Irem
de Besançon

Le Théorème de GÖDEL

Un théorème fondamental de la logique mathématique

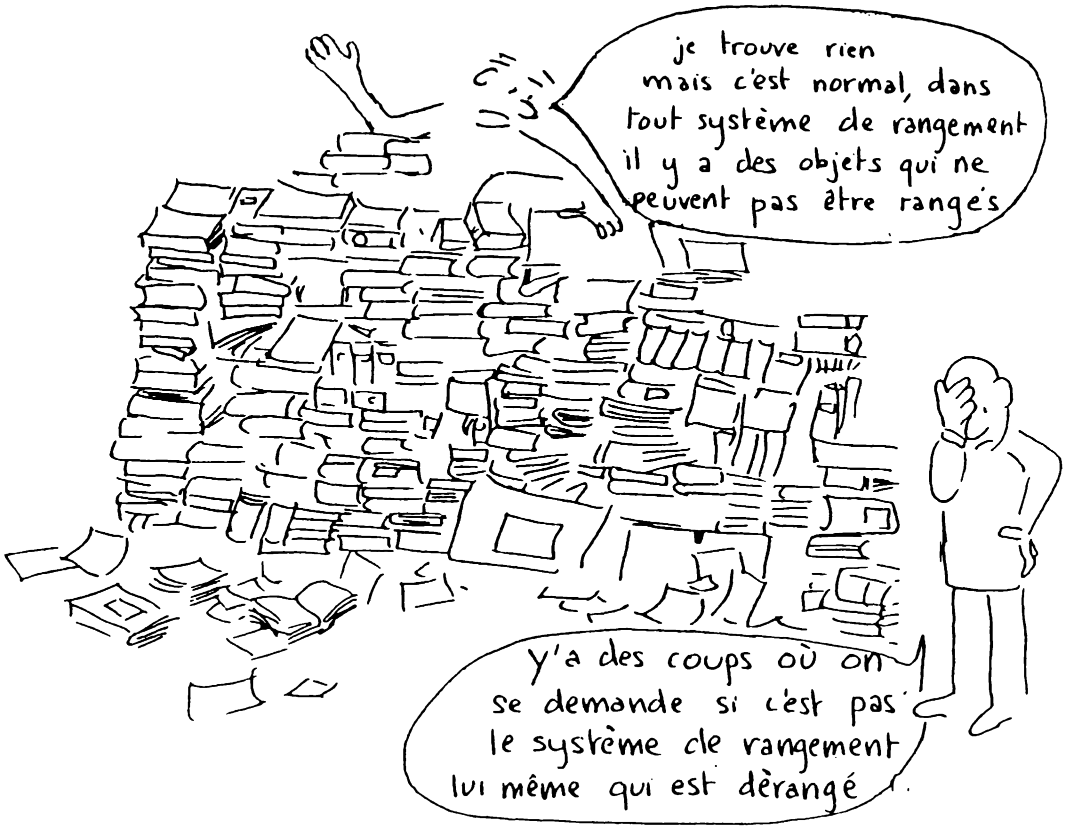
Jean CESAR

Juin 1980

Présentation

Voici la réédition d'une brochure de l'IREM de Besançon concernant le théorème d'incomplétude de Gödel, datant de 1980.
Le contenu est le même , seul l'emballage a changé.
Merci à J.-M. VIGOUREUX[1] pour les dessins des pages de couverture.

L'équipe IREM de Besançon



---

[1] professeur de physique à l'UFR des Sciences et Techniques de Besançon

AVANT-PROPOS

Voici le texte de la causerie mathématique présentée par l'I.R.E.M. de BESANCON le 30 Avril 1980, ainsi que la copie, sous forme de tableaux, des transparents utilisés au rétroprojecteur. Une annexe vient apporter certains éléments techniques volontairement laissés de côté lors de l'exposé.

Ce fascicule est rédigé à la suite d'un stage IREM de "formation complémentaire" animé par Jean MERKER en 1978-1979 : que Jean soit ici très chaleureusement remercié, car il a atteint son but qui était de démystifier le théorème de Gödel et d'en tirer des conséquences pratiques sur le plan de la présentation des théories mathématiques. Il demandait à la fin de Mesurer (1978) : -"A quand des textes mathématiques plus fraternels ?". Eh bien en voici un qui a été voulu fraternel du début à la fin ! Le groupe "Analyse du contenu non-mathématique des textes mathématiques" continue à travailler dans le même sens et rédige des traductions de textes formalisés.

Je voudrais remercier également les auteurs du Gödel's proof (voir bibliographie) dont je me suis longuement inspiré, ainsi que Monique et Alain Pierson, Françoise Bombard, Gérard Vieille et Mme Boutonnet qui ont bien voulu relire le texte, sans oublier ceux, nombreux j'espère, qui me feront part de leurs critiques.

Jean CESAR

o
o o

LE THEOREME DE GODEL :

Un théorème fondamental de la logique mathématique

Le mathématicien Kurt Gödel est né le 28 avril 1906 à Brünn (actuellement Brno) et il est mort à Princeton le 14 janvier 1978. Il a publié, essentiellement de 1930 à 1938, des travaux absolument fondamentaux en logique mathématique, que commente en ces termes Daniel ANDLER (Maître-Assistant à l'Université de Paris VII) dans un article publié dans Plurisciences (Edition Encyclopaedia Universalis, 1978) :

"La logique mathématique moderne, fondée par Gottlob FREGE (1848 - 1925) et Bertrand RUSSEL (1872 - 1970), doit à un homme plus qu'à tout autre d'avoir accédé à la maturité. Le rôle joué par Kurt Gödel lui confère dans l'histoire de la logique contemporaine une place que pas même Alfred TARSKI, le grand logicien polonais, ne peut lui disputer. Les travaux de Gödel n'ont pas seulement donné à la logique un essor sans précédent ; ils ont boulversé jusqu'à la conception que l'on se faisait de la nature et des possibilités des mathématiques. Ce mathématicien parmi les plus grands est sans doute le seul en ce siècle à avoir jeté sur l'ensemble de sa discipline une lumière comparable à celle dont EINSTEIN a éclairé la sienne".

I - Introduction

Si nous voulons suivre l'évolution des idées qui ont conduit au théorème de Gödel, nous devons remonter à la découverte par les Grecs de la méthode axiomatique, qui consiste à accepter certaines propositions appelées axiomes ou postulats, et à en déduire les autres, avec la seule aide des principes de logique.

Au cours des deux derniers siècles, des branches anciennes et récentes des mathématiques ont reçu ce qui semblait être une bonne base d'axiomes. L'opinion s'est alors répandue que chaque domaine des activités mathématiques pouvait être doté d'un jeu d'axiomes suffisant à engendrer toutes les propositions relatives à ce domaine.

Par ses travaux Gödel a montré qu'une telle position était intenable. Il a placé les mathématiciens devant la conclusion selon laquelle la méthode axiomatique porte en elle certaines limites rendant impossible l'axiomatisation complète de l'arithmétique.

II - Le problème de la non-contradiction

a) Utilisation des modèles

L'un des axiomes d'Euclide dit que, par un point pris hors d'une droite, passe une seule parallèle à cette droite. Cet axiome n'a pas paru évident aux Anciens; qui ont cherché à le déduire des autres axiomes. C'est seulement au XIXème siècle que nous nous sommes rendus compte de l'impossibilité de déduire cet axiome des parallèles : de nouvelles géométries ont été construites en prenant des axiomes incompatibles avec lui. Ces nouvelles géométries sont-elles aussi bonnes, mathématiquement parlant, que celle d'Euclide ? C'est-à-dire libres de toute contradiction ?

Une méthode générale est employée pour étudier cette non-contradiction, dont l'idée est d'interpréter le système en question par un modèle vérifiant les axiomes :

Activités mathématiques	Modèles
Géométrie de Riemann........	Sphère euclidienne
Géométrie d'Euclide.........	1) Espace habituel 2) Algèbre réelle
Algèbre réelle..............	Arithmétique
Arithmétique................	Cardinaux finis (Théorie des ensembles : paradoxes encore possibles

Depuis qu'elle existe la géométrie euclidienne est interprétée par le modèle de l'espace qui nous entoure. Mais certains axiomes des géométries non-euclidiennes ne sont pas vérifiés par cet espace : par exemple, dans la géométrie de Riemann, l'axiome selon lequel par un point pris hors d'une droite, aucune parallèle ne passe. Cette géométrie admet cependant le modèle suivant : interprétons l'expression "plan" dans les axiomes de Riemann comme désignant la surface d'une sphère euclidienne, l'expression "droite", un grand cercle et "point" un point de cette surface. L'axiome pris par Riemann pour les parallèles s'énonce :

"Par un point sur la surface d'une sphère et hors d'un grand cercle donné, il ne passe pas de grand cercle parallèle au premier", ce qui est un théorème de géométrie euclidienne.

