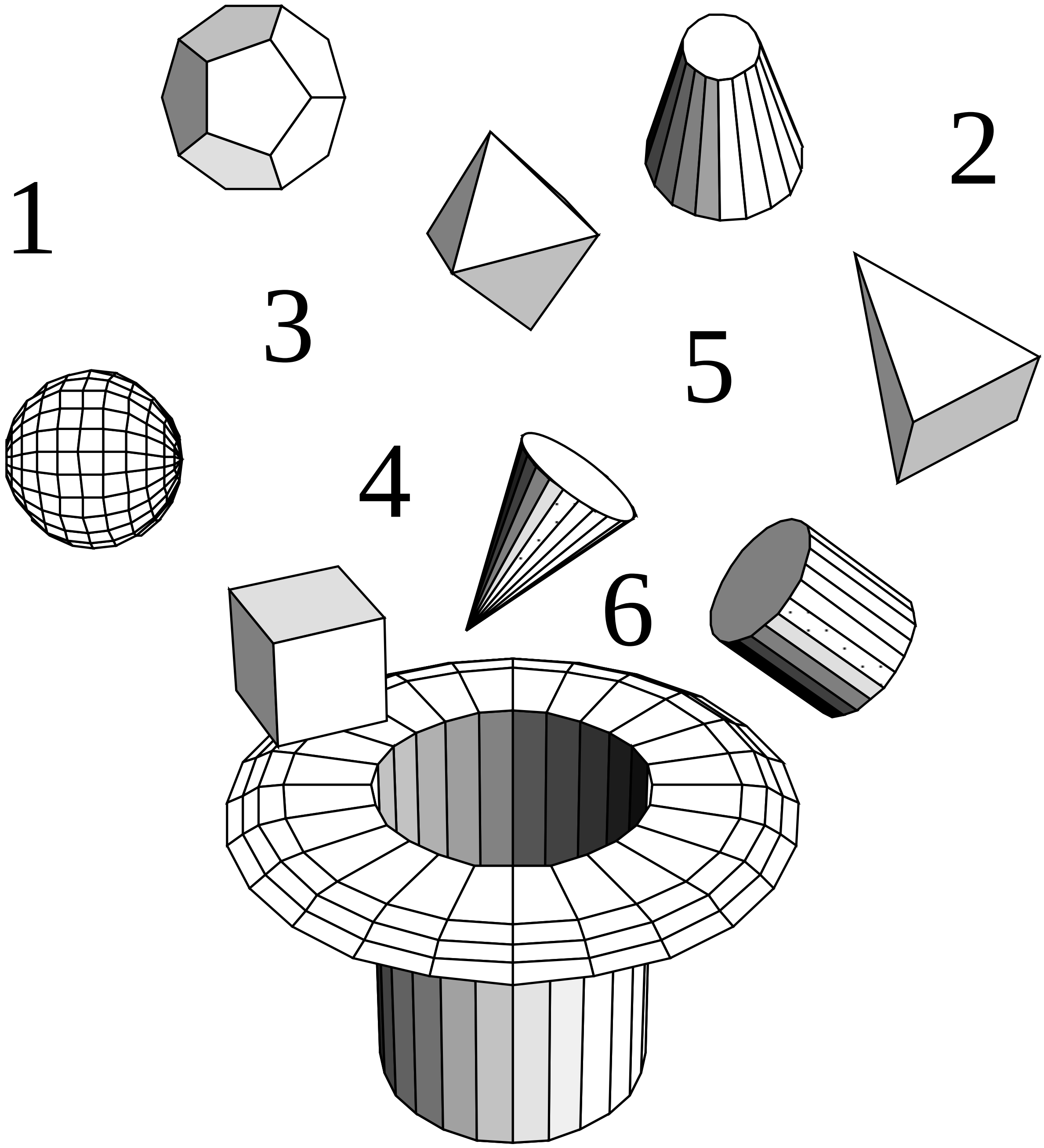
MATHÉMATIQUES VIVANTES



Bulletin de l'IREM
de BESANÇON

nº 66 – novembre 2001

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pufc

Presses Universitaires Franc-Comtoises

ISSN 1141-913X

Mathématiques vivantes

Bulletin IREM

n° 66, novembre 2001

édité par François PÉTIARD

Presses Universitaires Franc-Comtoises 2001
Diffusé par l'IREM de Franche-Comté

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Franche-Comté (IREM)

Directrice Claude MERKER

Cette brochure a été réalisée en $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Table des matières.

Les 100 ans de la géométrie de Hilbert

Hombeline Languereau,
IREM de Franche-Comté

Sommaire

Après une rapide présentation des Éléments d'Euclide, nous montrerons les critiques qui en furent faites puis nous nous intéresserons aux « Principes fondamentaux de la géométrie » de Hilbert qui répondent à ces critiques en proposant une axiomatique de la géométrie.

Enfin nous verrons les conceptions sous-jacentes de l'enseignement de la géométrie élémentaire dans trois manuels : les Éléments de Géométrie d'Arnauld, les Éléments de Géométrie de Clairaut et les Éléments de Géométrie de Legendre.

Dans cet article, nous nous limiterons d'une part dans le temps en ignorant les mathématiques entre le III^e siècle av. J.C. et le XVII^e siècle et d'autre part dans l'espace en nous restreignant aux mathématiques occidentales.

En guise d'introduction, voici un Extrait de « Trilogie New-Yorkaise » de Paul Auster :

« … Bleu jette un regard autour de la pièce et fixe son attention sur divers objets l'un après l'autre. Il voit la lampe et se dit ‘ lampe ’. Il voit le lit et se dit ‘ lit ’. Il voit le cahier et se dit ‘ cahier ’. On ne pourrait pas appeler la lampe ‘ lit ’ ou le lit ‘ lampe ’, pense-t-il. Non, ces mots épousent sans heurt les choses qu'ils désignent, et à l'instant où Bleu les prononce il ressent une satisfaction profonde comme s'il venait de prouver l'existence du monde… »

que l'on peut mettre en regard de la boutade de Hilbert :

« On devrait pouvoir parler tout le temps, au lieu de point, droite et plan, de table, chaise et chope »

I Les Éléments d'EUCLIDE

Les Éléments d'EUCLIDE (IV^e–III^e siècle av. J. C.) constituent le premier exposé déductif des mathématiques. La pratique de la géométrie ne débute évidemment pas à la date de ces « éléments ». Les anciens égyptiens (vers 2000 avant notre ère) connaissaient des règles de calcul, d'arpentage ainsi que l'aire du cercle, le volume de la pyramide, par exemple.

EUCLIDE, dont le but est de fonder la géométrie, utilise les résultats de THALÈS, PYTHAGORE, HIPPOCRATE DE CHIOS, EUDOXE, ... et les complète pour réaliser la première synthèse des connaissances en mathématiques.

Exposé suivant la méthode déductive, le traité commence par des définitions, des demandes et des notions communes à partir desquelles EUCLIDE prétend prouver des théorèmes. On remarque que certaines des figures ne sont pas que de simples aides pour suivre une preuve.

Les six premiers livres sont consacrés à la géométrie ; on y trouve[1] : des définitions — ce sont parfois des descriptions (pas toujours utilisables : le point est sans étendue) —, des axiomes et des postulats, des propositions implicites (celles qui sont obtenues immédiatement par intuition ; par exemple l'illimité d'une droite) et des théorèmes.

Le livre I commence par des définitions, des postulats et des notions communes suivis de 48 propositions classées en trois groupes :

- La construction des triangles, les cas d'égalité, des constructions à la règle et au compas.
- La théorie des parallèles et son application à la somme des angles d'un triangle.
- L'équivalence des parallélogrammes et des triangles (la méthode des aires)

Le couronnement de ce livre est le théorème de PYTHAGORE.

Le livre II est une sorte d'algèbre où l'on trouve les identités remarquables.

Le livre III est consacré à l'étude du cercle.

Le livre IV traite de l'inscription dans le cercle et de la circonscription des polygones réguliers.

Le livre V expose une théorie mathématique des grandeurs.

Le livre VI est une application à la théorie de la similitude.

Les livres VII, VIII, IX concernent l'arithmétique, le livre X s'intéresse à l'irrationnalité.

C'est dans les livres XI, XII, XIII qu'il est question de géométrie dans l'espace. Platon regrettait que celle-ci fut négligée !

[1] D'après ITARD, essais d'histoire des mathématiques.

II La critique des Éléments d'EUCLIDE

Des imperfections de la construction d'EUCLIDE sont remarquées dès l'Antiquité. Parmi les postulats, le cinquième (le postulat des parallèles) fut le plus critiqué ; certains continuateurs et commentateurs d'EUCLIDE[2] avaient cherché à démontrer d'autres postulats (par exemple celui de l'égalité des angles droits) ou avaient reconnu l'insuffisance de certaines définitions comme celles de la droite : « La droite est la ligne qui s'étend également par rapport à ses points » et du plan.

Toutefois, malgré les critiques que nous soulignons ci-dessous, jusqu'au XVIII^e^ siècle, les Éléments ont été en général acceptés. Bien que ce ne soit pas le sujet dans cet article, rappelons que c'est au XIX^e^ siècle que sont apparues les géométries non-euclidiennes alors qu'auparavant, les mathématiciens cherchaient à prouver le cinquième postulat.

Au XVI^e^ siècle, CLAVIUS note l'absence d'un postulat garantissant l'existence de la quatrième proportionnelle (elle n'est en effet pas garantie par EUDOXE) ; de son côté LEIBNIZ remarque qu'EUCLIDE utilise l'intuition géométrique sans le mentionner explicitement (par exemple lorsqu'il admet que deux cercles dont chacun passe par le centre de l'autre ont un point commun ; propriété utilisée pour la construction d'un triangle équilatéral par exemple). GAUSS remarque l'importance de « entre », relation qui n'est pas définie et qui, d'ailleurs, pose problème sur la sphère...

Arrive le XIX^e^ siècle, où l'on s'attache à la rigueur mathématique. Les critiques de la construction euclidienne, dans le cadre imposé, se multiplièrent, dans le mouvement général vers plus de rigueur en mathématiques. Elles ne visent d'ailleurs pas la correction des inférences d'EUCLIDE au cours de ses démonstrations, mais le fait que ces dernières sont insuffisamment fondées sur des axiomes et des définitions explicités ; par exemple, le postulat de la continuité dû à CANTOR et à DEDEKIND (les coupures), le postulat d'ARCHIMÈDE (les flaques d'eau qu'on peut éviter en faisant des grands pas) et les postulats d'ordre (entre), dus à PASCH[3].

Le sentiment général était qu'en complétant convenablement ces bases des raisonnements, on arriverait à un exposé entièrement satisfaisant. C'est ce travail que réalisèrent PASCH et HILBERT à la fin du XIX^e^ siècle[4].

PASCH définit notamment la rigueur mathématique par :

« On énoncera explicitement les concepts primitifs au moyen desquels on se propose de définir logiquement les autres. On énoncera explicitement les propositions fondamentales (postulats) grâce auxquelles on se propose de démontrer logiquement les autres propositions (théorèmes). Ces propositions fondamentales doivent apparaître comme de pures relations

[2]Éléments d'histoire des mathématiques de BOURBAKI.
[3]cf. page 22 article ENRIQUES. Questions d'ordre élémentaire.
[4]Pour l'honneur de l'esprit humain

logiques entre les concepts primitifs, et cela indépendamment de la signification que l'on donne à ces concepts primitifs. »

C'est chez ce dernier que l'abandon à tout recours à l'intuition est nettement formulé et suivi rigoureusement.

Entre 1890 et 1910, de nombreux mathématiciens donnent des présentations variées de la géométrie euclidienne ; par exemple, PEANO et surtout HILBERT, qui en quelque sorte clôt le sujet, non seulement donnent des axiomes, mais les classent et s'attachent à montrer la portée de chacun en construisant des modèles de géométrie vérifiant une partie des axiomes (il vérifie explicitement leur compatibilité en utilisant un modèle numérique et donne des exemples de géométrie ne vérifiant pas l'un des axiomes, par exemple une géométrie non archimédienne ou une géométrie non arguésienne).

III L'axiomatique de HILBERT

Précisons que la méthode axiomatique est un mode d'exposition des sciences exactes fondé sur des propositions admises sans démonstration et nettement formulées et des raisonnements rigoureux.

