LES 100 ANS DE LA GÉOMÉTRIE DE HILBERT

*Hombeline Languereau,
IREM de Franche-Comté*

Sommaire

I	Les Éléments d'EUCLIDE	2
II	La critique des Éléments d'EUCLIDE	3
III	L'axiomatique de HILBERT	4
IV	L'enseignement de la géométrie élémentaire	7

Après une rapide présentation des Éléments d'EUCLIDE, nous montrerons les critiques qui en furent faites puis nous nous intéresserons aux « Principes fondamentaux de la géométrie » de HILBERT qui répondent à ces critiques en proposant une axiomatique de la géométrie.

Enfin nous verrons les conceptions sous-jacentes de l'enseignement de la géométrie élémentaire dans trois manuels : les Éléments de Géométrie d'ARNAULD, les Éléments de Géométrie de CLAIRAUT et les Éléments de Géométrie de LEGENDRE.

Dans cet article, nous nous limiterons d'une part dans le temps en ignorant les mathématiques entre le III^e siècle av. J.C. et le XVII^e siècle et d'autre part dans l'espace en nous restreignant aux mathématiques occidentales.

En guise d'introduction, voici un Extrait de « Trilogie New-Yorkaise » de Paul AUSTER :

« ... Bleu jette un regard autour de la pièce et fixe son attention sur divers objets l'un après l'autre. Il voit la lampe et se dit 'lampe'. Il voit le lit et se dit 'lit'. Il voit le cahier et se dit 'cahier'. On ne pourrait pas appeler la lampe 'lit' ou le lit 'lampe', pense-t-il. Non, ces mots épousent sans heurt les choses qu'ils désignent, et à l'instant où Bleu les prononce il ressent une satisfaction profonde comme s'il venait de prouver l'existence du monde... »

que l'on peut mettre en regard de la boutade de HILBERT :

« On devrait pouvoir parler tout le temps, au lieu de point, droite et plan, de table, chaise et chope »

I Les Éléments d'EUCLIDE

Les Éléments d'EUCLIDE (IV^e–III^e siècle av. J. C.) constituent le premier exposé déductif des mathématiques. La pratique de la géométrie ne débute évidemment pas à la date de ces « éléments ». Les anciens égyptiens (vers 2000 avant notre ère) connaissaient des règles de calcul, d'arpentage ainsi que l'aire du cercle, le volume de la pyramide, par exemple.

EUCLIDE, dont le but est de fonder la géométrie, utilise les résultats de THALÈS, PYTHAGORE, HIPPOCRATE DE CHIOS, EUDOXE, ... et les complète pour réaliser la première synthèse des connaissances en mathématiques.

Exposé suivant la méthode déductive, le traité commence par des définitions, des demandes et des notions communes à partir desquelles EUCLIDE prétend prouver des théorèmes. On remarque que certaines des figures ne sont pas que de simples aides pour suivre une preuve.

Les six premiers livres sont consacrés à la géométrie ; on y trouve¹ : des définitions — ce sont parfois des descriptions (pas toujours utilisables : le point est sans étendue) —, des axiomes et des postulats, des propositions implicites (celles qui sont obtenues immédiatement par intuition ; par exemple l'illimité d'une droite) et des théorèmes.

Le livre I commence par des définitions, des postulats et des notions communes suivis de 48 propositions classées en trois groupes :

- La construction des triangles, les cas d'égalité, des constructions à la règle et au compas.
- La théorie des parallèles et son application à la somme des angles d'un triangle.
- L'équivalence des parallélogrammes et des triangles (la méthode des aires)

Le couronnement de ce livre est le théorème de PYTHAGORE.

Le livre II est une sorte d'algèbre où l'on trouve les identités remarquables.

Le livre III est consacré à l'étude du cercle.

Le livre IV traite de l'inscription dans le cercle et de la circonscription des polygones réguliers.

Le livre V expose une théorie mathématique des grandeurs.

Le livre VI est une application à la théorie de la similitude.

Les livres VII, VIII, IX concernent l'arithmétique, le livre X s'intéresse à l'irrationalité.

C'est dans les livres XI, XII, XIII qu'il est question de géométrie dans l'espace. Platon regrettait que celle-ci fut négligée !

¹D'après ITARD, essais d'histoire des mathématiques.

II La critique des Éléments d'EUCLIDE

Des imperfections de la construction d'EUCLIDE sont remarquées dès l'Antiquité. Parmi les postulats, le cinquième (le postulat des parallèles) fut le plus critiqué ; certains continuateurs et commentateurs d'EUCLIDE² avaient cherché à démontrer d'autres postulats (par exemple celui de l'égalité des angles droits) ou avaient reconnu l'insuffisance de certaines définitions comme celles de la droite : « La droite est la ligne qui s'étend également par rapport à ses points » et du plan.

Toutefois, malgré les critiques que nous soulignons ci-dessous, jusqu'au XVIII^e siècle, les Éléments ont été en général acceptés. Bien que ce ne soit pas le sujet dans cet article, rappelons que c'est au XIX^e siècle que sont apparues les géométries non-euclidiennes alors qu'auparavant, les mathématiciens cherchaient à prouver le cinquième postulat.

Au XVI^e siècle, CLAVIUS note l'absence d'un postulat garantissant l'existence de la quatrième proportionnelle (elle n'est en effet pas garantie par EUDOXE) ; de son côté LEIBNIZ remarque qu'EUCLIDE utilise l'intuition géométrique sans le mentionner explicitement (par exemple lorsqu'il admet que deux cercles dont chacun passe par le centre de l'autre ont un point commun ; propriété utilisée pour la construction d'un triangle équilatéral par exemple). GAUSS remarque l'importance de « entre », relation qui n'est pas définie et qui, d'ailleurs, pose problème sur la sphère. . .

Arrive le XIX^e siècle, où l'on s'attache à la rigueur mathématique. Les critiques de la construction euclidienne, dans le cadre imposé, se multiplièrent, dans le mouvement général vers plus de rigueur en mathématiques. Elles ne visent d'ailleurs pas la correction des inférences d'EUCLIDE au cours de ses démonstrations, mais le fait que ces dernières sont insuffisamment fondées sur des axiomes et des définitions explicites ; par exemple, le postulat de la continuité dû à CANTOR et à DEDEKIND (les coupures), le postulat d'ARCHIMÈDE (les flaques d'eau qu'on peut éviter en faisant des grands pas) et les postulats d'ordre (entre), dus à PASCH³.

Le sentiment général était qu'en complétant convenablement ces bases des raisonnements, on arriverait à un exposé entièrement satisfaisant. C'est ce travail que réalisèrent PASCH et HILBERT à la fin du XIX^e siècle⁴.

PASCH définit notamment la rigueur mathématique par :

« On énoncera explicitement les concepts primitifs au moyen desquels on se propose de définir logiquement les autres. On énoncera explicitement les propositions fondamentales (postulats) grâce auxquelles on se propose de démontrer logiquement les autres propositions (théorèmes). Ces propositions fondamentales doivent apparaître comme de pures relations

²Éléments d'histoire des mathématiques de BOURBAKI.

³cf. page 22 article ENRIQUES. Questions d'ordre élémentaire.

⁴Pour l'honneur de l'esprit humain

logiques entre les concepts primitifs, et cela indépendamment de la signification que l'on donne à ces concepts primitifs. »

C'est chez ce dernier que l'abandon à tout recours à l'intuition est nettement formulé et suivi rigoureusement.