Ainsi la géométrie de Riemann est non-contradictoire si la géométrie d'Euclide est non-contradictoire. L'autorité d'Euclide est invoquée à propos d'un système qui défie cette autorité, et nous ne pouvons plus échapper à la question de savoir si la géométrie Euclidienne est non-contradictoire.

Hilbert a essayé d'y répondre au moyen du modèle de la géométrie en coordonnées cartésiennes. Dans les axiomes de géométrie plane, par exemple, considérons que l'expression "point" désigne un couple de nombres, "droite", uen relation numérique exprimée par une équation du premier degré à deux inconnues. L'axiome d'Euclide selon lequel deux points distincts déterminent une seule droite devient le théorème d'algèbre : "Deux couples distincts de nombres déterminent une seule relation linéaire".

Ainsi la géométrie euclidienne est non-contradictoire si l'algèbre est non-contradictoire, et d'après les constructions classiques des ensembles de nombres, l'algèbre est non-contradictoire si l'arithmétique l'est à son tour. Quant à l'arithmétique, des mathématiciens comme Cantor, Frege et Russel ont réussi à la ramener à la théorie des ensembles, les axiomes de Peano devenant des théorèmes sur les ensembles.

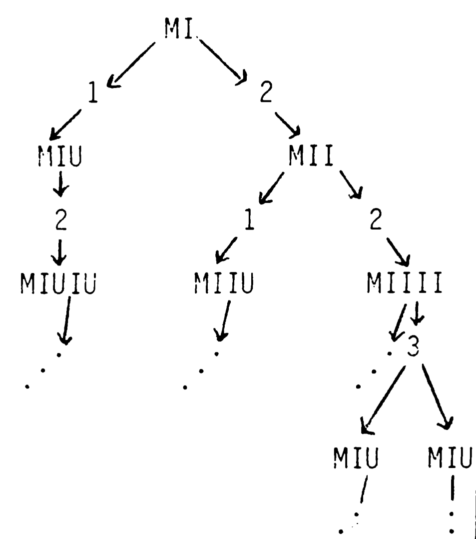
Mais la théorie des ensembles est-elle non-contradictoire ? Tout ce que nous pouvons dire, c'est qu'à chacun des paradoxes qui ont ébranlé cette théorie, les mathématiciens ont précisé ses axiomes et son langage pour éviter ce paradoxe, mais rien ne garantit qu'un autre ne soit découvert et qu'une révision ne s'impose.

En conclusion, l'interprétation par les modèles repousse sans le résoudre le problème de la non-contradiction.

B) Formalisation

Devant ce demi-échec, Hilbert a pensé ne plus faire appel à la non-contradiction d'un autre système, ni à aucune interprétation. Pour cela il faut d'abord vider les expressions utilisées dans le système de toute signification, contrairement à ce que nous avons fait jusqu'à présent. Nous obtiendrons ainsi des pages couvertes de symboles ne voulant rien dire : c'est ce que nous appelons un système formel.

Bien sûr il reste possible de décrire de telles pages, de dire, par exemple que telle ligne est formée de tels symboles. Mais il faut observer que ces déclarations ne font pas partie du système formel : elles font partie de ce que Hilbert appelle la "Métamathématique", le langage qui parle des activités mathématiques, des modèles et du système formel, qui est le langage que nous employons essentiellement ici. C'est dans ce langage que nous énonçons le vocabulaire, où la liste des signes atomiques du système étudié, les règles de formation décrivant la manière de combiner ces signes pour obtenir des formules, puis les règles d'inférence décrivant la manière de déduire certaines formules à partir d'autres, enfin les axiomes qui sont les formules initiales. Voici un exemple : le système MIU.

Métamathématique	Systèmes formels	Activités mathématiques	Modèles
Vocabulaire.......	M I U		
Règle de formation :			
Toute suite de signes est une formule, par exemple..........	MI MU MM IMMU		
Règles d'inférence :			
1) I final peut devenir IU.........	MI MIU		
2) Mx (x sous-chaîne) peut devenir Mxx..	MIU MIUIU		
3) III peut devenir U..............	MIII MU		
4) UU peut être abandonné.......	UUU U		
Axiome.............	MI		

Dans la colonne ACTIVITES MATHEMATIQUES, nous écrivons, comme dans tout manuel de mathématiques, un mélange de système formel et de métamathématiques (ici les règles d'inférences utilisées). Une suite de formules comme : MI, MII, MIIII, MUI s'appelle une démonstration et chacune des formules y figurant est qualifiée de démontrable.

Le système MIU ne rend cependant pas de grands services en mathématiques et nous allons plutôt étudier des systèmes formels possédant un modèle intéressant. Commençons par le plus simple, le calcul propositionnel, qui formalise la logique des propositions connue depuis l'Antiquité.

Les propositions ne sont pas analysées ici, mais remplacées globalement par une lettre minuscule dessinée au début, comme les autres signes, sur un petit fanion pour rappeler que cette lettre n'est plus qu'un dessin dépourvu de sens dans le système formel.

Nous donnons enfin des schémas d'axiomes dans lesquels il est possible d'opérer des substitutions, c'est-à-dire de remplacer une lettre majuscule par une formule composée :

Métamathématique	Systèmes formels	Activités mathématiques	Modèles
Vocabulaire : - Variables propositionnelles....... - Connecteurs........ - Signes de ponctuation...........	p q $\neg$ $\Rightarrow$ ( )	B1 : P B2 : $\neg$P B3 : $P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$ (démontrable, voir annexe 1)	Si le ciel se couvre, il ne gèle pas. S'il ne gèle pas, le chien peut rester dehors. Le ciel se couvre. Donc le chien peut rester dehors.
Règles de formation : sont des formules - Les variables propositionnelles - Les assemblages du type........... où S et T sont des formules	$\neg$ S S $\Rightarrow$ T	B4 : $\neg P \Rightarrow Q$ (MP à B1 et B3) B5 : Q (MP à B2 et B4)	
Règles d'inférence : MODUS PONENS (MP) Nous pouvons déduire................ des formules S et S $\Rightarrow$ T.	T		
Schémas d'axiomes : A1................... A2................... A3...................	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ $P \Rightarrow (Q \Rightarrow M) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow M))$ $(\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P)$		

Nous allons étudier la non-contradiction de ce calcul propositionnel, et pour cela suivre des raisonnements métamathématiques, c'est-à-dire à l'extérieur du système formel. Tels que nous allons les effectuer, ces raisonnements manqueront de rigueur : il faut les considérer comme seulement des indications propres à faire sentir le genre de démarches auxquelles conduit la métamathématique, et nous les appellerons <u>preuves métamathématiques</u> pour les distinguer des démonstrations écrites dans le système formel.

Supposons alors qu'une formule P et sa négation formelle P (voir annexe 2) soient démontrables, et lisons dans la colonne ACTIVITES MATHEMATIQUES un texte qui se trouve dans tout manuel de logique. Les formules de ce texte constituent une démonstration de n'importe quelle formule Q. Nous pouvons dire, en métamathématique, que si le système est contradictoire, alors n'importe quelle formule est démontrable, implication qui admet la contraposée très utile : s'il existe au moins une formule non démontrable, alors le système est non-contradictoire.

Présentons, à titre d'exemple, une formule non démontrable dans MIU. La preuve métamathématique fait appel à l'arithmétique, qui est ici bien extérieure au système formel. Le fait que le nombre de I figurant dans une formule soit (ou ne soit pas) multiple de 3 n'est modifié par aucune des règles de formation. Or l'axiome MI comporte un I. Donc le nombre de I figurant dans toute formule démontrable n'est jamais multiple de 3, et la formule MU, avec zéro I, n'est pas démontrable.

