. Nous ne sommes pas entrés — au cours de ce stage — dans le détail de ce que dit Galilée, car ce qui nous importe est la manière, assez constante, dont Cavalieri répond aux problèmes soulevés.

Remarquons préalablement que le résultat est juste, le bol et le cône ont même volume, la MDI est appliquée avec une seule règle balayant les deux volumes d'un même mouvement pour créer des indivisibles égaux[1]. Il n'y a jamais de résultat faux dans ce cas. Une telle application de la MDI sera qualifiée de *stricto sensu* dans la suite.

Quant au paradoxe soulevé par Galilée, la parade de Cavalieri est la suivante :

*Dans ma conception de toutes les lignes d'une figure plane, ou de tous les plans d'un corps, on ne doit pas selon mes définitions, comprendre les extrêmes bien qu'ils paraissent de même genre ; les sections communes du plan qui coupe la figure dans on mouvement d'un extrême à l'autre, ou d'une tangente à la tangente opposée, dès lors parce que le principe et le terme du mouvement ne sont pas mouvement, pour cela on ne doit pas compter les tangentes extrêmes parmi toutes les lignes (...)*

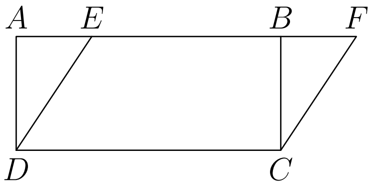
*Lettre de Cavalieri à Galilée 16 décembre 1634*

Là, Cavalieri fait appel à une conception des anciens ayant trait au mouvement pour exclure, par analogie, les deux indivisibles extrêmes. mais pourquoi n'a-t-il pas dit **avant** qu'on ne pouvait, selon ses définitions, comprendre les extrêmes ?

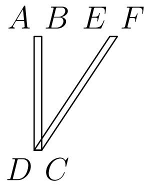
Le problème, c'est qu'il ne dit jamais rien avant, les paradoxes transgressent toujours une loi qui n'a pas été énoncée. Un nouveau paradoxe est toujours susceptible de se produire, imprévisible, engendrant une nouvelle défense fortifiée. En physique, le phlogistique ou l'éther ont pareillement été créés exprès pour sauver les phénomènes, mais sans faire avancer d'un millimètre la compréhension des choses.

[1]Même les extrêmes sont égaux, puisque la mesure est l'aire : une ligne n'a pas une aire moins nulle qu'un point.

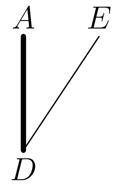
Pendant que Cavalieri, qui ne veut pas se contenter de la méthode *stricto sensu*, érige des défenses renouvelées, Torricelli réfléchit sur un exemple particulier, celui du rectangle et du parallélogramme de mêmes base et hauteur. Les continus ne suivent pas les proportions de leurs indivisibles :




Le rectangle $ABCD$ et le parallélogramme $EFCD$ ont même aire. Le rectangle est un agrégat d'indivisibles parallèles à $AD$. Le parallélogramme est un agrégat d'indivisibles parallèles à $ED$




En rétrécissant $CD$ voici ce que cela donne. Des parallélogrammes très fins d'aire égales, et d'épaisseurs inégales.

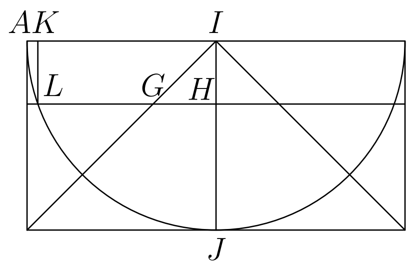



Au stade ultime il faut admettre que les indivisibles $AD$ et $ED$ sont d'épaisseur inégale, par souvenir, si l'on peut dire.

Ainsi, après avoir médité sur le parallélogramme qui rétrécit, Torricelli renverse le principe de Cavalieri, ce ne sont plus les continus qui suivent les proportions de leurs indivisibles, mais les indivisibles, nantis d'une épaisseur, qui suivent les proportions des continus dans lesquels ils sont découpés.
Les indivisibles ont une épaisseur « infinitésimale », ils sont homogènes au continu, ils peuvent donc le composer. Finalement la conception est moins abstraite que celle de Cavalieri, on n'a pas besoin pour se la représenter d'imaginer des objets déspatialisés, comme ces « omnes lineae » pour éviter la diabolique question de la composition du continu.
Remarquons que dans cette nouvelle méthode des indivisibles, les indivisibles sont divisibles.

## 5.

Voici un autre paradoxe, subtil. La question a été posée aux stagiaires de le résoudre. Il s'agit toujours du bol




Voici le raisonnement captieux : $GH = KL$, donc [tous les $KL^2$] = [tous les $GH^2$] ($K$ décrivant $AI$ pendant que $H$ décrit $IJ$), donc [tous les disques de rayon $KL$ = [tous les disques de rayon $GH$], et en définitive, la demi-sphère devrait être égale au cône, ce qui est faux.
Bien sûr les indivisibles « plans » (qui sont ici des disques) sont décrits avec des règles non parallèles et contreviennent ainsi au premier interdit de Cavalieri, mais il semble bien que

cet interdit soit édicté uniquement pour interdire les transits inégaux. Ici les transits $AI$ et $IJ$ sont égaux, alors ?

Temps de réflexion.
Un stagiaire dit que la variation de $H$ sur $IJ$ n'est pas reliée affinement à celle de $K$ sur $AI$.

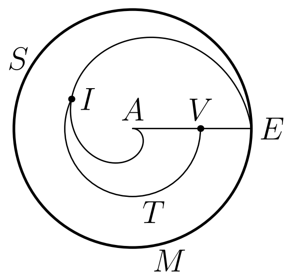
C'est effectivement là que se situe l'explication du paradoxe : quand $H$ partant de $I$ arrive au milieu de $IJ$, $K$ a à peine décollé de $A$ ! Que les transits globaux soient égaux ne garantit pas qu'ils le soient à chaque instant.

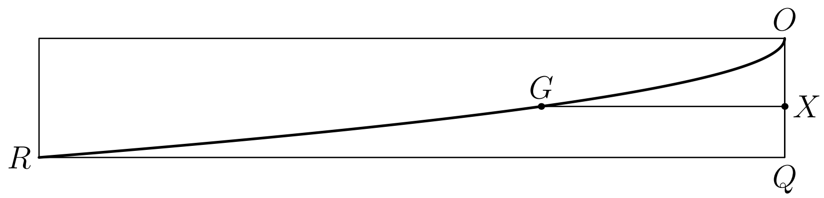
# Mises en œuvre sur la spirale de deux méthodes des indivisibles déjà très évoluées

## 1. L'aire de première révolution de spirale par Cavalieri

Cavalieri donne au livre VI (son traité en comporte sept) une méthode de quadrature de la spirale vraiment directe et visuelle. Il pense être le premier à utiliser des indivisibles courbes (en fait ce n'est pas vrai, Torricelli l'avait déjà fait).
Chaque cercle est dessiné jusqu'au point où il rencontre la spirale, puis l'arc ainsi tracé est déplié sur un autre dessin.

$$OQ = AE \qquad OX = AV \qquad \text{Arc } VTI = XG$$



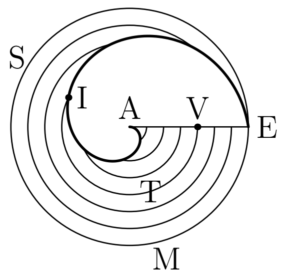



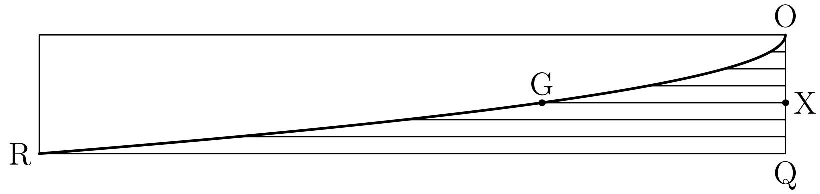

Les points $G$ dessinent une parabole. Au XVII^e siècle on ne peut pas voir ce fait en caractérisant la spirale par $r = \theta$. En revanche, on vit toujours sous l'égide du livre des proportions d'Euclide qui permet d'écrire qu'un rapport de grandeurs de même nature est égal à un autre, et d'agir avec ces rapports de grandeur comme si c'étaient des nombres.

$$\frac{\text{grand cercle complet}}{\text{petit cercle incomplet}} = \frac{\text{grand cercle complet}}{\text{petit cercle complet}} \times \frac{\text{petit cercle complet}}{\text{petit cercle incomplet}}$$

Le premier terme du produit est $\dfrac{AE}{AV}$, et le deuxième aussi car il est le rapport des « rotations », mais ce dernier est, de par la nature de la spirale, le rapport des rayons des cercles se terminant sur la spirale. Pour la rotation « tour complet », c'est $AE$, tandis que pour la rotation du petit cercle incomplet, c'est $AI = AV$.

Ainsi l'arc $VTI$ est proportionnel au carré de $AV$. Une fois dépliés en $XG$ les arcs remplissent l'espace sous la parabole, dont Cavalieri sait (la démonstration est d'Archimède, encore !) qu'il est le tiers du rectangle.



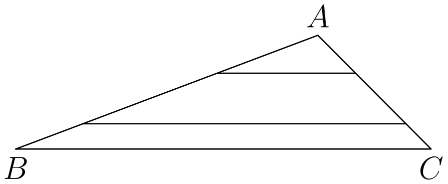




Un stagiaire demande où est représenté dans le rectangle le disque entier $EMS$. Hésitations, on ne sait pas comment s'y prendre. Puis la lumière point : il faut remplir le disque d'indivisibles-cercles (nous devenons Cavalieresques !) et la question devient : où sont les $G'$ tels que $XG'$ représente le cercle entier ? $XG'$ doit prolonger $XG$, qui est le cercle incomplet. Et de plus les longueurs des cercles varient uniformément avec le transit, donc les $G'$ se déplacent forcément sur la droite $OR$. Le disque déplié devient le demi-rectangle ; cela simplifie la fin du calcul, le tiers du double du disque cela fait les deux tiers du disque, il reste le tiers du disque pour l'aire de la première révolution de spirale, c'est bien la valeur que trouvait Archimède. C'est audacieux de déplier les arcs de cercle comme cela, mais au fond Cavalieri n'est pas si loin de la méthode *stricto sensu*, puisque les transits sont les mêmes à chaque instant. Cavalieri ne donne cette démonstration qu'au livre VI de son pavé. Elle est simple, naturelle, immédiatement compréhensible, in-oubliable quand on l'a vue une fois et on sent qu'il n'y a guère de distance entre la découverte et la preuve.

## 2. La longueur de l'arc de spirale égalée à la longueur de l'arc de parabole par Torricelli

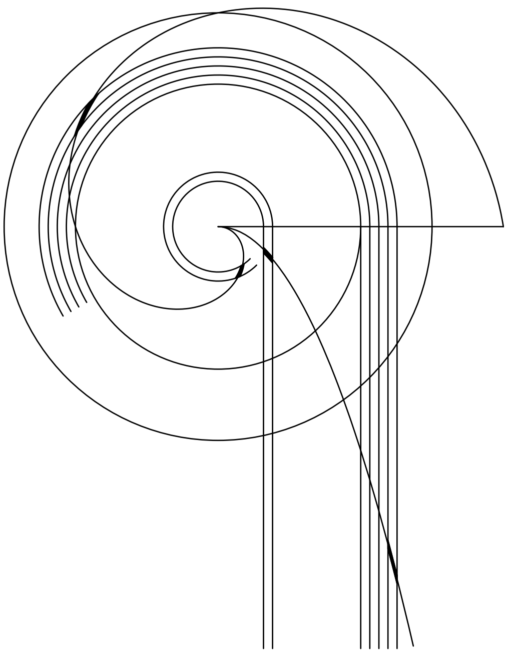
Les indivisibles hétérogènes de Cavalieri ne permettent pas de comparer des lignes. On compare des volumes en comparant des aires, des aires en comparant des longueurs, mais on comparera des longueurs en comparant quoi ? Si toutes les mesures d'une ligne ne sont pas nulles (son volume, son aire le sont, mais pas sa longueur), un point, lui, est toujours de mesure nulle, et comment comparer des zéros ?

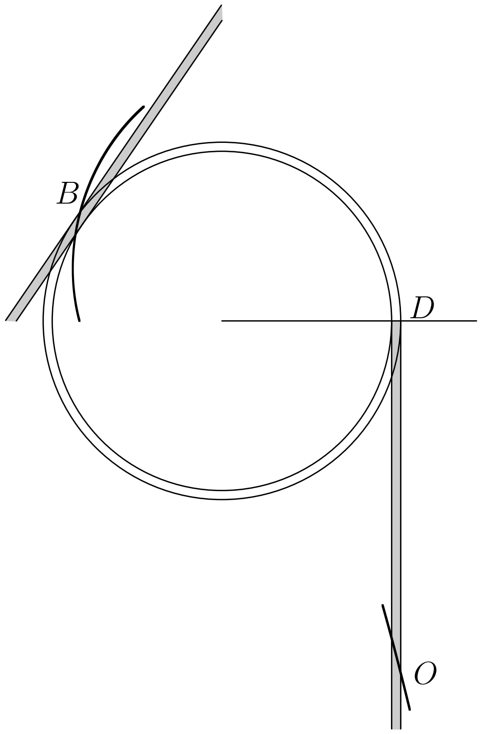
Pour Torricelli, les indivisibles sont de même nature que la grandeur qu'ils composent, donc un indivisible de ligne est un point ayant une certaine taille :




« *Si dans le triangle ABC dont le côté AB est plus grand que BC, nous imaginons que sont tirées l'infinité des lignes parallèles à la base AC, il y aura autant de points marqués par le segment sur la droite AB que sur la droite BC ; donc un point de celle-ci est à un point se celle-là comme toute la ligne à toute la ligne* »

Avec cette nouvelle notion de taille des points, Torricelli peut égaler les longueur de deux courbes. Il montre l'égalité de la ligne spirale à la ligne parabole. Pour cela, il dessine un réseau de cercles équidistants (infiniment proches) pour emprisonner la spirale, et le réseau de lignes verticales de même équidistance, pour emprisonner la parabole, comme sur le dessin. Les propriétés de la tangente à la spirale et à la parabole sont connues et disent que les inclinaisons des deux courbes sur leurs tangentes (en des points homologues) sont les mêmes, par conséquent les points ont même taille deux à deux et les lignes sont égales.






Nous ne faisons pas le détail concernant les tangentes au stage (Torricelli obtient la tangente à la spirale en un point en composant deux mouvements prolongeant dans le temps les mouvements qui créent instantanément la spirale, par une pensée que nous dirions *vectorielle* aujourd'hui).

Torricelli a eu la conviction que les anciens avaient une méthode de découverte qu'ils cachaient :

*Que cette géométrie des indivisibles soit une découverte entièrement nouvelle, je n'oserais l'affirmer. Je croirais plus volontiers que les anciens géomètres se sont servis de cette méthode dans la découverte des théorèmes les plus difficiles, bien qu'ils aient préféré une autre voie dans les démonstrations, soit pour cacher les secrets de l'art, soit pour ôter à des détracteurs jaloux l'occasion de les contredire. Quoiqu'il en soit, il est certain que cette géométrie est un merveilleux abrégé pour la découverte, et qu'elle permet d'établir d'innombrables théorèmes presqu'impénétrables par des démonstrations brèves, directes et positives, ce qui ne peut se faire par la théorie des anciens. C'est là en effet la voie vraiment Royale dans les broussailles mathématiques, et le premier qui l'ouvrit et l'aplanit pour le profit de tous, c'est l'artisan des découvertes admirables : Cavalieri.*

Le XX^e siècle lui a donné raison, puisqu'en 1906 a été retrouvé le livre sur la méthode mécanique, dans lequel Archimède reconnaît la valeur heuristique de la loi du levier pour les mesures d'aires.

# Présentation d'une courbe du XVII$^e$ siècle, la roulette ou cycloïde.

*La roulette est une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente ; et elle se décrit si souvent aux yeux de tout le monde qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait point été considérée par les anciens, dans lesquels on n'en trouve rien : car elle n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire, depuis que ce clou commence à s'élever de terre, jusqu'à ce que le mouvement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier achevé : supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point dans sa circonférence, et la terre parfaitement plane.*
*Le feu P. Mersenne, minime, fut le premier qui la remarqua environ l'an 1615, en considérant le roulement des roues, ce fut pourquoi il l'appela* la Roulette. *Il voulut ensuite en reconnaître la nature et les propriétés mais il n'y put pénétrer.*

*Blaise Pascal Histoire de la roulette 1658*

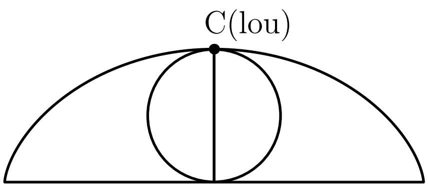
Les mathématiciens se sont demandés si cette courbe n'était pas par hasard une courbe déjà connue, une ellipse, par exemple. On raconte que Galilée l'aurait pesée, peut-être est-ce là une des tentatives dont il parle :
« *Cette ligne arquée, il y a plus de cinquante ans qu'il me vient à l'idée de la décrire, et je l'admirai pour sa courbure très gracieuse, pour l'adapter aux arches d'un pont. Je fis sur elle et sur l'espace qui est compris entre elle et ses cordes, différentes tentatives pour démontrer quelque propriété, et au début, il me parût que cet espace pût être triple du cercle qui la décrit ; mais il n'en fut pas ainsi, bien que la différence ne soit pas grande.*

*Tiré d'une lettre de Galilée à Bonaventura Cavalieri. 24 février 1640*

Si la roulette était une ellipse, son espace devrait être $\pi$ (et non pas trois) fois celle de son cercle. Est-ce que Galilée espérait trouver $\pi$ plus conforme à la nature de la roulette que 3 ?

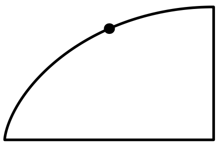
En tous cas Roberval a démontré que c'était 3, avant 1637. Visiblement Galilée ne le savait pas, qui en était encore à peser la roulette plusieurs années après. Et Pascal a lancé un défi aux mathématiciens de toute l'Europe, en 1658, pour résoudre dix-huit problèmes sur la roulette. Personne n'ayant bien répondu, à ses yeux, Pascal publia un *Traité de la roulette*, composé de sept petits traités fournissant au lecteur toutes les méthodes pour résoudre les dix-huit problèmes, sans jamais effectuer un seul calcul, juste en disant comment il faudrait faire. Ce *Traité*, d'une beauté architecturale, a marqué la fin de la méthode des indivisibles, qui est d'ailleurs à ce stade complètement méconnaissable.

Si vous essayez de dessiner une cycloïde (roulette), vous allez trouver quelque chose comme cette arche :

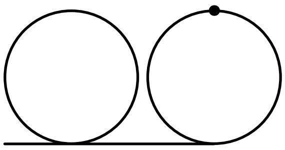



la base étant égale à la circonférence de la roue, car ceci exprime le roulement sans glissement (le mouvement ordinaire dont parle Pascal).

Quelques questions pour nous familiariser géométriquement avec cette courbe :

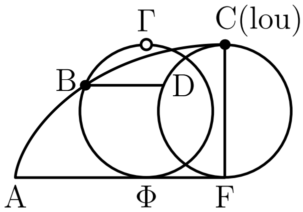


Étant donné un point de la roulette, où est la roue ? (donner son point de contact avec la base).



Étant donnée la position de la roue, où est le clou ?

Les réponses sont contenues dans la figure ci-dessous. Sont figurées en noir deux positions du clou : C (à la verticale) et B, correspondant aux points de contact F et Φ.




- De par la nature de la roulette (la roue ne patine ni ne glisse), le clou tourne comme le point Φ avance

$$\text{Arc } \Phi\text{B} = \Phi\text{A}$$

- Comme le deuxième cercle est translaté du premier

$$\Gamma\text{C} = \text{BD} = \text{F}\Phi \quad \text{et} \quad \text{Arc CD} = \text{Arc } \Gamma\text{B}$$

Voici donc les relations géométriques fondamentales de la roulette

**Arc CD = BD**
**BDFΦ est un parallélogramme**
**CDBΓ est un losange curviligne**

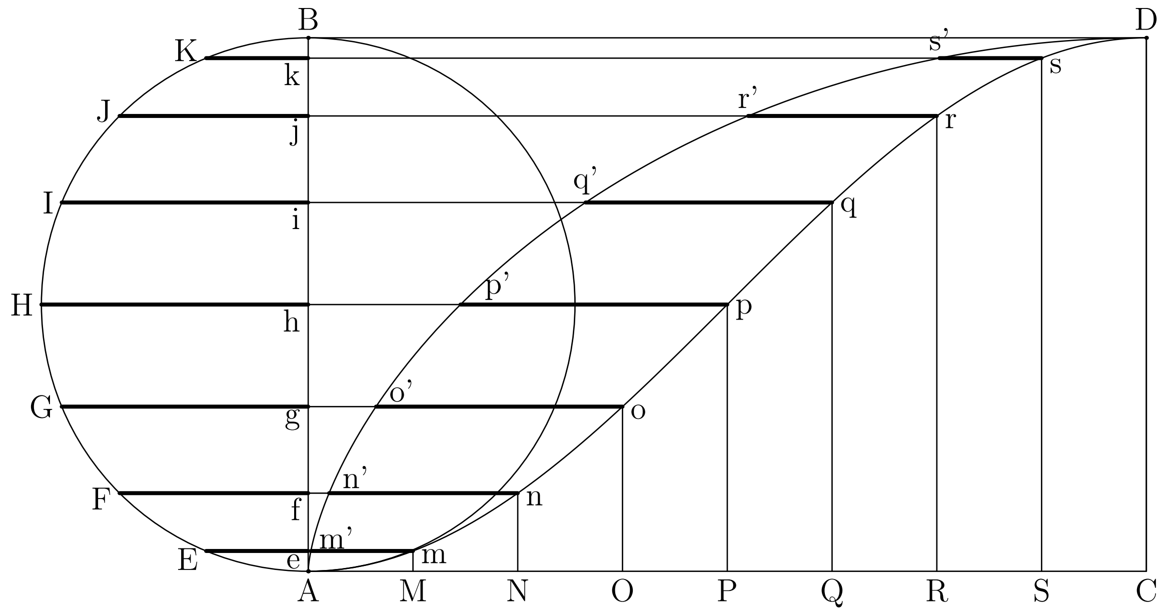
La première relation est mise à profit par Pascal (voir ci-dessous).