Entre 1890 et 1910, de nombreux mathématiciens donnent des présentations variées de la géométrie euclidienne ; par exemple, PEANO et surtout HILBERT, qui en quelque sorte clôt le sujet, non seulement donnent des axiomes, mais les classent et s'attachent à montrer la portée de chacun en construisant des modèles de géométrie vérifiant une partie des axiomes (il vérifie explicitement leur compatibilité en utilisant un modèle numérique et donne des exemples de géométrie ne vérifiant pas l'un des axiomes, par exemple une géométrie non archimédienne ou une géométrie non arguésienne).

III L'axiomatique de HILBERT

Précisons que la méthode axiomatique est un mode d'exposition des sciences exactes fondé sur des propositions admises sans démonstration et nettement formulées et des raisonnements rigoureux.

L'axiomatique commence par un inventaire exhaustif de toutes les propositions que l'on admet sans démonstration et qui ne sont pas des définitions ; ces propositions (axiomes ou postulats) constituent le point de départ de la théorie.

Parmi les axiomes figurent les règles de déduction. À partir de ces données, on s'astreint à démontrer les autres résultats : les théorèmes.

Tout recours sensible à l'expérience ou au sentiment subjectif est à rejeter.

Les mots, signes ou termes qui interviennent dans la rédaction des axiomes sont dépouillés de la signification qu'ils peuvent avoir dans le langage courant (cf. la boutade d'HILBERT).

David HILBERT (23/01/1862, Königsberg – 14/02/1943, Goettingue) est un mathématicien dont les travaux ont porté sur les fondements de la géométrie et des sciences mathématiques, la théorie des nombres, l'algèbre, les invariants (sujet de sa thèse), le calcul des variations et les équations intégrales. En 1891, il assiste à une conférence de H. WIENER, à Berlin, consacrée aux théorèmes de DESARGUES⁵ et de PASCAL⁶ et aux fondements de la géométrie. L'impact de cet exposé fut tel qu'HILBERT se mit à réfléchir à ces problèmes ; il y fut d'ailleurs encouragé par son collègue et ami MINKOWSKI. Pour HILBERT, l'intérêt de la géométrie élémentaire est de donner l'exemple le plus simple d'une

⁵Deux triangles étant situés dans un plan de telle sorte que leurs côtés homologues soient respectivement parallèles, les droites qui joignent les côtés homologues ou bien sont concourantes, ou bien parallèles.

⁶Soit A, B, C et A', B', C' des points situés respectivement trois par trois sur deux droites qui se coupent, et distincts du point d'intersection de ces droites. Si CB' est parallèle à BC' et CA' à AC' , alors BA' est parallèle à AB' .

construction mathématique autre que la théorie des nombres.

En 1898-1899, HILBERT, professeur à l'université de Goettingue, fait un cours sur la géométrie élémentaire et en juin 1899, paraît la première édition des fondements dont le titre est : *Grundlagen der Geometrie*. Il énonce une trentaine d'axiomes qui précisent le mode d'emploi des mots « point », « plan », « droite », « appartenance », « entre », « égalité », etc.

Dans les *Éléments* d'EUCLIDE, apparaissent des définitions, des postulats et des théorèmes dans un ordre apparemment aléatoire. Voulant améliorer les choses, HILBERT présente ces axiomes après les avoir classés ; ceci n'est pas très aisé comme en témoignent les critiques arrivées très vite dont celles de SCHUR. HILBERT a également le souci d'avoir un système d'axiomes minimal, c'est-à-dire d'avoir des axiomes indépendants ; là encore SCHUR montrera, en se servant de sa propre axiomatique, qu'HILBERT a échoué. Ce dernier modifiera dès la seconde édition l'introduction : « le but est d'établir un système simple et complet d'axiomes », l'adjectif « indépendant » mentionné dans la première édition a disparu. Malgré ces critiques, HILBERT est le premier qui soit parvenu à formuler un exposé axiomatique définitif de la géométrie élémentaire.

Examinons en détail le plan de l'ouvrage de HILBERT — première édition 1899 —

Chapitre 1 : Les cinq groupes d'axiomes

1. Les axiomes d'incidence expriment les relations d'appartenance et d'inclusion entre points, droites et plans.
2. Les axiomes de disposition précisent l'emploi et les propriétés du mot « entre ».
3. Le postulat d'EUCLIDE.
4. Les axiomes d'égalité expriment les propriétés de l'égalité géométrique, sans recours à l'intuition sensible du déplacement des objets matériels indéformables.
5. Axiomes de continuité (axiome d'ARCHIMÈDE).

Chapitre 2 : La non-contradiction et l'indépendance des axiomes

Le but de ce chapitre est de montrer la compatibilité de ces axiomes en construisant un système qui satisfait à tous les axiomes et dont l'existence ne fait aucun doute.

Pour cela HILBERT se place dans le domaine Ω des nombres algébriques obtenus en partant de 1 à l'aide des quatre opérations arithmétiques et de la cinquième $\sqrt{1 + \omega^2}$. L'équation d'une droite est sans surprise : $ux + vy + w = 0$ avec $(u, v) \neq (0, 0)$; l'ordre est naturel ; les transformations usuelles (translation, rotation — c'est pour cela qu'on a besoin de la cinquième opération —, ...) sont sans problème et permettent de définir la congruence.

HILBERT note que le minimum pour avoir une géométrie est d'avoir les axiomes 1 et 2 ; et qu'il suffit donc de démontrer l'indépendance des axiomes 3, 4 et 5 entre eux. Pour cela, il construit un modèle de géométrie dans lequel l'un de ces axiomes est omis.

Chapitre 3 : Théorie des proportions

Le paragraphe débute par les propriétés de corps ordonné des nombres réels.

C'est dans ce chapitre qu'HILBERT établit la théorie euclidienne des proportions indépendamment de l'axiome d'ARCHIMÈDE. Une conséquence est la définition de l'égalité de deux segments (ce qui revient à la définition d'une mesure algébrique ??). Tout est fait pour avoir la notion de triangle semblable et aboutir au théorème dit de THALÈS.

Le chapitre continue par l'expression des coordonnées d'un point du plan.

Chapitre 4 : Théorie des aires planes

Théorie indépendante de l'axiome d'ARCHIMÈDE qui apparaît comme une conséquence du théorème de PASCAL.

Par définition, des polygones sont égaux s'il existe une triangulation commune. Cette définition permet de ramener leur étude aux triangles et parallélogrammes. HILBERT développe en fait une théorie de la mesure.

Chapitre 5 : Le théorème de DESARGUES

Théorème de DESARGUES :

Deux triangles étant situés dans un plan de telle sorte que leurs côtés homologues soient respectivement parallèles, les droites qui joignent les sommets homologues ou bien passeront par un même point, ou bien seront parallèles.

Réciproquement, deux triangles étant situés dans un plan de telle sorte que les droites qui joignent les sommets homologues ou bien passent par un même point ou bien sont parallèles, et de plus deux paires de côtés homologues étant parallèles, les troisièmes côtés des deux triangles seront également parallèles.

HILBERT montre que la vérification du théorème de DESARGUES dans le plan est une condition nécessaire pour que la géométrie du plan puisse être présentée comme une partie de la géométrie de l'espace où les axiomes 1 et 3 sont tous vérifiés.

À la fin du chapitre, il montre que cette condition est suffisante.

De plus HILBERT démontre que, pour prouver le théorème de DESARGUES, il est nécessaire d'utiliser soit les axiomes spatiaux, soit les axiomes de la congruence (dans ce deuxième cas, on reste dans le plan)

Chapitre 6 : Le théorème de PASCAL

Théorème de PASCAL :

Soient A, B, C et A', B', C' des points situés respectivement trois par trois sur deux droites qui se coupent, et distincts du point d'intersection de ces droites. Si CB' est parallèle à BC' , je dis que BA' sera parallèle à AB'

Le théorème de PASCAL peut être démontré en se basant sur les axiomes 1, 2, 3, 4 c'est-à-dire en utilisant ARCHIMÈDE sans utiliser la congruence et il est impossible à démontrer en laissant de côté ARCHIMÈDE.