Recherchons à présent une formule non démontrable dans le calcul propositionnel. Nous avons besoin pour cela d'une propriété jouant le même rôle que "le nombre de I n'est pas multiple de 3" : pour les formules du calcul propositionnel, la propriété sera "être une <u>tautologie</u>". Une tautologie est habituellement définie comme une formule vraie dans toutes les interprétations. Mais ainsi nous faisons référence à un modèle, celui du Vrai et du Faux. Comme nous voulons une propriété portant exclusivement sur les formules, nous allons définir une <u>tautologie'</u> :

<table>
<tr><th>Métamathématique</th><th>Systèmes formels</th><th>Activités mathématiques</th><th>Modèles</th></tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><th>P</th><th>¬P</th></tr>
<tr><td>K1</td><td>K2</td></tr>
<tr><td>K2</td><td>K1</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>P</th><th>q</th><th>q ⇒ P</th></tr>
<tr><td>K1</td><td>K1</td><td>K1</td></tr>
<tr><td>K1</td><td>K2</td><td>K1</td></tr>
<tr><td>K2</td><td>K1</td><td>K2</td></tr>
<tr><td>K2</td><td>K2</td><td>K1</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>P</th><th>Q</th><th>Q ⇒ P</th><th>P ⇒ (Q ⇒ P)</th></tr>
<tr><td>K1</td><td>K1</td><td>K1</td><td>K1</td></tr>
<tr><td>K1</td><td>K2</td><td>K1</td><td>K1</td></tr>
<tr><td>K2</td><td>K1</td><td>K2</td><td>K1</td></tr>
<tr><td>K2</td><td>K2</td><td>K1</td><td>K1</td></tr>
</table>
A1 : P ⇒ (Q ⇒ P) est une tautologie'
</td>
<td></td>
<td></td>
<td>
Il pleut ou il ne pleut pas.
<table>
<tr><th>p</th><th>¬p</th><th>p ∨ ¬p</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
p ∨ ¬p est une tautologie.
</td>
</tr>
</table>

Nous plaçons chaque variable propositionnelle dans l'une des deux classes disjointes K1 et K2, et les formules composées sont ensuite réparties entre les classes de la manière indiquée dans la colonne METAMATHEMATIQUE pour $\neg p$ et $q \Rightarrow p$. Ainsi K1 et K2 peuvent être interprétés comme les classes du Vrai et du Faux, mais aussi comme d'autres classes. Nous appelons "tautologie" une formule qui est dans K1, quelles que soient les classes où sont placées ses variables propositionnelles.

Nous pouvons donner la preuve métamathématique suivante :

- Les axiomes sont des tautologies : il suffit pour s'en rendre compte de dresser des tables de classes comme nous l'avons fait pour A1.
- Cette propriété est héréditaire à travers le MODUS PONENS (voir annexe 3)
- Au point où nous en sommes, toute formule démontrable est une tautologie
- Il existe au moins une formule qui ne soit pas une tautologie :

  par exemple $\quad p$ (variable propositionnelle)

  ou $\quad q \Rightarrow p$ (voir la table de classes)

Ces formules-là ne sont alors pas démontrables.
- Nous pouvons donc conlure que le calcul propositionnel est non-contradictoire

III - Le problème de la complétude

a) Complétude du calcul propositionnel

Maintenant que toute formule démontrable du calcul propositionnel est une tautologie, nous pouvons nous demander si, réciproquement, toute tautologie est démontrable : c'est le problème de la complétude. Notre système sera qualifié de complet s'il permet de démontrer toutes les tautologies.

Nous allons, à titre d'illustration, considérer une tautologie A dans laquelle figurent deux variables propositionnelles p et q. Nous pouvons prouver métamathématiquement, sans entrer dans les détails parce que le MODUS PONENS respecte la classe K1, que, pour la répartition dans les classes plaçant p et q dans K1 :

"Sous les axiomes A1, A2, A3, p, q, la tautologie A est démontrable", et pour la répartition plaçant p dans K1 et q dans K2 :

"Sous les axiomes A1...p, $\neg q$, la tautologie A est démontrable".

C'est-à-dire :

"Sous les axiomes A1...p, sont démontrables les deux formules :
$q \Rightarrow A$
et $\neg q \Rightarrow A$".

Or nous avons aussi la formule démontrable : (voir annexe 1, exercice)
$(q \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg q \Rightarrow A) \Rightarrow A)$

qui nous permet d'appliquer deux fois le MODUS PONENS et d'écrire :
"Sous les axiomes A1...p, la tautologie A est démontrable".
Comme précédemment, nous tirons des deux derniers résultats :
"Sous les seuls axiomes A1, A2, A3, la tautologie A est démontrable".

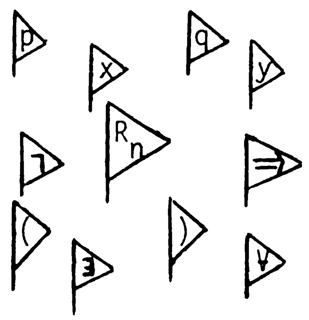
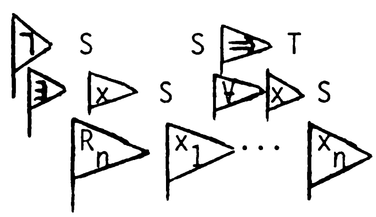
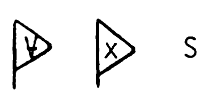
Des considérations analogues (voir annexe 4) permettent de conclure que toute tautologie est démontrable, c'est-à-dire que le calcul propositionnel est complet.

b) Complétude du calcul des prédicats du premier ordre

Le calcul propositionnel codifie seulement un fragment de la logique et nous pouvons prouver la non-contradiction et la complétude de systèmes plus élaborés comme le calcul des prédicats du premier ordre : ce calcul contient celui des propositions, mais il le déborde au sens où il peut décomposer les propositions en sujets et en prédicats. Pour cela nous introduisons les variables de prédicats, à une ou plusieurs places occupées par des variables d'objets. Lorsque, dans une variable de prédicats, les variables d'objets prennent des valeurs déterminées, nous obtenons alors des variables propositionnelles.

La locution "du premier ordre" signifie que les quantificateurs peuvent porter seulement sur des variables d'objets et non sur des variables de prédicats. Cela suffit pour écrire les théories mathématiques connues car les théories d'ordre supérieur peuvent être ramenées au premier ordre. Ce calcul doit être considéré comme la base logique minimale de toute théorie. Des axiomes régissant par exemple l'emploi des prédicats = et ε peuvent être ajoutés ultérieurement, mais sans garantie de conserver la non-contradiction et la complétude.

Voici comment se présente ce calcul :

Métamathématique	Systèmes formels	Activités mathématiques	Modèles
<u>Vocabulaire</u> : - Variables propositionnelles............ - Variables d'objets.... - Variables de prédicats.................. - Connecteurs........... - Signes de ponctuation.................. - Quantificateurs.......		Tous les livres de mathématiques, par exemple : <u>LES ELEMENTS</u> de N. Bourbaki	Tous les hommes sont mortels. Socrate est un homme. Donc Socrate est mortel.
<u>Règles de formation</u> : sont des formules - Les variables proportionnelles - Les assemblages du type.................. où S et T sont des formules			
<u>Règles d'inférence</u> - MODUS PONENS - GENERALISATION : Nous pouvons déduire.................. de la formule S			
<u>Schémas d'axiomes</u> : - A1, A2, A3 - A4 : Si S ne contient pas x dans le champ d'un quantificateur en y................. - A5 : Si S ne contient pas x non quantifié.................. (voir annexe 5)	$(\forall\ x\ S) \Rightarrow S(y)$ $(\forall\ x(S \Rightarrow T)) \Rightarrow (S \Rightarrow (\forall\ x\ T))$		

D'abord, la preuve métamathématique de la non-contradiction du calcul des prédicats du premier ordre s'inspire de celle concernant le calcul propositionnel. Considérons que nous étudions un univers présentant quelque intérêt, c'est-à-dire comprenant au moins un objet a, et donnons cette valeur déterminée à toutes les variables d'objets figurant dans les prédicats. Nous pouvons alors supprimer, sans perte d'information tous les quantificateurs, et seules restent des variables propositionnelles et des connecteurs.