L'axiomatique commence par un inventaire exhaustif de toutes les propositions que l'on admet sans démonstration et qui ne sont pas des définitions ; ces propositions (axiomes ou postulats) constituent le point de départ de la théorie.

Parmi les axiomes figurent les règles de déduction. À partir de ces données, on s'astreint à démontrer les autres résultats : les théorèmes.

Tout recours sensible à l'expérience ou au sentiment subjectif est à rejeter.

Les mots, signes ou termes qui interviennent dans la rédaction des axiomes sont dépouillés de la signification qu'ils peuvent avoir dans le langage courant (cf. la boutade d'HILBERT).

David HILBERT (23/01/1862, Königsberg – 14/02/1943, Goettingue) est un mathématicien dont les travaux ont porté sur les fondements de la géométrie et des sciences mathématiques, la théorie des nombres, l'algèbre, les invariants (sujet de sa thèse), le calcul des variations et les équations intégrales. En 1891, il assiste à une conférence de H. WIENER, à Berlin, consacrée aux théorèmes de DESARGUES[5] et de PASCAL[6] et aux fondements de la géométrie. L'impact de cet exposé fut tel qu'HILBERT se mit à réfléchir à ces problèmes ; il y fut d'ailleurs encouragé par son collègue et ami MINKOWSKI. Pour HILBERT, l'intérêt de la géométrie élémentaire est de donner l'exemple le plus simple d'une

[5]Deux triangles étant situés dans un plan de telle sorte que leurs côtés homologues soient respectivement parallèles, les droites qui joignent les côtés homologues ou bien sont concourantes, ou bien parallèles.

[6]Soit A, B, C et A', B', C' des points situés respectivement trois par trois sur deux droites qui se coupent, et distincts du point d'intersection de ces droites. Si CB' est parallèle à BC' et CA' à AC', alors BA' est parallèle à AB'.

construction mathématique autre que la théorie des nombres.

En 1898-1899, HILBERT, professeur à l'université de Goettingue, fait un cours sur la géométrie élémentaire et en juin 1899, paraît la première édition des fondements dont le titre est : *Grundlagen der Geometrie*. Il énonce une trentaine d'axiomes qui précisent le mode d'emploi des mots « point », « plan », « droite », « appartenance », « entre », « égalité », etc.

Dans les Éléments d'EUCLIDE, apparaissent des définitions, des postulats et des théorèmes dans un ordre apparemment aléatoire. Voulant améliorer les choses, HILBERT présente ces axiomes après les avoir classés ; ceci n'est pas très aisé comme en témoignent les critiques arrivées très vite dont celles de SCHUR. HILBERT a également le souci d'avoir un système d'axiomes minimal, c'est-à-dire d'avoir des axiomes indépendants ; là encore SCHUR montrera, en se servant de sa propre axiomatique, qu'HILBERT a échoué. Ce dernier modifiera dès la seconde édition l'introduction : « le but est d'établir un système simple et complet d'axiomes », l'adjectif « indépendant » mentionné dans la première édition a disparu. Malgré ces critiques, HILBERT est le premier qui soit parvenu à formuler un exposé axiomatique définitif de la géométrie élémentaire.

Examinons en détail le plan de l'ouvrage de HILBERT — première édition 1899 —

Chapitre 1 : Les cinq groupes d'axiomes

1. Les axiomes d'incidence expriment les relations d'appartenance et d'inclusion entre points, droites et plans.
2. Les axiomes de disposition précisent l'emploi et les propriétés du mot « entre ».
3. Le postulat d'EUCLIDE.
4. Les axiomes d'égalité expriment les propriétés de l'égalité géométrique, sans recours à l'intuition sensible du déplacement des objets matériels indéformables.
5. Axiomes de continuité (axiome d'ARCHIMÈDE).

Chapitre 2 : La non-contradiction et l'indépendance des axiomes

Le but de ce chapitre est de montrer la compatibilité de ces axiomes en construisant un système qui satisfait à tous les axiomes et dont l'existence ne fait aucun doute.

Pour cela HILBERT se place dans le domaine Ω des nombres algébriques obtenus en partant de 1 à l'aide des quatre opérations arithmétiques et de la cinquième $\sqrt{1+\omega^2}$. L'équation d'une droite est sans surprise : $ux+vy+w=0$ avec $(u,v)\neq(0,0)$; l'ordre est naturel ; les transformations usuelles (translation, rotation — c'est pour cela qu'on a besoin de la cinquième opération —, ...) sont sans problème et permettent de définir la congruence.

HILBERT note que le minimum pour avoir une géométrie est d'avoir les axiomes 1 et 2 ; et qu'il suffit donc de démontrer l'indépendance des axiomes 3, 4 et 5 entre eux. Pour cela, il construit un modèle de géométrie dans lequel l'un de ces axiomes est omis.

Chapitre 3 : Théorie des proportions

Le paragraphe débute par les propriétés de corps ordonné des nombres réels.

C'est dans ce chapitre qu'HILBERT établit la théorie euclidienne des proportions indépendamment de l'axiome d'ARCHIMÈDE. Une conséquence est la définition de l'égalité de deux segments (ce qui revient à la définition d'une mesure algébrique ? ?). Tout est fait pour avoir la notion de triangle semblable et aboutir au théorème dit de THALÈS.

Le chapitre continue par l'expression des coordonnées d'un point du plan.

Chapitre 4 : Théorie des aires planes

Théorie indépendante de l'axiome d'ARCHIMÈDE qui apparaît comme une conséquence du théorème de PASCAL.

Par définition, des polygones sont égaux s'il existe une triangulation commune. Cette définition permet de ramener leur étude aux triangles et parallélogrammes. HILBERT développe en fait une théorie de la mesure.

Chapitre 5 : Le théorème de DESARGUES

Théorème de DESARGUES :

Deux triangles étant situés dans un plan de telle sorte que leurs côtés homologues soient respectivement parallèles, les droites qui joignent les sommets homologues ou bien passeront par un même point, ou bien seront parallèles.
Réciproquement, deux triangles étant situés dans un plan de telle sorte que les droites qui joignent les sommets homologues ou bien passent par un même point ou bien sont parallèles, et de plus deux paires de côtés homologues étant parallèles, les troisièmes côtés des deux triangles seront également parallèles.

HILBERT montre que la vérification du théorème de DESARGUES dans le plan est une condition nécessaire pour que la géométrie du plan puisse être présentée comme une partie de la géométrie de l'espace où les axiomes 1 et 3 sont tous vérifiés.

À la fin du chapitre, il montre que cette condition est suffisante.

De plus HILBERT démontre que, pour prouver le théorème de DESARGUES, il est nécessaire d'utiliser soit les axiomes spatiaux, soit les axiomes de la congruence (dans ce deuxième cas, on reste dans le plan)

Chapitre 6 : Le théorème de PASCAL

Théorème de PASCAL :

Soient A, B, C et A', B', C' des points situés respectivement trois par trois sur deux droites qui se coupent, et distincts du point d'intersection de ces droites. Si CB' est parallèle à BC', je dis que BA' sera parallèle à AB'

Le théorème de PASCAL peut être démontré en se basant sur les axiomes 1, 2, 3, 4 c'est-à-dire en utilisant ARCHIMÈDE sans utiliser la congruence et il est impossible à démontrer en laissant de côté ARCHIMÈDE.

Chapitre 7 : Constructions géométriques basées sur les axiomes I à V

C'est un paragraphe de résolution de problèmes.

Théorème :

Les problèmes de constructions géométriques qui sont résolubles en employant uniquement exclusivement les axiomes 1–5 *sont nécessairement possibles à résoudre uniquement au moyen de la règle et du transporteur de segments.*

Quant aux coordonnées, ce sont celles qui sont quadratiques, que l'on peut construire.

Conclusion

Tableau résumant les liens entre la somme des angles d'un triangle et l'existence de parallèle à une droite passant par un point donné.

IV L'enseignement de la géométrie élémentaire

Précisons qu'ici élémentaire s'oppose à différentielle ou infinie.

Les premiers concepts qui interviennent dans un exposé de géométrie élémentaire sont ceux de point, ligne, surface.

EUCLIDE débute d'ailleurs ses Éléments par :

- Un point est une chose indivisible.
- Une ligne est une longueur sans largeur.
- Une surface est une chose qui n'a que longueur et largeur.

EUCLIDE ajoute que les limites de la ligne sont les points et les limites de la surface des lignes.

En se conformant à ces définitions, on peut développer les éléments de la géométrie en suivant deux voies bien distinctes. La première est de considérer que le point est le concept fondamental et que l'on engendre le reste par mouvement du point ; la seconde est de choisir le corps comme concept fondamental et d'envisager le reste comme passage à la limite (le plan est un corps dont l'épaisseur est nulle).

Parmi les lignes et les surfaces, les plus simples sont la droite et le plan. Pour la première apparition de ces mots dans un manuel, on peut choisir de les considérer comme concepts primitifs ou de les définir à l'aide de congruence et mouvement.

Voici différentes définitions du mot « droite » :

Pour EUCLIDE, la droite est la ligne qui s'étend également par rapport à ses points ; c'est-à-dire la ligne qui est divisée par chacun de ses points en deux parties égales. Mais, fait remarquer ENRIQUES, l'hélice jouit de la même propriété.

ARCHIMÈDE, lui, définit la ligne droite comme la ligne la plus courte entre deux points ; c'est ce que reprend LEGENDRE comme définition.

Leinitz (ou Proclus) envisage la droite comme l'unique ligne qui reste immobile quand on la fait tourner autour de deux de ses points.

Grassmann la définit comme la ligne qui conserve en chacun de ses points une direction constante.

Leibniz, repris par Bolyai et Lobatchewski : le plan est le lieu des points équidistants de deux points donnés et la droite comme le lieu des points équidistants de trois points non alignés, ou aussi comme le lieu des centres des sphères ayant un même point de contact.

Chacune de ces définitions nécessite un concept primitif. Ce sont respectivement les concepts de congruence, longueur d'une ligne, de rotation, de direction, d'équivalence de paires de points.

Parmi les premières définitions données en géométrie, il y a celle d'angle. C'est une notion délicate à enseigner, dont la définition pose problème. Nous remarquons, dans les manuels d'enseignement, que trois points de vue sont régulièrement utilisés :

- l'angle est une surface du plan (portion de plan contenue entre deux droites) ; c'est le choix d'Arnauld ou de L. Bertrand. Véronèse remarque que la figure ainsi définie, qu'il appelle champ angulaire ou section angulaire, ne correspond pas à la conception habituelle de l'angle ; on considère en général l'angle comme une figure n'ayant qu'une dimension, appartenant non pas à un plan mais à un faisceau de droites[7] ;
- l'angle est associé à une rotation (portion de plan balayée quand une droite D vient s'appliquer sur une droite D') (Hilbert) ;
- l'angle mesure l'inclinaison d'une demi-droite sur une autre (rapport de projection orthogonale) (Euclide et Clairaut).

Les Éléments d'Euclide ont constitué la base de l'enseignement des mathématiques. C'est d'ailleurs le livre de mathématiques qui a connu le plus grand nombre d'éditions, probablement le livre le plus édité après la Bible (avant 1800).

Voici, par ordre chronologique, quelques éditions :

1482 : 1b. Erhardus ratdolt Augustendis impressor. Serenissimo alme urbis venete Principi Ioanni Mocenico. 2a. Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi : in artem Geometrie incipit quafoelicissime. (Colophon) Opus elementoru euclidis megariensis in geometria arte in id quoque Campani perspicacissimi Comentationes finiunt. Erhardus ratdolt Augustensis impressor solertissimus. *Venetiis impressit.*

1516 : Édition établie par Michel Pontanus.

1533 : Édition *princeps* du texte grec édité à Bâle.

1536 : Édition donnée par Oronce Finé.

[7] Enriques, encyclopédie J. Molk.

1572 : Elementorum libri XV par F. COMMANDINUS.

1591 : Édition de CLAVIUS.

1611 : Les six premiers Livres des Éléments Géométriques d'EUCLIDE, avec les démonstrations de Jacques PELETIER DE MANS. Traduicts en françois, & dédiés à la Noblesse françoise. Cet ouvrage est la première édition de la traduction française.

1672 : Huict livres des Éléments d'EUCLIDE rendus plus faciles. Par le R. P. Claude François MILLIET DECHALES. C'est une édition qui connut un grand succès et qui fut souvent réimprimée, tant en latin qu'en français.

