Le petit Bac

Groupe « Statistiques et probabilités »
IREM de Franche-Comté

Sommaire

I Le document original 25
II Le document proposé par le groupe de travail. 25
1 Éléments de réponses de l'exercice page 71. 25
2 Prolongement possible pour des élèves de Terminale 26
III Énoncé de l'exercice proposé aux élèves de Terminale. 27

C'est l'histoire d'un exercice extrait du « document d'accompagnement des nouveaux programmes de première ».

Après l'analyse de ce document par le groupe « Statistiques et probabilités » de l'IREM de Besançon, une extension de cet exercice fut proposé au cours du stage sur les probabilités. Ce travail repris par un stagiaire devient un joli problème proposé aux élèves de terminale.

I Le document original : Exercice page 71 du document.

« Un petit bac peut, en plus des voyageurs, transporter une seule voiture à la fois pour aller dans une île.

Il faut réserver et payer la veille.

En cas de désistement, le propriétaire du bac ne rembourse que la moitié du prix du billet. On estime qu'en période estivale, une proportion stable p des réservations donne lieu à un désistement. Comme il y a toujours au moins deux demandes de réservation par trajet, le propriétaire se demande s'il n'aurait pas intérêt à prendre deux réservations pour chaque trajet : s'il n'y a pas de désistement, il prend une voiture et fait transporter à ses frais l'autre par un confrère dont le prix de passage est double du sien.

Pour quelles valeurs de p a-t-il intérêt, à long terme, à prendre ce système de surréservation ?

Ce problème pourra être repris en terminale, dans des cas plus complexes, quand les élèves auront vu la loi binomiale. »

II Le document proposé par le groupe de travail.

1 Éléments de réponses de l'exercice page 71.

Comme il y a toujours au moins 2 demandes de réservation par trajet et que le désistement après réservation est un événement de probabilité p, le chiffre d'affaire journalier est une variable aléatoire, notée C. Notons b le prix du passage d'une voiture.

S'il n'accepte qu'une réservation.

Événements	Désistement : d	Non désistement : nd
Probabilités	p	$1-p$
Chiffre d'affaire C	$\frac{b}{2}$	b

$$E(C) = p \times \frac{b}{2} + (1-p) \times b = \left(1 - \frac{p}{2}\right) \times b$$

S'il accepte deux réservations, son chiffre d'affaire est une variable aléatoire notée C'.

Événements	d1 et d2	d1 et nd2	nd1 et d2	nd1 et nd2
Probabilités	$p \times p$	$p(1-p)$	$(1-p)p$	$(1-p)(1-p)$
Crédit la veille	$b+b$	$b+b$	$b+b$	$b+b$
Débit le jour du passage	$-0,5b - 0,5b$	$-0,5b$	$-0,5b$	$-2b$
Chiffre d'affaire C'	b	$\frac{3b}{2}$	$\frac{3b}{2}$	0

$$E(C') = b \times p^2 + 3b(p - p^2) = (-2p^2 + 3p)b$$

$E(C') > E(C)$ si $-2p^2 + 3p > 1 - \frac{p}{2}$ ou $-4p^2 + 7p - 2 > 0$. Posons $p_0 = \frac{-7 + \sqrt{17}}{-8} \simeq 0,36$

Donc si $p > p_0$ le système de surréservation est rentable.

2 Prolongement possible pour des élèves de Terminale

Supposons qu'il y ait toujours au moins 3 demandes de réservation par trajet.

Si le propriétaire accepte trois réservations, le nombre de désistements parmi ces demandes est une variable aléatoire D qui suit une loi binomiale et son chiffre d'affaire est une variable aléatoire notée C''.

Le nombre de désistements D	3	2	1	0
Probabilités	p^3	$3p^2(1-p)$	$3p(1-p)^2$	$(1-p)^3$
Crédit la veille	$3b$	$3b$	$3b$	$3b$
Débit le jour du passage	$-\frac{3b}{2}$	$-b$	$-\frac{5b}{2}$	$-4b$
Chiffre d'affaire C''	$\frac{3b}{2}$	$2b$	$\frac{b}{2}$	$-b$

$$E(C'') = b\left[\frac{3}{2} \times p^3 + 2 \times 3p^2(1-p) + \frac{3}{2}p(1-p)^2 - (1-p)^3\right] = b\left[-2p^3 + \frac{9}{2}p - 1\right]$$

$E(C'') > E(C')$ si $-2p^3 + \dfrac{9}{2}p - 1 > -2p^2 + 3p$ ce qui donne : $-2p^3 + 2p^2 + \dfrac{3}{2}p - 1 > 0$ avec $p = \dfrac{1}{2}$ comme racine évidente ce qui permet une factorisation.