Ainsi ∀ x S devient S(a),

A1, A2, A3 sont inchangés,

A4 devient : S(a) ⇒ S(a),

A5 devient : (S(a) ⇒ T(a)) ⇒ (S(a) ⇒ T(a))

Les axiomes, et par suite toutes les formules démontrables deviennent des tautologies.

Or la variable propositionnelle S(a n'est pas une tautologie et la formule ∀ x S dont elle est la transformée n'est alors pas démontrable. Le calcul des prédicats du premier ordre est donc non-contradictoire.

Pour la complétude, nous avons besoin d'une notion plus précise que celle de tautologie. Remarquons d'abord qu'une variable de prédicat à n places peut se trouver arbitrairement dans K1 ou K2 pour chaque n-uplet (a1...an) formé d'objets pris dans un certain domaine D. Les formules sont alors réparties entre les classes selon les règles connues auxquelles s'ajoutent celles figurant dans la colonne METAMATHEMATIQUE pour ∃ x S et ∀ x S :

Métamathématique	Systèmes formels	Activités mathématiques	Modèles

D = {x1 ; x2}

S(x1)	S(x2)	∃ x S	∀ x S
K1	K1	K1	K1
K1	K2	K1	K2
K2	K1	K1	K2
K2	K2	K2	K2

∀ x S	S(y), y = x1	S(y), y = x2	(∀xS) ⇒ S(y)
K1	K1		K1
		K1	K1
K2	K1		K1
		K2	K1
K2	K2		K1
		K1	K1
K2	K2		K1
		K2	K1

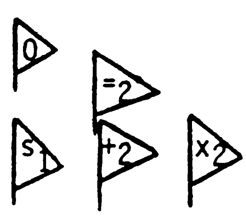
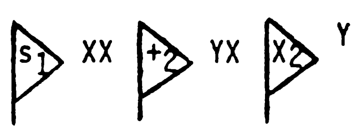
(∀ x S) ⇒ S(y) est valide dans D = {x1 ; x2} .

Une formule telle que $(\forall x\ S) \Rightarrow S(y)$, se trouvant dans K1 indépendamment de la répartition de ses variables propositionnelles et de ses variables de prédicats quand ses variables d'objets parcourent le domaine D, est dite <u>valide dans D</u>. Nous qualifions de <u>valides</u> les formules valides dans tout domaine. Enfin nous pouvons prouver métamathématiquement que toutes les formules valides sont démontrables (voir annexe 6), ce qui assure la complétude du calcul des prédicats du premier ordre.

Nous venons d'étudier deux systèmes pour lesquels nous réussissons à démontrer tout ce qui avait été trouvé intuitivement par les générations précédentes de mathématiciens. Nous allons maintenant passer à l'arithmétique, pour laquelle un tel objectif ne pourra pas être atteint.

c) <u>Incomplétude de l'arithmétique</u>

Commençons par formaliser l'arithmétique :

Métamathématique	Systèmes formels	Activités mathématiques	Modèles
<u>Vocabulaire</u> :			
- Celui du calcul du premier ordre - Une constante d'objet......... - Une constante de prédicat..... - Trois constantes de fonctions........................		Tous les livres d'arithmétique, par exemple : <u>LES NOMBRES PREMIERS</u> de Jean ITARD	Modèle standard : $\mathbb{N}$
<u>Règles de formation</u> :			
- Sont des formules les assemblages du calcul du 1° ordre - Sont des objets les assemblages du type.................. où X et Y sont des objets.			
<u>Règles d'inférence</u> : - MODUS PONENS - GENERALISATION			Modèles <u>non-standards</u> : par exemple $\mathbb{N}$ plus une constante d'objet c choisie hors de $\mathbb{N}$.
<u>Schémas d'axiomes</u> : - A1 à A5			
-S1........................	$X = Y \Rightarrow (X = Z \Rightarrow Y = Z)$		
-S2.......................	$X = Y \Rightarrow sX = sY$		
-S3......................	$\neg\ sX = 0$		
-S4.....................	$sX = sY \Rightarrow X = Y$		
-S5....................	$X + 0 = X$		
-S6...................	$X \times 0 = 0$		
-S7..................	$X \times sY = (X \times Y) + X$		
-S8.................	$X + sY = s(X + Y)$		
-S9................	$(S(0) \wedge \forall X (S(X) \Rightarrow S(sX))) \Rightarrow \forall X\ S(X)$		
($\wedge$ est une abréviation)			

La complétude du calcul des prédicats du premier ordre faisait référence à tous les domaines D, donc en particulier à tous les modèles vérifiant les axiomes. Mais, pour une théorie plus élaborée comme l'arithmétique, à partir du modèle standard $\mathbb{N}$ qui nous a conduit à la présente formalisation, nous pouvons construire des modèles non-standards vérifiant les mêmes axiomes, par exemple en ajoutant une nouvelle constante d'objet c choisie hors de $\mathbb{N}$ (voir annexe 7). Dès lors, nous ne parlerons plus de formule valide, mais de formule vraie dans le modèle standard $\mathbb{N}$.

Hilbert pensait qu'il pourrait prouver métamathématiquement la non-contradiction et la complétude de l'arithmétique en se servant seulement d'un nombre fini de propriétés et d'opérations portant sur les formules. Pour préserver ce caractère "finitiste", Gödel, en 1931, a entrepris de "traduire" les raisonnements métamathématiques en langage arithmétique, c'est-à-dire de les faire entrer dans le système formel. Gödel dit lui-même que cette idée lui est venue en étudiant le paradoxe proposé par le Français Jules Richard en 1905 : considérons les propriétés des naturels écrites en français, à partir des notions de base exposées ci-dessus : par exemple, la propriété d'être un carré s'énonce "être le produit d'un naturel par lui-même". Rangeons-les par nombres de lettres croissants, et pour celles qui ont autant de lettres, par ordre alphabétique ; ainsi un naturel unique correspond à chaque propriété.

Il peut se produire qu'un naturel possède la propriété qui a ce naturel pour numéro (par exemple si "avoir exactement deux diviseurs" porte le numéro 17, alors 17 possède la propriété n° 17) comme il peut se produire qu'il ne la possède pas (si "être le produit d'un naturel par lui-même" porte le numéro 35, alors 35 ne possède pas la propriété n° 35). Nous dirons que 35 est richardien, propriété qui s'énonce : "Ne pas posséder la propriété portant son numéro" et qui est elle-même affectée d'un numéro, disons n. Nous allons poser la question, qui rappelle le paradoxe de Russel : n est-il richardien ? La réponse est la suivante : n est richardien si et seulement si n n'est pas richardien.

La contradiction étant survenue dès que nous avons numéroté des notions métamathématiques portant sur la langue dans laquelle nous nous exprimons, pouvons-nous encore concevoir de traduire numériquement des phrases métamathématiques ? Gödel, informé par le paradoxe de Richard d'une tentative de traduction et de l'obstacle qu'elle avait rencontré, a décidé de ne traduire dans le système formel que certaines phrases métamathématiques "saines" que nous allons étudier.

Une relation ou fonction métamathématique à laquelle correspond une formule du système formel est dite <u>traduisible</u> (cela n'est pas souvent le cas, car les formules sont dénombrables alors qu'il y a autant de relations métamathématiques que de parties de $\mathbb{N}$). Pratiquement nous pouvons nous ramener aux seules fonctions en considérant, pour chaque relation, sa <u>fonction caractéristique</u> qui vaut 1 quand la relation est vraie dans le modèle standard $\mathbb{N}$, et 0 sinon (par exemple, la relation "a divise b" admet pour fonction caractéristique f(reste(b, a)) avec f(0) = 1 et f(x + 1) = 0).

Ainsi, par construction, <u>à une phrase métamathématique traduisible et vraie à propos du modèle standard $\mathbb{N}$, correspond une formule du système formel également vraie dans le modèle standard $\mathbb{N}$</u>.