Il y a deux grands types de manuels de géométrie élémentaire : les traités de géométrie pratique (par exemple les manuels d'arpentage) dont nous ne parlerons pas et les manuels de géométrie « théorique » qui sont l'objet de notre étude.

L'enseignement de base consiste en la lecture des éléments d'EUCLIDE que l'on semble enseigner comme un cours de philosophie.

Cet enseignement semble attaqué pour la première fois par RAMUS (1515-1572) mais cette offensive resta vaine « grâce à » la Saint-Barthélémy.

Une nouvelle attaque provient des Messieurs de Port-Royal : Logique ou l'art de penser de ARNAULD[8] et NICOLLE[9] (1662) puis les Éléments de Géométrie d'ARNAULD (1667). Ce dernier n'est pas original quant à la définition d'une droite (plus court chemin entre deux points) mais l'est plus quant à la définition des perpendiculaires. Un successeur immédiat d'ARNAULD est le Père LAMY qui, lui, abuse des démonstrations par l'absurde.

Les Éléments de Géométrie de Monseigneur le duc de Bourgogne écrits par MALEZIEU en 1705 forment un joli résumé de la pensée de Port-Royal.

Tous ces manuels sont proches de la méthode hypothético-déductive. Des tentatives opposées voient le jour par CLAIRAUT et par Louis PUISSANT.

Les contenus de trois manuels d'enseignement de la géométrie

Parmi les nombreux manuels de géométrie édités, nous choisissons d'examiner les trois suivants :

- Les Éléments d'ARNAULD ;
- Les Éléments de CLAIRAUT ;
- La Géométrie de LEGENDRE, qui marque le retour à EUCLIDE avec un franc succès éditorial (la première édition date de l'an II — 1794 — et la dernière de 1889).

[8] Théologien né en 1612 qui a écrit environ 140 volumes dont certains en collaboration avec PASCAL, NICOLLE, LAMY. Ses écrits peuvent être classés de la manière suivante : Grammaire générale et raisonnée dont les éléments de géométrie, matières de la grâce, livres de controverse contre les calvinistes, écrits contre les jésuites, écrits sur l'Écriture Sainte.

[9] Moraliste (1625–1695) et l'un des plus célèbres écrivains de Port-Royal. En 1655, il travaille sous la direction du docteur ARNAULD.

Le plan des Éléments de Géométrie d'Arnauld

Les quatre premiers livres traitent de questions algébriques (essentiellement autour de la proportionnalité).

La partie Géométrie commence, elle, au cinquième livre, page 145 de la seconde édition qui comporte 480 pages. La notion première est celle d'espace ; la superficie est un espace à deux dimensions, la ligne et le point sont définis de manière analogue. Ces objets ici étant quelconques.

La partie Géométrie commence par les avertissements suivants (p 146/147) :

Les idées d'une surface plate et d'une ligne droite sont si simples, qu'on ne ferait qu'embrouiller ces termes en voulant les définir. On peut seulement en donner des exemples pour en fixer l'idée aux termes de chaque langue.

Quoiqu'il n'y ait point au monde d'étendue qui n'ait que longueur et largeur sans profondeur, ou longueur sans largeur ni profondeur, et encore moins de point qui n'ait ni longueur, ni largeur, ni profondeur : ce que disent les Géomètres des surfaces, des lignes et des points ne laissent pas d'être vrais ; parce qu'il suffit pour cela que dans un corps qui est véritablement long, large, et profond, je puisse n'en considérer que la longueur et la largeur, sans faire attention à la profondeur... Ainsi pour mesurer un champ, je ne m'amuse pas à creuser pour savoir si la terre y est bien profonde... Et pour savoir combien il y a de Paris à Orléans, je ne mesure pas la largeur des chemins, mais seulement la longueur...

On commence par la ligne droite car c'est la plus simple.

liste de quelques axiomes

ligne circulaire, avec axiomes

lignes perpendiculaires

définition d'une perpendiculaire : *une ligne droite n'en peut couper une autre qu'en un point. Mais la coupant elle le peut faire de deux manières. La première, est en ne penchant point plus vers un côté de la ligne coupée, que vers l'autre. Les droites sont dites perpendiculaires... sinon elles sont dites obliques.* Suit une définition dite plus exacte : *c'est le lieu des points équidistants à deux points donnés.*

livre VI : des lignes parallèles

ce sont celles qui ne sont ni perpendiculaires, ni obliques.

ce sont celles qui sont également distantes l'une de l'autre.

livre VII des lignes terminées à une circonférence, où il est parlé des sinus

définition du sinus d'un arc (qui ne mesure que les arcs moindres que la moitié de la demi circonférence)

sécantes

tangentes

livre VIII des angles rectilignes

par définition, l'angle rectiligne est une surface comprise entre deux lignes droites qui se joignent en un point du côté où elles s'approchent le plus, indéfinies...

mesure des angles (grâce aux sin du livre précédent)

livre IX des angles qui ont leur sommet hors le centre du cercle, dont les arcs ne laissent pas de les mesurer.

livre X des lignes proportionnelles

livre XI des lignes réciproques

livre XII des figures en général

livre XIII des triangles et des quadrilatères

livre XIV des figures planes considérées selon leur aire c'est-à-dire selon la grandeur des surfaces qu'elles contiennent.

C'est dans ce livre que l'on trouve le théorème de PYTHAGORE.

livre XV de la mesure de l'aire des parallélogrammes, des triangles et autres polygones.

Ce livre comprend un paragraphe sur la géométrie des indivisibles.

L'aire d'une surface est la somme des lignes qui la remplissent ; de sorte que deux surfaces sont estimées égales, quand l'une et l'autre est remplie par une somme égale de lignes égales ; soit que chacune de celles d'une somme soit égale à chacune de celle de l'autre somme ; soit qu'il se fasse une compensation

Le manuel se termine par un traité des carrés magiques écrit par PASCAL.

Le plan des éléments de géométrie de CLAIRAUT

Première partie. Des moyens qu'il était le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des terrains.

ligne droite : c'est le plus court chemin entre deux points. Il est en effet naturel de mesurer la distance entre deux points

ligne perpendiculaire : ligne qui tombe sur une autre, sans pencher sur elle d'aucun côté. Ici le naturel est de mesurer la distance d'un point à une ligne. pour tracer une perpendiculaire, CLAIRAUT propose de tracer la médiatrice d'un segment (ligne équidistante de deux points donnés ; c'est une propriété donnée sans démonstration)

rectangle, avec comme cas particulier le carré.

cercle : trace décrite par la pointe mobile d'un compas.

les parallèles sont les lignes toujours également distantes les unes des autres. Ce sont les lignes qui interviennent dans la construction des remparts, canaux, ... Le tracé d'une parallèle se déduit de celui d'un rectangle.

mesure du rectangle lié à la mesure de la tapisserie pour une chambre. CLAIRAUT remarque qu'en général les surfaces ne sont pas rectangulaires mais terminées par des lignes presque droites et qu'il a donc besoin de la mesure des polygones. Par triangulation, il ramène ce problème à celui de la mesure des triangles.

triangle (le triangle rectangle est un demi-rectangle)

parallélogrammes

polygones réguliers. Ils sont obtenus en découpant de cercles en parties égales.

Après ces premiers principes, CLAIRAUT remarque qu'en pratique tout ceci est inefficace car il y a souvent des obstacles comme, par exemple, un bois ou un étang, même si l'on admet que le terrain est plat. cette remarque l'amène à la notion de triangle semblable. Il regarde donc les cas d'égalité des triangles.

angle : inclinaison d'une ligne sur une autre.

triangles égaux

lignes proportionnelles, figures semblables.

mesures d'angles en degré.

Seconde partie. De la méthode géométrique pour comparer les figures rectilignes

Si on a fait attention à ce que nous avons dit, pour montrer comment on est parvenu à mesurer les terrains, on a dû reconnaître que les positions des lignes les unes à l'égard des autres, fournissaient des remarques dignes d'attention par elles-mêmes, indépendamment de l'utilité dont elles pouvaient être dans la pratique ; et il est à présumer que ces remarques ont engagé les premiers géomètres à pousser plus loin leurs découvertes, car ce ne sont pas seulement les besoins qui déterminent les hommes, la curiosité est souvent un aussi grand motif pour exciter leurs recherches.

Cette partie met en place les outils pour arriver au théorème de PYTHAGORE qui en est l'aboutissement.

Troisième partie. De la mesure des figures circulaires, et de leurs propriétés

Les terrains ne sont pas toujours bornés par des lignes droites ; c'est ce qui justifie cette partie.

aire d'un cercle (une idée du résultat est donnée par la méthode d'ARCHIMÈDE), d'une couronne

tangente : CLAIRAUT démontre que la tangente est perpendiculaire au rayon après l'avoir définie comme position limite de cordes.

moyenne proportionnelle ; c'est ce qui intervient quand on veut changer un rectangle en carré.

Quatrième partie. De la mesure des solides

Une situation concrète est fournie par la quantité d'eau d'un réservoir ou d'un fossé. CLAIRAUT annonce qu'il procède comme en dimension deux, à savoir par le cube. Il procède dans cette partie presque entièrement par analogie.

cube : figure terminée par six carrés

parallélépipède
perpendiculaire à un plan
axiomes d'incidence dans l'espace
pyramide
cylindre, cône, sphère (surface et volume)
solides semblables

Le plan des éléments de géométrie de Legendre

Voir la préface.

Bibliographie

Arnauld, Nouveaux éléments de géométrie, Paris 1667, réédition 1711

Blanché, L'axiomatique. PUF 1965

Bourbaki, Éléments d'histoire des mathématiques. Masson

Clairaut, Éléments de géométrie, Paris 1741

J. Dieudonné, Pour l'honneur de l'esprit humain. Hachette, 1986

J. Dieudonné *et alii*, Abrégé d'histoire des mathématiques, Hermann, seconde édition 1986.

Article de M. Guillaume : Axiomatique et logique.
Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, éd. française rédigée sous la direction de J. Molk, Paris Gautiers-Villars. Réédition Gabay

Euclide, Les Éléments

Hilbert, Les principes fondamentaux de la géométrie ; traduits par Laugel. Paris Gauthiers-Villars, 1900

Hilbert, Les fondements de la géométrie, édition critique préparée par P. Rossier. Dunod 1971, réédition Gabay, 1997

Itard, Essai d'histoire des mathématiques, Blanchard, 1984

Legendre, Éléments de géométrie, Paris, Firmin-Didot, troisième édition, an IX-1800

Préface de « Éléments de géométrie » de Clairaut parus en 1741

Quoique la géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les Éléments ordinaires. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, et de principes élémentaires, qui semblent ne promettre rien que de sec au Lecteur. Les propositions qui viennent ensuite ne fixant point l'esprit sur des objets plus intéressants, et étant difficiles à concevoir, il arrive *communément que les Commençants se fatiguent et se rebutent, avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on voulait leur enseigner.*

Il est vrai que pour sauver cette sécheresse, naturellement attachée à l'étude de la Géométrie, quelques Auteurs ont imaginer de mettre à la suite de chaque proposition essentielle, l'usage que l'on peut en faire pour la pratique ; mais par là, ils prouvent l'utilité de la Géométrie, sans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre. Car chaque proposition venant toujours avant son usage, l'esprit ne revient à des idées sensibles, qu'après avoir essuyé la fatigue de saisir les idées abstraites.

Quelques réflexions que j'ai faites sur l'origine de la Géométrie, m'ont fait espérer d'éviter ces inconvénients, en réunissant les deux avantages d'intéresser et d'éclairer les Commençants. J'ai pensé que cette Science, comme toutes les autres, devait s'être formée par degrés ; que c'était vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvaient pas être hors de la portée des Commençants puisque c'étaient des Commençants qui les avaient faits.

Prévenu de cette idée, je me suis proposé de remonter à ce qui pouvait avoir donné naissance à la Géométrie ; et j'ai taché d'en développer les principes, par une méthode assez naturelle, pour être supposée la même que celle des premiers Inventeurs ; observant seulement d'éviter toutes les fausses tentatives qu'ils ont nécessairement dû faire.