# Quadrature de la roulette par Roberval

Roberval a été le premier à quarrer la cycloïde, Descartes a accueilli froidement la découverte, en disant qu'il n'y avait pas à faire tant de bruit à ce sujet. Il n'empêche que l'on cherchait la solution depuis longtemps et que personne ne l'avait trouvée. Descartes a aussitôt trouvé une autre méthode pour la quadrature, ce à quoi Roberval a rétorqué que quand on connaissait le résultat, c'était plus facile. Histoire de montrer sa supériorité absolue, Descartes a alors fourni une très belle démonstration de la position de la tangente, que Roberval cherchait depuis longtemps. . .

Montucla dans son *histoire des mathématiques*, consacre vingt pages à la cycloïde qu'il qualifie d'« Hélène des géomètres », vu toutes les querelles de priorité, d'honneur, de rivalités, qu'elle a déclenchées.

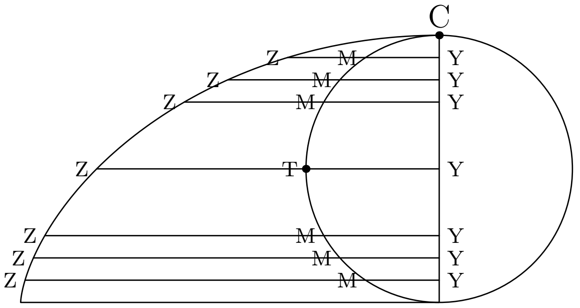
Reportons nous maintenant à la figure ci-après, pour la quadrature de Roberval. Le clou est en A au départ, la roue roule sans glisser vers la droite. AC est donc égal à la demi-circonférence.




La circonférence est divisée en un nombre indéfini de parties égales qui sont reproduites sur la base AC (AM = AE, AN = AF, etc), représentant le roulement sans glissement de la roue. Roberval fait ainsi apparaître une autre courbe, Amno…sD, « compagne de la roulette », qui partage le rectangle en deux moitiés symétriques.
Quand la roue est tangente en O (en P, en Q, etc) à AC, le point dessiné sur la cycloïde est o' (p', q' etc). Le cercle s'est translaté de Go', donc aussi de go. Le segment Gg est donc égal au segment o'o. Il en est de même pour tous les autres segments analogues Hh et p'p etc.
La MDI *stricto sensu* dit que l'espace entre la cycloïde et sa compagne est égal à l'espace du demi-cercle, on rajoute la moitié de l'espace du rectangle ABDC et on trouve trois fois l'espace de la demi-roue pour la demi-roulette. C'est rare que la méthode *stricto sensu* démontre un résultat nouveau, et ici, elle le fait.
En réalité, ce n'est pas cette méthode des indivisibles là que Roberval applique, mais la méthode homogène, car il parle des petits trapèzes comme o'opp' etc.

# Quadrature de la roulette par Pascal. Aperçu du *Traité de la roulette.*

Beaucoup plus tard, en 1658, Pascal donne une méthode qui conduit à écrire la quadrature comme ceci :

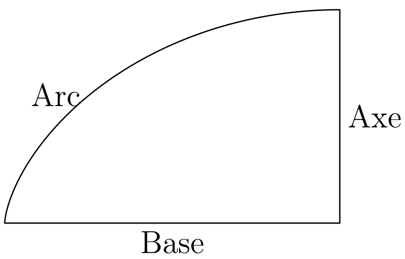



l'axe de la demi-roulette est découpé en « un nombre indéfini de divisions égales » aux points Y. L'aire cherchée est la somme $\sum$ ZY × YY. Mais, de par la nature de la roulette

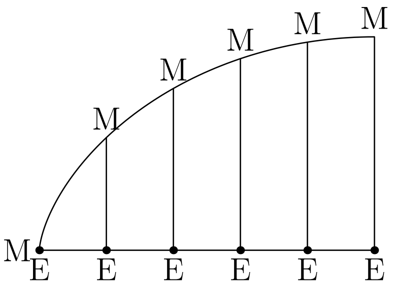
$$\text{ZY} = \text{Arc CM} + \text{MY}$$

Le calcul se ramène alors à celui des deux sommes $\sum \text{Arc CM} \times \text{YY}$ et $\sum \text{MY} \times \text{YY}$, qui sont des sommes d'éléments du cercle-roue. La deuxième somme est l'aire de la demi-roue. Pour calculer la première, remarquons que pour deux points M symétriques par rapport à T, milieu de l'arc CA, la somme des deux arcs CM est $2 \times \text{Arc CM} = \text{Arc CA}$. À cause du regroupement deux par deux, Y ne décrit plus que le rayon, donc cette somme est $R \times \text{Arc CA} =$ l'aire de la roue. L'aire de la demi-roulette est donc 3 fois celle de la demi-roue. Aucune quadrature de la roulette n'est plus rapide. Bien sûr, il y a eu une mise à profit d'une situation particulière : la symétrie des arcs par rapport à l'arc central CT, mais nous verrons plus bas que les méthodes pascaliennes auraient pu s'en passer.

L'idée de considérer des sommes d'arcs multipliés par des petites portions découpées sur l'axe n'est pas chez Pascal une idée isolée. Le *Traité de la roulette* est un véritable traité de calcul intégral, qui expose des méthodes très générales. Comme ces méthodes à la fois constituent le dernier stade de la Méthode des indivisibles, et une rupture avec les précédentes MDI, de par leur aspect général justement, nous allons en dire quelques mots.

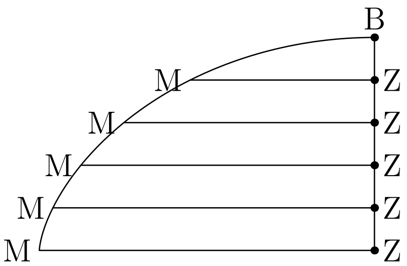



Au départ il y a le *triligne quelconque*, sorte de triangle rectangle à hypoténuse courbe, « fonctionnel » dans le sens qu'il n'est jamais coupé deux fois par une parallèle à son axe. Les trois côtés sont destinés à être tour à tour « divisés en un nombre indéfini de divisions égales », pour fabriquer un grand nombre de sommes.



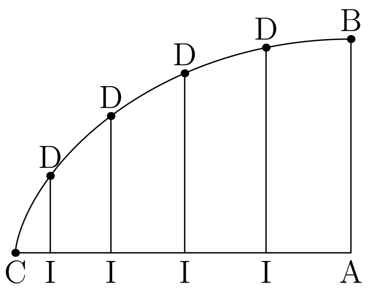

I

Les ordonnées à la base, ME « naissent de divisions égales sur la base » (les EE). Elles servent à fabriquer la somme $\sum \text{ME} \times \text{EE}$, la somme des ordonnées à la base, en langage abrégé pascalien (les abréviations de Pascal consistent à sous-entendre les petites portions).
Cette somme représente l'aire du triligne.



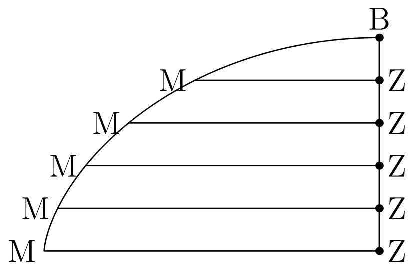

II

Les ordonnées à l'axe, MZ « naissent de divisions égales sur l'axe » (les ZZ). Elles servent à fabriquer la somme $\sum \text{MZ} \times \text{ZZ}$, la « somme des ordonnées à l'axe », en langage abrégé pascalien.
C'est le mot *ordonnée à l'axe* qui indique que les petites portions sous-entendues sont sur l'axe.




III

Les sinus sur la base, DI « naissent de divisions égales sur l'arc » (les DD). « La somme des sinus » est un abrégé du discours pour dire « la somme des sinus DI multipliés chacun par DD » $\left(\sum \text{DI} \times \text{DD}\right)$.
Sauf si le triligne est un quart de cercle, les sinus pascaliens ne sont pas nos actuels sinus.



IV

Les arcs BM « naissent de divisions égales sur l'axe » (les ZZ). « La somme des arcs BM » est un abrégé du discours pour dire « La somme des arcs BM multipliés chacun par ZZ »

Parler d'une ordonnée ou d'un sinus isolé n'a pas de sens, car il faut regarder ceux d'à côté pour voir où sont les divisions égales qui leur donnent naissance. Le langage est très précis, il y a toujours des petites portions sous-entendues, et pour savoir lesquelles il faut se reporter à la définition.

Pascal remarque (voir les deux premières sommes ci-dessus) que

$$\sum \mathrm{ME} \times \mathrm{EE} = \sum \mathrm{MZ} \times \mathrm{ZZ} \tag{1}$$

la somme des ordonnées à la base est égale à la somme des ordonnées à l'axe « car l'une et l'autre est égale à l'espace du triligne ». Ce qui nous importe dans cette égalité très simple, c'est que, en écrivant cela, Pascal a changé la place des éléments différentiels : les EE, petites portions de la base se sont changées en les ZZ, petites portions de l'axe.

Il démontre ensuite, et c'est nettement plus compliqué, que

$$\sum \mathrm{ME}^2 \times \mathrm{EE} = 2\sum \mathrm{AZ} \times \mathrm{MZ} \times \mathrm{ZZ} \tag{2}$$

« la somme des carrés des ordonnées à la base est égale à la somme des ordonnées à l'axe, multipliées chacune par sa distance à la base ».

Cette fois encore, les éléments différentiels (les petites portions) ont déménagé de la base vers l'axe.

Si, pour nous, cette formule n'est au fond pas si mystérieuse, pour Pascal c'est une aventure géométrique. Il est obligé de construire au dessus du triligne un solide qu'il découpe de deux manières différentes en volumes évanouissants (des indivisibles torricelliens), pour finalement montrer que l'égalité ne dit rien d'autre que ceci : le volume est toujours le même, indépendamment des deux manières de le calculer. Au fond, en plus compliqué, c'est la même chose que d'écrire $\sum \mathrm{ME} \times \mathrm{EE} = \sum \mathrm{MZ} \times \mathrm{ZZ}$, l'espace du triligne est le même qu'on le calcule par indivisibles horizontaux ou par indivisibles verticaux.

Venons en à ces sommes d'arcs que Pascal a utilisées pour calculer la surface du triligne-roulette. Il a montré la formule générale

$$\sum \mathrm{BM} \times \mathrm{ZZ} = \sum \mathrm{DI} \times \mathrm{DD} \tag{3}$$

encore un déménagement des petites portions, de l'axe à l'arc, cette fois. Pour montrer cela, Pascal est obligé de fabriquer une figure qui rectifie les arcs CM pour montrer cette formule., Celle-ci, pour un lecteur moderne, aurait beaucoup d'affinités avec l'égalité (1), puisque le lecteur moderne pense « nombre » là où Pascal pense « géométrie » et remplace instantanément $s$ (l'arc) par $x$ (l'abscisse), les nombres se moquant pas mal de savoir si la ligne à mesurer est courbée ou pas.

Avec cette MDI systématisée en théorèmes, Pascal est capable de faire ce que ne pouvaient pas faire ses prédécesseurs : quarrer la partie de la roulette qui est au dessus de T (plus bas, quand on déborde du quart de cercle, on n'a plus un triligne). Il lui suffit pour cela de remplacer la somme des arcs par une somme de sinus $\sum \mathrm{DI} \times \mathrm{DD}$, pour le quart de cercle, ce qu'il sait très bien faire, c'est même la clé de tout son traité (on trouve $R^2$).

Sans qu'il soit possible de rentrer ici dans les détails, signalons juste que les méthodes de Pascal permettent de calculer l'aire de n'importe quelle portion de la roulette, en jonglant avec la linéarité des sommes diverses. De plus, l'aire de la roulette n'est jamais qu'un des dix-huit problèmes dont le *Traité de la roulette* donne les clés générales de résolution.

Pascal qualifie de *méthode des indivisibles* la méthode à l'œuvre dans son traité, dont il est évident qu'elle n'est pas celle de Cavalieri. Est-elle celle de Torricelli et Roberval ? Nous ne le pensons pas, bien que leurs « indivisibles », à tous trois, soient des trapèzes rectangles évanouissants. En effet, il faut se poser la question : quel est l'objet mathématique, c'est-à-dire l'instrument du calcul, pour chacun ? Pour Cavalieri, il n'y a même pas de trapèze, il n'y a que sa longueur. Pour les méthodes à indivisibles homogènes de Torricelli ou Roberval, c'est l'aire du trapèze évanouissant qui compte. Remarquons que le côté oblique du trapèze ne compte absolument pas dans leur calcul, un rectangle ferait aussi bien l'affaire. Chez Pascal une lecture attentive révèle que les véritables objets du calcul sont les deux côtés évanouissants du trapèze, le côté droit — qui intervient dans les calculs d'aires —, et le côté oblique — pour calculer ce que l'on repérera après lui comme des « intégrales curvilignes » —. Ce sont ces *petites portions*, comme les appelle Pascal, qui rentrent dans un système d'échange très élaboré (il y a quinze propositions générales de tels échanges, dans le *traité des trilignes*), et les petites portions les plus importantes sont les obliques, car Pascal réduit les problèmes de roulette en problèmes de cercle (la roue), et en général métamorphose les problèmes de cercle — non déjà résolus par les anciens — en problèmes curvilignes (l'exemple de la quadrature de la portion de roulette au dessus de T est paradigmatique). Ce chant du cygne de la méthode des indivisibles est, comme l'a dit Émile Picard, le premier traité de calcul intégral. Son architecture est impressionnante. Sans les profondes réflexions de Pascal sur la nature de la définition, sans la maîtrise d'une langue littéraire rare (unique ?) chez un mathématicien, il n'aurait pas pu voir le jour. Il ne ressemble pas à ce qui le précède, ni à ce qui va très bientôt le suivre, le Nouveau Calcul de Newton et Leibniz, qui dégage un algorithme, et qui se libère de la géométrie.

# Conclusion.

Une certaine dose de rupture avec la rigueur que l'on a coutume d'attribuer aux mathématiques se manifeste dans la méthode des indivisibles. Cependant, il faut préciser que cette méthode n'a jamais rien démontré de faux (les paradoxes étaient immédiatement repérés comme tels), qu'elle privilégie la démarche par rapport au résultat, la construction par rapport à l'aboutissement et qu'elle est par là proche du fonctionnement de l'esprit humain.

Plus que la rigueur elle-même, c'est la recherche de la rigueur, les discussions auxquelles elle donne lieu qui font la vraie compréhension. Comme dit Pascal — dans un contexte différent, certes — le peuple a les opinions très saines de préférer la chasse à la prise.

Nous terminons le stage sur une parole épistolaire de Wallis, artisan de la méthode des indivisibles lui aussi, très honnête, et souvent malmené par ses contemporains :

*J'aurais certes plutôt attendu de remerciements qu'une accusation, pour avoir indiqué ouvertement et loyalement, non seulement où j'étais arrivé, mais encore quelle route j'avais suivie : pour ne pas avoir été rompre le pont sur lequel j'avais passé le fleuve ; d'autres peuvent le faire, mais on s'en plaint assez.*

# Sources

du stage, de cette narration, de pas mal de ses dessins et même de ses citations :


- Bernard BETTINELLI *Le trésor d'Archimède* IREM de Besançon 1988.
- Jean-Pierre CLÉRO et Évelyne BARBIN *La naissance du calcul infinitésimal au* XVII$^{e}$ *siècle* Centre de Documentation des Sciences Humaines Paris 1980.
- Évelyne BARBIN *Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au* XVII$^{e}$ *siècle. Fragments d'histoire des mathématiques* Brochure APMEP n° 65 1987.
- François DE GANDT *Naissance et métamorphose d'une théorie mathématique : la géométrie des indivisibles en Italie. Fragments d'histoire des mathématiques* Brochure APMEP n° 65 1987.
- Ettore BORTOLOTTI *L'œuvre géométrique d'Evangelista Torricelli. Cahiers du Séminaire d'Épistémologie et d'Histoire des Sciences.* n° 17 1983 Université de Nice.
- François DE GANDT *Les indivisibles de Torricelli. Cahiers du Séminaire d'Épistémologie et d'Histoire des Sciences.* n° 17 1983 Université de Nice.
- Claude MERKER *Le chant du cygne des indivisibles. Le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal.* PUFC (Presses Universitaires Franc-Comtoises) 2001. CiD Paris.
- Agnès FOUGEROUX, Aurélie GIRARD, Stéphanie LAUBIER *La méthode des indivisibles au* XVII$^{e}$ *siècle.* Mémoire de licence Besançon 1998.
- Jean-Étienne MONTUCLA, *Histoire des mathématiques, tome II.*


Sauf l'ouvrage d'É. BARBIN et J-P. CLÉRO (disparu, et épuisé), tout se trouve à la bibliothèque de l'IREM de Besançon.

FIN

# Comment faire du neuf avec du vieux ? ou le principe de permanence. Que valent $-1 \times -1$, $\sqrt{-1}$ et $\mathrm{Log}(-1)$ ?

*Hombeline LANGUEREAU*
*IREM de Franche-Comté*

## Sommaire



## Introduction

Les nombres négatifs ne posent de problème à aucun d'entre nous et pourtant il a fallu lever beaucoup d'obstacles pour les accepter. C'est ce que l'on verra à travers cet exposé. Dès maintenant précisons que L. Carnot, en 1803, se posait des questions existentielles sur les nombres négatifs.

Dans l'histoire des élèves, comme dans l'histoire des mathématiques, on élabore des concepts dans un ensemble fixé que l'on étend ensuite à d'autres en cherchant à préserver les propriétés obtenues.

Quand on peut le faire, il n'y a pas de problème et l'élève peut se demander pourquoi l'enseignant passe autant de temps sur des résultats aussi simples (par exemple démontrer que $2^{1/4} = 2^{2/8}$).

Quand on ne peut pas, c'est l'enseignant qui se demande pourquoi, après un bon cours enrichi de nombreux exemples et contre-exemples, suivi d'exercices en tous genres, il y a beaucoup d'erreurs le jour du contrôle et même beaucoup d'années plus tard.

# Remarques

Cet exposé est ciblé sur les nombres négatifs. Bien que le problème ne soit pas complètement étranger, j'ignore zéro (zéro peut marquer un manque, être un chiffre qui représente rien, être un zéro opératoire, ou un zéro origine, c'est-à-dire lié au choix d'une origine sur un axe).

Les problèmes de l'acceptation des nombres négatifs et des nombres complexes se posent tout au long du XVIII$^{e}$ siècle. En regardant les textes, on constate que les problèmes sont étroitement liés.

Cet exposé doit beaucoup à la culture acquise au sein des IREM, soit lors de conférences ou d'ateliers de la commission Inter-Irem, de colloques ou d'universités d'été, soit à travers les publications citées en bibliographie.

# Quelques points de repères sur le signe −

Pour cela voir l'Annexe 1 extraite de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* de Jules Molk tome 1 volume 1 fascicule 1 (10 août 1904).

Plus généralement, le livre de Cajori F. *a history of mathematical notations* est une excellente référence en ce qui concerne l'histoire des notations.

# Qu'est ce qu'un nombre négatif ?

Quand on a deux nombres (positifs), il est naturel de les additionner $a + b = c$ puis il est naturel de retrouver $a$ en connaissant $b$ et $c$, c'est la soustraction. Cette opération n'est pas toujours possible dans $\mathbb{N}$. Toutefois, au cours de calculs, on peut être amené à écrire $a - b$ avec $b > a$ et aboutir à un résultat juste. En conséquence, dans un premier temps, on acceptera d'écrire $3 - 5$ et même $-2$ au cours d'un calcul mais on refusera ce résultat, qu'on nommera éventuellement racines fausses, (l'histoire est la même pour les complexes comme nous le verrons plus loin). Les valeurs négatives sont en quelque sorte des intermédiaires de calcul fort pratiques. En revanche écrire $-2$ de manière isolée demandera du temps.

Les interprétations naturelles de nombres négatifs se font en termes de débit/crédit ou en terme de avance/recule, comme on le remarque dans les textes originaux.

Malgré tout, en 1637, Descartes (1596-1650) propose dans sa géométrie d'accepter comme solution d'une équation non seulement les nombres négatifs (les fausses racines) mais encore ceux qui pourraient comporter une racine de nombre négatif (les nombres imaginaires ou impossibles). Il énonce ce qui deviendra le théorème fondamental de l'algèbre[1] démontré pour la première fois par Gauss en 1799.

Si un problème a pour solution un nombre négatif, on peut soit accepter cette solution, soit conclure que le problème est en quelque sorte mal posé (voir par exemple D'Alembert ou Lacroix).

Les quantités négatives isolées ne sont pas vraiment acceptées par D'Alembert comme en témoigne l'article NÉGATIF de l'Encyclopédie méthodique (voir Annexe 3).

[1] Toute équation algébrique de degré n admet n racines complexes.