Voici quelques exemples de fonctions et de relations traduisibles :

Métamathématiques	Systèmes formels	Activités mathématiques	Modèles
<u>Fonctions</u> : Pour tout x, O(x) = 0 Pour tout x, S(x) = sx			
Pour tout $(x_1 \ldots x_n)$, $p_{n,i}(x_1 \ldots x_n) = x_1$	$x_1 = x_1 \ldots x_{n+1} = x_1$		
et fonctions tirées des précédentes par × <u>substitution</u> : ainsi $p_{2,2}\ (x_1,\ O(x_2)) = 0$	$x_1 = x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_3 = 0$		
$p_{3,2}\ (x_1,\ S(x_2), x_3) = sx_2$	$x_1 = x_1 \ldots x_4 = sx_2$		
× <u>Récurrence</u> : ainsi A(x, 0) = x A(x, y+1) = sA(x, y)	$x = x \wedge y = y \wedge z = x + y$		
⋮			
D(0) = 1 x ≠ 0 D(x) est le nombre de diviseurs de x	$x = ssssss0 \wedge y = ssss0$		
× <u>Opérations du minimum</u> : P(0) = 2 P(x + 1) est le plus petit y tel que P(X) < y ⩽ P(x)! + 1 D(y) = 2 (le x + 2° premier)	$x = ss0 \wedge y = sssss0$		Modèle standard $\mathbb{N}$
<u>Relations</u> : "2 divise 6"...........	....	....	.......vrai
traduction............	... y = 1............	....	.... vrai

Les fonctions présentées ci-dessus, obtenues à partir des trois fonctions initiales par application des trois règles sont appelées les <u>fonctions récursives</u>, à cause de la règle de récurrence. Toutes les fonctions ne sont pas récursives, par exemple : $g(x) = 1$ si le dernier théorème de Fermat est vrai (✗)
$g(x) = 0$ sinon

Les trois fonctions initiales étant traduisibles et les règles faisant passer de fonctions traduisibles à d'autres fonctions traduisibles, nous pouvons prouver métamathématiquement qu'une fonction est traduisible si et seulement si elle est récursive (voir annexe 8).

Gödel a pu alors traduire en langage arithmétique une partie de la métamathématique, en suivant les trois étapes suivantes :

1) A tout signe du système formel, à toute formule, à toute suite de formules, en particulier à toute démonstration, il associe un nombre unique, différent pour chacun, appelé <u>nombre de Gödel</u> :

Métamathématique	Systèmes formels	Activités mathématiques	Modèles
$\neg \mapsto 1$, $\wedge \mapsto 2$, $\Rightarrow \mapsto 3$, $\exists \mapsto 4$, $= \mapsto 5$, $0 \mapsto 6$, $s \mapsto 7$, $(\mapsto 8$, $) \mapsto 9$, $, \mapsto 10$ $x \mapsto 11$, $y \mapsto 13$, $z \mapsto 17$, ⋮ $p \mapsto 11^2$, $q \mapsto 13^2$, $r \mapsto 17^2$, ⋮ $R_n \mapsto 11^3$, $S_m \mapsto 13^3$, $T_1 \mapsto 17^3$, ⋮			
$(\exists x)(x = sy)$ $2^8.3^4.5^{11}.7^9.11^8.13^{11}.17^5.19^7.23^{13}.29^9 = m$ $(\exists x)(x = s0)$, $0 \mapsto 6$ " .23 . " $= n$ $(\exists x)(x = sy)$, $(\exists x)(x = s0) \mapsto 2^m . 3^n$			.../...

(✗) "Il n'existe pas, pour $n > 2$, de triplet d'entiers non nuls a, b, c, tel que : $a^n = b^n + c^n$". Ce théorème n'a jamais été démontré.

$5 \longleftarrow\!\dashv\ =$ $\quad 61 \longleftarrow\!\dashv\ \xi$ $\quad 361 = 19^2 \longleftarrow\!\dashv\ t$

$29791 = 31^3 \longleftarrow\!\dashv\ U_k$

$243\ 000\ 000 = 2^6\ .\ 3^5\ .\ 5^6 \longleftarrow\!\!\!\longrightarrow\!\dashv\ 0 = 0$

$24\ 300\ 000\ 000\ 000 = 2^{11}\ .\ 3^5\ .\ 5^{11} \longleftarrow\!\dashv\ x = x$

$2^{243000000}\ .\ 3^{24300000000000} \longleftarrow\!\dashv\ \begin{array}{l} x = x \\ 0 = 0 \end{array}$

$100 = 2^2\ .\ 5^2$ n'a pas d'antécédent.

2) Alors toute phrase métamathématique portant sur le système formel devient une certaine relation entre les nombres de Gödel qui ont remplacé les formules.

3) Celles de ces relations entre nombres dont la fonction caractéristique est récursive sont enfin traduites dans le système formel (voir annexe 9) :

Métamathématique	Systèmes formels	Activités mathémati.	Modèles
$(p \vee p) \longmapsto 2^8.3^{11^2}.5^2.7^{11^2}.11^9 = a$ $(p \vee p) \Rightarrow p \longmapsto 2^8.3^{11^2}.5^2.7^{11^2}.11^9.13^2.17^{11^2} = b$ Phrase : (p v p) est le début de (p v p) $\Rightarrow$ p Relation : a divise b Fonction : f (reste (b, a)) récursive	..... y = 1 ..... Traduction :		
$\left.\begin{array}{l}(\exists x)\ (x = sy)\\ (\exists x)\ (x = s0)\end{array}\right\vert \longmapsto 2^m.3^n = 1$ $(\exists x)\ (x = s0) \longmapsto n$ Phrase : ($\exists$ x) (x = sy) est une démonstration ($\exists$ x) (x = s0) de ($\exists$ x) (x = s0) Relation : Dans 1, le plus grand facteur premier a pour exposant n. Fonction : g(1, n) récursive.......	Dém (1, n) .. Traduction :		
$x = y \longmapsto 2^{11}.3^5.5^{13} = \lambda$ $x = 0 \longmapsto 2^{11}.3^5.5^6 = \mu$ $y \longmapsto 13$ $0 \longmapsto 6$ Phrase : x = 0 est obtenu à partir de x = y en remplaçant y par 0. Relation : μ est le produit des facteurs primitifs de λ dans lesquels l'exposant 13 a été remplacé par 6 Fonction : $h(\lambda, 13, 6, \mu)$ récursive......	Sub(λ, 13, 0) = μ .. Traduction : Sub(λ, 13, 0)		
$x = y \longmapsto 2^{11}.3^5.5^{13} = \lambda$ $x = \lambda \longmapsto 2^{11}.3^5.\underbrace{5^7.7^7.........p}_{\lambda + 1}{}^6 = \nu$ (λ écrit $\underbrace{s...s}_{\lambda+1}0$) " "	Sub(λ, 13, λ)=ν ...... Traductions : Sub(λ, 13, λ)		

La formule Dém(1, n) est la traduction dans le système formel de la phrase métamathématique : "La séquence de nombre de Gödel 1 est une démonstration de la formule de nombre de Gödel n".

Sub(λ, 13, λ) est le nombre de Gödel de la formule obtenue à partir de la formule de nombre de Gödel λ, en remplaçant y (qui porte le n° 13) par λ écrit sous la forme s...s0. Alors Gödel construit une formule G particulière :

Métamathématique	Systèmes formels	Activ. mathé.	Modèles
Phrase : la séquence de nombre de Gödel x n'est pas une démonstration de la formule de nombre de Gödel z.	$\neg$Dém(x, z)		
Phrase : la formule de nombre de Gödel z n'est pas démontrable	$(\forall x)\neg$ Dém(x, z)		
Phrase : la formule de nombre de Gödel Sub(y, 13, y) n'est pas démontrable.	$(\forall x)\neg$ Dém(x, Sub(y, 13, y))		
$(\forall x)\neg$ Dém(x, Sub(y, 13, y)) $\longmapsto$ t			
Phrase : la formule de nombre de Gödel Sub(t, 13, t) n'est pas démontrable	$\underbrace{(\forall x)\neg \text{ Dém(x, Sub(t, 13, t))}}_{G}$		
G $\longmapsto$ Sub(t, 13, t)			
Phrase : G n'est pas démontrable	G		

Pour vérifier que le nombre de Gödel de G est bien Sub(t, 13, t), il suffit de relire attentivement la définition du Sub à la page précédente. Alors la formule G est la traduction dans le système formel de la phrase métamathématique "G n'est pas démontrable". En bref, G dit d'elle même qu'elle n'est pas démontrable, à la manière du Crétois qui dit : "Tous les Crétois sont menteurs". Mais Gödel évite encore le paradoxe en considérant que, s'il n'y a pas de contradiction en Crète, alors la déclaration du Crétois est indécidable.