La mesure des Terrains m'a paru ce qu'il y avait de plus propre à faire naître les premières propositions de Géométrie ; et, c'est en effet, l'origine de cette Science, puisque Géométrie signifie **mesure du terrain***. Quelques Auteurs prétendent que les Égyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs Héritages détruites par les débordements du Nil, jetèrent les premiers fondements de la Géométrie, en cherchant les moyens de s'assurer exactement de la situation de l'étendue et de la figure de leurs domaines. Mais quand on ne s'en rapporterait pas à ces Auteurs, du moins ne saurait-on pas douter que dès les premiers temps, les hommes n'aient chercher des méthodes pour mesurer et pour partager leurs Terres. Voulant dans la suite perfectionner ces méthodes, les recherches particulières les conduisirent peu à peu, à des recherches générales ; et s'étant enfin proposé de connaître le rapport exact de toutes sortes de grandeurs, ils formèrent une Science d'un objet beaucoup plus vaste, que celui qu'ils avaient d'abord embrassé, et à laquelle ils conservèrent cependant le nom qu'ils lui avaient donné dans son origine.*

Afin de suivre dans cet Ouvrage une route semblable à celle des Inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux Commençants les principes dont peut dépendre la simple mesure des Terrains, et des distances accessibles ou inaccessibles, etc. De-là je passe à d'autres recherches qui ont une analogie avec les premières, que la curiosité naturelle à tous les hommes, les porte à s'y arrêter ; et justifiant ensuite cette curiosité par quelques applications utiles, je parviens à faire parcourir tout ce que la Géométrie élémentaire a de plus intéressant.

On ne saurait disconvenir, ce me semble, que cette méthode ne soit au moins propre à encourager ceux qui pourraient être rebutés par la sécheresse des vérités géométriques, dénuées d'applications ; mais j'espère qu'elle aura encore une utilité plus importante, c'est qu'elle accoutumera à chercher et à découvrir ; car j'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes ; c'est-à-dire, de ces propositions, où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir.

Si les premiers Auteurs de Mathématiques ont présenté leurs découvertes en théorèmes, ç'a été, sans doute, pour donner un air plus merveilleux à leurs productions, ou pour éviter la peine de reprendre la suite des idées qui les avaient conduits dans leurs recherches. Quoi qu'il en soit, il m'a paru beaucoup plus à propos d'occuper continuellement mes Lecteurs à résoudre des problèmes ; c'est-à-dire, à chercher les moyens de faire quelque opération, ou de découvrir quelque vérité inconnue, en déterminant le rapport qui est entre des grandeurs données, et des grandeurs inconnues qu'on se propose de trouver. En suivant cette voie, les Commençants aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'Inventeur, et par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention.

On me reprochera peut-être, en quelques endroits de ces Éléments, de m'en rapporter trop au témoignage des yeux, et de ne m'attacher pas assez à l'exactitude rigoureuse des démonstrations. Je prie ceux qui pourraient me faire un pareil reproche, d'observer que je ne passe légèrement, que sur des propositions dont la vérité se découvre pour peu qu'on y fasse attention. J'en use de la sorte, surtout dans les commencements, où il se rencontre plus souvent des propositions de ce genre, parce que j'ai remarqué que ceux qui avaient de la disposition à la Géométrie, se plaisaient à exercer un peu leur esprit ; et qu'au contraire, ils se rebutaient, lorsqu'on les accablait de démonstrations, pour ainsi dire, inutiles.

*Qu'*EUCLIDE *se donne la peine de démontrer, que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre, a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il est renfermé ; on n'en sera pas surpris. Ce Géomètre avait à convaincre des Sophistes obstinés, qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes : il fallait donc qu'alors la Géométrie eût, comme la logique, le secours des raisonnements en forme, pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'a obscurcir la vérité, et à dégoûter les Lecteurs.*

Un autre reproche qu'on pourrait me faire, ce serait d'avoir omis différentes propositions, qui trouveraient leur place dans les Éléments ordinaires, et me contenter, lorsque je traite des propositions, d'en donner seulement les principes fondamentaux.

À cela je réponds qu'on trouve dans ce Traité tout ce qui peut servir à remplir mon projet, que les propositions que je néglige sont celles qui ne peuvent être d'aucune utilité *par elles-mêmes, et qui d'ailleurs ne sauraient contribuer à faciliter l'intelligence de celles dont il importe d'être instruit : qu'à l'égard des proportions, ce que j'en dis doit suffire pour faire entendre les propositions élémentaires qui les supposent. C'est une matière que je traiterai plus à fond dans les Éléments d'Algèbre, que je donnerai dans la suite.*

Enfin, comme j'ai choisi la mesure des Terrains pour intéresser les Commençants, ne dois-je pas craindre qu'on me confonde avec les Traités ordinaires d'Arpentage ? Cette pensée ne peut venir qu'à ceux qui ne considéreront pas que la mesure des Terrains n'est point le véritable objet de ce Livre, mais qu'elle me sert seulement d'occasion pour faire découvrir les principales vérités géométriques. J'aurais pu de même, remonter à ces vérités, en faisant l'Histoire de la Physique, de l'Astronomie, ou de tout autre partie des Mathématiques que j'aurais voulu choisir ; mais alors la multitude des idées étrangères, dont il aurait fallu s'occuper, aurait comme étouffé les idées géométriques, auxquelles seules je devais fixer l'esprit du Lecteur.

Préface de *Nouveaux Éléments de Géométrie* contenant outre un ordre nouveau, et de nouvelles démonstrations les plus communes, De nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, de nouvelles mesures des angles, dont on ne s'était point encore avisé, Et de nouvelles manières de trouver et de démontrer la proportion des lignes. Arnauld, Paris 1667
(cette préface est commune aux éditions de 1667 et 1711 malgré les nombreux changements quant à l'organisation des manuels)

Quoique j'[10]*aie quelque sorte de liberté de parler avantageusement de ces Nouveaux Éléments de Géométrie, puisque je n'y ai point d'autre part que celle de les avoir tirées des mains de l'Auteur pour les donner au Public ; mon dessein n'est pas néanmoins d'en faire voir ici l'excellence, ni de les proposer au monde comme un ouvrage fort considérable. Je serais plutôt porté à diminuer l'idée trop haute que quelques personnes en pourraient avoir, étant très persuadé qu'il est beaucoup plus dangereux d'estimer trop ces sortes de choses, que de ne les pas estimer assez.*

La nature de toutes les sciences humaines, et principalement de celles qui entrent peu dans le commerce de la vie, est d'être mêlées d'utilités et d'inutilités : et je ne sais si l'on ne peut point dire qu'elles sont toutes inutiles en elles-mêmes ; et qu'elles devraient passer pour un amusement entièrement vain et indigne de personnes sages, si elles ne pouvaient servir d'instruments et de préparation à d'autres connaissances vraiment utiles. Ainsi ceux qui s'y attachent pour elles-mêmes comme à quelque chose de grand et de relevé n'en connaissent pas le vrai usage, et cette ignorance est en eux un beaucoup plus grand défaut que s'ils ignoraient absolument ces Sciences.

Ce n'est pas un grand mal que de n'être pas géomètre ; mais c'en est un considérable

[10] Nicolle, le co-auteur de *La logique ou l'art de penser* avec Arnauld a écrit cette préface.

que de croire que la Géométrie est une chose fort estimable, et de s'estimer soi-même pour s'être rempli la tête de Lignes, d'Angles, de Cercles, de proportions. C'est une ignorance très blâmable que de ne pas savoir que toutes ces spéculations stériles ne contribuent rien à nous rendre heureux ; qu'elles ne soulagent point nos misères ; qu'elles ne nous guérissent point nos maux ; qu'elles ne nous peuvent donner aucun contentement réel et solide ; que l'Homme n'est point fait pour cela ; et que bien loin que ces Sciences lui donnent sujet de s'élever en lui-même, elles sont au contraire des preuves de la bassesse de son esprit ; puisqu'il est si vain et si vide de vrai bien, qu'il est capable de s'occuper tout entier à des choses si vaines et si inutiles.

Cependant on ne voit que trop par expérience, que ces sortes de connaissances sont d'ordinaires jointes à l'ignorance de leur prix et de leur usage. On les recherche pour elles-mêmes ; on s'y applique comme à des choses fort importantes ; on en fait sa principale profession ; on se glorifie des découvertes que l'on y fait ; on se croit fort obliger le monde si l'on veut bien lui en faire part ; et l'on s'imagine mériter par là un rang fort considérable entre les Savants et les grands Esprits.

Si cet Ouvrage n'a rien de ce qui mérite la réputation de grand Géomètre au jugement de ces personnes, en quoi il est très juste de les en croire ; au moins on peut dire avec vérité que celui qui l'a composé est exempt du défaut de la souhaiter, et que quoiqu'il estime beaucoup le génie de plusieurs personnes qui se mêlent de cette Science, il n'a qu'une estime très médiocre pour la Géométrie en elle-même. Néanmoins comme il est impossible de se passer absolument d'une Science qui sert de fondement à tant d'Arts nécessaires à la vie humaine, il peut y avoir quelque utilité à montrer aux Hommes de quelle sorte ils en doivent user, et de leur rendre cette étude plus avantageuse qu'il est possible.

C'est l'unique vue qu'a eue l'Auteur de ces nouveaux Éléments. Il n'a pas tant considéré la Géométrie, que l'usage qu'on pouvait en faire ; et il a cru qu'en évitant ces défauts qui n'en sont pas inséparables, on s'en pouvait très utilement servir pour former les jeunes gens, non seulement à la justesse de l'esprit ; mais même en quelque sorte à la piété et au règlement des mœurs.

Pour comprendre les avantages qu'on peut tirer, il faut considérer que dans les premières années de l'enfance l'Âme de l'Homme est comme toute plongée et toute ensevelie dans les sens, et qu'elle n'a que des perceptions obscures et confuses des objets qui font impression sur son corps. Elle sort à la vérité de cet état à mesure que les organes se dégagent et se fortifient par l'âge, et elle acquiert quelque liberté de former des pensées plus claires et plus distinctes, et même de les tirer les unes des autres, ce que l'on appelle raisonnement. Mais l'amour des choses sensibles et extérieures lui étant devenu comme naturel, et par la corruption de son origine et par l'accoutumance qu'elle a contractée durant l'enfance, les choses extérieures sont toujours le principal objet de son plaisir et de sa pente. Ainsi non seulement les jeunes gens ne se plaisent guère que dans les choses *sensuelles ; mais même entre les personnes avancées en âge il y en a peu qui soient capables de trouver du goût dans une vérité purement spirituelle, et où les sens n'aient aucune part. Toute leur application est toujours aux manières agréables ; ils n'ont de l'intelligence et de la délicatesse que pour cela et ils ne se servent de leur esprit que pour étudier l'agrément et l'art de plaire, par les choses qui flattent la concupiscence et les sens.*

Il me serait aisé de montrer que cette disposition d'esprit est non seulement un très grand défaut, mais que c'est la source des plus grands désordres et des plus grands vices. Il est vrai qu'il n'y a que la Grâce et les exercices de piété qui puissent la guérir véritablement : mais entre les exercices humains qui peuvent le plus servir à la diminuer et à disposer même l'esprit à recevoir les vérités Chrestiennes avec moins d'opposition et de dégoût, il semble qu'il n'y en ait guère de plus propre que l'étude de la Géométrie. Car rien n'est plus capable de détacher l'âme de cette application aux sens, qu'une autre application à un objet qui n'a rien d'agréable selon les sens ; et c'est ce qui se rencontre parfaitement dans cette Science. Elle n'a rien du tout qui puisse favoriser tant soit peu la pente de l'Âme vers les sens ; son objet n'a aucune liaison avec la concupiscence ; elle est incapable d'éloquence et d'agrément dans le langage ; rien n'y excite les passions ; elle n'a rien du tout d'aimable que la vérité et elle la présente à l'Âme toute nue et détachée de tout ce que l'on aime le plus dans les autres choses.

Que si les vérités qu'elle propose ne sont pas fort utiles ni fort importantes, si l'on en demeurait là ; il est néanmoins très utile et très important de s'accoutumer à aimer la vérité, à la goûter, à en sentir la beauté. Et Dieu se sert souvent de cette disposition d'esprit, pour nous faire entrer dans l'amour et dans la pratique des vérités qui conduisent au salut, pour nous faire voir l'illusion de tout ce qui plaît dans les choses sensibles et extérieures, et pour nous rendre justes et équitables dans toute la conduite de notre vie ; cet esprit d'équité consistant principalement dans le discernement et dans l'amour de la vérité en toutes les affaires que nous traitions.