Ces quantités acceptées, il faut pouvoir les

additionner (les règles sont justifiées par une interprétation externe aux mathématiques) ;

multiplier (le produit de deux nombres négatifs n'a alors qu'un sens interne aux mathématiques) ;

comparer entre elles et aux nombres positifs (en lien avec le double sens de $a \div b = c$ qui peut signifier « combien de fois $b$ est-il contenu dans $a$ ? » à savoir la division euclidienne ou « quelle est la quantité $c$ qui, multipliée par $b$, vaut $a$ ? »). Ces deux points de vue fourniront une argumentation à d'Alembert (1717-1783) comme le montre le texte en Annexe 4. On remarquera également à travers les textes la difficulté à réunir nombres positifs et nombres négatifs dans un même corps de nombres.

En résumé, on peut conférer au nombre négatif deux statuts :

C'est un nombre qu'il est pratique d'utiliser pour la résolution des équations par exemple.

C'est un nombre que l'on accepte comme solution d'un problème.

# Que vaut moins par moins ?

La définition de + par + ou − par + ne pose pas de problème majeur. En effet l'interprétation intuitive donne le résultat. Il n'en n'est pas de même pour − par −. C'est là que le principe de permanence peut intervenir. En cherchant à conserver la distributivité par exemple, c'est ce que propose S. Stevin (voir l'Annexe 2). Une autre approche consiste à dire que les nombres négatifs ne sont que des solutions de problèmes mal posés, qu'en conséquence si le problème était bien posé, ils seraient tous les deux positifs ce qui entraîne que leur produit ne peut être que positif (voir l'article NÉGATIF en Annexe 3). C'est cette dernière idée que développe Lacroix dans son ouvrage d'enseignement (voir Annexe 5).

# Introduction de $\sqrt{-1}$ pour la résolution de l'équation du troisième degré.

Remarquons que l'équation de degré trois est liée aux problèmes géométriques non résolus par les grecs qui sont la duplication du cube ($x^3 = a$) et la trisection de l'angle (voir le chapitre de mathématiques et mathématiciens consacré à ce sujet par exemple).

Pour nous, la définition d'une équation ne pose pas de problème. Nous classons les équations algébriques par degrés, puis nous cherchons à les résoudre degré après degré. En revanche tant que zéro et les nombres négatifs n'étaient pas acceptés, ce que nous appelons l'équation du second degré était vue non pas comme un seul cas mais comme six (pour n'avoir que des coefficients positifs) et tant que la puissance n'était pas dégagée de l'aspect géométrique à savoir la puissance un représente une longueur, la puissance deux une surface, la puissance trois un volume, les degrés supérieurs n'avaient pas de sens.

Les mathématiciens ont su très tôt résoudre l'équation du second degré, le cas $x^2+1 = 0$ est réglé : il n'y a pas de solution.

Le mathématicien arabe Al Khayyam né en 1201 (?) (traduit en français en 1851) essaie de classer les équations algébriques de degré au plus quatre d'après le nombre de leurs termes. Il résout géométriquement les équations du troisième degré par intersections de coniques et fait appel à ses successeurs pour les résoudre algébriquement.

Luca Pacioli écrit en 1494 dans sa Summa qu'il est impossible de résoudre les équations du quatrième degré suivantes $ax^4 + bx^2 = cx$ et $ax^4 + b^x = cx^2$ à coefficients évidemment positifs et que nous ramenons à des équations du troisième degré. Ce qu'il exprimait « *Impossibile censo de censo e censo eguale a cosa* ». C'est au début du XVI[e] siècle que les savants se hasarderont à contredire Pacioli et résoudront le problème. Le traité ou figure la résolution de l'équation du troisième degré est celui de J. Cardan paru en 1545 et intitulé (en abrégé) Ars Magna.

R. Bombelli résout algébriquement, dans son traité de 1572, l'équation du troisième degré $x^3 = 15x + 4$ qui admet trois racines réelles, et pour laquelle on ne peut éviter le recours aux nombres complexes. D'après Dedron et Itard, c'est dans ce traité qu'apparaît la première étude solide des nombres imaginaires.

Dans un premier temps, on calcule sur des nombres qui n'ont pas de légitimité mais qui permettent d'obtenir les résultats que l'on souhaite ; dans un deuxième, on leur donne un statut, dans un troisième, on travaille dessus.

Si les nombres complexes arrivent au XVI[e] siècle, il faudra attendre le début du XIX[e] siècle pour leur accorder un véritable statut. C'est l'objet du livre d'Argand : « Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques » paru à Paris en 1806. Comme le titre l'indique, Argand fait appel à une représentation géométrique pour justifier les calculs sur les impossibles qu'il représente comme des segments orientés (c'est quasiment la préhistoire du calcul vectoriel) et il définit ce que nous appelons aujourd'hui le plan d'Argand. Plus tard Gauss, partant de la représentation des réels comme points d'une droite, proposer de représenter les complexes comme points d'un plan.

Les références bibliographiques relatives à ce paragraphe sont : *Mathématiques au fil des âges* p. 103, 104, 105 et surtout *Images, imaginaires, imaginations* pp. 123 à 150

## Quelle est la signification de Log(−1) ? La controverse Leibniz, Bernoulli

Ce paragraphe repose sur les articles de Jean Luc Verley l'un publié par L'APMEP (repris dans l'ouvrage sur les logarithmes à paraître chez Ellipses) et l'autre extrait de l'*abrégé d'histoire des mathématiques.*

Comme nous venons de le voir, les nombres complexes sont introduits par les algébristes italiens de la renaissance pour récupérer les solutions réelles des équations algébriques par l'intermédiaire de formules de résolution non applicables dans le champ réel. Ces nombres complexes furent utilisés avec une confiance croissante jusqu'au milieu du XVII[e] siècle. L'un des adeptes les plus fervent de ces « nombres impossibles » fut le mathématicien flamand Albert Girard qui, dans l'*invention nouvelle en algèbre* (1629), énonce le principe de permanence suivant lequel on peut appliquer au champ complexe toutes les identités obtenues dans le champ réel. On retrouve tout au long du XVIII[e] siècle ce « recours aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre » : les techniques de manipulations des premiers algébristes utilisaient exclusivement la structure de corps de l'ensemble des nombres complexes et ce concept de « généralité de l'algèbre » est la reconnaissance implicite de cette structure de corps commune aux réels et aux complexes, avec aussi, bien sûr, le principe du prolongement analytique qui ne sera pas énoncé correctement avant Weierstrass.

Dans la seconde moitié du XVII$^{\text{e}}$ siècle apparaissent les premiers développements en série des fonctions élémentaires. La notion de convergence n'étant pas encore dégagée (on sait qu'il faudra pour cela attendre le début du XIX$^{\text{e}}$ siècle avec Gauss, Abel et Cauchy), les calculs sont en fait effectués dans l'anneau des séries formelles : les propriétés des fonctions élémentaires s'obtiennent par des manipulations algébriques et les techniques de différentiation et d'intégration du calcul infinitésimal ont un caractère formel. Connue sous le nom d'Analyse algébrique, cette étude des algorithmes illimités de nombres réels ou complexes et celle des méthodes spéciales permettant de représenter, à l'aide de tels algorithmes, les fonctions élémentaires sera le cœur des recherches des analystes du XVIII$^{\text{e}}$ siècle.

Ce traitement algébrique, dénué de préoccupations de convergence — c'est inutile —, introduisit systématiquement les nombres complexes dans l'étude des fonctions élémentaires : sachant que, pour $x$ réel, on a :

$$\mathrm{e}^x = \sum \frac{x^n}{n\,!}$$

alors $\mathrm{e}^z$, pour $z$ complexe, est la série $\sum \frac{z^n}{n\,!}$.

Ayant l'exponentielle définie pour les nombres complexes, il est naturel d'étendre la fonction logarithme définie sur les réels aux valeurs complexes en gardant ses propriétés.

En fonction du *principe de permanence* du passage du réel au complexe, on ne mettait pas en doute, au début du XVIII$^{\text{e}}$ siècle, l'*existence* d'une *fonction* (donc univoque !) $L$, définie pour tout nombre complexe non nul et possédant les propriétés du logarithme réel, à savoir :

1. C'est la fonction réciproque de l'exponentielle, soit $\mathrm{e}^{L(z)} = z$
2. Elle vérifie l'équation fonctionnelle du logarithme :
$$L(zz') = L(z) + L(z')$$
3. Elle vérifie l'équation différentielle habituelle :
$$\mathrm{d}L = \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

L'extension au cas complexe de la fonction logarithme allait, pour la première fois, faire apparaître un phénomène qui était resté caché tant que l'argument était réel, celui des fonctions multiformes. Si on cherche un nombre complexe $Z = X + \mathrm{i}\,Y$ tel que $\mathrm{e}^{X+\mathrm{i}\,Y} = x + \mathrm{i}\,y$, pour $z = x + \mathrm{i}\,y \neq 0$, il résulte immédiatement de la périodicité de la fonction exponentielle complexe que si $Z_0$ est une solution, alors, pour tout entier relatif $k$, le nombre complexe $Z = Z_0 + 2k\pi\,\mathrm{i}$ est encore solution. Plus précisément, si

$$z = |z|(\cos(t) + \mathrm{i}\,\sin(t))$$

on aura la solution générale :

$$Z = \mathrm{Log}(|z|) + \mathrm{i}\,t + 2k\pi\,\mathrm{i}$$

où $\mathrm{Log}(|z|)$ est le logarithme habituel du nombre positif $|z|$. Si l'on convient d'appeler logarithme de $z$ tout $Z$ obtenu ci-dessus, alors la relation fonctionnelle

$$\mathrm{Log}(zz') = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(z')$$

n'est vraie que pour un choix convenable des déterminations de ces logarithmes.

Dans la recherche d'une fonction univoque, les déterminations des valeurs explicites des logarithmes des nombres réels négatifs conduisaient à d'insolubles contradictions et donnèrent lieu à une mémorable controverse épistolaire, dont Euler analyse les éléments, entre Leibniz et Jean Bernoulli dans les années 1712-13 (voir Annexe 6). On retrouve, dans chacune des raisons invoquées, la référence à une des trois propriétés (1), (2), (3). La deuxième version du texte d'Euler (écrit directement en français par son auteur) est disponible sur http://gallica.bnf.fr, on peut en lire de larges extraits dans la brochure de l'APMEP.

Les difficultés et contradictions rencontrées ne pouvaient être « dénouées » que par la reconnaissance du caractère multiforme du logarithme complexe, ce qui constituait une rupture par rapport au principe de permanence, une cassure épistémologique par rapport aux conceptions leibniziennes. Euler explique avec beaucoup de détails comment « il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes » ; tout nombre réel positif a une infinité de logarithmes complexes dont un seul est réel : c'est le passage au complexe qui fait apparaître la situation générale de mesure d'un angle, définie à un multiple de $2\pi$ près. Sous forme moderne, la démonstration d'Euler pour trouver les logarithmes de $x = \cos(t) + \mathrm{i}\,\sin(t)$, c'est-à-dire les solutions de l'équation $\mathrm{e}^y = x$, $x$ donné précédemment, consiste à résoudre d'abord l'équation « approchée » :

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \cos(t) + \mathrm{i}\,\sin(t)$$

qui admet les $n$ solutions :

$$y_n^{(k)} = n\left[\cos\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) - 1\right] + \mathrm{i}\,n\sin\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

il fait alors tendre $n$ vers l'infini pour chaque $k$ fixé, d'où les solutions :

$$y^{(k)} = \mathrm{i}\,(t + 2k\pi)$$

La manière dont Euler manipule ici les infiniment petits et grands est très caractéristique des débuts du calcul infinitésimal et déconcertante pour le lecteur moderne habitué à la rigueur weierstrassienne.

L'absence des concepts ensemblistes, et des notations correspondantes, rendait difficile l'interprétation de l'équation fonctionnelle 2. Mais il est frappant de voir avec quelle clarté Euler décrit la situation. Le signe « = » a au moins trois significations dans ce texte. L'égalité habituelle entre nombres complexes. L'inclusion ensembliste qu'Euler définit parfaitement en disant qu'il prend, dans les deux égalités $2\,\mathrm{Log}(a) = \mathrm{Log}(a^2)$ et $2\,\mathrm{Log}(-a) = \mathrm{Log}(a^2)$, « le signe de = pour marquer que les deux valeurs de $2\,\mathrm{Log}(a)$ et $2\,\mathrm{Log}(-a)$ se rencontrent parmi les valeurs de $\mathrm{Log}(a^2)$ ». Quelques lignes plus bas, on trouve la définition de l'addition ensembliste qui donne tout son sens à l'équation fonctionnelle et permet d'écrire :

$$\mathrm{Log}(a^2) = \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(a) = \mathrm{Log}(-a) + \mathrm{Log}(-a)$$

l'égalité étant cette fois l'égalité ensembliste.

Bien que le mémoire d'Euler soit pour nous d'une remarquable clarté, il ne convainquit pas tous ses contemporains ; d'Alembert, par exemple, ne parvint pas à concevoir la multivocité. Ce mémoire montrait aussi que l'expression $u^v$, pour $u$ et $v$ complexes, a, en général, une infinité de valeurs. Par manque de notations convenables, les fonctions multiformes furent encore l'objet de considérations embrouillées jusqu'au début du XIX^e^ siècle.

# Bibliographie

**Textes originaux**

Site web de la BNF : http://gallica.bnf.fr

Les IREM ont reproduit de nombreux textes originaux notamment l'IREM de Paris VII.

L'éditeur J. Gabay s'est spécialisé dans la reproduction des ouvrages anciens.

J. MOLK, *Encyclopédie des sciences mathématiques,* Paris, Gauthiers-Villars, 1904 (Fac-similé Gabay)

F. S. LACROIX, *Éléments d'algèbre à l'usage de l'école des quatre-nations,* Paris, Veuve Courcier, 1820 (13e éd.)

S. STEVIN, *L'arithmétique*, 1585.

D'ALEMBERT, *L'encyclopédie*, Panckoucke, 1785 ; (fac-simile ACL ou Gallica.bnf)

A. L. CAUCHY, *Cours d'analyse*, 1821.

L. EULER, *De la controverse entre MM. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*, Mémoires de l'Académie de Berlin (1749), Opera 17 p. 195-232 (sur Gallica)

L. EULER, *Éléments d'algèbre*, trad. Française, an III.

**Bibliographie secondaire**

IREM, *Mathématiques au fil des âges*, Éd. Gauthiers Villars, 1987.

A. DAHAN-DALMEDICO et J. PEIFFER, *Une histoire des mathématiques*, Seuil, Collection Points Sciences, 1986 (E.O. 1981)

J. DIEUDONNÉ, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, 1986

J. DIEUDONNÉ *et alii*, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1986 (E.O. 1978)

IREM, *Images, imaginaires, imagination*, Ellipses, 1998

IREM, Université Paris VII, brochures 61, 79 et M:A.T.H. tomes 1, 2.

CAJORI, *A history of mathematical notations,* vol. 1, Open Court Paperback, 1974

APMEP, *Fragments d'histoire des mathématiques*, brochure 41, 1981.

D.S.B. (*Dictionary of Sientific Biography*), Scribners.

P. DEDRON et J. ITARD, *Mathématiques et mathématiciens*, Magnard, 1959, nombreuses rééditions.

# Annexes

## Annexe 1

### *Encyclopédie des Sciences mathématiques, Tome 1, fasc. 1, Teubner, Leipzig ; Gauthier-Villars, Paris. 1904.*

On ne sait rien de certain sur l'origine du signe +, mais on possède des chartes et des manuscrits où la conjonction « et » est représentée par une forme spéciale de la lettre $t$, parfois avec un trait plus ou moins court, en haut à gauche, se raccordant avec la barre verticale du $t$ (chartes liégeoises de 1298, 1383, ...) ; ce trait manque toutefois souvent (Bibl. Darmstadt, ms. 2640, 13$^{e}$ siècle, fol. 108). Aux 15$^{e}$ et 16$^{e}$ siècles on se servait d'ailleurs plutôt du mot « et » que du mot « plus » [cf. *C. Le Paige*, Ann. Soc. scient. Bruxelles 16 (1891/92), p. 74]. D'autres conjectures ont été émises par *A. de Morgan* [Trans. Cambr. philos. Soc. 11 (1871), p. 203, (1864)] et *Ch. Henry* [Revue archéol. (2) 38 (1879), p. 3].

*Léonard de Pise* écrit souvent « et », rarement « plus », pour indiquer l'addition [cf. Liber abbaci 1202 ; dans le texte qui nous est parvenu et qui est de 1228, fol. 191 ; Scritti di *L. Pisano* pubb. da *B. Boncompagni* 1, Rome 1857, p. 414] ; il écrit « minus » pour indiquer la soustraction. [Sur l'origine des locutions « plus » et « minus » voir *G. Eneström*, Interméd. math. 1 (1894), p. 119 (Question 5) et Bibl. math. (2) 13 (1899), p. 105.] *N. Chuquet* et *Luc Paciuolo* emploient les signes $\overline{p}$ ou $\widetilde{p}$ et $\overline{m}$ ou $\widetilde{m}$ pour plus (più) et moins (meno, minus), [Triparty, fol. 62, Bull. bibl. 13, p. 710 ; Summa, fol. 92, ...] ; la conjecture suivant laquelle le signe + serait une abréviation du mot « plus » semble toutefois peu probable [cf. *A. de Morgan* Arithmetical Books, Londres 1847, p. 19].

On ne sait rien de certain sur l'origine du signe − ; c'est peut-être une simple barre servant aux marchands pour séparer l'indication de la tare, appelée longtemps *minus*, de celle du poids total de la marchandise ; d'après *L. Rodet* [Actes Soc. philol. Alençon 8 (1879), p. 105] ce signe serait copié sur un signe hiératique égyptien. On a aussi cherché l'origine de notre signe − dans le signe employé par *Héron* et *Diophante* et qui se serait transformé en ⊤ avant de devenir −. D'autres ont émis l'hypothèse que le signe − aurait son origine dans l'*ὁβελός* des grammairiens alexandrins. Aucune de ces hypothèses n'est appuyée de preuves plausibles.

Pendant longtemps on a écrit ÷ au lieu de − ; au 17$^{e}$ siècle on rencontre encore le signe ÷ dans les Pays-Bas. *F. Viète* n'écrivait $a - b$ que pour $a > b$ ; il désigne par $a == b$ la valeur absolue de la différence de $a$ et de $b$, c'est-à-dire $a - b$ si $a > b$ ou $b - a$ si $a < b$ [cf. Isagoge, fol. 5 ; éd. *F. Schooten*, p. 5 ; trad. *F. Ritter*, p. 233].

Le zéro apparaît au 17$^{e}$ siècle comme signe d'une différence entre deux nombres quelconques égaux. *A. Girard* [Inv., sign. $D_1$ recto] envisage nettement *zéro* comme un *nombre* ; avant lui, on envisageait comme impossible une équation qui n'aurait admis que la racine *zéro*. Dès le septième siècle, les Hindous ont, il est vrai, essayé de multiplier et de *diviser* par *zéro*.

Si, dans une construction logique de l'Arithmétique, l'introduction des nombres négatifs doit, peut-être, précéder celle des nombres fractionnaires [au sujet de l'ordre dans lequel il convient de traiter les 4 opérations fondamentales, voir *A. Capelli*, Rendic. Accad. Napoli (3) 6 (1900), p. 138], il est certain que, historiquement, les nombres négatifs ont été employés beaucoup plus tard que les fractions. Les arithméticiens grecs calculaient seulement avec des différences où le terme passif est plus grand que le terme actif. Toutefois *Diophante* ne se préoccupe pas d'établir ce caractère, et, d'autre part, il connaît la règle des signes tant pour la multiplication que pour le passage d'un terme d'un membre dans un autre [Opera 1, p. 12/15). On trouve ensuite chez les Hindous des traces de calcul avec des nombres négatifs ; *Brahmagupta* (7$^{e}$ siècle) dit déjà « *dette retranchée de zéro devient un bien, et bien devient une dette ... ; si on doit retrancher un bien d'une dette, ou une dette d'un bien, on en fait la somme.* » [Cf. *L. Rodet*, J. asiatique (7) 11 (1878), p. 25] ; de même *Bhâskara Ačârya* (12$^{e}$ siècle) qui distingue aussi la valeur positive et la valeur négative d'une racine carrée [Vîjaganita (Algèbre) chap. 1, sect. II, n° 3 ; éd. *H. T. Colebrooke*, Alg., p. 135] ; un point placé sur un nombre le transforme en son symétrique. Les Arabes n'allèrent guère plus loin. Au 15$^{e}$ siècle, *N. Chuquet* interprète des nombres négatifs, [Triparty, fol. 84$^{b}$, 151$^{a}$, 157$^{a}$, 159$^{b}$ ; Bull. bibl. 13 (1880), p. 738 ; 14 (1881), p. 419, 424, 427], mais il reste assez longtemps sans être imité. *M. Stifel* nomme les nombres négatifs « *numeri absurdi* » par opposition aux « *numeri veri* », mais il les dit *plus petits que zéro* [Arith., fol. 48$^{a}$, 248$^{a}$, 249$^{b}$]. *S. Stevin* fait usage de solutions négatives d'équations numériques. *A. Girard*, par ses découvertes sur les éléments de la théorie des équations, leur donne droit de cité au même titre qu'aux nombres naturels ; il dit déjà [Inv., sign. $F_3$ verso] « *la solution par − s'explique en Géométrie en rétrogradant et le − recule là où le + avance* ». Les calculs effectués systématiquement sur les nombres négatifs sont *postérieurs* à *R. Descartes*.

## Annexe 2

### *Simon Stevin. L'Arithmétique. 1585.*

Troisième distinction des quatre numérations de multinomies radicaux entiers.