Chapitre 7 : Constructions géométriques basées sur les axiomes I à V

C'est un paragraphe de résolution de problèmes.

Théorème :

Les problèmes de constructions géométriques qui sont résolubles en employant uniquement exclusivement les axiomes 1–5 sont nécessairement possibles à résoudre uniquement au moyen de la règle et du transporteur de segments.

Quant aux coordonnées, ce sont celles qui sont quadratiques, que l'on peut construire.

Conclusion

Tableau résumant les liens entre la somme des angles d'un triangle et l'existence de parallèle à une droite passant par un point donné.

IV L'enseignement de la géométrie élémentaire

Précisons qu'ici élémentaire s'oppose à différentielle ou infinie.

Les premiers concepts qui interviennent dans un exposé de géométrie élémentaire sont ceux de point, ligne, surface.

EUCLIDE débute d'ailleurs ses *Éléments* par :

- Un point est une chose indivisible.
- Une ligne est une longueur sans largeur.
- Une surface est une chose qui n'a que longueur et largeur.

EUCLIDE ajoute que les limites de la ligne sont les points et les limites de la surface des lignes.

En se conformant à ces définitions, on peut développer les éléments de la géométrie en suivant deux voies bien distinctes. La première est de considérer que le point est le concept fondamental et que l'on engendre le reste par mouvement du point ; la seconde est de choisir le corps comme concept fondamental et d'envisager le reste comme passage à la limite (le plan est un corps dont l'épaisseur est nulle).

Parmi les lignes et les surfaces, les plus simples sont la droite et le plan. Pour la première apparition de ces mots dans un manuel, on peut choisir de les considérer comme concepts primitifs ou de les définir à l'aide de congruence et mouvement.

Voici différentes définitions du mot « droite » :

Pour EUCLIDE, la droite est la ligne qui s'étend également par rapport à ses points ; c'est-à-dire la ligne qui est divisée par chacun de ses points en deux parties égales. Mais, fait remarquer ENRIQUES, l'hélice jouit de la même propriété.

ARCHIMÈDE, lui, définit la ligne droite comme la ligne la plus courte entre deux points ; c'est ce que reprend LEGENDRE comme définition.

LEINITZ (ou PROCLUS) envisage la droite comme l'unique ligne qui reste immobile quand on la fait tourner autour de deux de ses points.

GRASSMANN la définit comme la ligne qui conserve en chacun de ses points une direction constante.

LEIBNIZ, repris par BOLYAI et LOBATCHEWSKI : le plan est le lieu des points équidistants de deux points donnés et la droite comme le lieu des points équidistants de trois points non alignés, ou aussi comme le lieu des centres des sphères ayant un même point de contact.

Chacune de ces définitions nécessite un concept primitif. Ce sont respectivement les concepts de congruence, longueur d'une ligne, de rotation, de direction, d'équivalence de paires de points.

Parmi les premières définitions données en géométrie, il y a celle d'angle. C'est une notion délicate à enseigner, dont la définition pose problème. Nous remarquons, dans les manuels d'enseignement, que trois points de vue sont régulièrement utilisés :

- l'angle est une surface du plan (portion de plan contenue entre deux droites) ; c'est le choix d'ARNAULD ou de L. BERTRAND. VÉRONÈSE remarque que la figure ainsi définie, qu'il appelle champ angulaire ou section angulaire, ne correspond pas à la conception habituelle de l'angle ; on considère en général l'angle comme une figure n'ayant qu'une dimension, appartenant non pas à un plan mais à un faisceau de droites⁷ ;
- l'angle est associé à une rotation (portion de plan balayée quand une droite D vient s'appliquer sur une droite D') (HILBERT) ;
- l'angle mesure l'inclinaison d'une demi-droite sur une autre (rapport de projection orthogonale) (EUCLIDE et CLAIRAUT).

Les Éléments d'EUCLIDE ont constitué la base de l'enseignement des mathématiques. C'est d'ailleurs le livre de mathématiques qui a connu le plus grand nombre d'éditions, probablement le livre le plus édité après la Bible (avant 1800).

Voici, par ordre chronologique, quelques éditions :

1482 : 1b. Erhardus ratdolt Augustendis impressor. Serenissimo alme urbis venete Principi Ioanni Mocenico. 2a. Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi : in artem Geometrie incipit quafoelicissime. (Colophon) Opus elementoru euclidis megariensis in geometria arte in id quoque Campani perspicacissimi Comentationes finiunt. Erhardus ratdolt Augustensis impressor solertissimus. *Venetis impressit.*

1516 : Édition établie par Michel PONTANUS.

1533 : Édition *princeps* du texte grec édité à Bâle.

1536 : Édition donnée par Oronce FINÉ.

⁷ENRIQUES, encyclopédie J. Molk.

1572 : Elementorum libri XV par F. COMMANDINUS.

1591 : Édition de CLAVIUS.

1611 : Les six premiers Livres des Éléments Géométriques d'EUCLIDE, avec les démonstrations de Jacques PELETIER DE MANS. Traduits en français, & dédiés à la Noblesse française. Cet ouvrage est la première édition de la traduction française.

1672 : Huit livres des Éléments d'EUCLIDE rendus plus faciles. Par le R. P. Claude François MILLIET DECHALES. C'est une édition qui connut un grand succès et qui fut souvent réimprimée, tant en latin qu'en français.

Il y a deux grands types de manuels de géométrie élémentaire : les traités de géométrie pratique (par exemple les manuels d'arpentage) dont nous ne parlerons pas et les manuels de géométrie « théorique » qui sont l'objet de notre étude.

L'enseignement de base consiste en la lecture des éléments d'EUCLIDE que l'on semble enseigner comme un cours de philosophie.

Cet enseignement semble attaqué pour la première fois par RAMUS (1515-1572) mais cette offensive resta vaine « grâce à » la Saint-Barthélémy.

Une nouvelle attaque provient des Messieurs de Port-Royal : Logique ou l'art de penser de ARNAULD⁸ et NICOLLE⁹ (1662) puis les Éléments de Géométrie d'ARNAULD (1667). Ce dernier n'est pas original quant à la définition d'une droite (plus court chemin entre deux points) mais l'est plus quant à la définition des perpendiculaires. Un successeur immédiat d'ARNAULD est le Père LAMY qui, lui, abuse des démonstrations par l'absurde.

Les Éléments de Géométrie de Monseigneur le duc de Bourgogne écrits par MALEZIEU en 1705 forment un joli résumé de la pensée de Port-Royal.

Tous ces manuels sont proches de la méthode hypothético-déductive. Des tentatives opposées voient le jour par CLAIRAUT et par Louis PUISSANT.

Les contenus de trois manuels d'enseignement de la géométrie

Parmi les nombreux manuels de géométrie édités, nous choisissons d'examiner les trois suivants :

- Les Éléments d'ARNAULD ;
- Les Éléments de CLAIRAUT ;
- La Géométrie de LEGENDRE, qui marque le retour à EUCLIDE avec un franc succès éditorial (la première édition date de l'an II — 1794 — et la dernière de 1889).

⁸Théologien né en 1612 qui a écrit environ 140 volumes dont certains en collaboration avec PASCAL, NICOLLE, LAMY. Ses écrits peuvent être classés de la manière suivante : Grammaire générale et raisonnée dont les éléments de géométrie, matières de la grâce, livres de controverse contre les calvinistes, écrits contre les jésuites, écrits sur l'Écriture Sainte.