Mais la Géométrie ne sert pas seulement à détacher l'Esprit des choses sensibles, et à imposer le goût de la vérité ; elle apprend aussi à la reconnaître et à ne se laisser pas tromper par quantité de maximes obscures et incertaines, qui servent de principes aux faux raisonnements dont les discours des Hommes sont tout remplis. Car si l'on n'y prend garde, ce qui nous jette ordinairement dans l'erreur et nous fait prendre le faux pour le vrai, n'est pas le défaut de liaison des conséquences avec les principes, en quoi consiste ce qu'on appelle la forme des arguments ; mais c'est l'obscurité des principes mêmes, qui n'étant pas exactement vrais, et n'étant pas aussi évidemment faux, présentent à l'Esprit une lumière confuse où la vérité et la fausseté sont mêlées ; ce qui cause à plusieurs une espèce d'éblouissement qui leur fait approuver les principes sans les examiner davantage.

Il est vrai que la Logique nous donne deux excellentes règles pour éviter cette illusion, qui sont de définir tous les mots équivoques, et de ne recevoir jamais que des principes *clairs et certains. Mais ces règles ne suffisent pas pour nous garantir d'erreur. Premièrement, parce qu'on se trompe souvent dans la notion même d'évidence en prenant pour évident ce qui ne l'est pas. En second lieu, parce que quoiqu'on sache ces règles, on n'est pas toujours appliquer à les pratiquer. Il n'y a donc que la Géométrie qui remédie à l'un et à l'autre de ces défauts. Car d'une part en fournissant des principes vraiment clairs, elle nous donne le modèle de la clarté et de l'évidence pour discerner ceux qui l'ont de ceux qui ne l'ont pas : et de l'autre, comme elle ne se dispense jamais de l'observation de ces deux règles, elle accoutume l'Esprit à les pratiquer, et à être toujours en garde contre les équivoques des mots et contre les principes confus, qui sont les deux sources les plus communes des mauvais raisonnements.*

Il ne faut pas dissimuler néanmoins que cette coutume même de rejeter tout ce qui n'est pas entièrement clair, peut engager dans un défaut très considérable, qui est de vouloir pratiquer cette exactitude en toute sorte de matières, et de contredire tout ce qui n'est pas proposé avec l'évidence Géométrique. Cependant il y a une infinité de choses dont on ne doit pas juger en cette manière, et qui ne peuvent pas être réduites à des démonstrations méthodiques. Et la raison en est, qu'elles ne dépendent pas d'un certain nombre de principes grossiers et certains, comme les vérités Mathématiques ; mais d'un grand nombre de preuves et de circonstances qu'il faut que l'Esprit voie tout d'un coup, et qui n'étant pas convaincantes séparément, ne laissent pas de persuader avec raison, lorsqu'elles sont jointes et unies ensemble. La plupart des matières morales et humaines sont de ce nombre ; et il y a même des vérités de la Religion qui se prouvent beaucoup mieux par la lumière de plusieurs principes qui s'entraident et se soutiennent les uns les autres, que par des raisonnements semblables aux démonstrations Géométriques. C'est donc sans doute un fort grand défaut que de ne faire pas distinction des matières ; d'exiger par tout cette suite méthodique de propositions, que l'on voit dans la Géométrie ; de faire difficulté sur tout, et de croire avoir droit de rejeter absolument un principe lorsqu'on juge qu'il peut recevoir quelque exception en quelque rencontre.

Mais si ce défaut est assez ordinaire à quelques Géomètres, il ne naît pas néanmoins de la Géométrie même. Cette science étant toute véritable ne peut autoriser une conduite qui n'est fondée que sur des principes d'erreur. Car il n'est pas vrai qu'un principe qui ne prouve pas absolument ne prouve rien ; et que ne prouvant pas tout seul, il ne prouve pas étant joint à d'autres. Il y a différents degrés de preuves. Il y en a dont on conclut la certitude, et d'autres dont on conclut l'apparence ; et de plusieurs apparences jointes ensembles, on conclut quelques fois une certitude à laquelle tous les Esprits raisonnables se doivent rendre. Il n'est pas absolument certain que l'on doive voir le Soleil quelqu'un des jours de l'Année qui vient, je le dois néanmoins croire ; et je serais ridicule d'en douter, quoiqu'il soit impossible de le démontrer. La Raison ne doit donc pas prétendre de démontrer Géométriquement ces choses ; mais elle peut prouver Géométriquement que *c'est une sottise de ne les pas croire : Et c'est en cette manière qu'on peut se servir de la Géométrie même dans ces sortes de matières, pour faire voir plus clairement la force de la vraisemblance qui nous les doit faire croire.*

Outre ces utilités que l'on peut tirer de la Géométrie, on peut encore remarquer deux autres qui ne sont pas moins considérables. Il y a des vérités importantes pour la conduite de la vie et pour le salut, qui ne laissent pas d'être difficiles à comprendre, et qui ont besoin d'une attention pénible ; Dieu ayant voulu, comme dit Saint Augustin, que le pain de l'Âme se gagnât avec quelque sorte de travail aussi bien que le pain du Corps. Et il arrive de là que plusieurs personnes s'en rebutent par une certaine paresse, ou plutôt par une délicatesse d'esprit qui leur donne du dégoût de tout ce qui demande quelque effort et quelque sorte de contention. Or l'étude de la Géométrie est encore un remède à ce défaut ; car en appliquant l'Esprit à des vérités abstraites et difficiles, elle lui rend faciles toutes celles qui demandent moins d'application ; comme en accoutumant le corps à porter des fardeaux pesants, on fait qu'il ne sent presque plus le poids de ceux qui sont plus légers.

Non seulement elle ouvre l'Esprit et le fortifie pour concevoir tout avec moins de peine ; mais elle fait aussi qu'il devient plus étendu et plus capable de comprendre plusieurs choses à la fois. Car les vérités Géométriques ont cela de propre qu'elles dépendent d'un long enchaînement de principes qu'il faut suivre pour arriver à la conclusion ; et comme cette conclusion tire sa lumière de ces principes, il faut que l'Esprit voie en même temps, et ce qui éclaire et ce qui est éclairé : ce qu'il ne peut pas faire sans s'étendre, et sans porter sa vue plus loin que dans ses actions ordinaires.

Cette étendue d'esprit, qui paraît dans la Géométrie, est non seulement très utile pour tous les sujets qui ont besoin de raisonnement ; mais elle est aussi très admirable en elle- même ; et il n'y a guère de qualité de notre Âme qui en fasse mieux voir la grandeur, et qui détruise davantage les imaginations basses et grossières de ceux qui voudraient la faire passer pour une matière. Car le moyen de s'imaginer qu'un Corps, c'est-à-dire, un Être où nous ne concevons qu'une étendue figurée et mobile, puisse pénétrer ce grand nombre de principes tout spirituels qu'il faut lier ensemble pour la preuve des propositions que la Géométrie nous démontre, et qu'il porte même sa vue jusque dans l'Infini pour en assurer ou en tirer plusieurs choses avec une certitude entière ? Elle nous fait voir par exemple, que la Diagonale et le côté d'un Quarré n'ont nulle mesure commune ; c'est-à-dire, que l'Esprit voit que dans l'infinité des parties de différente grandeur qu'on y peut choisir, il n'y en a aucune qui puisse mesurer exactement l'une et l'autre de ces deux lignes.

On peut dire que toutes les propositions Géométriques sont de même infinies en étendue ; parce que l'on n'y conclut pas ce qu'on démontre d'une seule Ligne, d'un seul Angle, d'un seul Cercle, d'un seul Triangle, mais de toutes les Lignes, de tous les Angles, de tous les Cercles, de tous les Triangles ; et qu'ainsi l'Esprit les renferme et les comprend tous en quelque sorte quelque infinis qu'ils soient. Or que tout cela se puisse faire par le *bouleversement d'une matière, et qu'en la remuant elle devienne capable de comprendre des objets spirituels, et d'en comprendre même une infinité, c'est ce que personne ne saurait croire ni penser, pourvu qu'il veuille de bonne foi songer à ce qu'il dit.*

Ce sont ces réflexions qui ont fait juger à l'Auteur de ces Éléments qu'on pouvait faire un bon usage de la Géométrie ; mais ce n'est pas néanmoins ce qui l'a porté à travailler à en faire de nouveaux, puisqu'on peut tirer tous ces avantages des livres ordinaires qui en traitent. Ils portent tous à aimer la vérité ; ils apprennent à la discerner ; ils fortifient la Raison ; ils étendent la vue de l'Esprit, et ils donnent lieu d'admirer la grandeur de l'Âme de l'Homme, et de reconnaître qu 'elle ne peut être autre que spirituelle et immortelle.

Ce qui lui a donc fait croire qu'il était utile de donner une nouvelle forme à cette Science, est, qu'étant persuadé que c'était une chose fort avantageuse se s'accoutumer à réduire ses pensées à un ordre naturel, cet ordre était comme une lumière qui les éclaircit toutes les unes par les autres ; il a toujours eu quelque peine de ce que les Éléments d'Euclide étaient tellement confus et brouillés, que bien loin de pouvoir donner à l'Esprit l'idée et le goût du véritable ordre, ils ne pouvaient au contraire que l'accoutumer au désordre et à la confusion.

Ce défaut lui paraissait considérable dans une Science dont la principale utilité est de perfectionner la Raison ; mais il n'eut pas pensé néanmoins à y remédier sans la rencontre que je vais dire qui l'y engagea insensiblement. Un des plus grands Esprits de ce siècle, et des plus célèbres par l'ouverture admirable qu'il avait pour les Mathématiques, avait fait en quelques jours un essai d'Éléments de Géométrie ; et comme il n'avait pas cette vue de l'ordre, il s'était contenté de changer plusieurs des démonstrations d'Euclide pour en substituer d'autres plus nettes et plus naturelles. Ce petit Ouvrage étant tombé entre les mains de celui qui a composé ces Éléments, il s'étonna de la confusion qu'il avait laissée pour ce qui est de la méthode, et cette pensée lui ouvrit en même temps une manière naturelle de disposer toute la Géométrie ; les démonstrations s'arrangèrent d'elles mêmes dans son esprit, et tout le corps de l'Ouvrage que nous donnons maintenant au Public se forma dans son idée.

Cela lui fit dire en riant à quelques uns de ses amis, que s'il avait le loisir, il lui serait facile de faire des Éléments de Géométrie mieux ordonnés que ceux que l'on lui avait montrés ; mais ce n'était encore qu'un projet en l'air qu'il avait peu d'espérance de pouvoir exécuter, quoique quelques personnes l'en priassent ; parce qu'il avait fait scrupule d'y employer un temps où il aurait été en état de faire quelqu'autre chose.

Il est arrivé néanmoins depuis que diverses rencontres lui ont donné le loisir dont il avait besoin pour cela. Il fut une fois obligé par une indisposition de quitter ses occupations ordinaires, et il trouva son soulagement en se déchargeant d'une partie de ce qu'il avait dans l'Esprit sur cette matière. Une autre fois il se trouva quatre ou cinq jours dans une maison de Campagne sans aucun livre, et il remplit encore ce vide en composant quelque partie de *ce Traité. Enfin en ménageant ainsi quelques petits temps, il a achevé ce qu'il avait dessein de faire de cet Ouvrage, s'étant borné d'abord à la Géométrie des plans comme pouvant suffire au commun du monde.*

Quelques personnes se sont étonnées qu'en écrivant d'une matière si étendue, et qui a été traitée par un si grand nombre d'habiles gens, il ne lut pour cela aucun livre de Géométrie, n'en ayant point même dans sa Bibliothèque : mais il leur répondait, que l'ordre le conduisait tellement qu'il ne croyait pas pouvoir rien oublier de considérable. Il ajoutait même que cet ordre ne servait pas seulement à faciliter l'intelligence et à soulager la mémoire : mais qu'il donnait lieu de trouver des principes plus féconds, et des démonstrations plus nettes que celles dont on se sert d'ordinaire. Et en effet il n'y a presque dans ces nouveaux Éléments que des démonstrations toutes nouvelles, qui naissent d'elles-mêmes des principes qui sont établis, et qui comprennent un assez grand nombre de nouvelles propositions.