THÉORÈME

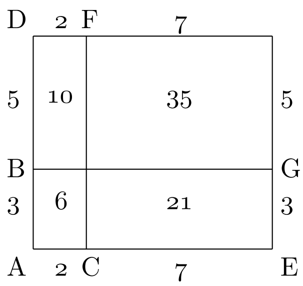
P*lus multiplié par plus donne produict plus, & moins multiplié par moins, donne produict plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produict moins.*

*Explication du donné.* Soit $8 - 5$ multiplié par $9 - 7$, en cette sorte : $-7$ fois $-5$ font $+35$ ($+35$, par ce que, comme dict le théorème, − par −, faict +) Puis $-7$ fois 8 faict $-56$ ($-56$, par ce que, comme dict est au théorème, − par +, faict −) Et semblablement soit $8 - 5$, multiplié par le 9, & donneront produicts $72 - 45$. Puis ajoutez $+72 + 35$, font 107. Puis ajoutez les $-56 - 45$, font $-101$. Et soubstraict le 101 de 107 reste 6, pour produict de telle multiplication. De laquelle la disposition des charactères de l'opération est telle :

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 8 & - & 5 \\
 & & 9 & - & 7 \\
\hline
 & - & 56 & + & 35 \\
72 & - & 45 & & \\
\hline
6 & & & &
\end{array}$$

*Explication du requis.* Il faut démontrer par le dict donné, que + multiplié par +, faict +, & que − par −, faict +, & que + par −, ou − par +, faict −. *Démonstration.* Le nombre à multiplier $8-5$, vaut 3, & le multiplicateur $9-7$ vaut 2. Mais multipliant 2 par 3, le produict est 6. Doncques le produict cy dessus aussi 6, est le vray produict. Mais le même est trouvé par multiplication, là où nous avons dict que + multiplié par +, donne produict +, & − par − donne produict +, & + par −, ou − par +, donne produict −, doncques le théorème est véritable.

*Autre démonstration géométrique.*




Soit AB $8-5$ (à sçavoir AD8−DB5) Puis AC $9-7$ (à sçavoir AE9−EC7) leur produict sera CB : ou bien selon la multiplication précédante ED72−EF56−DG45+GF35, lesquelles nous démontrerons estre égales à CB en cette sorte. De tout le ED+GF, soubstraict EF, & DG, reste CB. *Conclusion.* Plus doncques multiplié par plus, donne produict plus. & moins multiplié par moins, donne produict plus. & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produict moins ; ce qu'il falloit démontrer.

## Annexe 3

### *D'Alembert. Encyclopédie méthodique. Panckoucke. 1785.*

NÉGATIF, adj. (*Alg., quantités négatives, en algèbre,* sont celles qui sont affectées du signe −, & qui sont regardées par plusieurs mathématiciens, comme plus petites que zéro. Cette dernière idée n'est cependant pas juste, comme on le verra dans un moment. *V.* QUANTITÉ.

Les quantités *négatives* sont le contraire des positives : où le positif finit, le négatif commence. *Voy.* POSITIF.

Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, & que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données. Dire que la quantité *négative* est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir. Ceux qui prétendent que 1 n'est pas comparable à $-1$, & que le rapport entre 1 & $-1$ est différent du rapport entre $-1$ & 1, sont dans une double erreur : 1° parce qu'on divise tous les jours, dans les opérations algébriques, 1 par $-1$ : 2° l'égalité du produit de $-1$ par $-1$, & de $+1$ par $+1$, fait voir que 1 est à $-1$ comme $-1$ est à 1.

Quand on considère l'exactitude et la simplicité des opérations algébriques sur les quantités *négatives*, on est bien tenté de croire que l'idée précise que l'on doit attacher aux quantités négatives doit être une idée simple, & n'être point déduite d'une métaphysique alambiquée. Pour tâcher d'en découvrir la vraie notion, on doit d'abord remarquer que les quantités qu'on appelle *négatives*, & qu'on regarde faussement comme au-dessous du zéro, sont très souvent représentées par des quantités réelles, comme dans la géométrie, où les lignes *négatives* ne diffèrent des positives que par leur situation à l'égard de quelque ligne au point commun. *Voyez* COURBE. De là il est assez naturel de conclure que les quantités *négatives*, que l'on rencontre dans le calcul, sont en effet des quantités réelles auxquelles il faut attacher une idée autre que celle qu'on avait supposée. Imaginons, par exemple, qu'on cherche la valeur d'un nombre $x$, qui, ajouté à 100, fasse 50, on aura, par les règles de l'Algèbre, $x + 100 = 50$, & $x = -50$ ; ce qui fait voir que la quantité $x$ est égale à 50, & qu'au lieu d'être ajoutée à 100, elle doit en être retranchée ; de sorte qu'on aurait dû énoncer le problème ainsi : trouver une quantité $x$ qui, étant retranchée de 100, donne 50 pour reste ; en énonçant le problème ainsi, on aurait $100-x = 50$, & $x = 50$ ; la forme *négative* de $x$ ne subsisterait plus. Ainsi, les quantités *négatives* indiquent réellement, dans le calcul, des quantités positives, mais qu'on a supposées dans une fausse position. Le signe $-$ que l'on trouve avant une quantité, sert à redresser & à corriger une erreur que l'on a faite dans l'hypothèse, comme l'exemple ci-dessus le fait voir très clairement. *Voyez* ÉQUATION.

Remarquez que nous ne parlons ici que des quantités *négatives* isolées, comme $-a$, ou des quantités $a - b$, dans lesquelles $b$ est plus grand que $a$ ; car, pour celles où $a - b$ est positif, c'est-à-dire, où $b$ est plus petit que $a$, le signe ne fait aucune difficulté.

Il n'y a donc point réellement & absolument de quantité *négative* isolée : $-3$ pris abstraitement ne présente à l'esprit aucune idée ; mais, si je dis qu'un homme a donné à un autre $-3$ écus, cela veut dire en langage intelligible, qu'il lui a ôté 3 écus.

Voilà pourquoi le produit de $-a$ par $-b$, donne $+ab$ : car $a$ & $b$ étant précédés du signe $-$ par la supposition, c'est une marque que ces quantités $a$, $b$, se trouvent mêlées & combinées avec d'autres à qui on les compare, puisque, si elles étaient considérées comme seules & isolées, les signes $-$, dont elles sont précédées, ne présenteraient rien de net à l'esprit. Donc ces quantités $-a$ & $-b$ ne se trouvent précédées du signe $-$, que parce qu'il y a quelqu'erreur tacite dans l'hypothèse du problème ou dans l'opération : si le problème était bien énoncé, ces quantités $-a$, $-b$, devraient se trouver chacune avec le signe $+$, & alors leur produit serait $+ab$ ; car que signifie la multiplication de $-a$ par $-b$ ? c'est qu'on retranche $b$ de fois la quantité *négative* $-a$ : or, par l'idée que nous avons donnée ci-dessus des quantités *négatives*, ajouter ou poser une quantité *négative*, c'est en retrancher une positive ; donc, par la même raison, en retrancher une *négative*, c'est en ajouter une positive ; & l'énonciation simple et naturelle du problème doit être, non de multiplier $-a$ par $-b$, mais $+a$ par $+b$ ; ce qui donne le produit $+ab$. Il n'est pas possible, dans un ouvrage de la nature de celui-ci, de développer davantage cette idée ; mais elle est si simple, que je doute qu'on puisse lui en substituer une plus nette & plus exacte ; & je crois pouvoir assurer que, si on l'applique à tous les problèmes que l'on peut résoudre, & qui renferment des quantités *négatives*, on ne la trouvera jamais en défaut. Quoi qu'il en soit, les règles des opérations algébriques sur les quantités *négatives*, sont admises par tout le monde, & reçues généralement comme exactes, quelqu'idée qu'on attache d'ailleurs à ces quantités. Sur les ordonnées négatives d'une courbe & leur situation par rapport aux ordonnées positives, *voyez* COURBE.

Nous ajouterons seulement à ce que nous avons dit dans cet article, que, dans la solution d'un problème géométrique, les quantités *négatives* ne sont pas toujours d'un côté opposé aux positives, mais d'un côté opposé à celui où l'on les a supposées dans le calcul. Je suppose, par exemple, que l'on ait l'équation d'une courbe entre les rayons partant d'un centre ou pole, que j'appelle $y$, & les angles correspondants que je nomme $z$ ; en sorte que $y$, par exemple, $= \dfrac{aa}{a + b\cos(z)}$, il est évident que, lorsque $\cos(z)$ sera $= -1$, alors , si $a$ est $> b$, $y$ sera dans une position directement contraire à celle qu'elle avait lorsque $\cos(z) = 1$, cependant l'une & l'autre valeur de $y$ seront sous une forme positive dans l'équation. Mais, si $a$ est $< b$, alors la valeur algébrique de $y$ sera *négative*, & $y$ devra être prise du même côté que quand $\cos(z) = 1$, c'est-à-dire, du côté contraire à celui vers lequel on a supposé qu'elle devait être prise. Il se présente encore d'autres cas, en géométrie, où les quantités *négatives* paraissent se trouver du côté où elles ne devraient pas être ; mais les principes que nous venons d'établir, & ceux que nous avons posés ou indiqués à l'*article* ÉQUATION, suffiront pour résoudre ces sortes de difficultés. Nous avons expliqué, dans cet article, en quoi les racines *négatives* des équations différaient des racines imaginaires ; c'est que les premières donnent une solution du problème envisagé sous un aspect un peu différent, & qui ne diffère point même dans le fond de la question proposée ; mais les imaginaires ne donnent aucune solution possible du problème, de quelque manière qu'on l'envisage. C'est que les racines *négatives*, avec de légers changements à la question, peuvent devenir positives, au lieu que les imaginaires ne le peuvent jamais. Je suppose que j'aie $bby = x^3 - a^3$, ou en faisant $b = 1$, $y = x^3 - a^3$ ; lorsque $x$ est $< a$, $y$ devient *négative*, & doit être prise de l'autre côté (*voyez* COURBE) ; pourquoi cela ? c'est que, si on avait reculé l'axe d'une quantité $c$, ce qui est absolument arbitraire, en sorte qu'au lieu des coordonnées $x$ & $y$, on eût eu les coordonnées, $x$ & $z$, telles que $z$ fût $= y + c$, alors on aurait eu $z = c + x^3 - a^3$ ; & en faisant $x < a$, $z$ n'aurait plus été *négative*, ou plutôt aurait continué à être encore positive pendant un certain temps : d'ou l'on voit que la valeur *négative* de $y$, $x^3 - a^3$, appartient aussi bien à la courbe que les valeurs positives ; ce qui a été développé plus au long au *mot* COURBE. Au contraire, si on avait $y = \sqrt{xx - aa}$, & que $x$ fût $< a$, alors on aurait beau transporter l'axe, la valeur de $y$ resterait imaginaire ; ainsi, les racines *négatives* indiquent des solutions réelles, parce que ces racines deviennent positives par de légers changements dans la solution ; mais les racines imaginaires indiquent des solutions impossibles, parce que ces racines ne deviennent jamais ni positives ni réelles par ces mêmes changements. *Voyez* ÉQUATION & RACINE.

Quand on a dit plus haut que le *négatif* commence où le positif finit, cela doit s'entendre avec cette restriction, que le positif ne devienne pas imaginaire. Par exemple, soit $y = xx - aa$, il est visible que, si $x > a$, $y$ sera positif ; que, si $x = a$, $y$ sera $= 0$, & que, si $x < a$, $y$ sera *négatif*. Ainsi, dans ce cas, le positif finit où $y = 0$, & le *négatif* commence alors ; mais, si on avait $y = \sqrt{xx - aa}$, alors $x > a$ donne $y$ positif & $x = a$ donne $y = 0$ ; mais $x < a$ donne $y$ imaginaire.

Le passage du positif au *négatif* se fait toujours par zéro, ou par l'infini. Soit, par exemple, $y = x - a$, on aura $y$ positif tant que $x > a$, $y$ *négatif* lorsque $x < a$, & $y = 0$ lorsque $x = a$ ; dans ce cas, le passage se fait par zéro. Mais, si $y = \dfrac{1}{x-a}$, on aura $y$ positif tant que $x$ est $> a$, $y$ *négatif* lorsque $x$ est $< a$, & $y = \infty$ lorsque $x = a$ ; le passage se fait alors par l'infini.

Ce n'est pourtant pas à dire qu'une quantité qui passe par l'infini ou par le zéro, devienne nécessairement de positive, *négative* ; car elle peut rester positive. Par exemple, soit $y = \overline{a-x}^2$, ou $y = \dfrac{1}{\overline{a-x}^2}$ ; lorsque $a = x$, $y$ est $= 0$ dans le premier cas, & $= \infty$ dans le second ; mais soit que $a$ soit $> x$, ou que $a$ soit $< x$, $y$ demeure toujours positive. *V.* MAXIMUM. *(O)*

# Annexe 4

***D'Alembert. Encyclopédie méthodique. Panckoucke. 1785.***

QUANTITÉS, *en termes d'Algèbre*, sont des nombres indéterminés , ou que l'on rapporte à l'unité en général. *Voyez* NOMBRE.

Les *quantités* sont proprement le sujet de l'algèbre, qui roule entièrement sur leur calcul. *Voyez* ALGÈBRE & CALCUL.

On marqué ordinairement les *quantités* connues par les premières lettres de l'alphabet, $a$, $b$, $c$, $d$, &c. & les *quantités* inconnues par les dernières, $z$, $y$, &c.

Les *quantités* algébriques sont ou positives ou négatives.

On appelle *quantité positive* celle qui est au-dessus de zéro, & qui est précédée, ou que l'on suppose être précédée du signe $+$, *voyez* POSITIF.

*Quantités négatives* sont celles qui sont regardées comme moindres que rien, & qui sont précédées du signe $-$, *voyez* NÉGATIF.

Puis donc que $+$ est le signe de l'addition, & $-$ celui de la soustraction, il s'ensuit qu'il ne faut pour produire une *quantité* positive, qu'ajouter une *quantité* réelle à rien ; par exemple $0 + 3 = +3$ ; & $0 + a = +a$. De même pour produire une *quantité* négative il ne faut que retrancher une *quantité* réelle de 0 ; par exemple $0 - 3 = -3$ ; & $0 - a = -a$.

Éclaircissons ceci par un exemple. Supposez que vous n'ayez point d'argent, & que quelqu'un vous donne cent écus ; vous aurez alors cent écus plus que rien, & ce sont ces cent écus qui constituent une *quantité* positive.

Si au contraire vous n'avez point d'argent, & que vous deviez cent écus, vous aurez alors cent écus moins que rien ; car vous devez payer ces cent écus pour être dans la condition d'un homme qui n'a rien & qui ne doit rien : cette dette est une *quantité* négative.

De même dans le mouvement local, le progrès peut être appelé une *quantité* positive, & le retour une *quantité* négative ; à cause que le premier augmente & le second diminue le chemin qu'on peut avoir déjà fait.

Si l'on regarde en géométrie une ligne tirée vers quelque côté que ce soit comme une *quantité* positive, celle que l'on mènera du côte opposé sera une *quantité* négative. *Voyez* COURBE.

Selon quelques auteurs, les *quantités* négatives sont les défauts des positives.

Selon ces mêmes auteurs, puisqu'un défaut peut excéder un autre (car, par exemple, le défaut de 7 est plus grand que celui de 3) ; une *quantité* négative prise un certain nombre de fois, peut être plus grande qu'une autre.

D'où il suit que les *quantités* négatives sont homogènes entr'elles.

Mais, ajoutent-ils, puisque le défaut d'une *quantité* positive prise tel nombre de fois que l'on voudra, ne peut jamais surpasser la *quantité* positive, & qu'elle devient toujours plus défective : les *quantités* négatives sont hétérogènes aux positives ; d'où ils concluent que les *quantités* négatives étant hétérogènes aux positives, & homogènes aux négatives, il ne peut y avoir de rapport entre une *quantité* positive & une négative, mais il peut s'en trouver entre deux négatives. Par exemple, $-3a : -5a :: 3 : 5$. Le rapport est ici le même que si les *quantités* étoient positives. Mais ils prétendent observer qu'entre 1 & $-1$, & entre $-1$ & 1, la raison est tout-à-fait différente. Il est vrai pourtant d'un autre côté que $1 : -1 :: -1 : 1$, puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ; ainsi la notion que donnent les auteurs des *quantités* négatives n'est pas parfaitement exacte. *Voyez* NÉGATIF.

*Addition des quantités.* 1°. Si les *quantités* exprimées par la même lettre ont aussi le même signe, on ajoutera les nombres dont elles sont précédées, comme dans l'arithmétique ordinaire.

2°. Si elles ont différents signes, l'addition devient une soustraction, & l'on ajoute au restant le signe de la plus grande *quantité*.

3°. On ajoute les *quantités* exprimées par différentes lettres par le moyen du signe +, comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{array}{r} 4a + 2b - 2c - 5d - 9 \\ 5a + 2b + 2c + 2d - 39 \\ \hline 9a + 4b - 3d - 48 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ c \\ \hline a - b + c \end{array}$$

Soustraction des *quantités*, *voyez* SOUSTRACTION.

Multiplication & division des *quantités*, *voyez* MULTIPLICATION *ou* DIVISION.

Continuation des *quantités*, *voyez* COMBINAISON, PERMUTATION, &c.

1°. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise deux *quantités* positives l'une par l'autre, il en résulte une *quantité* positive.

2°. Quand on multiplie ou qu'on divise une *quantité* négative par une positive, le produit & le quotient sont négatifs.

3°. En multipliant ou divisant deux *quantités* négatives l'une par l'autre, il en résulte une *quantité* positive.

4°. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise une quantité *positive* par une négative, ce qui en vient est une *quantité* négative. *(E)*

# Annexe 5

### *S. Lacroix. Éléments d'Algèbre. 13e édition. 1820.*

61. On apprend par les exemples précédens qu'*il peut se trouver dans les énoncés des problèmes du premier degré, certaines contradictions que l'Algèbre fait non seulement connaître, mais dont elle indique encore la rectification en rendant soustractives certaines quantités qu'on avait regardées comme additives, ou additives certaines quantités que l'on avait regardées comme soustractives, ou en donnant pour les inconnues des valeurs affectées du signe* $-$.

Voilà ce qu'il faut entendre lorsqu'on dit communément que les valeurs affectées du signe $-$, et qu'on appelle *solutions négatives*, résolvent, dans un sens opposé à son énoncé, la question où elles se rencontrent.

Il suit de là qu'on peut regarder comme ne formant, à proprement parler, qu'une seule question, celles dont les énoncés sont liés entre eux de manière que les solutions qui satisfont à l'un des énoncés, peuvent, par un simple changement de signe, satisfaire à l'autre.

62. Puisque les quantités négatives résolvent, dans un certain sens, les problèmes qui leur donnent naissance, il est à propos d'examiner de plus près l'usage de ces quantités, et d'abord de s'assurer de la manière dont il convient d'effectuer les opérations indiquées à leur égard.

On a ci-dessus fait usage des règles des signes, trouvées précédemment pour chacune des opérations fondamentales ; mais ces règles n'ont point été démontrées sur des quantités isolées. Pour la soustraction, par exemple, on a supposé qu'il fallait retrancher de $a$ l'expression $b - c$, dans laquelle la quantité négative $-c$ était précédée d'une quantité positive $b$. On réduirait bien $b - c$ à $-c$, un faisant $b = 0$, ce qui changerait le résultat en $a + c$ ; mais le raisonnement employé à l'endroit cité, supposant l'existence de la quantité $b$ ne paraît pas comprendre ce cas ; et comme la théorie des quantités négatives étant à la fois l'une des plus importantes et des plus épineuses de l'Algèbre, il est à propos de l'appuyer sur des bases solides. Pour parvenir à ce but, il faut remonter à l'origine des quantités négatives.

La plus grande soustraction que l'on puise opérer sur une quantité, c'est de la retrancher d'elle-même ; et dans ce cas, on a zéro pour reste : ainsi, $a-a=0$. Mais lorsque la quantité à retrancher surpasse celle dont il faut la retrancher, on ne peut plus effectuer en entier la soustraction ; on ne fait qu'opérer, dans la quantité à soustraire, une réduction égale à la quantité dont elle devrait être ôtée. Lorsque de 3, par exemple, il faut retrancher 5, ou qu'on a la quantité $3-5$, en ôtant d'abord 3 de 5, on décompose 5 en deux parties 3 et 2 dont la soustraction successive reviendrait à celle de 5, et par là, au lieu de $3-5$ on a l'expression équivalente $3-3-2$ qui se réduit à $-2$. Le signe $-$ qui précède 2 montre que c'est ce dont il s'en faut que la soustraction ait pu s'opérer toute entière ; en sorte que si l'on eût ajouté 2 à la première des quantités, on aurait eu $3+2-5$, ou zéro. On exprime donc, au moyen des signes algébriques, l'idée qu'on doit attacher à la quantité négative $-a$, en formant l'équation $a-a=0$, ou en regardant les symboles $a-a$, $b-b$, etc. comme équivalents à zéro.

Cela posé, on conçoit que si l'on joint à la quantité quelconque $a$ le symbole $b-b$, qui n'est au fond que zéro, on ne changera point la valeur de cette quantité, et que par conséquent l'expression $a+b-b$ n'est une autre manière d'écrire la quantité $a$ ; ce qui est d'ailleurs évident, puisque les termes $+b$ et $-b$ se détruisent.

Mais ayant, par ce changement de forme, fait entrer dans la composition de $a$ les quantités $+b$ et $-b$, on voit que pour soustraire l'une quelconque de ces quantités, il suffit de l'effacer. Si c'est $+b$ qu'on veut soustraire de $a$, on l'effacera, et il restera $a-b$, ce qui s'accorde avec la convention établie n° 2 ; si c'est, au contraire, $-b$, on effacera cette dernière quantité, et il restera $a+b$, comme on le conclurait du n° 20.

À l'égard de la multiplication, on remarquera que le produit de $a-a$ par $+b$, doit être $ab-ab$, parce que le multiplicande étant égal à zéro, le produit doit aussi être zéro ; et le premier terme étant $ab$, le second doit nécessairement être $-ab$, pour détruire ce premier.

On conclura de là que $-a$ multiplié par $+b$ doit donner $-ab$.