Ainsi Gödel prouve métamathématiquement (nous allons en donner une idée) que si G est démontrable, alors $\neg$G l'est aussi et réciproquement (c'est plus difficile, voir annexe 10). Mais nous savons que si G et $\neg$G sont tous deux démontrables, alors notre système est contradictoire. Dès lors, si notre système est non-contradictoire, ni G, ni $\neg$G n'est démontrable et nous disons que G est indécidable.

Métamathématique	Systèmes formels	Activités mathématiques	Modèles
Supposons G démontrable : B1 ⋮ $\mapsto$ k Bn = G	B1 ⋮ Bn = G		
Phrase : la séquence de nombre de Gödel k est une démonstration de la formule G.	Dém(k, Sub(t, 13, t))		
Nous pouvons prouver métamathématiquement que cette formule est démontrable :	C1 ⋮ Cm = Dém(k, Sub(t,13,t))		
Alors ¬G est aussi démontrable :	¬(∀x)¬Dém(x,Sub(t,13,t))		
Supposons ¬G démontrable : ⋮ Alors G est aussi démontrable.			
Supposons le système formel non-contradictoire : G est alors indécidable.			Modèle standard ℕ
Phrase : la formule G n'est pas démontrable..............	....	....	.... VRAIE
Traduction	G..............	....	.... VRAIE
Phrase : Si le système formel est non-contradictoire, alors il est incomplet.			
Traduction	A ⟹ G		
Nous pouvons prouver métamathématiquement que A ⟹ G est démontrable.			
Alors la formule A traduisant la non-contradiction du système formel n'est pas démontrable			

Mais ce n'est pas tout ! En supposant toujours le système formel non-contradictoire, la phrase métamathématique : "La formule G n'est pas démontrable" est vraie à propos du modèle standard N. Nous avons vu qu'à cette phrase correspond la formule (∀x)¬ Dém(x, Sub(t, 13, t)) qui est à son tour vraie dans le modèle standard ℕ (relire le paragraphe concernant les relations traduisibles), et qui n'est autre que G elle-même.

Ainsi, le système contient une formule G, vraie dans le modèle standard et qui n'est pas démontrable : nous disons que le système formel de l'arithmétique est incomplet. De plus, le problème ne serait pas résolu en ajoutant G aux axiomes parce que nous pourrions construire de la même façon une nouvelle formule vraie et indécidable sous les nouveaux axiomes : nous disons alors que le système formel est essentiellement incomplet. Voici le Théorème d'incomplétude enfin atteint au bout d'une longue course.

Nous disposons à présent d'une nouvelle phrase métamathématique : "Si le système formel de l'arithmétique est non-contradictoire, alors il est incomplet", que nous pouvons énoncer sous la forme : "S'il existe une formule non démontrable, alors il existe une formule vraie dans le modèle standard et non démontrable". A cette phrase correspond une relation récursive et par suite une formule qui est du type : $((\exists y)\ (\forall x) \neg\, \text{Dém}(x,\ y) \Rightarrow G$, ou en abrégé : $A \Rightarrow G$. Or cette formule est démontrable (voir bibliographie : Feferman). Alors, grâce au MODUS PONENS, si A était démontrable, G le serait aussi. Par conséquent, si le système formel n'est pas contradictoire, la formule traduisant cette non-contradiction n'est pas démontrable, ou encore cette non-contradiction ne peut pas être prouvée métamathématiquement d'une manière traduisible en langage arithmétique. C'est ici la conséquence la plus importante du théorème d'incomplétude.

Par contre, Gentzen a prouvé en 1936 que le système formel était non-contradictoire, mais au moyen de raisonnements métamathématiques portant sur les ordinaux, raisonnements qui ne sont pas finitistes et donc pas traduisibles en langage arithmétique.

Cela ne signifie pas que le rêve de Hilbert, prouver métamathématiquement la non-contradiction du système formel de l'arithmétique par des méthodes finitistes ne puisse pas un jour être réalisé. Gödel a seulement exclu la possibilité d'y parvenir avec des méthodes finitistes et traduisibles. Le problème reste donc ouvert, puisque personne ne conçoit, pour le moment, quelle peut être une preuve métamathématique finitiste et non traduisible.

IV - Conclusion

Le moment est venu de dresser un bilan à la fin de cette étude. Contrairement à ce qui se passait pour le calcul propositionnel et celui du calcul des prédicats du premier ordre, nous ne pouvons pas démontrer formellement tout ce qui est vrai dans le modèle standard $\mathbb{N}$. Une infinité non dénombrable de vérités de ce modèle sont inaccessibles aux déductions formelles, alors qu'elles relèvent de considérations métamathématiques, comme c'est le cas pour G. Dès lors la formalisation semble n'être qu'une analyse très pauvre de nos modes de raisonnements : l'activité humaine, la métamathématique, capable de prouver la vérité de G, dépasse la machine formelle qu'elle a créée, et qui est incapable de démontrer G.

Analysons d'un autre point de vue les conséquences du théorème d'incomplétude : les formules démontrables de notre système formel, c'est-à-dire les formules vraies dans tous les modèles de ce système, forment une partie propre des formules vraies dans le modèle standard $\mathbb{N}$. Et les propriétés qui permettent de distinguer les naturels des imposteurs non-standards ne peuvent pas être découvertes à l'intérieur du système formel, mais par des méthodes métamathématiques.

Bien des questions restent en suspens : existe-t-il une méthode générale permettant de savoir si une formule donnée du système est démontrable ou non ? Que peut-on dire d'un système se limitant à l'addition des naturels ? Nous espérons simplement que notre lecteur trouvera après cet exposé les manuels de logique un peu moins rébarbatifs et pourra ainsi compléter lui-même l'information que nous lui avons apportée.

Mais d'autres questions sont également préoccupantes : est-il légitime de commencer par un système formel pour "reprendre les mathématiques à leur début" ? Comment s'acquiert "une certaine pratique du raisonnement mathématique" ? Ne nous sommes-nous jamais exclamé, devant un texte inintelligible : "Si seulement on m'avait donné le modèle !". Le formalisme que nous connaissons aujourdh'ui est-il le mieux adapté à l'étude des mathématiques classiques, standardes, vieilles de plus de deux cents ans ? La fraternité des textes mathématiques à venir dépend de la façon dont nous répondrons à ces questions.

o

o o

ANNEXE

1) Démontrons formellement : $P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$

Pour éviter des substitutions délicates du type $(Q/\neg Q \Rightarrow P)$, nous démontrons d'abord : $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$.

Partons de A2 et cherchons à obtenir $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ comme conclusion en $P \Rightarrow M$ et à utiliser A3 en $Q \Rightarrow M$:

C1 : $A2(P/A)\ (Q/\neg B \Rightarrow A)\ (M/\neg A \Rightarrow B)$:

$$\underline{(A \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)))} \Rightarrow ((A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)))$$

Cherchons à déduire de A3 la prémisse soulignée :

C2 : $A3(P/B)\ (Q/A)$

$$(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$$

Il reste à écrire $A \Rightarrow C2$. Commençons par $C2 \Rightarrow (A \Rightarrow C2)$:

C3 : $A1(P/(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B))\ (Q/A)$

$$(\underline{(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)}) \Rightarrow (A \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)))$$

Appliquons le MODUS PONENS à C2 et C3 :

C4 : $A \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B))$

Appliquons le MODUS PONENS à C4 et C1 :

C5 : $\underline{(A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A))} \Rightarrow (A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B))$

C6 : $A1(P/A)\ (Q/\neg B)$

$$(A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$$

Appliquons le MODUS PONENS à C6 et C5 :

C7 : $(A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$

C8 : $C7(A/P)\ (B/Q)$ $P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$

Ainsi $P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$ est démontrable. Le lecteur pourra s'amuser à démontrer formellement les formules suivantes, qui seront utilisées par la suite :

$B \Rightarrow \neg\neg B$

$B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow (B \Rightarrow C))$

$(B \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$

2) A propos de la négation formelle

Le mot "négation" n'a aucun écho dans le système formel que nous nous sommes interdit d'interpréter. Par exemple, dans le système MIU, rien ne peut, à priori, servir de négation. Dans le calcul propositionnel, nous considérons que $\neg P$ est la négation formelle de P, parce que $\neg$ est interprété, de façon "standard", comme voulant dire "non". Ainsi nous pouvons affirmer plus loin :

s'il existe au moins une formule non-démontrable, alors le calcul est non-contradictoire. Ce résultat nous permet de définir une notion plus générale que la non-contradiction : un système est <u>consistant</u> s'il possède au moins une formule non démontrable. MIU, dans lequel MU n'est pas démontrable, est alors consistant.