On voit assez par là qu'il n'était pas fort difficile à l'Auteur de la nouvelle Logique ou Art de penser, qui avait vu quelque chose de cette Géométrie, de remarquer, comme il a fait dans la IV^e partie, les défauts de la méthode d'Euclide, et d'avancer qu'on pouvait digérer la Géométrie dans un meilleur ordre. C'était deviner les choses passées. Mais cette avance qu'il avait faite, sans se hasarder beaucoup, a depuis servi d'engagement à produire ce petit Ouvrage, à quoi l'on n'aurait peut-être jamais pensé. Car tant de personnes ont demandé au Libraire une nouvelle Géométrie, qu'on n'a pas pu la refuser aux instances qu'il a faites de leur part pour l'obtenir, n'étant pas juste de se faire beaucoup prier pour peu de chose.

On s'est donc résolu de la donner au Public, et de le rendre juge de l'utilité qu'on peut en tirer. On croit seulement devoir avertir le monde qu'il y aura peut-être quelques personnes qui pourront trouver les IV premiers livres un peu difficile, parce qu'on s'y est servi de démonstrations d'Algèbre, auxquelles on a quelque peine d'abord à s'accoutumer. La raison qui a obligé d'en user ainsi, est, que traitant des grandeurs en général en tant que ce mot comprend toutes les espèces de quantité, on ne pouvait pas se servir de figures pour aider l'Imagination ; outre que l'on jugeait qu'il était utile de se rompre d'abord à cette méthode, qui est la plus féconde et la plus Géométrique ; mais ceux néanmoins à qui elle ferait trop de peine ont moyen de s'en exempter en commençant par le V^e livre, et en supposant prouvées quelques Propositions qui dépendent des quatre premiers. Ce remède est aisé, et il ne privera pas du fruit qu'ils pourront en tirer de la méthode des ces Éléments lorsqu'en une seconde lecture ils les liront tout de suite.

Pour les autres jugements qu'on peut faire de cet Ouvrage, comme il est facile de les prévoir, il semble aussi qu'on n'ait pas sujet de s'en mettre en peine. Car, il se trouve des personnes qui le méprisent par des principes plus élevés, et par un éloignement de toutes ces sortes de Sciences, peut-être ne seront-ils pas fort éloignés du sentiment de *l'Auteur. S'il y en a qui blâment comme Géomètres en y remarquant de véritables fautes ils seront encore d'accord avec lui, parce qu'il sera toujours tout prêt de les corriger. Enfin ceux qui le reprendront comme Géomètres, mais en se trompant, ne peuvent pas être fort incommodes, parce que c'est une matière où les vérités sont si claires, qu'elles n'ont guère besoin d'apologie contre les injustes accusations.*

A. Deparcieux et l'Arithmétique Politique

Yves Ducel,
IREM[1] *de Franche-Comté*

Cet article reprend le texte de mon exposé au colloque sur « L'Arithmétique Politique Française » 22–24 octobre 1998 à la Faculté des Lettres de BESANÇON.

Sommaire

Antoine Deparcieux est surtout connu pour avoir établi, discuté la première table de mortalité française, et explicité à cet effet la notion de vie moyenne en la distinguant de celle de vie médiane. Cet aspect de l'œuvre de Deparcieux a fait l'objet de travaux auxquels nous renvoyons[2], notamment ceux de Béhar, Dupâquier, Ptoukha. Mais au-delà de cette contribution de Deparcieux à la statistique et à la démographie se posent les questions de l'utilisation que fait Deparcieux de ces concepts et des motivations qui l'expliquent.

Commentant les erreurs que les « premiers faiseurs de plans » commettaient dans leur calcul des rentes[3] purement viagères, Deparcieux écrit, une dizaine de pages avant la fin de l'*Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, « Celui qui fait un plan, doit le faire vrai et selon l'équité ». Dans cet exposé, nous nous proposons d'interroger, plus particulièrement, la démarche de Deparcieux au regard de cette exigence du vrai et de l'équité en référence à l'homme et à son œuvre, notamment l'*Essai des Probabilités sur la durée de la vie humaine*.

[1] Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Département de Mathématiques, UFR des Sciences et Techniques, 16, route de Gray, F-25030 BESANÇON CEDEX

[2] Voir aussi Rohrbasser, Kertanguy.

[3] « Quand on dit simplement *Rentes viagères*, on doit entendre les Rentes qui restent entièrement éteintes à la mort de ceux sur qui elles sont constituées. Les *Rentes viagères en Tontines* ou *Rentes en Tontines*, sont celles qui sont constituées sur plusieurs personnes de même âge ou approchant, qui se sont pour ainsi dire associées ensemble, à condition qu'à la mort de chaque Associé la rente qu'il avoit se repartît aux survivans de la Société, en tout ou en partie, jusqu'au dernier vivant, qui jouit seul de toute la rente de la Société, ou de toutes les parties de rentes qui étoient réversibles aux survivans, ce qui fait distinguer deux sortes de Tontines, l'une *simple*, et l'autre *composée*, [. . .] » [p. 105]

I Contenu de l'*ESSAI*

Publié en 1746, l'*Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine* se compose de trois parties d'inégales longueurs : *Des rentes à terme ou annuités* (31 pages), *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine* (69 pages), et *Des rentes viagères* (27 pages) suivies de vingt-deux Tables. Dans la dédicace à Monsieur de BOULLONGNE, Conseiller d'État, Intendant des Finances et des Ordres de Sa Majesté, l'auteur nous informe n'avoir « pensé d'abord qu'à faire un simple Mémoire sur les Rentes viagères et les Tontines ». C'est certainement parce qu'il sera encouragé par le Conseiller d'État à donner plus d'étendue à son projet en vue d'une plus grande utilité que DEPARCIEUX développera la deuxième partie qui donnera son titre à l'ouvrage.

La première partie, *Des rentes à terme, ou annuités* est construite autour des quatre « problèmes » :

Problème I : « Connaissant un prêt P dont on laisse accumuler les intérêts, et les intérêts des intérêts, trouver ce qui est dû au bout d'un temps donné », [p. 3][4].

Problème II : « Trouver la somme P qu'il faut prêter actuellement, afin que le capital avec les intérêts, et les intérêts des intérêts, fassent la somme R au bout d'un temps donné », [p. 8].

Problème III : « Connaissant une rente R qu'on veut recevoir à la fin de chaque année pendant un temps donné ; trouver la somme P qu'il faut préter actuellement », [p. 12].

Problème IV : « Connaissant un prêt P qu'on veut acquitter, capital et intérêts, dans un temps donné, et en autant de payements égaux R, un à la fin de chaque année, trouver la valeur des payements », [p. 22].

« Entièrement géométrique », elle est rédigée dans le style mathématique, à la fois rigoureux et pédagogique, du *Nouveau Traité de trigonométrie Rectiligne et Sphérique* publié cinq ans plus tôt. Chaque énoncé de problème est suivi de sa solution. Le résultat démontré est énoncé sous forme d'une Règle illustrée d'un ou plusieurs Exemples, permettant ainsi à « ceux qui n'entendront pas le peu d'algèbre qu'on y employe, quoique très simple » de « passer tout de suite aux Regles et aux Exemples sans aucun scrupule [...] » [*Avertissement*, p. 2]. Ces règles sont utilisées pour calculer quatre Tables[5] et sont éventuellement accompagnées de remarques soulignant leurs portées pratiques[6].

[4]Les numéros de page indiqués dans cet article sans mention de l'œuvre font référence à l'édition de 1760 de l'*Essai*.

[5]« MM. DE MOIVRE, HALLEY, SIMPSON, etc. ont donné les mêmes Tables, et les mêmes Problèmes traités d'une manière plus générale, mais la méthode de M. DE PARCIEUX a l'avantage d'être plus à la portée de tout le monde » in [NICOLLE & BUFFON, séance du 21 juillet 1745]

[6]Le problème II est suivi d'une remarque sur « l'erreur dans laquelle tombent la plupart de ceux qui empruntent ». Le problème III est suivi d'un commentaire sur les avantages des Annuités. Cette partie de l'ouvrage s'achève sur des considérations concernant la « Manière de faire de grands emprunts, plus commode que celles (sic) dont on se sert ».

La place centrale dans l'ouvrage de la partie *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, et son volume pratiquement équivalent aux deux autres parties réunies, est à la hauteur de l'importance de celle-ci dans l'histoire de la Démographie et de la Statistique. C'est surtout en référence à ces travaux de DEPARCIEUX que les Rapporteurs de l'Académie, NICOLLE et DE BUFFON, notent[7] que « toutes ces recherches supposent beaucoup d'intelligence et demandent beaucoup de temps et de travail [...] ».

Après avoir relevé la nécessité[8] de publier un ouvrage français accessible sur les probabilités de la vie et leur application au calcul des Rentes, DEPARCIEUX fait un historique rapide et critique des ordres de mortalité déjà utilisés dans les calculs de rentes viagères : HALLEY (Breslau), SIMPSON (Londres), DE KERSEBOOM (Hollande et Westfrise). Sa critique l'amène à développer les raisons pour lesquelles les registres mortuaires des grandes villes ne peuvent servir à établir un ordre de mortalité « approchant du vrai », [pp. 35–43]. S'agissant d'établir un ordre de mortalité pour des Rentiers, il lui semble « qu'on ne peut trouver mieux » que d'utiliser les listes mortuaires de Tontiniers notamment celles des Tontines de 1639 et 1696. À partir de ces listes il explicite la construction de son ordre de mortalité (Table XIII) qu'il utilise pour calculer la probabilité de vie de plusieurs têtes, [pp. 43–56].

Pour comparer « promptement et sans aucun calcul » les ordres de mortalité déjà cités avec le sien, il introduit le concept de vie moyenne à un âge donné[9]. La comparaison de son ordre de mortalité avec celui de DE KERSEBOOM le conduit en particulier à préciser les raisons « qui font voir que les Rentiers ne doivent pas mourir si vite que le reste du monde », [pp. 56–65]. Proposant alors un protocole « pour déterminer la vie moyenne des enfans en général » qu'il met en œuvre dans différentes provinces du Royaume (Paris, Laon, Cévennes et Bas-Languedoc), il s'interroge sur la mortalité des enfants à Paris en relation avec la pratique des nourrices et dénonce le préjugé suivant lequel la vie moyenne[10] des enfants est faible, [pp. 65–74].

Désireux de combattre un autre préjugé et convaincre « des gens[11] qui avec beaucoup d'esprit et de jugement, ne peuvent pas se persuader [...] que la mortalité des habitans d'un même endroit conserve quelque uniformité en des tems différens [...] », il entreprend

[7] in [NICOLLE & BUFFON, séance du 21 juillet 1745]

[8] « Il est pourtant nécessaire à bien des personnes, de connoître le principe des Rentes viagères de toute espèce. Les Ministres en ont besoin pour sçavoir ce qu'ils doivent donner aux Rentiers de chaque âge, lorsque l'État a besoin d'argent ; et les rentiers doivent sçavoir ce qu'on leur doit équitablement donner de rente selon leur âge. », [p. 36]

[9] « [...] la vie moyenne des personnes de l'âge de 80 ans, ou ce qu'une personne de cet âge peut encore espérer de vivre. » [p. 57]

[10] « Je me suis un peu étendu sur les vies moyennes [des enfants], parce que tout le monde est dans le faux préjugé que la vie commune des enfans en général est beaucoup moindre [...] », [p. 73]

[11] « [...] on craint ici, comme en toute autre chose, de trouver des raisons qui détruiroient les préjugés qu'on a adoptés. On rencontre tous les jours des gens qui avec beaucoup d'esprit et de jugement, ne peuvent pas se persuader [...] que la mortalité des habitans d'un même endroit conserve quelque uniformité en des tems différens [...] » [p. 74]

de prouver « la ressemblance qu'il doit y avoir entre les ordres de mortalité de plusieurs nombres de personnes différentes prises en un même lieu et en des tems différens » en construisant les ordres moyens de mortalité de Religieux ou Religieuses de cinq congrégations[12], [pp. 74–81]. L'analyse de ces tables est assortie de considérations sur la mortalité comparée entre les sexes, entre les Religieux et les gens du monde[13], de doutes[14] sur l'existence d'un âge critique pour les femmes, [pp. 81–86].