En multipliant $a$ par $b-b$, on aura encore $ab-ab$, parce que le multiplicateur étant égal à zéro, le produit sera aussi égal à zéro ; et il faudra par conséquent que le second terme soit $-ab$ pour détruire le premier $+ab$.

Donc $+a$ multiplié par $-b$ doit donner $-ab$.

Enfin si l'on multiplie $-a$ par $b-b$, le premier terme $-$ du produit étant, d'après ce qui précède, $-ab$, il faudra que le second terme soit $+ab$, puisque le produit doit être nul en même temps que le multiplicateur.

Donc $-a$ multiplié par $-b$ doit donner $+ab$.

En rapprochant ces résultats, on en déduit les mêmes règles que celles du numéro 31.

Le signe d'un quotient, combiné avec celui du diviseur, suivant les règles propres à la multiplication, devant reproduire le signe du dividende, on conclura de ce qui vient d'être dit, que la règle des signes, donne n° 42, convient encore au cas actuel, et que par conséquent *les quantités monômes, lorsqu'elles sont isolées, se combinent, par rapport à leurs signes, de même que lorsqu'elles font partie des polynômes.*

## Annexe 6

### *Leonhardi Euleri. Opera omnia $I_{17}$*

DE LA CONTROVERSE
ENTRE MRS. LEIBNIZ ET BERNOULLI
SUR LES LOGARITHMES
DES NOMBRES NEGATIFS ET IMAGINAIRES

Commentatio 1 6 8 indicis Enestroemiani
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [5] (1749), 1751, p. 139–179

Quoique la doctrine des logarithmes soit si solidement établie que les vérités qu'elle renferme, semblent aussi rigoureusement démontrées que celles de la Géométrie, les Mathematiciens sont pourtant encore fort partagés sur 1a nature des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires ; et quand on ne trouve pas cette controverse fort agitée, , la raison en est apparemment qu'on n'a pas voulu rendre suspecte la certitude de tout ce qu'on avance dans les parties pures de la Mathématique, en dévelopant devant les yeux de tout le monde les difficultés et même les contradictions auxquelles les sentimens des Mathématiciens sur les logarithmes des nombres .négatifs et imaginaires sont assujettis. Car, bien que leurs sentimens puissent être fort differens sur des questions qui regardent la Mathématique appliquée, où les diverses manieres d'envisager les objets et de les ramener à des idées précises peuvent donner lieu à des controverses réelles, on a toujours prétendu que les parties pures de la Mathematique étoient entierement délivrées de tout sujet de dispute, et qu'il ne s'y trouvoit rien dont on ne fût en état de démontrer ou la vérité ou la fausseté.

Comme la doctrine des logarithmes appartient sans contredit à la Mathématique pure, on sera bien surpris d'apprendre qu'elle ait été jusqu'ici assujettie à des controverses tellement embarrassées que, de quelque parti qu'on se déclare, on tombe toujours en des contradictions qu'il semble tout à fait impossible de lever. Cependant, si la vérité doit se soutenir partout, il n'y a aucun doute que toutes ces contradictions, quelque ouvertes qu'elles paroissent, ne peuvent être qu'apparentes, et qu'il n'y sauroit manquer des moyens pour sauver la vérité, quoique nous ne sachions point de quel endroit nous puissions tirer ces moyens.

Cette controverse sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires se trouve agitée avec assez de force dans le Commerce littéraire[2]) entre M. Leibniz et M. Jean Bernoulli. Ces deux grands Mathematiciens, à qui nous sommes pour la pluspart redevables de l'Analyse des infinis, furent tellement partagés sur cet article, qu'il n'y avoit pas moyen de les mettre d'accord la dessus, quoique l'un et l'autre n'ait eu en vuë que la vérité, et qu'ils fussent également éloignés de soutenir leurs sentimens avec opiniatreté. Mais chacun a trouvé dans le sentiment de l'autre tant de contradictions, que ç'auroit été une complaisance trop outrée, si l'un avoit changé son sentiment en faveur de l'autre. Car il faut remarquer que les contradictions que ces deux Grands hommes se reprochoient, étoient réelles, et point du tout du nombre de celles qui ne paroissent telles qu'à la partie opposée, entêtée de son propre sentiment.

Pour mettre donc cette remarquable controverse dans tout son jour, j'exposerai ici séparément les sentimens de M. Bernoulli et de M. Leibniz ; j'y ajouterai ensuite tous les argumens dont chacun s'est servi pour maintenir son sentiment, et enfin je détaillerai les objections qu'on peut faire, tant contre les argumens que contre chaque sentiment même, et je ferai sentir en toutes leurs forces toutes les contradictions auxquelles l'un et l'autre de ces deux sentimens est assujetti, afin qu'on soit d'autant mieux en état de juger combien il doit être difficile de découvrir la vérité et de la garantir contre toutes les objections, après que les deux plus grands hommes y ont travaillé en vain.

## SENTIMENT DE M. BERNOULLI

*M.* Bernoulli *soutint que les logarithmes des nombres négatifs étoient les mêmes que ceux des nombres affirmatifs, ou que le logarithme du nombre négatif $-a$ étoit égal au logarithme du nombre affirmatif $+a$. Ainsi le sentiment de M.* Bernoulli *porte qu'il y a $l-a=l+a$.*

M. Leibniz a donné occasion à cette déclaration de M. Bernoulli, lorsqu'il avança, dans la CXC Epitre du *Commerce*[3]), que la raison de $+1$ à $-1$ ou de $-1$ à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme ou la mesure de cette raison, c. à d. le logarithme de $-1$, qui est l'exposant de cette raison, étoit imaginaire. Là dessus, M. Bernoulli déclara, dans la CXCIII Epitre[4]), qu'il n'étoit point de même avis, et qu'il croyoit même que les logarithmes des nombres négatifs étoient non seulement réels, mais aussi égaux aux logarithmes des mêmes nombres pris positivement. M. Bernoulli fortifia aussi son sentiment par les raisons suivantes.

### 1. RAISON

Pour prouver que $l-x=l+x$, quelque nombre qu'on marque par $x$, il recourt aux différentiels ; et puisque le différentiel de $l-x$ est $\frac{-dx}{-x}$ ou $\frac{dx}{x}$ de même que celui de $l+x$, il en conclut que ces quantités mêmes $l-x$ et $l+x$, dont les différentiels sont égaux, doivent être égales entr'elles, et partant qu'il est $l-x=l+x$.

### 2. RAISON

Cette raison est tirée de la nature de la courbe logarithmique. Pour la faire mieux comprendre, soit $VBM$ (Fig. 1, p. 35) une Logarithmique décrite sur l'axe $OAP$, qui est en même tems son asymtote. Soit la soutangente de cette Logarithmique qui est, comme on sait, constante, $=1$ ; et que l'appliquée fixe $AB$ soit aussi $=1$. Cela posé, si l'on nomme une abscisse quelconque $AP=x$, prise depuis le point fixe $A$, et l'appliquée qui y répond $PM=y$, on sait que $x$ exprime le logarithme de $y$, ou que $x=ly$.

Donc, prenant les différentiels, on aura pour cette courbe logarithmique cette équation différentielle $dx=\frac{dy}{y}$ ou $ydx=dy$. Cette équation demeurant la même, quoiqu'on mette $-y$ au lieu de $y$, M. Bernoulli conclut de là que cette courbe $VBM$ est accompagnée, en vertu de la loi de continuité, de la branche $vbm$, qui lui est égale et semblable, étant située de l'autre part de l'axe $OP$, de sorte que cet axe soit en même tems un diametre de la courbe entiere. Et partant, puisque la même abscisse $AP$ répond, également aux deux appliquées $PM$ et $Pm$,

[2] *Virorum celeberr.* Got. Gul. Leibnitii *et* Iohan. Bernoullii *commercium philosophicum et mathematicum*, t. 2, ab anno 1700 ad annum 1716. Lausannae et Genevae 1745, p. 269, 276, 278, 282, 287, 292, 296, 298, 303, 305, 312, 315. A. G.

[3] L. c. p. 269. A. G.

[4] L. c. p. 276. A. G.

dont l'une est la négative de l'autre, de sorte que posant $PM = y$ il est $Pm = -y$, il s'ensuit que $x$ est aussi bien le logarithme de $-y$ que de $+y$, par conséquent $l - y = l + y$.

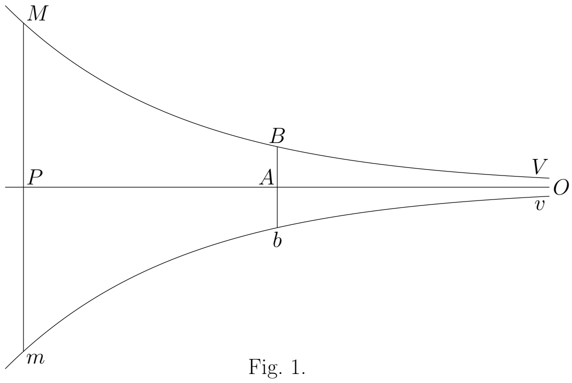



Fig. 1.

## 3. RAISON

Comme tout revient à prouver que la Logarithmique est composée de deux branches égales, situées de part et d'autre de l'asymtote $OP$, M. Bernoulli apporte encore une autre raison qui est, qu'en considérant les courbes comprises dans cette équation plus générale $dx = \frac{dy}{y^n}$ on est d'accord que toutes ces courbes, lorsque l'exposant $n$ est un nombre impair, ont deux branches telles que l'axe sur lequel sont prises les abscisses $x$, en est un diametre. Donc il faut que cette propriété ait aussi lieu, si $n = 1$ ; or dans ce cas, on aura la Logarithmique de l'article précédent ; d'où il s'ensuit donc que tant le logarithme de $PM = +y$ que le logarithme de $Pm = -y$ est le même $= AP = x$.

## 4. RAISON

Puisqu'il est certain, par la nature des logarithmes, que le logarithme d'une puissance quelconque $p^n$ est égal au logarithme de la racine $p$ multiplié par l'exposant $n$, ou que $lp^n = nlp$, il s'ensuit que prenant pour $p$ un nombre négatif $-a$, il y aura $l(-a)^n = nl(-a)$. Soit $n = 2$, et il sera $l(-a)^2 = 2l(-a)$. Or parce que $(-a)^2 = a^2$, nous aurons $l(-a)^2 = la^2 = 2la$ ; d'où il s'ensuit que $2l(-a) = 2la$, et partant $l - a = l + a$. Cela se montre plus promtement de cette maniere : Puisque $(-a)^2 = (+a)^2$, il sera $l(-a)^2 = l(+a)2$, ou bien $2l - a = 2l + a$, et par conséquent $l - a = l + a$ :

Toutes les autres raisons qu'on peut alléguer pour prouver ce sentiment, se réduisent aisément à une des quatre que je viens d'exposer. Je m'en vai donc étaler les objections qu'on fait contre ce sentiment, et les raisons dont il est appuyé.

## 1. OBJECTION

M. Leibniz opposa contre la premiere raison,, que la régle de differentier le logarithme d'une quantité variable $x$, en divisant le différentiel de $x$ par la quantité même $x$, n'avoit lieu, que lorsque $x$ marquoit une quantité positive, de sorte qu'on se trompoit en posant le différentiel de $l - x$ égal à $\frac{-dx}{-x}$ ou à $\frac{dx}{x}$. Or il faut avouër que cette objection est non seulement extrèmement foible, n'étant soutenue par aucune raison valable, mais qu'elle renverseroit tout à fait le calcul différentiel des logarithmes. Car, comme ce calcul roule sur des quantités variables, c. à d. sur des quantités considérées en général, s'il n'étoit pas vrai généralement qu'il fût $d.lx = \frac{dx}{x}$, quelque quantité qu'on donne à $x$, soit positive ou négative, ou même imaginaire, on ne pourroit jamais se servir de cette régle, la vérité du calcul différentiel étant fondée sur la généralité des régles qu'il renferme. Or. M. Leibniz n'auroit pas eu besoin de se tenir à cette objection pour maintenir son sentiment, puisqu'il auroit pu attaquer la raison de M. Bernoulli par une objection beaucoup plus forte que voilà.

## 2. OBJECTION

M. Bernoulli voulant prouver par l'égalité des différentiels, qu'il étoit $l - x = l + x$, prouveroit par le même raisonnement que $l2x = lx$ ; car le différentiel de $l2x$ est $\frac{2dx}{2x} = \frac{dx}{x}$ tout comme celui de $lx$. Et partant, si le raisonnement de M. Bernoulli étoit juste, il s'ensuivroit que non seulement $l - x = l + x$, mais aussi que $l2x = lx$ et en général $lnx = lx$, quelque nombre que marque $n$ ; conséquence que M. Bernoulli lui même n'accorderoit jamais. Or on sait que lorsque les différentiels de deux quantités variables sont égaux, il n'en suit pas davantage que ce que ces quantités variables différent entr'elles d'une quantité constante ; et on n'en sauroit conclure qu'elles fussent égales. Ainsi, quoique le différentiel de $x + a$ soit $dx$ aussi bien que celui de $x$, la conséquence seroit bien fausse, si l'on en vouloit conclure que $x + a = x$. Par cette raison, il est donc clair que, puisque le différentiel de $l - x$ et de $l + x$ est le même $\frac{dx}{x}$, les quantités $l - x$ et $l + x$ ne différent entr'elles que d'une quantité constante, ce qui est également évident, vu que $l - x = l - 1 + lx$. Et de là on comprend aussi aisément que puisque $lnx = lx + ln$, le différentiel de $lnx$ doit être égal au différentiel de $lx$. Il est vrai que M. Bernoulli suppose $l - 1 = 0$, de même qu'il est $l1 = 0$, de sorte qu'il seroit $l - x = lx + l - 1 = lx$. Mais comme c'est précisément ce que M. Bernoulli veut prouver par ce raisonnement, on voit bien que cette supposition ne peut pas être admise.

## 3. OBJECTION

On peut opposer la même chose contre la seconde raison de M. Bernoulli, quand il veut prouver par l'équation différentielle de la Logarithmique $ydx = dy$, que cette courbe a deux branches semblables situées de part et d'autre de l'axe. Car, non seulement cette équation demeure la même, si l'on met $-y$ au lieu de $y$, mais aussi si l'on met $2y$, ou en général $ny$ pour $y$ ; d'où il suivroit que cette courbe eût une infinité de branches, et que l'abscisse $x$ fût le logarithme commun, non seulement de $y$ et de $-y$, mais aussi de $2y$, et en général, de $ny$, quelque nombre que soit $n$. Ainsi, par la même raison qu'on est en droit de nier l'infinité des branches de la Logarithmique, on niera aussi l'existence des deux branches, que M. Bernoulli veut établir.

## 4. OBJECTION

Cette objection est encore dirigée contre les deux branches de la courbe logarithmique. Car, quoiqu'on puisse surement conclure l'existence d'un diametre d'une courbe, lorsque son équation entre les coordonnées $x$ et $y$ est telle qu'elle demeure inaltérée, si l'on met $-y$ à la place de $y$, cependant ce critere n'est juste que lorsque l'équation pour la courbe est algébrique, ou renfermée en termes finis. Car on sait qu'une équation différentielle est beaucoup plus générale que l'équation finie d'où elle a été tirée, et qu'elle renferme une infinité de courbes qui ne sont pas comprises dans l'équation finie. Ainsi l'équation de la parabole $yy = ax$ a pour différentielle $2ydy = adx$ ; mais cette même équation différentielle convient également à cette équation générale $yy = ax \pm ab$, qui renferme à la fois une infinité de paraboles. Il en est de même de l'équation différentielle de la Logarithmique $ydx = dy$, qui convient aussi bien à cette équation finie $x = lny$, qu'à celle-cy $x = ly$, qu'on a pourtant uniquement en vuë. De là, il s'ensuit qu'on ne peut pas juger de la forme d'une courbe, en ne considérant que son équation différentielle.

## 5. OBJECTION

Celle-cy regarde la troisieme raison qui est sans doute beaucoup plus forte. Car, si toutes les courbes comprises dans cette équation générale $dx = \frac{dy}{y^n}$, où $n$ marque un nombre impair, sont douées d'un diametre, la même propriété doit avoir lieu, si $n = 1$, ce qui est le cas de la Logarithmique. Mais, puisque cette propriété n'est évidente, qu'entant qu'on considere les équations intégrales de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, qu'on peut toujours assigner algébriquement hormis le cas $n = 1$, de même maniere qu'on doit excepter ce cas, lorsque la question roule sur l'intégrabilité de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, on sera en droit de faire la même exception, lorsqu'il s'agit du jugement d'un diametre. Donc, si l'on ne peut pas prouver par quelque autre raison, que la Logarithmique ait un diametre, cet argument tiré de l'équation générale $dx = \frac{dy}{y^n}$ n'est pas convaincant. Pour en montrer plus clairement l'insuffisance, je ferai voir, même dans les courbes algébriques, des cas où une équation générale renferme des courbes toutes douées d'un diametre, et que néanmoins il en faut excepter un cas particulier. Qu'on considere cette équation

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)},$$

et on ne doutera pas de conclure que les courbes exprimées par cette équation n'ayent un diametre, puisqu'en réduisant l'équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$ à la rationalité, on obtient une équation du huitieme degré, où tous les exposans de $y$ sont des nombres pairs. Cependant, quelque sure que paroisse cette conclusion, il en faut pourtant excepter le cas où $b = 0$ ; car alors l'équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$ étant délivrée des signes radicaux ne monte qu'au quatrieme degré devenant

$$y^4 - 2axyy - 4aaxy + aaxx - a^3x = 0,$$

laquelle, à cause du terme $4aaxy$, est destituée de diametre. De tout cela, il s'ensuit donc que cet argument de M. Bernoulli n'est pas assez rigoureux pour démontrer son sentiment.

## 6. OBJECTION

Je passe à la quatrieme raison de M. Bernoulli, qui est sans doute la plus forte ; car on ne sauroit révoquer en doute aucun article qui y sert de fondement, sans renverser les principes les mieux établis de l'Analyse et de la doctrine des logarithmes. Car on ne sauroit nier que $(-a)^2 = (+a)^2$, donc il n'y a aucun doute que leurs logarithmes ne soient égaux, c. à d. $l(-a)^2 = l(+a)^2$. Ensuite, il est également certain qu'il est en général $lp^2 = 2lp$, donc il y a $l(-a)^2 = 2l - a$ et $l(+a)^2 = 2l + a$ ; et partant, il sera sans contredit $2l-a = 2l+a$. Les moitiés de ces deux quantités seront donc aussi incontestablement égales entr'elles et, par conséquent, il sera $l-a = la$, tout comme M. Bernoulli le soutient.

Mais si ce raisonnement est juste, on en tirera aussi d'autres conséquences, que personne, et encore moins M. Bernoulli, ne sauroit accorder ; car on prouvera de la même façon que les logarithmes des quantités imaginaires seroient aussi bien réels que ceux des nombres négatifs. Car, il est certain que $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$, donc il sera aussi $l(a\sqrt{-1})^4 = la^4$, et de plus $4l(a\sqrt{-1}) = 4la$, par conséquent $l(a\sqrt{-1}) = la$. Outre cela, puisqu'il est $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = a^3$, il sera $l\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = la^3$, et partant $3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = 3la$, donc $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = la$, ce qu'on ne sauroit admettre sans renverser toute la doctrine des logarithmes.

Il seroit donc, selon le systeme de M. Bernoulli, non seulement $l-1 = l1 = 0$, mais aussi $l\sqrt{-1} = 0$, $l-\sqrt{-1} = 0$ et $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$. Or, M. Bernoulli ayant si heureusement réduit la quadrature du cercle aux logarithmes des nombres imaginaires, si le logarithme de $\sqrt{-1}$ étoit $= 0$, toute cette belle découverte serait fausse, par laquelle il a fait voir que le rayon est à la quatrieme partie de la circonférence, comme $\sqrt{-1}$ à $l\sqrt{-1}$. Donc, posant le rapport du diametre à la circonférence $= 1 : \pi$, il sera $\frac{1}{2}\pi = \frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ et partant $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui seroit absurde, s'il étoit $l\sqrt{-1} = 0$. Il n'est pas donc vrai que $l\sqrt{-1} = 0$, d'où il faut conclure que quelque solide que paroisse la $4^{me}$ raison, elle doit être sujette à caution, puisqu'il en suivroit aussi bien $l\sqrt{-1} = 0$ que $l-1 = 0$. Par conséquent, on ne peut pas dire que le sentiment de M. Bernoulli soit suffisamment prouvé.

Il est ici fort étonnant que, soit qu'on embrasse le sentiment de M. Bernoulli, ou qu'on le rejette, on tombe également en des embarras insurmontables, et même en des contradictions. Car, si l'on soutient que $l-a = l+a$ ou $l-1 = l+1 = 0$, on est obligé d'avouër qu'il est aussi $l\sqrt{-1} = 0$, puisque $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}l-1$. Or il seroit non seulement absurde de soutenir que les logarithmes des quantités imaginaires ne soient pas imaginaires, mais il seroit aussi faux que $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui est néanmoins rigoureusement prouvé. Ainsi, en se déclarant pour le sentiment de M. Bernoulli, on tombe en contradiction avec des vérités très solidement établies.

Posons que le sentiment de M. Bernoulli soit faux, et qu'il n'y ait point $l-1 = 0$ ; car c'est à quoi se réduit le sentiment dé M. Bernoulli ; et on sera obligé d'accuser de fausseté quelcune ces opérations sur lesquelles le raisonnement de la $4^{me}$ raison est fondé ; ce qu'on ne pourra faire non plus sans tomber en contradiction avec d'autres vérités démontrées. Pour rendre cela plus évident, soit $l-1 = \omega$, et s'il n'est pas $\omega = 0$, son double $2\omega$ ne sera non plus $= 0$, or $2\omega$ est le logarithme du quarré de $-1$, lequel étant $= +1$, le logarithme de $+1$ ne seroit plus $= 0$, ce qui est une nouvelle contradiction. De plus, $-x$ est aussi bien $= -1 \cdot x$ que $= \frac{x}{-1}$, donc $l-x = lx + l-1 = lx - l-1$ ; il seroit donc $l-1 = -l-1$, sans qu'il fût $l-1 = 0$ ; or c'est une contradiction de dire qu'il soit $+a = -a$ sans qu'il soit $a = 0$.