⁹Moraliste (1625–1695) et l'un des plus célèbres écrivains de Port-Royal. En 1655, il travaille sous la direction du docteur ARNAULD.

Le plan des Éléments de Géométrie d'ARNAULD

Les quatre premiers livres traitent de questions algébriques (essentiellement autour de la proportionnalité).

La partie Géométrie commence, elle, au cinquième livre, page 145 de la seconde édition qui comporte 480 pages. La notion première est celle d'espace ; la superficie est un espace à deux dimensions, la ligne et le point sont définis de manière analogue. Ces objets ici étant quelconques.

La partie Géométrie commence par les avertissements suivants (p 146/147) :

Les idées d'une surface plate et d'une ligne droite sont si simples, qu'on ne ferait qu'embrouiller ces termes en voulant les définir. On peut seulement en donner des exemples pour en fixer l'idée aux termes de chaque langue.

Quoiqu'il n'y ait point au monde d'étendue qui n'ait que longueur et largeur sans profondeur, ou longueur sans largeur ni profondeur, et encore moins de point qui n'ait ni longueur, ni largeur, ni profondeur : ce que disent les Géomètres des surfaces, des lignes et des points ne laissent pas d'être vrais ; parce qu'il suffit pour cela que dans un corps qui est véritablement long, large, et profond, je puisse n'en considérer que la longueur et la largeur, sans faire attention à la profondeur. . . Ainsi pour mesurer un champ, je ne m'amuse pas à creuser pour savoir si la terre y est bien profonde. . . Et pour savoir combien il y a de Paris à Orléans, je ne mesure pas la largeur des chemins, mais seulement la longueur. . .

On commence par la ligne droite car c'est la plus simple.

liste de quelques axiomes

ligne circulaire, avec axiomes

lignes perpendiculaires

définition d'une perpendiculaire : *une ligne droite n'en peut couper une autre qu'en un point. Mais la coupant elle le peut faire de deux manières. La première, est en ne penchant point plus vers un côté de la ligne coupée, que vers l'autre. Les droites sont dites perpendiculaires. . . sinon elles sont dites obliques.* Suit une définition dite plus exacte : *c'est le lieu des points équidistants à deux points donnés.*

livre VI : des lignes parallèles

ce sont celles qui ne sont ni perpendiculaires, ni obliques.

ce sont celles qui sont également distantes l'une de l'autre.

livre VII des lignes terminées à une circonférence, où il est parlé des sinus

définition du sinus d'un arc (qui ne mesure que les arcs moindres que la moitié de la demi circonférence)

sécantes

tangentes

livre VIII des angles rectilignes

Les 100 ans de la géométrie de HILBERT

par définition, l'angle rectiligne est une surface comprise entre deux lignes droites qui se joignent en un point du côté où elles s'approchent le plus, indéfinies. . .

mesure des angles (grâce aux sin du livre précédent)

livre IX des angles qui ont leur sommet hors le centre du cercle, dont les arcs ne laissent pas de les mesurer.

livre X des lignes proportionnelles

livre XI des lignes réciproques

livre XII des figures en général

livre XIII des triangles et des quadrilatères

livre XIV des figures planes considérées selon leur aire c'est-à-dire selon la grandeur des surfaces qu'elles contiennent.

C'est dans ce livre que l'on trouve le théorème de PYTHAGORE.

livre XV de la mesure de l'aire des parallélogrammes, des triangles et autres polygones.

Ce livre comprend un paragraphe sur la géométrie des indivisibles.

L'aire d'une surface est la somme des lignes qui la remplissent ; de sorte que deux surfaces sont estimées égales, quand l'une et l'autre est remplie par une somme égale de lignes égales ; soit que chacune de celles d'une somme soit égale à chacune de celle de l'autre somme ; soit qu'il se fasse une compensation

Le manuel se termine par un traité des carrés magiques écrit par PASCAL.

Le plan des éléments de géométrie de CLAIRAUT

Première partie. Des moyens qu'il était le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des terrains.

ligne droite : c'est le plus court chemin entre deux points. Il est en effet naturel de mesurer la distance entre deux points

ligne perpendiculaire : ligne qui tombe sur une autre, sans pencher sur elle d'aucun côté. Ici le naturel est de mesurer la distance d'un point à une ligne. pour tracer une perpendiculaire, CLAIRAUT propose de tracer la médiatrice d'un segment (ligne équidistante de deux points donnés ; c'est une propriété donnée sans démonstration)

rectangle, avec comme cas particulier le carré.

cercle : trace décrite par la pointe mobile d'un compas.

les parallèles sont les lignes toujours également distantes les unes des autres. Ce sont les lignes qui interviennent dans la construction des remparts, canaux, . . . Le tracé d'une parallèle se déduit de celui d'un rectangle.

mesure du rectangle lié à la mesure de la tapisserie pour une chambre. CLAIRAUT remarque qu'en général les surfaces ne sont pas rectangulaires mais terminées par des

lignes presque droites et qu'il a donc besoin de la mesure des polygones. Par triangulation, il ramène ce problème à celui de la mesure des triangles.

triangle (le triangle rectangle est un demi-rectangle)

parallélogrammes

polygones réguliers. Ils sont obtenus en découpant de cercles en parties égales.

Après ces premiers principes, CLAIRAUT remarque qu'en pratique tout ceci est inefficace car il y a souvent des obstacles comme, par exemple, un bois ou un étang, même si l'on admet que le terrain est plat. cette remarque l'amène à la notion de triangle semblable. Il regarde donc les cas d'égalité des triangles.

angle : inclinaison d'une ligne sur une autre.

triangles égaux

lignes proportionnelles, figures semblables.

mesures d'angles en degré.

Seconde partie. De la méthode géométrique pour comparer les figures rectilignes

Si on a fait attention à ce que nous avons dit, pour montrer comment on est parvenu à mesurer les terrains, on a dû reconnaître que les positions des lignes les unes à l'égard des autres, fournissaient des remarques dignes d'attention par elles-mêmes, indépendamment de l'utilité dont elles pouvaient être dans la pratique ; et il est à présumer que ces remarques ont engagé les premiers géomètres à pousser plus loin leurs découvertes, car ce ne sont pas seulement les besoins qui déterminent les hommes, la curiosité est souvent un aussi grand motif pour exciter leurs recherches.

Cette partie met en place les outils pour arriver au théorème de PYTHAGORE qui en est l'aboutissement.

Troisième partie. De la mesure des figures circulaires, et de leurs propriétés

Les terrains ne sont pas toujours bornés par des lignes droites ; c'est ce qui justifie cette partie.

aire d'un cercle (une idée du résultat est donnée par la méthode d'ARCHIMÈDE),
d'une couronne

tangente : CLAIRAUT démontre que la tangente est perpendiculaire au rayon après l'avoir définie comme position limite de cordes.

moyenne proportionnelle ; c'est ce qui intervient quand on veut changer un rectangle en carré.

Quatrième partie. De la mesure des solides

Une situation concrète est fournie par la quantité d'eau d'un réservoir ou d'un fossé. CLAIRAUT annonce qu'il procède comme en dimension deux, à savoir par le cube. Il procède dans cette partie presque entièrement par analogie.

cube : figure terminée par six carrés

Les 100 ans de la géométrie de HILBERT

parallélépipède
perpendiculaire à un plan
axiomes d'incidence dans l'espace
pyramide
cylindre, cône, sphère (surface et volume)
solides semblables

Le plan des éléments de géométrie de LEGENDRE

Voir la préface.