Calculant le nombre annuel moyen de morts dans la Congrégation des Bénédictins, DEPARCIEUX extrapole sa méthode à d'autres catégories de personnes : Officiers du Roi, Académiciens, Corps des Marchands, Communautés d'Arts et Métiers. Il énonce alors l'interdépendance entre la vie moyenne, le nombre d'habitants et le nombre de naissances ou de morts et en discute des conditions de validité, notamment en s'intéressant au cas des grandes villes, [pp. 86–96].

Enfin analysant l'État des Baptêmes et des Morts de la Paroisse de Saint-Sulpice, il nie l'existence d'un âge critique chez la femme et remarque qu'« on vit plus longtemps dans l'état de mariage, que dans le célibat ». Il termine alors cette deuxième partie de l'ouvrage en mettant en évidence, tout en le déplorant, le peu de soin apporté à l'établissement de l'État général de toutes les Paroisses de Paris et propose de rédiger des instructions pour y remédier, [pp. 96–104].

Dans la troisième partie de l'ouvrage *Des rentes viagères* DEPARCIEUX, après avoir défini ce qu'il entendait par rentes purement viagères et rentes viagères en tontines, explique comment à partir de son ordre de mortalité, il établit la Table (Table XIV) donnant la valeur actuelle d'une rente viagère de 100 livres pour tous les âges, ainsi que celle (Table XV) de ce qu'on doit donner de Rente viagère aux Rentiers de tous les âges pour un fonds de 100 livres, [pp. 106–111].

Il montre par un exemple que la première Table permet de calculer le montant du remboursement d'une rente viagère à une date donnée, [pp. 112–115]. Il traite ensuite le cas de la valeur des rentes viagères en tontine simple, puis en tontine composée, pour une action i.e. un fonds de 300 livres. Ses calculs sont suivis d'une longue réflexion sous forme de Remarque sur l'assimilation des rentes viagères aux Jeux ou Loteries qui, contrairement « aux Jeux de Hazard, soit Dez, Roue de fortune, etc. où il y a tant de désavantage [. . .] », sont des Jeux « où il y a tout à gagner », [pp. 115–123].

DEPARCIEUX envisage ensuite le cas des Loteries où les lots sont des Rentes viagères, la manière de déterminer les rentes constituées sur deux personnes et d'autres formes de

[12]« Je veux seulement faire comparer entre eux les ordres de mortalité [. . .] et par la ressemblance qu'on y trouvera, [. . .], on jugera de la ressemblance qu'il doit y avoir [. . .] » [p. 75]

[13]« [. . .] c'est un faux préjugé de croire que les Religieux et Religieuses vivent plus que les gens du monde. [. . .] Combien d'autres préjugés encore plus ridicules ne détruiroit-on pas, si on vouloit en examiner l'origine ; et les illusions qui les favorisent ? » [p. 85]

[14]« Je tâcherai quelque jour d'éclaircir ce doute ; ce pourroit bien être encore de ces choses qu'on croit sans fondement, comme bien d'autres. » [p. 83]

rentes viagères, notamment la pratique de la Banque de Venise de constituer sur des enfants naissants, à condition de n'en payer aucune rente pendant 10 ans, [pp. 123–132].

Dans une seconde édition de l'ouvrage, en 1760, DEPARCIEUX ajoutera au texte de 1746 des *Objections*[15] faites sur l'*Essai*, avec leurs réponses, ainsi qu'une *Addition à l'essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine* de 29 pages avec quatre tables. Dans cette *Addition* DEPARCIEUX traite de nouveaux problèmes[16] relatifs aux Rentes viagères de type assurance-vie. Enfin il établit deux nouvelles tables de mortalité, la première à partir de listes mortuaires d'une Paroisse de Normandie, pour laquelle il explique sa correction des données relatives aux âges ronds des dizaine et demi-dizaine, la seconde à partir d'une liste fournie par M. WARGENTIN.

II Analyse de l'*ESSAI*

Dans la dédicace de l'*Essai*, DEPARCIEUX s'adresse au Conseiller d'État en ces termes

> « Cette vue du bien Public qui est l'ame de toutes vos actions m'éclaira et m'encouragea ; j'y travaillai [. . .] ».

En rédigeant l'*Essai sur les probabilités de la vie humaine*, DEPARCIEUX se propose avant tout de faire œuvre utile pour le Bien Public, et cela, par son contenu et par le public visé.

Par son contenu, en approfondissant le calcul des Rentes viagères par la prise en compte des probabilités de vie, approche pratiquement nouvelle en France comme le laisse supposer le rapide historique qu'il fait de ce calcul au début de la seconde partie et particulièrement ce passage de l'*Essai*

[15] Objections faites à M. DEPARCIEUX, des Académies Royales des Sciences de Paris et de Berlin, *sur son Livre des Probabilités de la durée de la vie humaine* ; avec les réponses à ces objections : Lettre de M. THOMAS, au R. P. BERTHIER Jésuite, Auteur du *Journal de Trévoux*, sur l'Ouvrage de M. DEPARCIEUX. (*Journal de Trévoux*, Avril 1746), Réponse de M. DEPARCIEUX. (*Journal de Trévoux*, May 1746), Réplique de M. THOMAS ; dans le *Journal de Verdun*, d'Août 1746. Réponse de M. DEPARCIEUX à M*** Auteur du *Journal de Verdun*.

[16]

Problème I : Si un fonds de 100 livres fait donner 6 liv. 6 s. 5 d. aux Enfants de l'âge de quatre ans, où est arrivé notre Rentier un an après la première constitution. Combien un fonds de 6 liv. 8 s. 6 d. lui fera-t-il donner ?

Problème II : Si un fonds de 100 livres fait donner 6 liv. 5 s. aux Rentiers de l'âge de cinq ans, où est arrivé celui-ci, deux ans après sa première constitution, Combien un fonds de 6 liv. 16 s. 8 d. lui fera-t-il donner ?

Problème III : Si pour avoir 100 livres de Rentes viagères à l'âge de quarante ans, Il faut donner 1362 livres ; Combien faut-il donner pour avoir 67 liv. 5 s. 9 d. qui est celle que doit avoir un Rentier vivant au même âge de 40 ans sur la tête duquel on avoit constitué 100 liv. de capital lorsqu'il étoit à l'âge de trois ans ?

> « M. HALLEI[17], de la Société Royale de Londres, quelques tems après[18] composa sa Table des Probabilités de la vie, en se servant des Regîtres Mortuaires de la Ville de Breslau en Silésie. Il en déduit plusieurs usages, entr'autres tous les différens paris qu'on peut faire sur les probabilités de la vie de quelqu'un, et la manière de déterminer la valeur des Rentes purement viagères. Mais il n'a rien dit des tontines, ni des Rentes qui sont en partie Tontines, et en partie viagères simples, ni de quelques autres manière de faire des Rentes à vie. D'ailleurs son mémoire est écrit en Anglois, et n'est connu en France que de quelques Sçavants ; et il est écrit d'une manière si concise, que quand on le traduiroit en François, peu de gens pourroient l'entendre. », [p. 36].

Par le public visé, en essayant d'instruire sur cette matière les Ministres, les Rentiers, et plus largement les gens « d'esprit et de jugements ».

> « Il est pourtant nécessaire à bien des personnes, de connoître le principe des Rentes viagères de toute espèce. Les Ministres en ont besoin pour sçavoir ce qu'ils doivent donner aux Rentiers de chaque âge, lorsque l'État a besoin d'argent ; et les rentiers doivent sçavoir ce qu'on leur doit équitablement donner de rente selon leur âge. », [p. 36].

Cet objectif expliquera le ton de l'ouvrage, très pédagogique, avec beaucoup d'exemples détaillés ; les larges explications notamment dans la construction des Tables, leur analyse et les nombreuses considérations qui les suivent ; ainsi que la volonté de convaincre le lecteur du bien fondé de la démarche utilisée.

Le Vrai

Vers la fin de l'ouvrage, DEPARCIEUX remarque que

> « Il n'est pas étonnant que les premiers faiseurs de plans ayent mal déterminé la quantité de rente purement viagère qu'on devait donner aux rentiers de chaque âge pour un fonds quelconque [...]. Il n'en est pas de même pour les rentes en Tontines, il n'étoit pas plus rare alors qu'à présent, de voir mourir des gens âgés de 94 ou 95 ans, et même au-delà [...]. », [p. 119].

Mais pour DEPARCIEUX ces « faiseurs de plan » doivent satisfaire une exigence de rigueur à la fois scientifique, dans la recherche du Vrai, et civique, dans le respect de l'équité. Au politique ensuite de prendre la décision. En effet DEPARCIEUX ajoute à la page suivante

> « Celui qui fait un plan doit le faire vrai et selon l'équité ; c'est ensuite à la sagesse et à la prudence des ministres, à y ajouter ce qu'ils jugent concevable, selon que l'argent est plus rare, et que l'État en a plus ou moins besoin. », [p. 120]

[17]« Il n'est pas étonnant que les premiers faiseurs de plans ayent mal déterminé la quantité de rente purement viagère qu'on devait donner aux rentiers de chaque âge pour un fonds quelconque : avant M. HALLEY, personne (que je sache) n'avait parlé des probabilités de la vie, appliquée aux rentes viagères », [p. 119].

[18]*Transactions Philosophiques*, 1693. (Note de DEPARCIEUX en page 36 de l'*Essai*)

S'il y a moins d'erreur dans le cas des rentes en Tontines c'est que le calcul se ramène à connaître la durée de vie de la personne qui décède en dernier de sa Société. Or il est assez facile d'observer que sur un grand nombre de personnes de 60 et 65 ans par exemple, il y en aura certainement une qui arrivera jusqu'à l'âge de 94 ou 95 ans. En revanche, dans le cas des rentes viagères, il est plus difficile de connaître a priori l'âge de décès de celui qui constitue.

Si on connaissait la durée de vie exacte de la personne qui constitue une rente, le calcul permettrait facilement de trouver la valeur de la Rente pour un fonds donné. Mais cette vraie valeur de la Rente est a priori impossible à déterminer pour un individu donné. Or la loi des grands nombres nous informe sur la mortalité globale d'un grand nombre d'individus et ce d'autant plus sûrement que ce nombre est grand.

> « Je crois néanmoins devoir ajouter encore quelques listes ou ordres de mortalité du genre humain, qui me sont parvenues depuis peu ; je les donne d'autant plus volontiers, que cela pourrait engager d'autres personnes [. . .] à faire de semblables recherches, et à en publier les résultats, [. . .] je le désire beaucoup, parce que quand on en aura un nombre suffisant, comme huit, dix, ou davantage, en ajoutant leurs nombres de même âge, s'ils sont considérables, on en formera un ordre de mortalité commun, qui sera autant approchant de la vérité, pour le même pays, qu'on peut le désirer. » [*Addition*, p. 19]

Il s'agit donc de construire une réponse approchant au mieux la vraie valeur. Pour cela on va fondre l'individu dans un groupe de référence pour lequel on cherchera à mettre en évidence un ordre régissant la mortalité. La difficulté apparaît alors dans le choix du groupe sur lequel porteront les calculs. Une analyse rigoureuse est nécessaire sur la représentativité des observations faites et des données utilisées. C'est à cette condition que le groupe pourra contenir en quelque sorte une information sur l'individu qu'il est censé caractériser et que l'analyse mathématique sera chargée d'extraire puis de traiter. Le rejet par Deparcieux des registres mortuaires des grandes villes procède du souci d'éliminer les groupes dont les éléments étrangers brouillent d'une certaine façon l'information recherchée.

> « On doit sentir par tout ce qu'on a dit ci-devant, que les listes des Tontines qu'on imprime tous les ans, où l'on indique le jour du décès de chaque Rentier mort, sont ce qu'on peut trouver de mieux pour établir un ordre de mortalité ; si ce n'est pas pour tout le monde indistinctement, ce sera du moins pour les Rentiers à vie [. . .] », [p. 43].

Les listes mortuaires de Tontiniers semblent naturellement adaptées à traduire les caractéristiques d'un individu constituant une rente à vie. Calculant la moyenne par classe à partir de plusieurs listes, Deparcieux explique comment il obtient les deux premières colonnes du quatrième ordre de la Table XIII :

> « Ayant formé les rapports moyens de la mortalité des Rentiers dans tous les âges de cinq ans en cinq ans, j'ai supposé 1000 personnes à l'âge de trois ans ; et par la Règle de trois j'ai cherché ce qu'il devoit rester à l'âge de 7 ans, à l'âge de 12 ans, de 17 ans, de 22 ans, etc. et par le moyen des différences, j'ai eu ce qu'il devoit rester à chacun

> des autres âges intermédiaires dont j'ai formé le quatrième ordre de la table XIII ne faisant pourtant aller le dernier que jusqu'à 94 ou 95 ans quoiqu'il y ait eu plusieurs Tontiniers qui ayent vécu jusqu'à l'âge de 97 ans ou 98 ans [...] », [pp. 50–51].