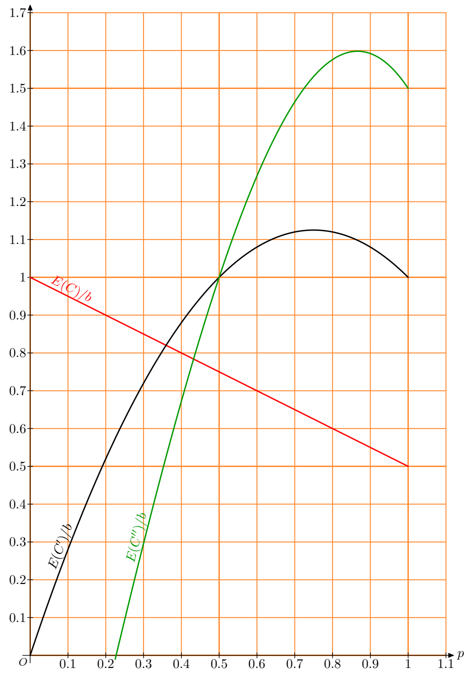
$$(-2p+1)(2p^2 - p - 2) > 0$$

$(2p^2 - p - 2) < 0$ entre $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \simeq -0,78$ et $\dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \simeq 1,28$, donc sur $[0;1]$.

pour $p > \dfrac{1}{2}$ le 3$^{\text{e}}$ procédé est plus rentable que le 2$^{\text{e}}$.

Conclusion :

Pour $p > 0,5$ le meilleur choix est d'accepter trois réservations.
Pour $p_0 < p < 0,5$ le meilleur choix est d'accepter deux réservations.
Pour $p < p_0$ le meilleur choix est de n'accepter qu'une réservation.



III Énoncé de l'exercice proposé aux élèves de Terminale.

Un petit bac peut, en plus des piétons, transporter une seule voiture à la fois pour aller sur une île. Il faut réserver et payer la veille. Le prix du billet est 5 €.

En cas de désistement, le propriétaire du bac ne rembourse que la moitié du prix du billet. On estime qu'en période estivale, une proportion stable p de réservations donne lieu à un désistement.

Soit X la variable aléatoire égale au chiffre d'affaire journalier du propriétaire du bac concernant le passage des voitures.

Partie A :

Le propriétaire du bac prend une seule réservation par jour.

1. Donner la distribution de X sous forme de tableau.
2. Calculer l'espérance E_{A} en fonction de p.

Partie B :

Comme il y a toujours au moins 2 demandes de réservation par trajet, le propriétaire se demande s'il n'aurait pas intérêt à prendre 2 réservations pour chaque trajet : s'il n'y a pas de désistement, il prend une voiture et fait transporter à ses frais l'autre voiture par un confrère dont le prix de passage est double du sien.

1. Donner dans ce cas la nouvelle distribution de X sous forme de tableau.
2. Calculer l'espérance E_{B} en fonction de p.
3. D'après les expressions de E_{A} et E_{B}, pour quelles valeurs de p a-t-il intérêt, à long terme, à adopter ce système de surréservation ?

Partie C :

Le propriétaire du bac est certain d'enregistrer au moins 3 demandes de réservation par trajet. Il décide alors de prendre 3 réservations par jour, au risque de supporter le coût du passage par son collègue des voitures qu'il ne peut transporter (dans les mêmes conditions que ci-dessus).

1. Donner dans ce cas la nouvelle distribution de X sous forme de tableau.
2. Calculer l'espérance E_{C} en fonction de p.
3. Sur une calculatrice graphique, tracer les 3 fonctions E_{A}, E_{B} et E_{C} pour p sur $[0;1]$ Pour quelle valeur de p les 2 fonctions E_{B} et E_{C} semblent-elles égales ? Vérifier par le calcul.
4. Résoudre $E_{\mathrm{C}} > E_{\mathrm{B}}$.
   Pour quelles valeurs de p le propriétaire du bac a-t-il intérêt, à long terme, à adopter ce système de surréservation pour 3 voitures ?

Michel Vendrely