Bibliographie

ARNAULD, Nouveaux éléments de géométrie, Paris 1667, réédition 1711
BLANCHÉ, L'axiomatic. PUF 1965
BOURBAKI, Éléments d'histoire des mathématiques. Masson
CLAIRAUT, Éléments de géométrie, Paris 1741
J. DIEUDONNÉ, Pour l'honneur de l'esprit humain. Hachette, 1986
J. DIEUDONNÉ *et alii*, Abrégé d'histoire des mathématiques, Hermann, seconde édition 1986.
Article de M. GUILLAUME : Axiomatique et logique.
Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, éd. française rédigée sous la direction de J. MOLK, Paris Gautiers-Villars. Réédition Gabay
EUCLIDE, Les Éléments
HILBERT, Les principes fondamentaux de la géométrie ; traduits par LAUGEL. Paris Gauthiers-Villars, 1900
HILBERT, Les fondements de la géométrie, édition critique préparée par P. ROSSIER. Dunod 1971, réédition Gabay, 1997
ITARD, Essai d'histoire des mathématiques, Blanchard, 1984
LEGENDRE, Éléments de géométrie, Paris, Firmin-Didot, troisième édition, an IX-1800

Préface de « Éléments de géométrie » de CLAIRAUT parus en 1741

Quoique la géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les Éléments ordinaires. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, et de principes élémentaires, qui semblent ne promettre rien que de sec au Lecteur. Les propositions qui viennent ensuite ne fixant point l'esprit sur des objets plus intéressants, et étant difficiles à concevoir, il arrive

communément que les *Commençants* se fatiguent et se rebutent, avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on voulait leur enseigner.

Il est vrai que pour sauver cette sécheresse, naturellement attachée à l'étude de la Géométrie, quelques Auteurs ont imaginé de mettre à la suite de chaque proposition essentielle, l'usage que l'on peut en faire pour la pratique ; mais par là, ils prouvent l'utilité de la Géométrie, sans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre. Car chaque proposition venant toujours avant son usage, l'esprit ne revient à des idées sensibles, qu'après avoir essuyé la fatigue de saisir les idées abstraites.

Quelques réflexions que j'ai faites sur l'origine de la Géométrie, m'ont fait espérer d'éviter ces inconvénients, en réunissant les deux avantages d'intéresser et d'éclairer les *Commençants*. J'ai pensé que cette Science, comme toutes les autres, devait s'être formée par degrés ; que c'était vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvaient pas être hors de la portée des *Commençants* puisque c'étaient des *Commençants* qui les avaient faits.

Prévenu de cette idée, je me suis proposé de remonter à ce qui pouvait avoir donné naissance à la Géométrie ; et j'ai tâché d'en développer les principes, par une méthode assez naturelle, pour être supposée la même que celle des premiers Inventeurs ; observant seulement d'éviter toutes les fausses tentatives qu'ils ont nécessairement dû faire.

La mesure des Terrains m'a paru ce qu'il y avait de plus propre à faire naître les premières propositions de Géométrie ; et, c'est en effet, l'origine de cette Science, puisque Géométrie signifie **mesure du terrain**. Quelques Auteurs prétendent que les Égyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs Héritages détruites par les débordements du Nil, jetèrent les premiers fondements de la Géométrie, en cherchant les moyens de s'assurer exactement de la situation de l'étendue et de la figure de leurs domaines. Mais quand on ne s'en rapporterait pas à ces Auteurs, du moins ne saurait-on pas douter que dès les premiers temps, les hommes n'aient cherché des méthodes pour mesurer et pour partager leurs Terres. Voulant dans la suite perfectionner ces méthodes, les recherches particulières les conduisirent peu à peu, à des recherches générales ; et s'étant enfin proposé de connaître le rapport exact de toutes sortes de grandeurs, ils formèrent une Science d'un objet beaucoup plus vaste, que celui qu'ils avaient d'abord embrassé, et à laquelle ils conservèrent cependant le nom qu'ils lui avaient donné dans son origine.

Afin de suivre dans cet Ouvrage une route semblable à celle des Inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux *Commençants* les principes dont peut dépendre la simple mesure des Terrains, et des distances accessibles ou inaccessibles, etc. De-là je passe à d'autres recherches qui ont une analogie avec les premières, que la curiosité naturelle à tous les hommes, les porte à s'y arrêter ; et justifiant ensuite cette curiosité par quelques applications utiles, je parviens à faire parcourir tout ce que la Géométrie élémentaire a de plus intéressant.

Les 100 ans de la géométrie de HILBERT

On ne saurait disconvenir, ce me semble, que cette méthode ne soit au moins propre à encourager ceux qui pourraient être rebutés par la sécheresse des vérités géométriques, dénuées d'applications ; mais j'espère qu'elle aura encore une utilité plus importante, c'est qu'elle accoutumera à chercher et à découvrir ; car j'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes ; c'est-à-dire, de ces propositions, où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir.

Si les premiers Auteurs de Mathématiques ont présenté leurs découvertes en théorèmes, ç'a été, sans doute, pour donner un air plus merveilleux à leurs productions, ou pour éviter la peine de reprendre la suite des idées qui les avaient conduits dans leurs recherches. Quoi qu'il en soit, il m'a paru beaucoup plus à propos d'occuper continuellement mes Lecteurs à résoudre des problèmes ; c'est-à-dire, à chercher les moyens de faire quelque opération, ou de découvrir quelque vérité inconnue, en déterminant le rapport qui est entre des grandeurs données, et des grandeurs inconnues qu'on se propose de trouver. En suivant cette voie, les Commencants aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'Inventeur, et par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention.

On me reprochera peut-être, en quelques endroits de ces *Éléments*, de m'en rapporter trop au témoignage des yeux, et de ne m'attacher pas assez à l'exactitude rigoureuse des démonstrations. Je prie ceux qui pourraient me faire un pareil reproche, d'observer que je ne passe légèrement, que sur des propositions dont la vérité se découvre pour peu qu'on y fasse attention. J'en use de la sorte, surtout dans les commencements, où il se rencontre plus souvent des propositions de ce genre, parce que j'ai remarqué que ceux qui avaient de la disposition à la Géométrie, se plaisaient à exercer un peu leur esprit ; et qu'au contraire, ils se rebutaient, lorsqu'on les accablait de démonstrations, pour ainsi dire, inutiles.

Qu'EUCLIDE se donne la peine de démontrer, que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre, a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il est renfermé ; on n'en sera pas surpris. Ce Géomètre avait à convaincre des Sophistes obstinés, qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes : il fallait donc qu'alors la Géométrie eût, comme la logique, le secours des raisonnements en forme, pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité, et à dégoûter les Lecteurs.

Un autre reproche qu'on pourrait me faire, ce serait d'avoir omis différentes propositions, qui trouveraient leur place dans les *Éléments* ordinaires, et me contenter, lorsque je traite des propositions, d'en donner seulement les principes fondamentaux.

À cela je répons qu'on trouve dans ce *Traité* tout ce qui peut servir à remplir mon projet, que les propositions que je néglige sont celles qui ne peuvent être d'aucune utilité

par elles-mêmes, et qui d'ailleurs ne sauraient contribuer à faciliter l'intelligence de celles dont il importe d'être instruit : qu'à l'égard des proportions, ce que j'en dis doit suffire pour faire entendre les propositions élémentaires qui les supposent. C'est une matière que je traiterai plus à fond dans les *Éléments d'Algèbre*, que je donnerai dans la suite.

Enfin, comme j'ai choisi la mesure des Terrains pour intéresser les Commencants, ne dois-je pas craindre qu'on me confonde avec les *Traité*s ordinaires d'Arpentage ? Cette pensée ne peut venir qu'à ceux qui ne considéreront pas que la mesure des Terrains n'est point le véritable objet de ce Livre, mais qu'elle me sert seulement d'occasion pour faire découvrir les principales vérités géométriques. J'aurais pu de même, remonter à ces vérités, en faisant l'Histoire de la Physique, de l'Astronomie, ou de tout autre partie des Mathématiques que j'aurais voulu choisir ; mais alors la multitude des idées étrangères, dont il aurait fallu s'occuper, aurait comme étouffé les idées géométriques, auxquelles seules je devais fixer l'esprit du Lecteur.