3) <u>Le MODUS PONENS fait passer de deux tautologies à une tautologie</u> :

Supposons que A et $A \Rightarrow B$ soient des tautologies et pas B. Alors, pour une certaine répartition de ses variables propositionnelles dans les classes, B est dans K2. Pour cette même répartition, A est dans K1 puisque c'est une tautologie. Alors, d'après la première règle de répartition des formules dans les classes, $A \Rightarrow B$ doit être dans K2, ce qui contredit le fait que ce soit une tautologie.

4) <u>Complétude du calcul propositionnel</u>

Soient p1...pk les variables propositionnelles figurant dans une tautologie A. Pour chaque répartition des pi dans les classes K1 et K2, prenons pi elle-même quend elle est dans K1, et $\neg$pi quand pi est dans K2. Nous obtenons ainsi les formules p'1...p'k toutes situées dans K1. Alors nous pouvons prouver métamthématiquement que (voir ci-dessous i) :

"Sous les axiomes A1, A2, A3, p'1...p'k, la tautologie A est démontrable".

En considérant une répartition plaçant pk dans K1 et une autre le plaçant dans K2, nous pouvons écrire simultanément :

"Sous les axiomes A1...p'(k - 1), pk, la tautologie A est démontrable,
et sous les axiomes A1...p'(k - 1), $\neg$pk, la tautologie A est démontrable".

C'est-à-dire (voir ci-dessous, ii) :

"Sous les axiomes A1...p'(k - 1), sont démontrables les deux formules :
$pk \Rightarrow A$ et $\neg pk \Rightarrow A$".

Or nous avons aussi la formule démontrable : (voir annexe 1, exercice)
$(pk \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg pk \Rightarrow A) \Rightarrow A)$

qui nous permet d'appliquer deux fois le MODUS PONENS et d'écrire :

"Sous les axiomes A1...p'(k - 1), la tautologie A est démontrable".

En continuant ainsi, nous éliminons tous les pi en k étapes, et parvenons à énoncer :

"Sous les seuls axiomes A1, A2, A3, la tautologie A est démontrable".

Le calcul propositionnel est donc complet.

i) La preuve concerne d'abord une formule quelconque A :
"Sous les axiomes A1...p'k, la formule A' est démontrable"
où A' est A si A est dans K1 et $\neg$A si A est dans K2.
Pour prouver métamthématiquement ce résultat, raisonnons par récurrence sur le nombre n de connecteurs $\Rightarrow$, $\neg$ figurant dans A :

- Si A ne comporte pas de connecteur, A se réduit à p1 et A' à p'1. A' est démontrable puisque p'1 est un axiome.
- Supposons pour tout j < n les formules à j connecteurs démontrables sous A1...p'k.
- Si A est de la forme $\neg$B, alors B a moins de connecteurs que A.
  - Si B est dans K1, nous écrivons la démonstration :

    B
    $B \Rightarrow \neg\neg B$
    $\neg\neg B$

    Or A est dans K2 et A' est $\neg$A, soit $\neg\neg$B.
  - Si B est dans K2, c'est $\neg$B qui est démontrable.
    Or A est dans K1, et A' est $\neg$B.

Dans les deux cas, A' est démontrable sous A1...p'k.

- Si A est de la forme B $\Rightarrow$ C, B et C ont moins de connecteurs que A.
  - Cas où A est dans K1 et A' est A, soit B $\Rightarrow$ C :
    B est dans K2 ou C est dans K1
    Nous écrivons les démonstrations respectives :

$\neg B$	C
$\neg B \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	$C \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
$B \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$

  - Cas où A est dans K2 et A' est $\neg$A, soit $\neg$(B $\Rightarrow$ C) :
    B est dans K1 et C dans K2.
    Nous écrivons la démonstration :

    B
    $\neg C$
    $B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg(B \Rightarrow C))$
    $\neg C \Rightarrow \neg(B \Rightarrow C)$
    $\neg(B \Rightarrow C)$

Dans les deux cas, A' est démontrable sous A1...p'k.

Donc la formule A' à n connecteurs est démontrable sous A1...p'k.

Considérons à présent le cas où A est une tautologie, c'est-à-dire est dans K1 indépendamment du fait que ses variables propositionnelles soient dans K1 ou K2 : alors A' est A et :

"Sous les axiomes A1...p'k, la tautologie A est démontrable".

ii) Il s'agit d'une remarque très pratique : au lieu de chercher une démonstration de $P \Rightarrow Q$, il est souvent plus simple de se donner P comme axiome supplémentaire, et de démontrer alors Q : par exemple, pour $P \Rightarrow P$, il n'y a ainsi rien à faire !

Prouvons métamathématiquement que si :

"Sous les axiomes A1, A2, A3, P, la formule Q est démontrable", alors "Sous les axiomes A1, A2, A3, la formule $P \Rightarrow Q$ est démontrable".

Soit B1...Bn une démonstration de Q, avec Bn = Q, effectuée sous les axiomes A1...P. Prouvons par récurrence sur i que :

"Sous les axiomes A1, A2, A3, la formule $P \Rightarrow bi$ est démontrable" :

- B1 peut être deux choses :
  - P lui-même : nous écrivons alors $P \Rightarrow P$
  - Un axiome : nous écrivons alors la démonstration :

$$\begin{array}{l} B1 \\ B1 \Rightarrow (P \Rightarrow B1) \\ \qquad P \Rightarrow B1 \end{array}$$

Dans les deux cas, "sous A1, A2, A3, la formule $P \Rightarrow B1$ est démontrable".

- Supposons que pour tout k < i nous ayons démontré : $P \Rightarrow Bk$. Bi peut être trois choses :
  - P lui-même ou un axiome : nous procédons comme pour B1
  - Précédé de Bf et de Bg qui soit $Bf \Rightarrow Bi$ (f < i ; g < i).
    Nous écrivons alors la démonstration :

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Bf \\ P \Rightarrow (Bf \Rightarrow Bi) \\ (P \Rightarrow (Bf \Rightarrow Bi)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Bf) \Rightarrow (P \Rightarrow Bi)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (P \Rightarrow Bf) \Rightarrow (P \Rightarrow Bi) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad P \Rightarrow Bi \end{array}$$

Dans les trois cas, "Sous A1, A2, A3, la formule $P \Rightarrow Bi$ est démontrable".

En conclusion : "Sous A1, A2, A3, la formule $P \Rightarrow Bn$, soit $P \Rightarrow Q$ est démontrable".

5) Restrictions sur les axiomes A4 et A5

Sans ces restrictions, nous pourrions obtenir :

En choisissant $S(x)$: $\exists y \ \neg = 2^{xy}$, A4 : $(\forall x \exists y \ \neg = 2^{yx}) \Rightarrow (\exists y \ \neg = 2^{yy})$

C'est-à-dire $S(x)$: $\exists y \ y \neq x$, A4 : $(\forall x \exists y \ y \neq x) \Rightarrow (\exists y \ y \neq y)$

Avec $S(x)$ et $T(x)$: $x = a$; A5 : $(\forall x(x = a \Rightarrow x = a)) \Rightarrow (x = a \Rightarrow (\forall x \ x = a))$

6) Complétude du calcul des prédicats du 1er ordre

Dans une formule, toute variable d'objet qui est en son nom dans le champ, déterminé par les parenthèses, d'un quantificateur, est dite liée. Sinon elle est libre. Si nous faisons précéder la formule de quantificateurs universels au nom de ses variables libres, nous obtenons sa fermeture.

Une formule est valide dans un domaine si et seulement si sa fermeture l'est, et donc valide si et seulement si sa fermeture l'est aussi. La règle de GENERALISATION et l'axiome A4 assurent d'autre part que S est démontrable si et seulement si $\forall x$ S l'est. Il nous suffit donc de considérer des formules sans variables libres, c'est-à-dire des formules closes.