Soit donc qu'on dise l'une ou l'autre de ces deux choses ; ou que le sentiment de M. Bernoulli est vrai ou qu'il est faux, on se plonge, également dans le plus grand embarras, ayant à combattre avec des contradictions ouvertes. Cependant, il faut absolument, ou que ce sentiment soit vrai ou qu'il soit faux, et il ne paroit point d'autre parti à prendre. Quel moyen donc de se tirer d'affaire et de sauver la vérité contre de si grandes contradictions ? Je passe à l'examen du sentiment de M. Leibniz.

## SENTIMENT DE M. BERNOULLI

*M. Leibniz soutint que les logarithmes de tous les nombres négatifs, et à plus forte raison ceux des nombres imaginaires, étoient imaginaires ; ou, .puisque $l-a = la + l-1$, il soutint que $l-1$ étoit une quantité imaginaire.*

J'ai déjà remarqué que M. Leibniz soutenoit que la raison de $+1$ à $-1$ ou de $-1$ à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme de cette raison ou $l-1$ étoit imaginaire. On voit bien que toutes les objections faites contre le systeme de M. Bernoulli servent à fortifier ce sentiment, et que les raisons alléguées pour le sentiment de M. Bernoulli doivent être contraires à celui de M. Leibniz. Cependant, on peut apporter des raisons particulieres pour confirmer le sentiment de M. Leibniz, qui seront le sujet de mon examen qui suit.

### 1. RAISON

Ayant fait voir que le logarithme du nombre $1+x$ est égal à la somme de cette serie

$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \text{etc.},$$

d'où l'on voit d'abord, que si $x = 0$, il doit être $l1 = 0$, maintenant pour avoir le logarithme de $-1$, il faut mettre $x = -2$ ; d'où l'on obtient

$$l-1 = -2 - \tfrac{1}{2}\cdot 4 - \tfrac{1}{3}\cdot 8 - \tfrac{1}{4}\cdot 16 - \tfrac{1}{5}\cdot 32 - \tfrac{1}{6}\cdot 64 - \text{etc.}$$

Or, il n'y a aucun doute que la somme de cette serie divergente ne sauroit être $= 0$ ; donc, il est certain que $l-1$ n'est pas $= 0$. Le logarithme de $-1$ sera donc imaginaire, puisqu'il est d'ailleurs clair qu'il ne sauroit être réel, c. à d. ou positif ou négatif.

### 2. RAISON

Soit $y = lx$, et posant $e$ pour le nombre dont le logarithme $= 1$, dont la valeur approchée est, comme on sait, $e = 2,718281828459$, puisqu'il sera $yle = 1lx$, on en tirera $x = e^y$. Ainsi le logarithme du nombre $x$ étant l'exposant d'une puissance de $e$ qui est égale au nombre $x$, il est clair qu'aucun exposant réel d'une puissance de $e$ ne sauroit produire un nombre négatif, et partant, pour que $e^y$ devienne $-1$, ni $y = 0$, ni aucun nombre réel mis pour $y$ sauroit remplir cette condition. Et posant en général pour $x$ un nombre négatif $-a$, dont on suppose le logarithme $= y$, l'équation $e^y = -a$ sera toujours impossible, ou la valeur de $y$ imaginaire.

### 3. RAISON

Puisqu'en général la valeur de $e^y$ s'exprime par cette serie infinie

$$e^y = 1 + \tfrac{y}{1} + \tfrac{y^2}{1\cdot2} + \tfrac{y^3}{1\cdot2\cdot3} + \tfrac{y^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \tfrac{y^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \text{etc.},$$

qui est toujours convergente, quelque grand nombre qu'on mette pour $y$, de sorte que les objections tirées de la nature de suites divergentes, comme dans la premiere raison, ne trouvent pas lieu ici, ainsi le logarithme du nombre $x$ étant posé $= y$, on aura

$$x = 1 + \tfrac{y}{1} + \tfrac{y^2}{1\cdot2} + \tfrac{y^3}{1\cdot2\cdot3} + \tfrac{y^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \text{etc.},$$

et partant, si $y$ marque le logarithme de $-1$, ou qu'il soit $x = -1$, on aura cette égalité

$$-1 = 1 + \tfrac{y}{1} + \tfrac{y^2}{1\cdot2} + \tfrac{y^3}{1\cdot2\cdot3} + \tfrac{y^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \text{etc.},$$

à laquelle, comme il est d'abord clair, ne sauroit satisfaire la valeur $y = 0$, vu qu'il en résulteroit $-1 = +1$. Par conséquent, il est certain que le logarithme de $-1$ n'est pas $= 0$.

Je me contente d'avoir apporté ces trois raisons, puisque les autres argumens par lesquels on peut confirmer le sentiment de M. LEIBNIZ, sont déjà contenus dans les objections faites contre le systeme de M. BERNOULLI. Cependant, ces trois raisons que je viens d'exposer, sont sujettes aux objections suivantes.

## 1. OBJECTION

Contre la premiere raison, on dira d'abord que l'accroissement continue des termes qui sont tous négatifs, de cette suite

$$-2 - \tfrac{1}{2}\cdot 4 - \tfrac{1}{3}\cdot 8 - \tfrac{1}{4}\cdot 16 - \tfrac{1}{5}\cdot 32 - \tfrac{1}{6}\cdot 64 - \text{etc.}$$

n'est pas une marque sure que la somme de cette suite ne sauroit être $= 0$. Car si cette série geometrique

$$\tfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - \text{etc.}$$

donne pour le cas $x = -2$ celle-cy

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{etc.}$$

et pour le cas $x = -3$ celle-cy

$$-\tfrac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \text{etc.},$$

pourquoi, dira-t-on, ne seroit il pas possible que la somme d'une série dont les termes croissent, ayant partout le même signe, ne fût $= 0$. Pour en donner un exemple, on n'a qu'a ajouter à la derniere serie termes pour termes celle-cy

$$\tfrac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$$

et on aura effectivement

$$0 = 2 + 2 + 10 + 26 + 82 + 242 + 730 + \text{etc.}$$

Donc, si la somme de cette série est $= 0$, quelle absurdité seroit-il donc de soutenir qu'il fût aussi

$$0 = -\tfrac{1}{2}\cdot 4 - \tfrac{1}{3}\cdot 8 - \tfrac{1}{4}\cdot 16 - \tfrac{1}{5}\cdot 32 - \tfrac{1}{6}\cdot 64 - \text{etc.},$$

et partant, la premiere raison n'est pas convaincante.

## 2. OBJECTION

La seconde raison est telle qu'on pourroit aussi s'en servir pour prouver le sentiment opposé. Car, puisqu'il y a $x = e^y$ supposant $y$ le logarithme du nombre $x$ ; toutes les fois que $y$ est une fraction ayant pour dénominateur un nombre pair, il faut avouër qu'alors la valeur de $e^y$ et partant aussi de $x$, est aussi bien négative qu'affirmative. Ainsi, si $\frac{m}{2n}$ est un logarithme, le nombre $x$ qui lui répond étant $e^{m:2n} = \sqrt{e^{m:n}}$, sera tant affirmatif que négatif ; de sorte que dans ce cas, tant $x$ que $-x$ aura le même logarithme $\frac{m}{2n}$. Donc, puisque les logarithmes ne sont pas des nombres rationels, et par conséquent équivalens à des fractions dont les numérateurs et dénominateurs sont infiniment grands, on pourra toujours regarder les dénominateurs comme des nombres pairs ; il s'ensuit que le même logarithme qui convient au nombre positif $+x$, conviendra aussi au nombre négatif $-x$.

## 3. OBJECTION

La troisieme raison est sans doute la plus forte, puisqu'elle semble exclure absolument les nombres négatifs du nombre de ceux à qui répondent des logarithmes réels. Car il est clair que, quelque nombre réel qu'on mette pour $y$, la valeur de cette série

$$x = 1 + \tfrac{y}{1} + \tfrac{y^2}{1\cdot 2} + \tfrac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \tfrac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

ne sauroit jamais devenir négative, de sorte qu'aucun logarithme réel ne sauroit répondre à un nombre négatif. Cependant, cette série n'étant vraie qu'entant qu'elle découle de la formule finie $e^y$, les objections précédentes ont ici également lieu. Car, si $e^y$ peut donner un nombre négatif, il importe fort peu, si la serie qui lui est égale en donne aussi un ou non ? Pour reconnoitre cela, on n'a qu'à considérer une formule radicale, comme $\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$, qui est aussi bien $\frac{+1}{\sqrt{(1-x)}}$ que $\frac{-1}{\sqrt{(1-x)}}$, quoique la série égale

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \text{etc.}$$

ne donne que sa valeur affirmative, quelque nombre qu'on mette pour $x$.

M. LEIBNIZ ne manqueroit pas de répondre à ces objections ; et comme la premiere ne prouve pas le contraire de son sentiment, et qu'elle ne rend que douteuse la premiere raison, il ne perdroit rien de renoncer à cette premiere raison, et de s'en tenir principalement aux autres. Car, au fond, la seconde objection ne détruit point son sentiment qui se réduit uniquement à prouver que $l-1$ n'est pas $= 0$ ; or la seconde objection ne porte aucune atteinte à cela, vu que si $e^y$ doit être $= -1$, l'exposant $y$ ne sauroit être aucune fraction de la forme $\frac{m}{2n}$, pour que le signe radical puisse fournir une

valeur négative. Car on conviendra aisément que, soit qu'on mette pour $y$ un nombre affirmatif plus grand que zéro, ou un nombre négatif quelconque pour $y$, la valeur de la puissance $e^y$ ne devient jamais $= -1$. Donc, si $y$ n'est pas imaginaire, il faudroit qu'il fût $e^y = -1$ dans le cas $y = 0$. Mais dans ce cas s'évanouït toute ambiguïté de signes, qui pourroit avoir lieu à cause des signes radicaux, et il est indubitablement $e^0 = +1$. Et si l'on vouloit dire qu'on put regarder 0 comme $\frac{0}{2}$, et $e^0$ comme $\sqrt{e^0} = \sqrt{1}$, dont la valeur seroit aussi $= -1$, ce seroit une exception fort foible, puisque par la même raison on prouveroit que $-a = +a$ ; car, posant $a = a^{\frac{2}{2}} = \sqrt{a^2}$, on en tireroit aussi bien $a = -a$ que $a = +a$. Pour prévenir ces sortes de conséquences fausses, on n'a qu'à remarquer qu'une telle expression $a^{\frac{m}{2n}}$ n'a deux valeurs, l'une affirmative et l'autre négative, que lorsque la fraction $\frac{m}{2n}$ est réduite à ses plus petits termes, et que le dénominateur demeure encore un nombre pair. Ainsi, comme la valeur de ces puissances, $a^1$, $a^2$, $a^3$, $a^4$, etc. n'est pas ambiguë, aussi celle-cy $a^0$ ne sauroit être ambiguë. Il est donc toujours $a^0 = +1$, ce qui suffit pour détruire la seconde objection ; et la troisieme n'a aucune force qu'entant que la seconde subsiste.

Il paroit donc que le sentiment de M. Leibniz est mieux fondé, puisqu'il n'est pas contraire à la découverte de M. Bernoulli, qu'il est

$$l\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1},$$

puisque M. Leibniz soutient que le logarithme de $-1$, et à plus forte raison celui de $\sqrt{-1}$, est imaginaire. Mais, en adoptant le sentiment de M. Leibniz, on se jette dans les difficultés et contradictions susmentionnées. Car, si $l-1$ étoit imaginaire, son double, c. à d. le logarithme de $(-1)^2 = +1$, le seroit aussi, ce qui ne convient pas avec le premier principe de la doctrine des logarithmes, en vertu duquel on suppose $l+1 = 0$.

De quelque coté donc qu'on se tourne, soit qu'on embrasse le sentiment de M. Bernoulli ou celui de M. Leibniz, on rencontre toujours de si grands obstacles à maintenir son parti, qu'on ne se sauroit mettre à l'abri des contradictions. Cependant, il semble que si l'un de ces deux sentimens est faux, l'autre doit nécessairement être vrai, et qu'il n'y a point de milieu a choisir. Voilà donc une question extrêmement importante, qui est d'établir 1a doctrine des logarithmes de telle sorte qu'elle ne soit plus assujettie à aucune contradiction.

Mais, après avoir bien pesé les contradictions qui se trouvent de part et d'autre, on sera porté à croire qu'une telle conciliation est une chose tout à fait impossible ; et les ennemis des Mathématiques ne manqueront pas d'en tirer des conséquences fort fâcheuses contre la certitude de cette science. Car, quand les Pyrrhoniens ont attaqué toutes les sciences, on conviendra aisément qu'il s'en faut beaucoup que les objections qu'ils ont apportées contre aucune science, approchent seulement, à l'egard de leur solidité, des objections que je viens d'exposer contre la doctrine des logarithmes.

Cependant, je ferai voir si clairement, qu'il n'y restera plus le moindre doute, que cette doctrine est solidement établie, et que toutes les difficultés susmentionnées ne tirent leur origine que d'une seule idée peu juste ; de sorte que, dès qu'on rectifiera cette idée, toutes ces difficultés et contradictions, quelque fortes qu'elles ayent pu paroitre, s'evanouïront d'abord, et alors toute cette doctrine des logarithmes se soutiendra si bien, qu'on sera en état de résoudre aisément toutes les objections qui ont paru irrésolubles auparavant. Sans ce dévelopement, qui a pourtant été inconnu jusqu'ici aux Mathematiciens, je ne sai pas de quel oeil on devroit envisager la doctrine des logarithmes : d'un coté, on devroit avouër qu'elle est vraie, et aussi solidement établie qu'aucune autre partie de l'Analyse ; or de l'autre coté, on ne sauroit disconvenir que cette même doctrine seroit assujettie à des contradictions auxquelles il seroit impossible de répondre. On seroit par conséquent obligé d'avouër que la Mathématique, et même l'Analyse, renferme des mystères incompréhensibles à nos esprits. Ensuite, si ces mystéres n'ont été tels qu'à cause d'une seule idée qui n'étoit pas entierement exacte, on en tirera cette conséquence fort importante, qu'il est extrèmement dangereux de juger des choses dont on ne se peut former que des idées imparfaites : or il est bien certain que hormis les Mathematiques, le nombre des idées distinctes et complettes est fort petit.

## DENOUEMENT DES DIFFICULTES PRECEDENTES

Il faut d'abord avouër que si l'idée que Mrs. Leibniz et Bernoulli ont attachée au terme de logarithme, et que tous les Mathematiciens ont eue jusqu'ici, étoit parfaitement juste, il seroit absolument impossible de délivrer la doctrine des logarithmes des contradictions que je viens de proposer. Or, l'idée des logarithmes étant tirée de leur origine, dont nous avons une parfaite connoissance, comment seroit-il possible qu'elle fût défectueuse ? Lorsqu'on dit que le logarithme d'un nombre proposé est l'exposant de la puissance d'un certain nombre pris à volonté, laquelle devient égale au nombre proposé ; il semble qu'il ne manque rien à la justesse de cette idée. Cela est aussi bien vrai ; mais on accompagne communément cette idée d'une circonstance qui ne lui convient point : c'est qu'on suppose ordinairement, presque sans qu'on s'en apperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un seul logarithme, et pour peu qu'on y réfléchisse, on trouvera que toutes les difficultés et contradictions dont la doctrine des logarithmes sembloit embarrassée, ne subsistent qu'entant qu'on suppose qu'à chaque nombre ne répond qu'un seul logarithme. Je dis donc, pour 'faire disparoitre toutes ces difficultés et contradictions, qu'en vertu même de la définition donnée, il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes ; ce que je démontrerai dans le theoreme suivant.

## THEOREME

*Il y a toujours une infinité de logarithmes qui conviennent également à chaque nombre proposé ; ou, si y marque le logarithme du nombre x, je dis que y renferme une infinité de valeurs différentes.*

## DEMONSTRATION

Je me bornerai ici aux logarithmes hyperboliques, puisqu'on sait que les logarithmes de toutes les autres especes sont à ceux-cy dans un rapport constant ; ainsi, quand le logarithme hyperbolique du nombre $x$ est nommé $= y$, le logarithme tabulaire de ce même nombre sera $= 0,4342944819 \cdots y$.

Or, le fondement des logarithmes hyperboliques est que, si $\omega$ signifie un nombre infiniment petit, le logarithme du nombre $1+\omega$ sera $= \omega$, ou que $l(1+\omega) = \omega$. De là il s'ensuit que $l(1+\omega)^2 = 2\omega$, $l(1+\omega)^3 = 3\omega$ et en général

$$l(1+\omega)^n = n\omega.$$

Mais, puisque $\omega$ est un nombre infiniment petit, il est évident que le nombre $(1+\omega)^n$ ne sauroit devenir égal à quelque nombre proposé $x$, à moins que l'exposant $n$ ne soit un nombre infini. Soit donc $n$ un nombre infiniment grand et qu'on pose

$$x = (1+\omega)^n$$

et le logarithme de $x$, qui a été nommé $= y$ sera $y = n\omega$. Donc, pour exprimer $y$ par $x$, la premiere formule donnant $1+\omega = x^{\frac{1}{n}}$ et $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$, cette valeur étant substituée pour $\omega$ dans l'autre formule produira

$$y = nx^{\frac{1}{n}} - n = lx.$$

D'où il est clair que la valeur de la formule $nx^{\frac{1}{n}} - n$ approchera d'autant plus du logarithme de $x$, plus le nombre $n$ sera pris grand, et si l'on met pour $n$ un nombre infini, cette formule donnera la vraie valeur du logarithme de $x$. Or, comme i1 est certain que $x^{\frac{1}{2}}$ a deux valeurs différentes, $x^{\frac{1}{3}}$ trois, $x^{\frac{1}{4}}$ quatre et ainsi de suite, il sera également certain que $x^{\frac{1}{n}}$ doit avoir une infinité de valeurs différentes, puisque $n$ est un nombre infini. Par conséquent, cette infinité de valeurs différentes de $x^{\frac{1}{n}}$ produira aussi une infinité de valeurs différentes pour $lx$, de sorte que le nombre $x$ doit avoir une infinité de logarithmes. C. Q. F. D.

De là, il s'ensuit que le logarithme de $+1$ n'est pas seulement $= 0$, mais qu'il y a encore une infinité d'autres quantités dont chacune est également le logarithme de $+1$. Cependant, on comprend aisément que tous ces autres logarithmes, hormis le premier 0, seront des quantités imaginaires ; de sorte que dans le calcul, on est en droit de ne regarder que 0 comme 1e logarithme de $+1$, tout de même que lorsqu'il s'agit de la racine cubique de 1, on ne se sert que de 1, quoique ces quantités imaginaires $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ soient également des racines cubiques de 1. Mais quand on veut comparer le logarithme de 1 avec les logarithmes de $-1$, ou de $\sqrt{-1}$, qui sont tous, à ce que je ferai voir dans la suite, imaginaires, il faut considérer le logarithme de 1 dans toute son étenduë ; et alors toutes les difficultés et contradictions rapportées cy-dessus disparoitront d'elles mêmes.

Car, soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$, etc. les logarithmes imaginaires de l'unité, qui lui répondent aussi bien que 0, et on comprendra aisément qu'il peut être $2l-1 = l+1$, quoique tous les logarithmes de $-1$ soient imaginaires ; car, pour satisfaire à l'équation $2l-1 = l+1$, il suffit que le double de tous les logarithmes de $-1$ se trouvent parmi les logarithmes imaginaires de $+1$. De même, puisque $4l\sqrt{-1} = l{+}1$, chaque logarithme de $\sqrt{}-1$ multiplié par 4 se doit rencontrer dans la série $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$, etc. Ainsi, les égalités $2l-1 = l+1$ et $4l\sqrt{}-1 = l+1$ se peuvent maintenir, sans qu'on soit obligé de soutenir qu'il soit ou $l-1 = 0$ ou $l\sqrt{}-1 = 0$, comme M. Bernoulli a prétendu. Mais tout cela sera mis dans tout son jour, quand je déterminerai actuellement tous les logarithmes de chaque nombre proposé, ce qui sera le sujet des problemes suivans.