Préface de Nouveaux *Éléments de Géométrie* contenant outre un ordre nouveau, et de nouvelles démonstrations les plus communes, De nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, de nouvelles mesures des angles, dont on ne s'était point encore avisé, Et de nouvelles manières de trouver et de démontrer la proportion des lignes.
ARNAULD, Paris 1667

(cette préface est commune aux éditions de 1667 et 1711 malgré les nombreux changements quant à l'organisation des manuels)

Quoique j'¹⁰aie quelque sorte de liberté de parler davantageusement de ces Nouveaux *Éléments de Géométrie*, puisque je n'y ai point d'autre part que celle de les avoir tirées des mains de l'Auteur pour les donner au Public ; mon dessein n'est pas néanmoins d'en faire voir ici l'excellence, ni de les proposer au monde comme un ouvrage fort considérable. Je serais plutôt porté à diminuer l'idée trop haute que quelques personnes en pourraient avoir, étant très persuadé qu'il est beaucoup plus dangereux d'estimer trop ces sortes de choses, que de ne les pas estimer assez.

La nature de toutes les sciences humaines, et principalement de celles qui entrent peu dans le commerce de la vie, est d'être mêlées d'utilités et d'inutilités : et je ne sais si l'on ne peut point dire qu'elles sont toutes inutiles en elles-mêmes ; et qu'elles devraient passer pour un amusement entièrement vain et indigne de personnes sages, si elles ne pouvaient servir d'instruments et de préparation à d'autres connaissances vraiment utiles. Ainsi ceux qui s'y attachent pour elles-mêmes comme à quelque chose de grand et de relevé n'en connaissent pas le vrai usage, et cette ignorance est en eux un beaucoup plus grand défaut que s'ils ignoraient absolument ces Sciences.

Ce n'est pas un grand mal que de n'être pas géomètre ; mais c'en est un considérable

¹⁰NICOLLE, le co-auteur de *La logique ou l'art de penser* avec ARNAULD a écrit cette préface.

Les 100 ans de la géométrie de HILBERT

que de croire que la Géométrie est une chose fort estimable, et de s'estimer soi-même pour s'être rempli la tête de Lignes, d'Angles, de Cercles, de proportions. C'est une ignorance très blâmable que de ne pas savoir que toutes ces spéculations stériles ne contribuent rien à nous rendre heureux ; qu'elles ne soulagent point nos misères ; qu'elles ne nous guérissent point nos maux ; qu'elles ne nous peuvent donner aucun contentement réel et solide ; que l'Homme n'est point fait pour cela ; et que bien loin que ces Sciences lui donnent sujet de s'élever en lui-même, elles sont au contraire des preuves de la bassesse de son esprit ; puisqu'il est si vain et si vide de vrai bien, qu'il est capable de s'occuper tout entier à des choses si vaines et si inutiles.

Cependant on ne voit que trop par expérience, que ces sortes de connaissances sont d'ordinaires jointes à l'ignorance de leur prix et de leur usage. On les recherche pour elles-mêmes ; on s'y applique comme à des choses fort importantes ; on en fait sa principale profession ; on se glorifie des découvertes que l'on y fait ; on se croit fort obliger le monde si l'on veut bien lui en faire part ; et l'on s'imagine mériter par là un rang fort considérable entre les Savants et les grands Esprits.

Si cet Ouvrage n'a rien de ce qui mérite la réputation de grand Géomètre au jugement de ces personnes, en quoi il est très juste de les en croire ; au moins on peut dire avec vérité que celui qui l'a composé est exempt du défaut de la souhaiter, et que quoiqu'il estime beaucoup le génie de plusieurs personnes qui se mêlent de cette Science, il n'a qu'une estime très médiocre pour la Géométrie en elle-même. Néanmoins comme il est impossible de se passer absolument d'une Science qui sert de fondement à tant d'Arts nécessaires à la vie humaine, il peut y avoir quelque utilité à montrer aux Hommes de quelle sorte ils en doivent user, et de leur rendre cette étude plus avantageuse qu'il est possible.

C'est l'unique vue qu'a eue l'Auteur de ces nouveaux Éléments. Il n'a pas tant considéré la Géométrie, que l'usage qu'on pouvait en faire ; et il a cru qu'en évitant ces défauts qui n'en sont pas inséparables, on s'en pouvait très utilement servir pour former les jeunes gens, non seulement à la justesse de l'esprit ; mais même en quelque sorte à la piété et au règlement des mœurs.

Pour comprendre les avantages qu'on peut tirer, il faut considérer que dans les premières années de l'enfance l'Âme de l'Homme est comme toute plongée et toute ensevelie dans les sens, et qu'elle n'a que des perceptions obscures et confuses des objets qui font impression sur son corps. Elle sort à la vérité de cet état à mesure que les organes se dégagent et se fortifient par l'âge, et elle acquiert quelque liberté de former des pensées plus claires et plus distinctes, et même de les tirer les unes des autres, ce que l'on appelle raisonnement. Mais l'amour des choses sensibles et extérieures lui étant devenu comme naturel, et par la corruption de son origine et par l'accoutumance qu'elle a contractée durant l'enfance, les choses extérieures sont toujours le principal objet de son plaisir et de sa pente. Ainsi non seulement les jeunes gens ne se plaisent guère que dans les choses

sensuelles ; mais même entre les personnes avancées en âge il y en a peu qui soient capables de trouver du goût dans une vérité purement spirituelle, et où les sens n'aient aucune part. Toute leur application est toujours aux manières agréables ; ils n'ont de l'intelligence et de la délicatesse que pour cela et ils ne se servent de leur esprit que pour étudier l'agrément et l'art de plaire, par les choses qui flattent la concupiscence et les sens.

Il me serait aisé de montrer que cette disposition d'esprit est non seulement un très grand défaut, mais que c'est la source des plus grands désordres et des plus grands vices. Il est vrai qu'il n'y a que la Grâce et les exercices de piété qui puissent la guérir véritablement : mais entre les exercices humains qui peuvent le plus servir à la diminuer et à disposer même l'esprit à recevoir les vérités Chrétiennes avec moins d'opposition et de dégoût, il semble qu'il n'y en ait guère de plus propre que l'étude de la Géométrie. Car rien n'est plus capable de détacher l'âme de cette application aux sens, qu'une autre application à un objet qui n'a rien d'agréable selon les sens ; et c'est ce qui se rencontre parfaitement dans cette Science. Elle n'a rien du tout qui puisse favoriser tant soit peu la pente de l'Âme vers les sens ; son objet n'a aucune liaison avec la concupiscence ; elle est incapable d'éloquence et d'agrément dans le langage ; rien n'y excite les passions ; elle n'a rien du tout d'aimable que la vérité et elle la présente à l'Âme toute nue et détachée de tout ce que l'on aime le plus dans les autres choses.

Que si les vérités qu'elle propose ne sont pas fort utiles ni fort importantes, si l'on en demeurerait là ; il est néanmoins très utile et très important de s'accoutumer à aimer la vérité, à la goûter, à en sentir la beauté. Et Dieu se sert souvent de cette disposition d'esprit, pour nous faire entrer dans l'amour et dans la pratique des vérités qui conduisent au salut, pour nous faire voir l'illusion de tout ce qui plaît dans les choses sensibles et extérieures, et pour nous rendre justes et équitables dans toute la conduite de notre vie ; cet esprit d'équité consistant principalement dans le discernement et dans l'amour de la vérité en toutes les affaires que nous traitons.