Soit alors A une formule close et valide. Supposons que A ne soit pas démontrable sous A1...A5 et ajoutons $\neg A$ aux axiomes. Pour A close, nous pouvons étendre facilement (le faire en exercice) le résultat du calcul propositionnel :

Si "Sous A1...A5, $\neg A$, la formule A est démontrable", alors
"Sous A1...A5 seuls, la formule $\neg A \Rightarrow A$ est démontrable".

Nous écrivons alors :

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow A \\ (A \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \\ (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A \\ A, \end{array}$$

ce qui contredit notre dernière supposition, donc :

"Sous A1...A5, $\neg A$, la formule A n'est pas démontrable".

Le système qui a pour axiomes A1...A5, $\neg A$, est ainsi non-contradictoire.

Nous pouvons aussi prouver que toutes les formules de ce système sont valides sur un certain domaine, c'est-à-dire que ce système possède un modèle (voir bibliographie : Mendelson, page 65).

Dans ce domaine, $\neg A$ est dans K1 car c'est un axiome, et A aussi car A est valide, ce qui contredit une règle de répartition des formules dans les classes. Donc notre première supposition est fausse et A est démontrable sous A1...A5.

Toute formule valide est démontrable et le calcul des prédicats du premier ordre est complet.

7) Modèles non-standards de l'arithmétique

Cela n'est pas simple : construisons un système S' en ajoutant à notre système formel S une nouvelle constante d'objet c avec les axiomes dénombrables : $c \neq 0$, $c \neq s0$... $c \neq s...s0$... ce qui n'entraîne pas de contradiction. Les objets c, 0, s0... étant dénombrables et tous distincts, tout modèle de ce système est infini ; et un théorème de logique des prédicats du premier ordre assure l'existence de modèles ayant la cardinalité infinie que l'on veut. Il y a donc ainsi des modèles de l'axiomatique de Peano non isomorphes à $\mathbb{N}$ (voir bibliographie : Robinson : pages 266-302).

8) Fonction traduisible et fonction récursive

Voici quelques exemples de fonctions récursives :

a) $x + y$

b) $x \times y$ $\quad (x \times 0) = 0, \quad x \times (y + 1) = x \times y + x)$

c) $\delta(x) = 0$ si $x = 0$ $\quad (\delta(0) = 0,$
$\quad = x - 1$ si $x > 0$ $\quad (\delta(x + 1) = x)$

d) $x \dot{-} y = 0$ si $x < y$ $\quad (x \dot{-} 0 = x,$
$\quad = x - y$ si $x \geqslant y$ $\quad x \dot{-} (y + 1) = \delta(x \dot{-} y))$

e) $|x - y| = y - x$ si $x < y$
$\quad = x - y$ si $x \geqslant y$ $\quad (|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x))$

f) $sg(x) = 0$ si $x = 0$ $\quad (sg(0) = 0,$
$\quad = 1$ si $x \neq 0$ $\quad sg(x + 1) = 1)$

g) $\overline{sg}(x) = 1$ si $x = 0$
$\quad = 0$ si $x \neq 0$ $\quad (\overline{sg}(x) = 1 \dot{-} sg(x))$

h) Reste (x, y) (reste de y dans la division euclidienne par x)

$$\begin{cases} \text{reste}(x, 0) = 0, \\ \text{Reste}(x, y+1) = S(\text{reste}(x, y) \times sg(|x - S(\text{reste}(x, y))|) \end{cases}$$

i) D(0) = 1

$x \neq 0$ D(x) est le nombre de diviseurs de x.

$$\begin{cases} D(0) = 1 \\ D(x) = \sum_{y \leqslant x} sg(\text{reste}(y, x)) \end{cases}$$

Pour prouver métamathématiquement que toute fonction récursive est traduisible n'est pas très difficile, le seul point délicat réside dans l'emploi de la règle de récurrence ; par contre la réciproque est ardue. Pour ces preuves techniques, voir la bibliographie : Mendelson, pages 117-142).

9) <u>Relations traduisibles</u>

Voici quelques exemples de relations récursives :

j) $x_1 = x_2$ a pour fonction caractéristique : $sg(|x_1 - x_2|)$

k) $x_1 < x_2$ a pour fonction caractéristique : $\overline{sg}(x_2 - x_1)$

l) $x_1 | x_2$ a pour fonction caractéristique : $sg(\text{reste}(x_1, x_2))$

m) x est premier " " $sg((D(x) \dot{-} 2) + \overline{sg}(|x - 1|) + \overline{sg}(|x - 0|))$

n) Dans 1, le plus grand facteur premier a pour exposant n. " g(1, n) qui peut être explicitée.

10) <u>G et G</u>

Nous avons esquissé page 19 la preuve de : "Si G est démontrable, alors ⌉G aussi". Mais il nous reste à prouver que la formule Dém(k, Sub(t, 13, t)) est démontrable. Cela provient du fait qu'à toute relation A(x, y) récursive correspond une formule démontrable si A(x, y) est vraie dans le modèle standard $\mathbb{N}$, dont la négation est démontrable sinon (voir bibliographie : Griffith & Hilton, page 613)

Quant à la preuve de : "Si ⌉G est démontrable, G aussi", elle est due à Rosser (1936), et nous avons utilisé ce résultat pour sa simplificité. Mais Gödel a prouvé que si ⌉G était démontrable, alors le système serait ω-inconsistant, c'est-à-dire que nous pourrions y démontrer à la fois $\exists x\, P(x)$ et chacune des formules $\neg P(0)$, $\neg P(1)$,... (ce qui ne signifie pas que $\forall x \neg P(x)$ soit démontrable, autrement dit l'ω -inconsustance est une condition plus faible que la contradiction). Sur l'importance de cette notion d'ω-inconsistance, voir bibliographie : Dawson pages 743-745.

BIBLIOGRAPHIE

L'exposé suit le plan donné par

- NAGEL & NEWMAN, 1958, Gödel's proof, New York University Press (traduit en français aux éditions du Seuil (1989) sous le titre "Le Théorème de Gödel": le livre comprend en outre la traduction de l'article original de Gödel, et un commentaire décapant de J-Y. Girard)

Avec des compléments provenant de

- ANDLER, Octobre 1978, le théorème de Gödel, un théorème fondamental de la logique mathématique, Plurisciences, Encyclopaedia Universalis.
- TRICOT, Février 1980, les mystères de MU, le théorème oublié, Science et vie, 749, pages 122-123.
- GRIZE, 1971, la logique des propositions inanalysées ; la logique des prédicats du premier ordre, Logique moderne, Mouton & Gauthier-Villars (diffusé par la Librairie de la Nouvelle Faculté, Paris VIème), fascicule 2.
- ROBINSON, 1961, Model theory and non-standard arithmetic, Infinitistic methods, Varsovie, pages 266-302.
- DAWSON, Novembre 1979, the Gödel incompleteness theorem from a length-of-proof perspective, 3, limitations of formalisation : completeness and incompletess, pages 742-743.
- MENDELSON, 1964, Primitive recursive and recursive functions, Introduction to mathematical logic, Van Nostrand, pages 120-134.
- NAGEL & NEWMAN, Juin 1956, Gödel's proof, Scientific American.
- GRIFFITH & HILTON, Mathematical logic, A comprehensive treatment of Mathematics, pages 594-615.

Autres sources :

- WHITEHEAD & RUSSEL, 1910-1913, Principia Mathematica, Cambridge University Press, Londres.
- QUINE, 1950, Methods of Logic, New York.
- KLEENE, 1952, Introduction to metamathematics, Van Nostrand.
- LADRIERE, 1957, Etude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques, Les limitations internes des formalismes, Gauthier-Villars.
- HOFSTADTER, 1979, Gödel, Escher, Bach, Harvester Press, Hassocks, Sussex, 1979. Nouvelles revue de psychanalyse.

- FEFERMAN, 1960, Arithmetization of metamathematics in a general setting, Fundamenta Mathematicae, XLIX, pages 35-92.

- FEFERMAN & MONTAGUE, 196, The method of arithmetization and some of its applications, Amsterdam.

Enfin le brillant et difficile mémoire :

- GODEL, 1931, Ueber formal unentscheidbare Saetze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, Monatshefte für Mathematic und Physic, Volume 38, pages 173-198.

- GODEL, 1965, On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems, Basic Book, New York.

- GODEL, à venir, Sur des propositions indécidables formellement des Principia Mathematica et des systèmes reliés.

Jean CESAR

o

o o

TABLE DES MATIERES

o

o o