## PROBLEME 1

*Déterminer tous les logarithmes qui répondent à un nombre affirmatif proposé +a quelconque.*

## SOLUTION

Puisque $a$ est un nombre positif, il aura certainement un logarithme réel qui se trouve par les régles assés connuës. Soit donc $A$ ce logarithme réel du nombre $a$, et puisque $a = 1 \cdot a$, il sera $la = l1 + A$ : ou bien, chaque logarithme de l'unité étant ajouté à $A$, donnera un logarithme du nombre proposé $a$ ; et, pour trouver tous ses logarithmes, on n'a qu'à chercher tous les logarithmes de l'unité $+1$. Prenant donc $y$ pour marquer un logarithme quelconque de $+1$, les valeurs de $y$ doivent être tirées de l'équation du theoreme en y mettant $x = 1$, et on aura cette équation

$$y = n1^{\frac{1}{n}} - n,$$

qui se change en

$$1 + \tfrac{y}{n} = 1^{\frac{1}{n}}$$

et la délivrant des exposans rompus, on aura

$$\left(1 + \tfrac{y}{n}\right)^n = 1$$

où $n$ marque un nombre infini. Cette équation, étant maintenant pour ainsi dire rationelle, chacune de ses racines donnera une valeur convenable pour $y$, c'est à dire un logarithme de $+1$. Or, pour trouver toutes les racines de cette équation, on sait qu'il les faut tirer des facteurs de la formule $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1$, en supposant chaque facteur $= 0$. Mais, en général, il est démontré que d'une telle formule $p^n - q^n$ un facteur quelconque est

$$p^2 - 2pq\cos\tfrac{2\lambda\pi}{n} + q^2,$$

où $\lambda$ marque un nombre entier quelconque et $\pi$ l'angle de 180°, ou la moitié de la circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$ ; de sorte que donnant à $\lambda$ successivement toutes les valeurs possibles qui sont 0, ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, etc., on obtienne enfin tous les facteurs de la formule $p^n - q^n$. Et partant, toutes les racines de l'équation $p^n - q^n = 0$ seront comprises dans cette expression générale

$$p = q\left(\cos\tfrac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\tfrac{2\lambda\pi}{n}\right)$$

qui se trouve en posant

$$p^2 - 2pq\cos\tfrac{2\lambda\pi}{n} + qq = 0.$$

Donc, toutes les racines de notre équation trouvée $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1 = 0$, posant $p = 1 + \frac{y}{n}$ et $q = 1$, seront contenuës dans cette expression générale

$$1 + \tfrac{y}{n} = \cos\tfrac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\tfrac{2\lambda\pi}{n}.$$

Or, puisque $n$ marque un nombre infini, l'arc $\frac{2\lambda\pi}{n}$ sera infiniment petit ; il sera donc

$$\cos\tfrac{2\lambda\pi}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \sin\tfrac{2\lambda\pi}{n} = \tfrac{2\lambda\pi}{n}\,,$$

d'où il s'ensuit

$$1 + \tfrac{y}{n} = 1 \pm \tfrac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1},$$

et partant

$$y = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}.$$

On n'a qu'à substituer maintenant pour $\lambda$ successivement toutes les valeurs déterminées qu'elle renferme, savoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. à l'infini ; et tous les logarithmes de l'unité, ou toutes les valeurs possibles de $l1$ seront

$$0,\ \pm 2\pi\sqrt{-1},\ \pm 4\pi\sqrt{-1},\ \pm 6\pi\sqrt{-1},\ \pm 8\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

Donc, tous les logarithmes du nombre proposé $a$, dont on sait déjà le logarithme réel $A$, seront $A,\ A \pm 2\pi\sqrt{-1},\ A \pm 4\pi\sqrt{-1},\ A \pm 6\pi\sqrt{-1},$ $A \pm 8\pi\sqrt{-1}$, etc.
C. Q. F. T.

De là, il est clair que chaque nombre positif n'a qu'un seul logarithme réel, et que tous ses autres logarithmes infinis sont imaginaires. Cependant, tous ces logarithmes imaginaires joüissent de la même propriété que le réel, et on s'en pourroit servir également dans le calcul en observant les mêmes régles. Car, soient $A$, $B$, $C$, $D$, etc. les logarithmes réels des nombres positifs $a$, $b$, $c$, $d$, etc. de sorte qu'il soit en général $la = A \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$, $lb = B \pm 2\mu\pi\sqrt{-1}$, $lc = C \pm 2\nu\pi\sqrt{-1}$, etc.
Maintenant soit $c = ab$, et on sait qu'il sera $C = A + B$ ; or, prenant les logarithmes en général, on verra aussi que la somme des logarithmes des facteurs $a$, $b$ est toujours égale au logarithme du produit $ab = c$. Car on aura

$$la + lb = A + B \pm 2\zeta\pi\sqrt{-1}$$

mettant pour $\zeta$ un nombre quelconque entier qui peut résulter en ajoutant les termes $\pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ et $\pm 2\mu\pi\sqrt{-1}$. Or il est clair que mettant $A + B = C$, cette expression de $la + lb$ convient parfaitement avec celle-cy $lc = C \pm 2\nu\pi\sqrt{-1}$. Le même accord se trouera aussi dans la division, l'élévation aux puissances et l'extraction des racines, où l'on fait usage des logarithmes. Mais pour ce qui regarde l'extraction des racines, comme le nombre des racines est toujours égal à l'exposant du signe radical, cette maniere d'exprimer les logarithmes généralement a cet avantage sur la maniere ordinaire, qu'elle nous découvre toutes les racines ; au lieu que par la méthode ordinaire on ne trouve dans chaque cas qu'une racine, savoir la réelle et qui est en même tems positive ; ce qu'on reconnoitra plus évidemment, lorsque j'aurai déterminé tous les logarithmes des nombres tant négatifs qu'imaginaires.

## PROBLEME 2

*Déterminer tous les logarithmes qui répondent à un nombre négatif quelconque $-a$.*

## SOLUTION

Puisque $-a = -1 \cdot a$, il sera $l - a = la + l - 1$ et, prenant pour $la$ l e logarithme réel de $a$, on aura tous les logarithmes du nombre négatif $-a$, si l'on cherche tous les logarithmes de $-1$. Mais ayant vu que, mettant $y$ pour le logarithme du nombre $x$ en général, il est $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$, d'où l'on tire $1 + \frac{y}{n} = x^{\frac{1}{n}}$ et partant $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x = 0$. Donc, $y$ exprimera tous les logarithmes de $-1$, si l'on met $x = -1$, de sorte que tous les logarithmes de $-1$ seront les racines de cette équation

$$\left(1 + \tfrac{y}{n}\right)^n + 1 = 0,$$

posant le nombre $n$ infiniment grand. .

Or on sait que de cette équation générale $p^n + q^n = 0$, toutes les racines se trouvent de la résolution de cette formule.

$$p^2 - 2pq\cos\tfrac{(2\lambda-1)\pi}{n} + q^2 = 0,$$

prenant pour $\lambda$ successivement tous les nombres entiers tant affirmatifs que négatifs et partant, on aura

$$p = q\left(\cos\tfrac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\tfrac{(2\lambda-1)\pi}{n}\right).$$

Donc, les racines de cette équation proposée $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n+1=0$ seront tontes comprises dans cette formule générale

$$1+\tfrac{y}{n}=\cos\tfrac{(2\lambda-1)\pi}{n}\pm\surd-1\cdot\sin\tfrac{(2\lambda-1)\pi}{n},$$

laquelle à cause de $n=\infty$ se change en

$$y=\pm(2\lambda-1)\pi\surd-1.$$

Par conséquent, mettant pour $\lambda$ successivement toutes les valeurs qui lui conviennent, tous les logarithmes de $-1$ seront
$\pm\pi\surd-1$, $\pm3\pi\surd-1$, $\pm5\pi\surd-1$, $\pm7\pi\surd-1$, $\pm9\pi\surd-1$, etc.
Donc, si nous posons $l+a=A$, ou que $A$ marque le logarithme réel du nombre positif $+a$, tous les logarithmes du nombre négatif $-a$ seront :
$A\pm\pi\surd-1$, $A\pm3\pi\surd-1$, $A\pm5\pi\surd-1$, $A\pm7\pi\surd-1$, etc.
dont le nombre est infini. C. Q. F. T.

De là, il est clair que tous les logarithmes d'un nombre négatif quelconque sont imaginaires, et qu'il n'y a aucun nombre négatif dont un de ses logarithmes soit réel. M. Leibniz a eu donc raison de soutenir que les logarithmes des nombres négatifs étoient imaginaires. Cependant, puisque les nombres affirmatifs ont aussi une infinité de logarithmes imaginaires, toutes les objections de M. Bernoulli contre ce sentiment perdent leur force. Car, quoiqu'il soit $l-1=\pm(2\lambda-1)\pi\surd-1$, le logarithme de son quarré sera $l(-1)^2=\pm2(2\lambda-1)\pi\surd-1$, expression qui se trouve parmi les logarithmes de $+1$, de sorte qu'il demeure vrai que $2l-1=l+1$, quoique nul des logarithmes de $-1$ se trouve parmi les logarithmes de $+1$. Soit $A$ le logarithme réel du nombre positif $+a$ et que $p$ marque en général tous les nombres pairs et $q$ tous les impairs entiers, et ayant en général

$$l+1=\pm p\pi\surd-1 \text{ et } l-1=\pm q\pi\surd-1$$

et

$$l+a=A\pm p\pi\surd-1 \text{ et } l-a=A\pm q\pi\surd-1,$$

d'où l'on voit que

$$l(-a)^2=2l-a=2A\pm2q\pi\surd-1.$$

Or, $2q$ étant $=p$ et $2A$ le logarithme réel de $a^2$, on voit que $2A\pm p\pi\surd-1$ est la formule générale des logarithmes de $a^2$ ; ainsi il est $l(-a)^2=la^2$ ou bien $2l-a=2l+a$, sans qu'il soit $l-a=l+a$ ; ce qui seroit sans doute contradictoire, si les nombres $+a$ et $-a$ n'avoient qu'un seul logarithme ; car alors on auroit raison de conclure qu'il fût $l-a=l+a$, s'il étoit $2l-a=2l+a$. Mais, dès qu'on tombe d'accord que tant $-a$ que $+a$ ont une infinité de logarithmes, cette conséquence, toute nécessaire qu'elle fût auparavant, n'est plus juste, puisque pour qu'il soit $2l-a=2l+a$, il suffit que les doubles de tous les logarithmes de $-a$ se rencontrent dans les logarithmes de $+aa$. Ce qui peut arriver, comme nous voyons, sans qu'aucun des logarithmes de $-a$ soit égal à aucun des logarithmes de $+a$.

Il faut cependant avouër que toutes les valeurs de $2l-a$ sont differentes des valeurs de $2l+a$, vu qu'il est

$$2l+a=2A\pm2p\pi\surd-1 \text{ et } 2l-a=2A\pm2q\pi\surd-1,$$

où $2p$ marque un nombre pairement pair, et $2q$ un nombre impairement pair quelconque. Mais il faut remarquer que les logarithmes de $+a^2$, comme d'un nombre affirmatif dont le logarithme réel est $=2A$, sont compris dans cette formule générale $la^2=2A\pm p\pi\surd-1$, où $p$ marque un nombre pair quelconque sans en excepter zero. Cela remarqué, il est clair que toutes les valeurs de $2l-a$ sont comprises dans celles de $la^2$, aussi bien que celles de $2l+a$. Ainsi, quoiqu'on puisse dire que $2l-a=la^2$ et $2l+a=la^2$, prenant le signe de $=$ pour marquer que les valeurs de $2l-a$ ou de $2l+a$ se rencontrent parmi les valeurs de $la^2$, on ne sauroit dire, à la vérité, qu'il soit $2l-a=2l+a$. Néanmoins, comme dans les formules $l+a=A\pm p\pi\surd-1$ et $l-a=A\pm q\pi\surd-1$ les nombres $p$ et $q$ sont indéterminés, rien n'oblige qu'en doublant ces logarithmes on prenne pour $p$ et $q$ les mêmes nombres. Ainsi pour faire ces multiplications dans toute leur étenduë, que $p$, $p'$, $p''$, $p'''$, etc. marquent des nombres pairs quelconques égaux ou inégaux et $q$, $q'$, $q''$, $q'''$, etc. des nombres impairs égaux ou inégaux entr'eux, ces duplications se feront de la maniere suivante :

$$\begin{array}{rcl} l+a & = & A\pm p\pi\surd-1\\ l+a & = & A\pm p'\pi\surd-1\\ \hline 2l+a & = & 2A\pm(p+p')\surd-1\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} l-a & = & A\pm q\pi\surd-1\\ l-a & = & A\pm q'\pi\surd-1\\ \hline 2l-a & = & 2A\pm(q+q')\pi\surd-1\end{array}$$

Ici maintenant $p+p'$ marquant la somme de deux nombres pairs quelconques et $q+q'$ la somme de deux nombres impairs quelconques, tant $p+p'$ que $q+q'$ marquera un nombre pair quelconque ; et partant, il sera $p+p'=q+q'$, donc $2l-a=2l+a$. Par conséquent, dans ce sens, on pourra soutenir qu'il est $2l-a=2l+a$, sans qu'il soit $l-a=l+a$. De même maniere, il sera

$$3l+a=3A\pm(p+p'+p'')\surd-1=3A\pm p\pi\surd-1=l+a^3,$$

$$3l-a=3A\pm(q+q'+q'')\surd-1=3A\pm q\pi\surd-1=l-a^3,$$

car $p+p'+p''$ produit tous les nombres pairs et convient par conséquent avec $p$ ; pareillement, $q+q'+q''$ produit tous les nombres impairs et convient avec $q$. Or, puisque $q+q'+q''+q'''$ produit tous les nombres pairs, cette expression sera équivalente avec $p$ ; donc les quadruples seront

$$4l+a = 4A \pm (p+p'+p''+p''')\sqrt{-1} = 4A \pm p\pi\sqrt{-1} = l+a^4,$$

$$4l-a = 4A \pm (q+q'+q''+q''')\sqrt{-1} = 4A \pm p\pi\sqrt{-1} = l-a^4.$$

Ainsi, cette maniere de trouver les logarithmes des puissances tant de $+a$ que de $-a$ s'accorde parfaitement bien avec les principes connus tant des puissances que des logarithmes, et toutes les objections rapportées cy-dessus n'ont plus aucune prise sur ces vérités démontrées. Le même accord s'observera aussi dans les logarithmes des quantités imaginaires, que je m'en vai développer dans le probleme suivant.

## PROBLEME 2

*Déterminer tous les logarithmes d'une quantité imaginaire quelconque.*

## SOLUTION

Il est démontré que toute quantité imaginaire, quelque compliquée qu'elle soit, se réduit toujours à cette forme $a+b\sqrt{-1}$, où $a$ et $b$ sont des quantités réelles. Je pose maintenant

$$\sqrt{(aa+bb)} = c$$

et $\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$ et $\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ seront le cosinus et le sinus d'un certain angle qu'il sera aisé de trouver par les tables. Soit donc cet angle $= \varphi$, qui marque en même tems la quantité de l'arc de cercle qui est sa mesure, le sinus total étant posé $= 1$. On aura donc

$$a = c\cos\varphi \text{ et } b = c\sin\varphi,$$

et la formule imaginaire dont il faut chercher tous les logarithmes, sera

$$a+b\sqrt{-1} = c(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)$$

ou, puisque $c$ est un nombre affirmatif, soit $C$ son logarithme réel, et on aura

$$l(a+b\sqrt{-1}) = C + l(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi).$$

Il s'agit donc de chercher tous les logarithmes de la quantité imaginaire $\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi$, laquelle étant mise pour $x$, ses logarithmes seront les valeurs de $y$ tirées de cette équation

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - x = 0$$

$n$ marquant un nombre infini. Mais pour pouvoir comparer cette équation avec la forme générale $p^n - q^n = 0$, je remarque que

$$x = \cos\varphi + y\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi = \left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n,$$

dont la vérité est suffisamment prouvée ailleurs. Car on sait que

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1\cdot2} + \frac{\varphi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{\varphi^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \text{etc.}$$

et

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{\varphi^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \text{etc.}$$

Or, puisque $n$ est un nombre infini, il sera
$\left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{1} - \frac{\varphi^2}{1\cdot2} - \frac{\varphi^3\sqrt{-1}}{1\cdot2\cdot3} + \frac{\varphi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{\varphi^5\sqrt{-1}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \text{etc.},$
d'où il est clair que

$$\left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = \cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi.$$

Nous aurons donc

$$p = 1+\frac{y}{n} \text{ et } q = \frac{1+\varphi\sqrt{-1}}{n}$$

pour l'équation à resoudre $p^n - q^n = 0$. Mais, ayant vu déjà que chacune des racines de cette équation est contenuë dans cette formule générale

$$p = q\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right),$$

prenant pour $\lambda$ tous les nombres entiers, ou affirmatifs ou négatifs, il sera pour notre cas

$$1+\frac{y}{n} = \left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right)$$

et parce que, à cause du nombre $n$ infini, il est

$$\cos\frac{2\lambda\pi}{n} = 1 \text{ et } \sin\frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n},$$

il sera

$$1+\frac{y}{n} = \left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)\left(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

ce qui donne

$$y = \varphi\sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1},$$

d'où tous les logarithmes de la formule $\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi$ seront
$\varphi\sqrt{-1}$, $(\varphi\pm2\pi)\sqrt{-1}$, $(\varphi\pm4\pi)\sqrt{-1}$, $(\varphi\pm6\pi)\sqrt{-1}$, etc.
et les logarithmes de la formule imaginaire $a+b\sqrt{-1}$, posant
$c = \sqrt{(aa+bb)}$ et $\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a}$, ou $\cos\varphi = \frac{a}{c}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{c}$
et de plus

$$lc = C,$$

seront
$C+\varphi\sqrt{-1}$, $C+(\varphi\pm 2\pi)\sqrt{-1}$, $C+(\varphi\pm 4\pi)\sqrt{-1}$, $C+(\varphi\pm 6\pi)\sqrt{-1}$, etc.
C.Q.F.T.

De là, il est clair que tous les logarithmes d'une quantité imaginaire sont aussi imaginaires ; car, lorsque ou $\varphi=0$ ou $\varphi=\pm 2\lambda\pi$, qui sont les cas où quelcun de ces logarithmes pourroit devenir réel, cela ne peut arriver que lorsque tang$\varphi=\frac{b}{a}=0$ ; il seroit donc $b=0$ et la quantité $a+b\sqrt{-1}$ que cesseroit d'être imaginaire. Donc, si l'on prend $p$ pour signifier chaque nombre pair, ou affirmatif ou négatif, tous les logarithmes de la quantité imaginaire $a+b\sqrt{-1}$ seront renfermés dans cette formule générale

$$C+(\varphi+p\pi)\sqrt{-1},$$

où $C$ est le logarithme réel de la quantité affirmative $\sqrt{(aa+bb)}=c$, et l'arc ou l'angle $\varphi$ est pris tel qu'il est $\sin\varphi=\frac{b}{c}$ et $\cos\varphi=\frac{a}{c}$. Or, puisqu'il y a une infinité d'angles qui conviennent au même sinus $\frac{b}{c}$ et cosinus $\frac{a}{c}$, qui sont tous compris dans la formule $\varphi+p\pi$, on pourroit omettre le terme $p\pi$, et dire que le logarithme de $a+b\sqrt{-1}$ est en général $=C+\varphi\sqrt{-1}$ ; puisque cet angle $\varphi$ renferme déjà tous ces angles. Cependant, si l'on prend pour $\varphi$ le plus petit angle affirmatif qui répond au sinus $\frac{b}{c}$ et au cosinus $\frac{a}{c}$, la formule générale des logarithmes de $a+b\sqrt{-1}$ sera $=C+(\varphi+p\pi)\sqrt{-1}$.

Si l'angle $\varphi$ est tel, qu'il tient une raison commensurable avec $\pi$ ou la circonference du cercle, ce sera toujours une marque qu'une certaine puissance de la quantité imaginaire $a+b\sqrt{-1}$ devient réelle. Car soit $\varphi=\frac{\mu}{\nu}\pi$, et puisqu'il est $l(a+b\sqrt{-1})=C+\left(\frac{\mu}{\nu}\pi+p\pi\right)\sqrt{-1})$, il sera

$$l(a+b\sqrt{-1})^{\nu}=\nu C+(\mu+\nu p\pi\sqrt{-1},$$

d'où l'on voit que si $\mu+\nu p$ est un nombre pair ou seulement $\mu$ pair, la puissance $(a+b\sqrt{-1})^{\nu}$ sera un nombre réel affirmatif, et même $=c^{\nu}=(\sqrt{(aa+bb)})^{\nu}$ ; or si $\mu+\nu p$ ou seulement $\mu$ est un nombre impair, la puissance $(a+b\sqrt{-1})^{\nu}$ sera un nombre négatif $-c^{\nu}$.

Jusqu'ici, on auroit pu croire qu'il seroit indifférent de donner à $\pi$ quelque valeur que ce soit, puisqu'il ne paroissoit rien, ni dans les logarithmes des nombres affirmatifs $l+a=A\pm p\pi\sqrt{-1}$, ni dans ceux des nombres négatifs $l-a=A\pm q\pi\sqrt{-1}$, d'où nous puissions comprendre pourquoi la lettre $\pi$ dût plutôt marquer la demi-circonference d'un cercle décrit du rayon $=1$ que tout autre nombre. Mais à présent, où il s'agit des logarithmes des nombres imaginaires, la raison en devient évidente ; puisqu'il faut comparer l'angle $\varphi$ à $\pi$, de sorte que si l'on donnoit à $\pi$ toute autre valeur que celle de deux angles droits, les formules deviendroient fausses, et ne seroient plus d'accord avec celles que nous avons trouvées pour les nombres affirmatifs et négatifs.

Pour faire voir cela plus clairement, supposons $c=1$ et $C=0$, pour avoir cette formule $\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi$, dont tous les logarithmes seront renfermés dans cette formule générale,

$$l(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)=(\varphi+p\pi)\sqrt{-1}$$

$p$ marquant un nombre entier pair quelconque, soit affirmatif, soit négatif, ou même zero.

De là, nous tirerons premierement d'abord les formules supérieures pour les logarithmes des nombres réels affirmatifs ou négatifs. Car, soit $\varphi=0$, et à cause de $\cos\varphi=1$ et $\sin\varphi=0$, il sera $l+1=p\pi-1$ ou bien en détaillant
$l+1=0$, $\pm 2\pi\sqrt{-1}$, $\pm 4\pi\sqrt{-1}$, $\pm 6\pi\sqrt{-1}$, $\pm 8\pi\sqrt{-1}$, etc.
or, mettant $\varphi=\pi=180^{\circ}$, à cause de $\cos\varphi=-1$ et $\sin\varphi=0$, il sera

$$l-1=(1+p)\pi\sqrt{-1}=q\pi\sqrt{-1},$$

prenant $q$ pour marquer un nombre impair quelconque. On aura donc
$l-1=\pm\pi\sqrt{-1}$, $\pm 3\pi\sqrt{-1}$, $\pm 5\pi\sqrt{-1}$, $\pm 7\pi\sqrt{-1}$, etc.