Mais la Géométrie ne sert pas seulement à détacher l'Esprit des choses sensibles, et à imposer le goût de la vérité ; elle apprend aussi à la reconnaître et à ne se laisser pas tromper par quantité de maximes obscures et incertaines, qui servent de principes aux faux raisonnements dont les discours des Hommes sont tout remplis. Car si l'on n'y prend garde, ce qui nous jette ordinairement dans l'erreur et nous fait prendre le faux pour le vrai, n'est pas le défaut de liaison des conséquences avec les principes, en quoi consiste ce qu'on appelle la forme des arguments ; mais c'est l'obscurité des principes mêmes, qui n'étant pas exactement vrais, et n'étant pas aussi évidemment faux, présentent à l'Esprit une lumière confuse où la vérité et la fausseté sont mêlées ; ce qui cause à plusieurs une espèce d'éblouissement qui leur fait approuver les principes sans les examiner davantage.

Il est vrai que la Logique nous donne deux excellentes règles pour éviter cette illusion, qui sont de définir tous les mots équivoques, et de ne recevoir jamais que des principes

clairs et certains. Mais ces règles ne suffisent pas pour nous garantir d'erreur. Premièrement, parce qu'on se trompe souvent dans la notion même d'évidence en prenant pour évident ce qui ne l'est pas. En second lieu, parce que quoiqu'on sache ces règles, on n'est pas toujours appliqué à les pratiquer. Il n'y a donc que la Géométrie qui remédie à l'un et à l'autre de ces défauts. Car d'une part en fournissant des principes vraiment clairs, elle nous donne le modèle de la clarté et de l'évidence pour discerner ceux qui l'ont de ceux qui ne l'ont pas : et de l'autre, comme elle ne se dispense jamais de l'observation de ces deux règles, elle accoutume l'Esprit à les pratiquer, et à être toujours en garde contre les équivoques des mots et contre les principes confus, qui sont les deux sources les plus communes des mauvais raisonnements.

Il ne faut pas dissimuler néanmoins que cette coutume même de rejeter tout ce qui n'est pas entièrement clair, peut engager dans un défaut très considérable, qui est de vouloir pratiquer cette exactitude en toute sorte de matières, et de contredire tout ce qui n'est pas proposé avec l'évidence Géométrique. Cependant il y a une infinité de choses dont on ne doit pas juger en cette manière, et qui ne peuvent pas être réduites à des démonstrations méthodiques. Et la raison en est, qu'elles ne dépendent pas d'un certain nombre de principes grossiers et certains, comme les vérités Mathématiques ; mais d'un grand nombre de preuves et de circonstances qu'il faut que l'Esprit voie tout d'un coup, et qui n'étant pas convaincantes séparément, ne laissent pas de persuader avec raison, lorsqu'elles sont jointes et unies ensemble. La plupart des matières morales et humaines sont de ce nombre ; et il y a même des vérités de la Religion qui se prouvent beaucoup mieux par la lumière de plusieurs principes qui s'entraident et se soutiennent les uns les autres, que par des raisonnements semblables aux démonstrations Géométriques. C'est donc sans doute un fort grand défaut que de ne faire pas distinction des matières ; d'exiger par tout cette suite méthodique de propositions, que l'on voit dans la Géométrie ; de faire difficulté sur tout, et de croire avoir droit de rejeter absolument un principe lorsqu'on juge qu'il peut recevoir quelque exception en quelque rencontre.

Mais si ce défaut est assez ordinaire à quelques Géomètres, il ne naît pas néanmoins de la Géométrie même. Cette science étant toute véritable ne peut autoriser une conduite qui n'est fondée que sur des principes d'erreur. Car il n'est pas vrai qu'un principe qui ne prouve pas absolument ne prouve rien ; et que ne prouvant pas tout seul, il ne prouve pas étant joint à d'autres. Il y a différents degrés de preuves. Il y en a dont on conclut la certitude, et d'autres dont on conclut l'apparence ; et de plusieurs apparences jointes ensemble, on conclut quelques fois une certitude à laquelle tous les Esprits raisonnables se doivent rendre. Il n'est pas absolument certain que l'on doive voir le Soleil quelque'un des jours de l'Année qui vient, je le dois néanmoins croire ; et je serais ridicule d'en douter, quoiqu'il soit impossible de le démontrer. La Raison ne doit donc pas prétendre de démontrer Géométriquement ces choses ; mais elle peut prouver Géométriquement que

c'est une sottise de ne les pas croire : Et c'est en cette manière qu'on peut se servir de la Géométrie même dans ces sortes de matières, pour faire voir plus clairement la force de la vraisemblance qui nous les doit faire croire.

Outre ces utilités que l'on peut tirer de la Géométrie, on peut encore remarquer deux autres qui ne sont pas moins considérables. Il y a des vérités importantes pour la conduite de la vie et pour le salut, qui ne laissent pas d'être difficiles à comprendre, et qui ont besoin d'une attention pénible ; Dieu ayant voulu, comme dit Saint Augustin, que le pain de l'Âme se gagnât avec quelque sorte de travail aussi bien que le pain du Corps. Et il arrive de là que plusieurs personnes s'en rebutent par une certaine paresse, ou plutôt par une délicatesse d'esprit qui leur donne du dégoût de tout ce qui demande quelque effort et quelque sorte de contention. Or l'étude de la Géométrie est encore un remède à ce défaut ; car en appliquant l'Esprit à des vérités abstraites et difficiles, elle lui rend faciles toutes celles qui demandent moins d'application ; comme en accoutumant le corps à porter des fardeaux pesants, on fait qu'il ne sent presque plus le poids de ceux qui sont plus légers.

Non seulement elle ouvre l'Esprit et le fortifie pour concevoir tout avec moins de peine ; mais elle fait aussi qu'il devient plus étendu et plus capable de comprendre plusieurs choses à la fois. Car les vérités Géométriques ont cela de propre qu'elles dépendent d'un long enchaînement de principes qu'il faut suivre pour arriver à la conclusion ; et comme cette conclusion tire sa lumière de ces principes, il faut que l'Esprit voie en même temps, et ce qui éclaire et ce qui est éclairé : ce qu'il ne peut pas faire sans s'étendre, et sans porter sa vue plus loin que dans ses actions ordinaires.

Cette étendue d'esprit, qui paraît dans la Géométrie, est non seulement très utile pour tous les sujets qui ont besoin de raisonnement ; mais elle est aussi très admirable en elle-même ; et il n'y a guère de qualité de notre Âme qui en fasse mieux voir la grandeur, et qui détruise davantage les imaginations basses et grossières de ceux qui voudraient la faire passer pour une matière. Car le moyen de s'imaginer qu'un Corps, c'est-à-dire, un Être où nous ne concevons qu'une étendue figurée et mobile, puisse pénétrer ce grand nombre de principes tout spirituels qu'il faut lier ensemble pour la preuve des propositions que la Géométrie nous démontre, et qu'il porte même sa vue jusque dans l'Infini pour en assurer ou en tirer plusieurs choses avec une certitude entière ? Elle nous fait voir par exemple, que la Diagonale et le côté d'un Carré n'ont nulle mesure commune ; c'est-à-dire, que l'Esprit voit que dans l'infinité des parties de différente grandeur qu'on y peut choisir, il n'y en a aucune qui puisse mesurer exactement l'une et l'autre de ces deux lignes.

On peut dire que toutes les propositions Géométriques sont de même infinies en étendue ; parce que l'on n'y conclut pas ce qu'on démontre d'une seule Ligne, d'un seul Angle, d'un seul Cercle, d'un seul Triangle, mais de toutes les Lignes, de tous les Angles, de tous les Cercles, de tous les Triangles ; et qu'ainsi l'Esprit les renferme et les comprend tous en quelque sorte quelque infinis qu'ils soient. Or que tout cela se puisse faire par le

Les 100 ans de la géométrie de HILBERT

bouleversement d'une matière, et qu'en la remuant elle devienne capable de comprendre des objets spirituels, et d'en comprendre même une infinité, c'est ce que personne ne saurait croire ni penser, pourvu qu'il veuille de bonne foi songer à ce qu'il dit.

Ce sont ces réflexions qui ont fait juger à l'Auteur de ces *Éléments* qu'on pouvait faire un bon usage de la Géométrie ; mais ce n'est pas néanmoins ce qui l'a porté à travailler à en faire de nouveaux, puisqu'on peut tirer tous ces avantages des livres ordinaires qui en traitent. Ils portent tous à aimer la vérité ; ils apprennent à la discerner ; ils fortifient la Raison ; ils étendent la vue de l'Esprit, et ils donnent lieu d'admirer la grandeur de l'Âme de l'Homme, et de reconnaître qu'elle ne peut être autre que spirituelle et immortelle.

Ce qui lui a donc fait croire qu'il était utile de donner une nouvelle forme à cette Science, est, qu'étant persuadé que c'était une chose fort avantageuse se s'accoutumer à réduire ses pensées à un ordre naturel, cet ordre était comme une lumière qui les éclaircit toutes les unes par les autres ; il a toujours eu quelque peine de ce que les *Éléments* d'Euclide étaient tellement confus et brouillés, que bien loin de pouvoir donner à l'Esprit l'idée et le goût du véritable ordre, ils ne pouvaient au contraire que l'accoutumer au désordre et à la confusion.

Ce défaut lui paraissait considérable dans une Science dont la principale utilité est de perfectionner la Raison ; mais il n'eut pas pensé néanmoins à y remédier sans la rencontre que je vais dire qui l'y engagea insensiblement. Un des plus grands Esprits de ce siècle, et des plus célèbres par l'ouverture admirable qu'il avait pour les Mathématiques, avait fait en quelques jours un essai d'*Éléments* de Géométrie ; et comme il n'avait pas cette vue de l'ordre, il s'était contenté de changer plusieurs des démonstrations d'Euclide pour en substituer d'autres plus nettes et plus naturelles. Ce petit Ouvrage étant tombé entre les mains de celui qui a composé ces *Éléments*, il s'étonna de la confusion qu'il avait laissée pour ce qui est de la méthode, et cette pensée lui ouvrit en même temps une manière naturelle de disposer toute la Géométrie ; les démonstrations s'arrangèrent d'elles mêmes dans son esprit, et tout le corps de l'Ouvrage que nous donnons maintenant au Public se forma dans son idée.

Cela lui fit dire en riant à quelques uns de ses amis, que s'il avait le loisir, il lui serait facile de faire des *Éléments* de Géométrie mieux ordonnés que ceux que l'on lui avait montrés ; mais ce n'était encore qu'un projet en l'air qu'il avait peu d'espérance de pouvoir exécuter, quoique quelques personnes l'en priassent ; parce qu'il avait fait scrupule d'y employer un temps où il aurait été en état de faire quelque autre chose.

Il est arrivé néanmoins depuis que diverses rencontres lui ont donné le loisir dont il avait besoin pour cela. Il fut une fois obligé par une indisposition de quitter ses occupations ordinaires, et il trouva son soulagement en se déchargeant d'une partie de ce qu'il avait dans l'Esprit sur cette matière. Une autre fois il se trouva quatre ou cinq jours dans une maison de Campagne sans aucun livre, et il remplit encore ce vide en composant quelque partie de

ce *Traité*. Enfin en ménageant ainsi quelques petits temps, il a achevé ce qu'il avait dessein de faire de cet *Ouvrage*, s'étant borné d'abord à la *Géométrie des plans* comme pouvant suffire au commun du monde.

Quelques personnes se sont étonnées qu'en écrivant d'une matière si étendue, et qui a été traitée par un si grand nombre d'habiles gens, il ne lut pour cela aucun livre de *Géométrie*, n'en ayant point même dans sa *Bibliothèque* : mais il leur répondait, que l'ordre le conduisait tellement qu'il ne croyait pas pouvoir rien oublier de considérable. Il ajoutait même que cet ordre ne servait pas seulement à faciliter l'intelligence et à soulager la mémoire : mais qu'il donnait lieu de trouver des principes plus féconds, et des démonstrations plus nettes que celles dont on se sert d'ordinaire. Et en effet il n'y a presque dans ces nouveaux *Éléments* que des démonstrations toutes nouvelles, qui naissent d'elles-mêmes des principes qui sont établis, et qui comprennent un assez grand nombre de nouvelles propositions.

On voit assez par là qu'il n'était pas fort difficile à l'Auteur de la nouvelle *Logique* ou *Art de penser*, qui avait vu quelque chose de cette *Géométrie*, de remarquer, comme il a fait dans la *IV^e* partie, les défauts de la méthode d'Euclide, et d'avancer qu'on pouvait digérer la *Géométrie* dans un meilleur ordre. C'était deviner les choses passées. Mais cette avance qu'il avait faite, sans se hasarder beaucoup, a depuis servi d'engagement à produire ce petit *Ouvrage*, à quoi l'on n'aurait peut-être jamais pensé. Car tant de personnes ont demandé au *Libraire* une nouvelle *Géométrie*, qu'on n'a pas pu la refuser aux instances qu'il a faites de leur part pour l'obtenir, n'étant pas juste de se faire beaucoup prier pour peu de chose.

On s'est donc résolu de la donner au *Public*, et de le rendre juge de l'utilité qu'on peut en tirer. On croit seulement devoir avertir le monde qu'il y aura peut-être quelques personnes qui pourront trouver les *IV* premiers livres un peu difficile, parce qu'on s'y est servi de démonstrations d'*Algèbre*, auxquelles on a quelque peine d'abord à s'accoutumer. La raison qui a obligé d'en user ainsi, est, que traitant des grandeurs en général en tant que ce mot comprend toutes les espèces de quantité, on ne pouvait pas se servir de figures pour aider l'*Imagination* ; outre que l'on jugeait qu'il était utile de se rompre d'abord à cette méthode, qui est la plus féconde et la plus *Géométrique* ; mais ceux néanmoins à qui elle ferait trop de peine ont moyen de s'en exempter en commençant par le *V^e* livre, et en supposant prouvées quelques *Propositions* qui dépendent des quatre premiers. Ce remède est aisé, et il ne privera pas du fruit qu'ils pourront en tirer de la méthode des ces *Éléments* lorsqu'en une seconde lecture ils les liront tout de suite.

Pour les autres jugements qu'on peut faire de cet *Ouvrage*, comme il est facile de les prévoir, il semble aussi qu'on n'ait pas sujet de s'en mettre en peine. Car, il se trouve des personnes qui le méprisent par des principes plus élevés, et par un éloignement de toutes ces sortes de *Sciences*, peut-être ne seront-ils pas fort éloignés du sentiment de

Les 100 ans de la géométrie de HILBERT

l'Auteur. S'il y en a qui blâment comme Géomètres en y remarquant de véritables fautes ils seront encore d'accord avec lui, parce qu'il sera toujours tout prêt de les corriger. Enfin ceux qui le reprendront comme Géomètres, mais en se trompant, ne peuvent pas être fort incommodes, parce que c'est une matière où les vérités sont si claires, qu'elles n'ont guère besoin d'apologie contre les injustes accusations.