Dévelopons maintenant aussi les cas les plus simples des nombres imaginaires, et soit

1. $\varphi=90^{\circ}=\frac{1}{2}\pi$, et à cause de $\cos\varphi=0$ et $\sin\varphi=+1$, il sera

   $$l+\sqrt{-1}=\left(\tfrac{1}{2}+p\right)\pi\sqrt{-1};$$

   donc tous les logarithmes de $+\sqrt{-1}$ seront

   $$+\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{9}{2}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{13}{2}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{17}{2}\pi\sqrt{-1},\text{ etc.}$$
   $$-\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{11}{2}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{15}{2}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{19}{2}\pi\sqrt{-1},\text{ etc.}$$

   Ajoutant ici deux valeurs quelconques ensemble pour avoir le logarithme de $l(+\sqrt{-1})^2$ c'est à dire de $l-1$, on trouvera ou $\pm\pi\sqrt{-1}$, ou $\pm 3\pi\sqrt{-1}$, ou $\pm 5\pi\sqrt{-1}$, etc., qui sont tous des logarithmes de $-1$.

2. Soit $\varphi=270^{\circ}=\frac{3}{2}\pi$, et à cause de $\cos\varphi=0$ et $\sin\varphi=-1$, il sera

   $$l-\sqrt{-1}=\left(-\tfrac{1}{2}+p\right)\pi\sqrt{-1};$$

   donc tous les logarithmes de $-\sqrt{-1}$ seront contenus dans les expressions suivantes

$$+\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{11}{2}\pi\sqrt{-1},$$
$$+\tfrac{15}{2}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{19}{2}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{9}{2}\pi\sqrt{-1},$$
$$-\tfrac{13}{2}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{17}{2}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

où il est clair, comme auparavant, que deux valeurs quelconques étant ajoutées ensemble donnent $q\pi\sqrt{-1}$, posant $q$ pour un nombre impair quelconque, ce qui est le logarithme de $-1$ ou de $(-\sqrt{-1})^2$. De plus, si l'on ajoute un logarithme quelconque de $-\sqrt{-1}$ à un logarithme quelconque de $+\sqrt{-1}$, pour avoir un logarithme du produit $(+\sqrt{-1})\cdot(-\sqrt{-1})$ qui est $=+1$, on ne trouvera en effet que des logarithmes de $+1$. Et il est clair, de même, qu'il sera $l(+\sqrt{-1}) - l(-\sqrt{-1}) = l-1$ ou $l(-\sqrt{-1}) - l(+\sqrt{-1}) = l-1$, tout comme la nature de ces expressions exige.

3. Soit $\varphi = 60^{\text{o}} = \frac{1}{3}\pi$ ou $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; on trouvera

$$l\,\frac{1+\sqrt{-3}}{2} = \left(\tfrac{1}{3}+p\right)\pi\sqrt{-1},$$

de sorte que tous les logarithmes de cette expression imaginaire $\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$+\tfrac{1}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{7}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{13}{3}\pi\sqrt{-1},$$
$$+\tfrac{19}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{25}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$
$$-\tfrac{5}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{11}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{17}{3}\pi\sqrt{-1},$$
$$-\tfrac{23}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{29}{2}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

où il est clair que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutés ensemble produisent $q\pi\sqrt{-1}$ ou quelcun des logarithmes de $-1$, puisque

$$\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1.$$

4. Soit $\varphi = 120^{\text{o}} = \frac{2}{3}\pi$ ou $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et l'on trouvera

$$l\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \left(\tfrac{2}{3}+p\right)\pi\sqrt{-1}.$$

Ainsi tous les logarithmes de la formule imaginaire $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$+\tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{8}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{14}{3}\pi\sqrt{-1},$$
$$+\tfrac{20}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{26}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$
$$-\tfrac{4}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{10}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{16}{3}\pi\sqrt{-1},$$
$$-\tfrac{22}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{28}{2}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

et puisque

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1,$$

on verra qu'on obtient effectivement les logarithmes de $+1$ en ajoutant ensemble trois quelconques de ces logarithmes.

5. Soit $\varphi = 240^{\text{o}} = \frac{4}{3}\pi$ ou $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, et l'on aura

$$l\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \left(\tfrac{4}{3}+p\right)\pi\sqrt{-1},$$

de sorte que tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$+\tfrac{4}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{10}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{16}{3}\pi\sqrt{-1},$$
$$+\tfrac{22}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{28}{2}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$
$$-\tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{8}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{14}{3}\pi\sqrt{-1},$$
$$-\tfrac{20}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{26}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

d'où l'on tirera comme auparavant, en ajoutant trois quelconques de ces logarithmes ensemble, quelcun des logarithmes de $+1$, puisqu'il est

$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1.$$

De même, deux de ces logarithmes quelconques ajoutés ensemble produiront un logarithme de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ; car il est

$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Et puisqu'il est réciproquement

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

on verra aussi que la somme de deux logarithmes quelconques de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ produit un logarithme de $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

6. Soit $\varphi = 300^{\text{o}} = \frac{5}{3}\pi$ ou $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, et l'on aura

$$l\,\frac{1-\sqrt{-3}}{2} = \left(\tfrac{5}{3}+p\right)\pi\sqrt{-1}.$$

Par conséquent, les logarithmes de cette formule $\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$+\tfrac{5}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{11}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{17}{3}\pi\sqrt{-1},$$
$$+\tfrac{23}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{29}{2}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$
$$-\tfrac{1}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{7}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{13}{3}\pi\sqrt{-1},$$
$$-\tfrac{19}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{25}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

où il est évident que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutés ensemble donnent un logarithme de $-1$, conformément à ce qu'il est

$$\left(\tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1.$$

Et en général, on verra toujours que toutes les opérations qu'on fera avec ces logarithmes, sont parfaitement d'accord avec les opérations relatives faites avec les nombres qui leur conviennent, de sorte qu'on ne rencontrera plus le moindre inconvenient à l'égard des opérations en logarithmes et de celles qui leur répondent en nombres.

7. Soit $\varphi = 45^o = \frac{1}{4}\pi$ ou $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et l'on aura

$$l\,\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \left(\tfrac{1}{4}+p\right)\pi\sqrt{-1}.$$

Ainsi, tous les logarithmes de cette expression imaginaire $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront

$$+\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{9}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{17}{4}\pi\sqrt{-1},$$
$$+\tfrac{25}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{33}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$
$$-\tfrac{7}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{15}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{23}{4}\pi\sqrt{-1},$$
$$-\tfrac{31}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{39}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

8. Soit $\varphi = 135^o = \frac{3}{4}\pi$ ou $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\varphi = +\frac{1}{\sqrt{2}}$, et l'on aura

$$l\,\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \left(\tfrac{3}{4}+p\right)\pi\sqrt{-1}.$$

Et partant, tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront

$$+\tfrac{3}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{11}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{19}{4}\pi\sqrt{-1},$$
$$+\tfrac{27}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{35}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$
$$-\tfrac{5}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{13}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{21}{4}\pi\sqrt{-1},$$
$$-\tfrac{29}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{37}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

Chacun de ces logarithmes étant ajouté à quelcun des précédens de $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ produit un logarithme de la forme $q\pi\sqrt{-1}$ ou de $-1$, tout comme il faut, puisque

$$\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = -1$$

9. Soit $\varphi = 225^o = \frac{5}{4}\pi$ ou $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, et l'on aura

$$l\,\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \left(\tfrac{5}{4}+p\right)\pi\sqrt{-1}.$$

Donc, tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront

$$+\tfrac{5}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{13}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{21}{4}\pi\sqrt{-1},$$
$$+\tfrac{29}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$
$$-\tfrac{3}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{11}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{19}{4}\pi\sqrt{-1},$$
$$-\tfrac{27}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

qui sont les négatifs des précedens ; ce qui est aussi parfaitement bien d'accord avec les opérations analytiques, puisqu'il est

$$\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = 1 : \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

et partant

$$l\,\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = -l\,\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

10. Soit $\varphi = 315^o = \frac{7}{4}\pi$ ou $\cos\varphi = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où l'on aura

$$l\,\frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \left(\tfrac{7}{4}+p\right)\pi\sqrt{-1}.$$

Par conséquent, tous les logarithmes de cette formule $\frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront

$$+\tfrac{7}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{15}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{23}{4}\pi\sqrt{-1},$$
$$+\tfrac{31}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$
$$-\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{9}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{17}{4}\pi\sqrt{-1},$$
$$-\tfrac{25}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

Tous ces logarithmes des quatre derniers articles ont cette propriété, que chacun multiplié par 4 produit un logarithme de $-1$, ce qui est conforme à la vérité, puisque les quarré-quarrés de ces quatre formules

$$\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},\ \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},\ \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},\ \frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

produisent le nombre $-1$.

Ces exemples suffisent pour faire voir que l'idée des logarithmes que je viens d'établir, est la véritable, et qu'elle est parfaitement d'accord avec toutes les opérations que la théorie des logarithmes renferme, de sorte qu'on n'y rencontre plus aucune difficulté, et que toutes les contradictions auxquelles cette doctrine paroissoit assujettie, disparoissent entierement. Par conséquent, la grande controverse qui partagea autrefois Mrs. LEIBNIZ et BERNOULLI, est à present parfaitement décidée, ensorte que ni l'un ni l'autre ne trouveroit plus le moindre sujet de refuser son consentement.

La belle découverte de M. BERNOULLI, de ramener la quadrature du cercle aux logarithmes imaginaires, se trouve aussi non seulement parfaitement d'accord avec cette théorie, mais elle en est une suite nécessaire, et est portée même par là à une infiniment plus grande étendue, puisque nous voyons que les logarithmes de tous les nombres, entant qu'ils sont imaginaires, dépendent tous de la quadrature du cercle. Ainsi, les logarithmes de $+1$ étant $\pm p\pi\sqrt{-1}$,il sera $\frac{l+1}{\sqrt{-1}}$ toujours une quantité réelle, mais qui renferme une infinité de valeurs, à cause de l'infinité des logarithmes de $+1$. Conséquemment à cela, si l'on pose le rapport du diametre à la circonference $= 1 : \pi$, toutes les valeurs de cette expression $\frac{l+1}{\sqrt{-1}}$ seront les suivantes :

$$0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ \pm 6\pi,\ \pm 8\pi,\ \pm 10\pi,\ \text{etc.}$$

De même, les logarithmes de $-1$ étant divisés par $\sqrt{-1}$ fourniront les quantités réelles suivantes qui renferment également la quadrature du cercle. Car les valeurs de $\frac{l-1}{\sqrt{-1}}$ sont

$$\pm\pi,\ \pm 3\pi,\ \pm 5\pi,\ \pm 7\pi,\ \pm 9\pi,\ \text{etc.}$$

De la même maniere, on verra que les valeurs des expressions suivantes seront :

| Les valeurs de | seront celles-cy à l'infini |
|---|---|
| $\frac{l(+\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$ | $+\frac{1}{2}\pi,\ +\frac{5}{2}\pi,\ +\frac{9}{2}\pi,\ +\frac{13}{2}\pi,\ +\frac{17}{2}\pi$, etc. |
| | $-\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{7}{2}\pi,\ -\frac{11}{2}\pi,\ -\frac{15}{2}\pi,\ -\frac{19}{2}\pi$, etc. |
| $\frac{l(-\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$ | $+\frac{3}{2}\pi,\ +\frac{7}{2}\pi,\ +\frac{11}{2}\pi,\ +\frac{15}{2}\pi,\ +\frac{19}{2}\pi$, etc. |
| | $-\frac{1}{2}\pi,\ -\frac{5}{2}\pi,\ -\frac{9}{2}\pi,\ -\frac{13}{2}\pi,\ -\frac{17}{2}\pi$, etc. |

et on tirera également des autres exemples dévelopés cy-dessus de semblables expressions réelles qui renfermeront toutes la quadrature du cercle.

J'ai déja fait sentir, le bel accord de ces logarithmes avec l'extraction des racines, ayant fait voir que les doubles tant des logarithmes de $-1$ que de $+1$, sont contenus parmi les logarithmes de $+1$, puisqu'il est

$$1 = (+1)^2 = (-1)^2;$$

de même puisque il est

$$1 = (+1)^3 = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3,$$

on verra que les triples des logarithmes de $+1$, de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et de $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ se trouvent parmi les logarithmes de $+1$. Mais je remarque ici de plus, comme 1 n'a que ces deux racines quarrées $+1$ et $-1$, ainsi si l'on range les doubles de tous les logarithmes tant de $+1$ que de $-1$ dans une suite, on obtiendra la serie complette de tous les logarithmes de $+1$ ; car

$$2l+1 \text{ est } 0,\ \pm 4\pi\sqrt{-1},\ \pm 8\pi\sqrt{-1},\ \pm 12\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$
$$2l-1 \text{ est } \pm 2\pi\sqrt{-1},\ \pm 6\pi\sqrt{-1},\ \pm 10\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

De la même maniere, les trois racines cubiques de $+1$ étant

$$+1,\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ et } \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

si l'on range les triples de tous les logarithmes de ces trois racines dans une suite, il en résultera la suite complette des logarithmes de $+1$, car

$$3l+1 \text{ donne } 0,\ \pm 6\pi\sqrt{-1},\ \pm 12\pi\sqrt{-1},\ \pm 18\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

$$3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\ \begin{cases} +2\pi\sqrt{-1},\ +8\pi\sqrt{-1},\ +14\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}\\ -4\pi\sqrt{-1},\ -10\pi\sqrt{-1},\ -16\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}\end{cases}$$

$$3l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\ \begin{cases} +4\pi\sqrt{-1},\ +10\pi\sqrt{-1},\ +16\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}\\ -2\pi\sqrt{-1},\ -8\pi\sqrt{-1},\ -14\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}\end{cases}$$

Dans ces trois séries, chaque logarithme de $+1$ se trouve, et aucun ne s'y rencontre qu'une seule fois ; ce qui est une marque, que l'unité n'a que ces trois racines cubiques, et qu'il faut les trois ensemble pour épuiser la nature de l'unité.

Il en est de même de toutes les autres racines de l'unité, et comme les racines quarré-quarrées de $+1$ sont

$$+1,\ -1,\ +\sqrt{-1},\ \text{et}\ -\sqrt{-1},$$

on verra que les quadruples des logarithmes de chacune de ces racines ne donnent que la quatrieme partie des logarithmes de $+1$. Or, tous ces quadruples de toutes les quatre racines ensemble produisent toute la suite des logarithmes de $+1$. Il est aussi remarquable que tous les logarithmes d'une racine quelconque sont differens des logarithmes de toute autre racine du même nombre. Cependant, quoique ces deux logarithmes $l+1$ et $l-1$ soient differens entr'eux, il est néanmoins $2l+1 = l+1$ et $2l-1 = l+1$, sans qu'il soit $2l+1 = 2l-1$. De la même maniere, ces trois logarithmes

$$l+1,\ l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ et } l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

sont differens entr'eux ; cependant, nonobstant cette inégalité, il est

$$3l+1 = l+1,\ 3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = l+1,\ \text{et } 3l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = l+1.$$

Nous voyons donc qu'il est essentiel à la nature des logarithmes que chaque nombre ait une infinité de logarithmes, et que tous ces logarithmes soient differens non seulement entr'eux, mais aussi de tous les logarithmes de tout autre nombre. Il en est de même des logarithmes que des angles ou des arcs de cercle ; car, comme à chaque sinus et cosinus répond une infinité d'arcs differens, ainsi à chaque nombre convient une infinité de logarithmes differens. Mais il faut ici remarquer une grande différence qui est, que tous les arcs qui répondent au même sinus et cosinus, sont réels, au lieu que tous les logarithmes du même nombre sont imaginaires à la réserve d'un seul, lorsque le nombre donné est positif ; car tous les logarithmes des nombres, tant négatifs qu'imaginaires, sont sans aucune exception imaginaires. Or, comme à un arc donné ne convient qu'un seul sinus et cosinus, ainsi à un logarithme proposé ne répond qu'un seul nombre ; de sorte que c'est un probleme qui n'admet qu'une seule solution, lorsqu'on demande le nombre qui convient à un logarithme proposé.

## PROBLEME 4

*Un logarithme quelconque étant proposé, trouver le nombre qui lui répond.*

## SOLUTION

Posons premierement que le logarithme proposé soit une quantité réelle $= f$, et on sait que posant le nombre $= e$, dont le logarithme réel $= 1$, le nombre qui répond au logarithme $f$ sera $= e^f$.

En second lieu, soit le logarithme proposé $= g\sqrt{}-1$ ou simplement imaginaire, et soit $x$ le nombre qui lui répond. Puisque $g$ est un nombre réel, qu'on le compare avec $\pi$, et qu'il soit $g = m\pi$, et il est clair, si $m$ est un nombre entier ou pair ou impair, que le nombre $x$ sera ou $+1$ ou $-1$. Mais, pour tout autre cas quelconque, le nombre $x$ sera imaginaire et, pour le trouver, on n'a qu'à prendre un arc de cercle $= g$, le rayon étant $= 1$ et ayant cherché son sinus et cosinus, le nombre cherché sera

$$x = \cos g + \sqrt{}-1 \cdot \sin g.$$

En troisieme lieu, soit le logarithme proposé une quantité imaginaire quelconque $= f + g\sqrt{}-1$, puisqu'on sait que toute quantité imaginaire se peut réduire à cette forme $f+g\sqrt{}-1$, en sorte que $f$ et $g$ soient des nombres réels. Cela posé, il est clair que le nombre cherché $x$ sera le produit de deux nombres dont l'un aura pour logarithme $f$ et l'autre $g\sqrt{}-1$. Par conséquent, le nombre qui répond au logarithme $f + g\sqrt{}-1$ sera

$$= e^f(\cos g + \sqrt{}-1 \cdot \sin g).$$

C. Q. F. T.

On voit donc que le nombre qui répond au logarithme proposé $f + g\sqrt{}-1$, sera réel, lorsque $\sin g = 0$, c'est à dire lorsque $g = m\pi$, le coëfficient $m$ étant un nombre entier quelconque, ou affirmatif ou négatif. Dans ce cas, on voit de plus que si $m$ est un nombre pair, à cause de $\cos g = +1$, le nombre cherché sera affirmatif, mais si $m$ est un nombre impair, qu'à cause de $\cos g = -1$, le nombre cherché sera négatif $= -e^f$. Dans tous les autres cas où $m$, c'est à dire $\frac{g}{\pi}$, sera un nombre rompu ou même irrationel, le nombre qui répond à ce logarithme $f+g\sqrt{}-1$ sera infailliblement imaginaire.

Par le moyen de cette régle, on pourra aussi se servir des logarithmes dans le calcul des nombres imaginaires. Pour en donner un exemple, qu'on cherche la valeur de cette expression

$$\left(\frac{-1+\sqrt{}-3}{2}\right)^4 \left(\frac{+1+\sqrt{}-1}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{-1-\sqrt{}-3}{2}\right)^2 \sqrt{}-1 = A.$$

Pour cet effet, on n'a qu'à prendre un logarithme quelconque de chaque facteur, et en faire les opérations conformément aux régles généralement reçues, en sorte :

$$\begin{aligned}
l\tfrac{-1+\sqrt{}-3}{2} = \tfrac{2}{3}\pi\sqrt{}-1, \text{ donc } 4l\tfrac{-1+\sqrt{}-3}{2} &= \tfrac{8}{3}\pi\sqrt{}-1,\\
l\tfrac{+1+\sqrt{}-1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{4}\pi\sqrt{}-1, \ \ldots\ 3l\tfrac{+1+\sqrt{}-1}{\sqrt{2}} &= \tfrac{3}{4}\pi\sqrt{}-1,\\
l\tfrac{-1-\sqrt{}-3}{2} = \tfrac{4}{3}\pi\sqrt{}-1, \ \ldots\ 2l\tfrac{-1-\sqrt{}-3}{2} &= \tfrac{8}{3}\pi\sqrt{}-1,\\
\text{et enfin } l\sqrt{}-1 &= \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{}-1.\\
\hline
\text{Donc la somme ou } lA &= \tfrac{79}{12}\pi\sqrt{}-1
\end{aligned}$$

Par conséquent, le produit cherché sera

$$A = \cos\tfrac{79}{12}\pi + \sqrt{}-1 \cdot \sin\tfrac{79}{12}\pi$$

ou bien

$$A = \cos\tfrac{7}{12}\pi + \sqrt{}-1 \cdot \sin\tfrac{7}{12}\pi$$

Je remarque encore que le logarithme proposé étant $= f + g\sqrt{}-1$, le nombre répondant selon la régle commune, se trouve $= e^{f+g\sqrt{}-1}$. Or, cette, expression est tout à fait équivalente à celle que nous venons de trouver. Car on sait d'ailleurs que $e^{g\sqrt{}-1} = \cos g + \sqrt{}-1 \cdot \sin g$ et partant

$$e^{f+g\sqrt{}-1} = e^f \cdot e^{g\sqrt{}-1} = e^f(\cos g + \sqrt{}-1 \cdot \sin g),$$

mais cette derniere expression est plus commode que la premiere, où les imaginaires entrent dans l'exposant.

Presses Universitaires Franc-Comtoises
Université de Franche-Comté
25030 BESANCON CEDEX

Maquette et mise en page François Pétiard (IREM)

Imprimerie : Reprographie du
Département de Mathématiques

Dépôt légal 2e trimestre 2003

**I**nstitut de **R**echerche sur
l'**E**nseignement des **M**athématiques
de Franche-Comté

Département de Mathématiques. UFR Sciences et Techniques.

16 route de Gray. 25030 BESANCON CEDEX

Tél. : 03 81 66 62 25 - Fax : 03 81 66 62 34

Mél : iremfc@math.univ-fcomte.fr

Site web : http ://www-irem.univ-fcomte.fr

IREM
Bulletin n$^o$ 68. 2003

ISSN 1141-913X