Cependant plusieurs Tables de mortalité susceptibles de répondre au même problème peuvent exister. Par ailleurs DEPARCIEUX veut mettre en évidence un ordre dans la mortalité des personnes pour un lieu donné. Pour cela il a besoin d'un outil permettant de comparer les tables entre elles. La vie probable (vie médiane) en est un. On peut aussi utiliser la « probabilité qu'il y a qu'un Rentier d'un âge déterminé ne mourra pas dans un tems donné », [p. 52]. Mais ces deux concepts sont d'un emploi peu pratique et se prêtent mal à mettre dans une table. À cet effet DEPARCIEUX va s'intéresser à un autre concept, la vie moyenne, inventé avant lui par Louis HUYGENS et utilisé par Nicolas STRUYCK mais jamais explicité auparavant.

> « On entend ici par vie moyenne le nombre d'années que vivront encore, les unes portant les autres, les personnes de l'âge correspondant à cette vie moyenne. », [p. 56]
> « Les vies moyennes sont ce qui m'a paru de plus commode pour faire promptement et sans aucun calcul, la comparaison des différens ordres de mortalité qu'on a établis ; [...] », [pp. 58–59]

Au passage DEPARCIEUX exploite ce concept pour dénoncer un préjugé concernant la vie moyenne des enfants :

> « Je me suis un peu étendu sur les vies moyennes [des enfants], parce que tout le monde est dans le faux préjugé que la vie commune des enfans en général est beaucoup moindre [...], mais tout ce qu'on dit là-dessus est sans aucun fondement, comme on doit le sentir par tout ce que j'ai dit jusqu'ici. », [p. 73]

L'Équité

Le plan ne sera perçu comme vrai et équitable que si les individus ont conscience du bien fondé de la démarche adoptée dans le calcul, c'est-à-dire si l'individu reconnaît que le groupe possède une rationalité interne que le concept mathématique permettra de révéler et de s'approprier. Comme on l'a vu plus haut, DEPARCIEUX s'adresse à des gens qui ont « beaucoup d'esprit et de jugement », mais malgré tout, ils peuvent être aussi victimes des préjugés

> « On rencontre tous les jours des gens qui avec beaucoup d'esprit et de jugement, ne peuvent pas se persuader qu'il y ait quelque ressemblance entre les ordres de mortalité de plusieurs nombres de personnes différentes, ou que la mortalité des habitans d'un même endroit conserve quelque uniformité en des tems différens [...]. Je rapporte ici cinq Tables de la mortalité réelle des Religieux et Religieuses de différens Ordres, qui feront voir ce qu'on doit penser de cette uniformité : j'avoue qu'elle a passé mon attente. », [p. 74–75]

DEPARCIEUX entreprend alors de convaincre ces gens de l'uniformité des ordres de mortalité. Délaissant l'argument d'autorité et pratiquant une pédagogie de l'éveil, il laisse l'individu construire son propre savoir, se limitant à préparer le matériel que l'élève utilisera. Pour DEPARCIEUX l'équité est à cette condition que l'individu soit en mesure de s'assurer par lui-même des calculs et de juger des conclusions qu'on lui propose. Il y a derrière cette pratique une conception extrêmement moderne de l'apprentissage des concepts mathématiques et de leur finalité que les didacticiens actuels nomment les mathématiques du citoyen.

> « Je veux seulement faire comparer[19] entre eux les ordres de mortalité [...] et par la ressemblance qu'on y trouvera, étant tous établis d'après des gens de même espèce, on jugera de la ressemblance qu'il doit y avoir [...]. Je donne les Tables de la mortalité réelle des Religieux, afin qu'on puisse, si on *veut*, vérifier les ordres de mortalité moyenne que j'en ai déduits : car je ne demande pas qu'on s'en rapporte absolument à moi. Si quelqu'un *vouloit* douter des Tables originales, on n'a qu'à recourir aux Nécrologes et Registres des Maisons Religieuses que je cite, [...] », [p. 75–76].

Pour DEPARCIEUX, la condition de l'équité est, non seulement dans la possibilité qu'a l'individu de vérifier ce qu'on lui affirme, mais aussi dans la liberté de pouvoir effectuer cette vérification. Derrière cette pédagogie c'est toute une conception de citoyen qui se fait jour. Témoin de plusieurs inondations de la Seine à Paris, DEPARCIEUX propose un projet, qui sera refusé, mais qui lui « semble le seul raisonnable » pour atténuer les effets de ces inondations. Parlant de son projet, il écrit en 1764 dans son *Mémoire sur les inondations de la Seine à Paris*,

> « il [le projet] intéresse le bien public, et par cette raison, l'Académie ; si le moyen est possible, sans de trop grands inconvéniens, il mérite d'avoir place dans nos Mémoires, afin qu'il ne se perde plus et que le public le connoisse et le juge ; il l'approuvera s'il y a plus d'avantages que d'inconvéniens, et il pourra avoir lieu un jour ; ou il le condamnera dans le cas contraire : c'est un juge intègre à qui rien n'échappe, et qu'il seroit très à propos de consulter, en publiant les projets long-temps avant que de les entreprendre, toutes les fois qu'il s'agit d'objets qui l'intéressent. », [H.A.R.S.P., 1764, p. 481].

Pour DEPARCIEUX le public devrait être en mesure de signifier ses choix dans les décisions qui l'intéressent et on devrait même avoir recours à lui en cas de litige au niveau des décideurs.

L'équité et le vrai

Chez DEPARCIEUX, l'équité est aussi une condition du vrai. Dans la construction de sa Table de mortalité, DEPARCIEUX ne prendra pas en considération la Tontine de 1733 car elle a le défaut d'être constituée de classes de dix ans et qu'« il n'est pas juste que ceux qui n'ont que dix ans et un jour, ayent le même avantage que ceux qui ont 17, 18, ou 19 ans », [p. 49].

[19] C'est nous qui soulignons.

En retour, le vrai peut servir l'équité notamment en fondant l'étude de la diversité entre les provinces du Royaume.

> « Si quelqu'un étoit chargé de faire cette recherche [calcul de la vie moyenne des enfants] dans toutes les provinces du Royaume, outre qu'on sçauroit dans quel endroit on vit le plus long-tems, on pourroit peut-être encore en conclure que l'air y est plus pur, ou les fruits meilleurs, ou la terre remplie de vapeurs malignes. », [p. 70].

Pour être efficace et significative, cette étude doit être réalisée suivant la même méthode dans tout le royaume. Cela peut en particulier être le cas si c'est la même personne ou tout au moins la même institution qui organise cette étude. En revanche si, pour des raisons d'étendue, il est nécessaire de faire appel à plusieurs personnes dans chaque Province ou Paroisse, il faudra veiller à ce que tout le monde agisse en respectant des consignes que DEPARCIEUX se propose de donner

> « Il serait à souhaiter que quelqu'un fût chargé de faire cette recherche, ou bien qu'il se trouvât des gens dans chaque Ville et Paroisses de campagne, qui voulussent prendre la peine d'examiner la vie commune des enfants qui y naissent. Voici comment on pourroit s'y prendre. »

DEPARCIEUX propose alors sa méthode qu'il explique par un exemple et il précise des règles à respecter dans le recueil des données. Cette approche des études statistiques a en germe une conception centralisatrice du pouvoir. Parlant des « Supérieures ou Dépositaires de Couvents auxquelles il est impossible de faire entendre raison », DEPARCIEUX n'hésite pas, pour la tenue des Registres mortuaires des Religieux, à conseiller d'utiliser la contrainte pour faire respecter les consignes

> « Il seroit pourtant à souhaiter qu'on les obligeât de tenir leurs regîtres mieux en ordre, et selon une formule qu'on leur donneroit, afin qu'on pût de tems en tems vérifier plus aisément leur ordre de mortalité [. . .] », [p. 76].

Les limites de la démarche de DEPARCIEUX

Pour convaincre le public que les tables de mortalité nous disent quelque chose sur le réel et permettent d'approcher le vrai, DEPARCIEUX construit un second concept (la vie moyenne) susceptible de mettre en évidence la pertinence du premier (les tables) car pour DEPARCIEUX le public doit être complètement éclairé pour avoir la maîtrise de ses choix. Mais cette approche, à la fois logique et morale, est-elle pratiquement réalisable pour toutes les décisions susceptibles de concerner le public ?

En outre le public sera-t-il toujours en mesure d'apprécier la rationalité interne des décisions politiques le concernant ? Ne va t-il pas être alors tenté de déléguer cette vérification à des « spécialistes » ? Dans ce cas n'y a t-il pas risque d'un glissement de ce pouvoir que DEPARCIEUX souhaite donner au peuple vers une caste que le peuple n'est plus en mesure de maîtriser ?

Nous pensons que l'entreprise de Deparcieux dans l'*Essai* doit avant tout être lue au regard de sa conception de la place et du rôle que doit avoir l'individu au sein d'une société. Cette entreprise est, en outre, soutenue par l'exigence de vrai et d'équité qui est la sienne et qui doit être, pour Deparcieux, aussi celle des ministres.

III Bibliographie

a) Bibliographie générale

Béhar, Lazare : « Les tables de mortalité au XVII^e^ et XVIII^e^ siècles : histoire et signification », *Annales de Démographie Historique*, 1976, pp. 174–200
Condorcet : *Arithmétique politique, textes rares ou inédits (1767–1789)*, Édition critique et commentée par Bernard Bru et Pierre Crépel, INED, PUF, Paris, 1994
Dupâquier, Jacques : « LONDRES OU PARIS ? Un grand débat dans le petit monde des arithméticiens politiques (1662–1759) », *Population*, 1–2, 1998, pp. 311–326
Dupâquier, Jacques et Michel : *Histoire de la Démographie, la statistique de la population des origines à 1914*, Collection Pour l'Histoire, Librairie Académique Perrin, Paris, 1986
Graunt, John : *Observations naturelles et politiques ... faites sur les bulletins de mortalité de la ville de Londres*, Londres, 1662, édition critique et traduction par Éric Vilquin, INED, Paris, 1977
Grandjean de Fouchy, Jean-Paul : « Éloge de M. De Parcieux », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, année 1768, pp. 155–166
Kersseboom, Willem : *Essais d'arithmétique politique*, Jan van den Bergh, Libraire, La Haye, 1742, Réédition INED, Paris, 1970
Kertanguy, Éric de : « La table de mortalité de Deparcieux et les tarifs de rentes viagères de la Caisse de la Vieillesse », *Journal des Actuaires Français*, 1876, pp. 229–266
Nicolle & Buffon : *Rapport à l'Académie sur l'ouvrage de M. Deparcieux*, Registres de l'Académie Royale des Sciences, Paris, séances du 21 juillet 1745 et du 29 novembre 1746
Ptoukha, Michel : « Antoine Deparcieux, le premier grand démographe français », *Congrès International de la Population (Paris, 1937), II, Démographie historique*, Actualités scientifiques et industrielles N° 711, Hermann, Paris, 1938, pp. 79–91
Rohrbasser, Jean-Marc : « Bienaymé et les tables de mortalité », *Actes de la journée « Irénée-Jules Bienaymé, 1796–1878 » (21 juin 1996)*, Séminaire d'Histoire du Calcul des Probabilités et de la Statistique (EHESS), CAMS-138, Série « Histoire du Calcul des Probabilités », n° 28, Paris, mai 1997, pp. 47–60

b) Bibliographie de Deparcieux

1741 : *Nouveaux traités de trigonométrie rectiligne et sphérique,*
Paris, 1741
1746 : *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine ; D'où l'on déduit la manière de déterminer les Rentes viagères, tant simples qu'en Tontines : Précédé d'une courte Explication sur les Rentes à terme, ou Annuités ; Et accompagné d'un grand nombre de Tables.*

Frères Guérin, Paris, 1746, réédité aux Éditions d'Histoire Sociale, Paris, 1973
1747 : *Mémoire sur la manière de tracer méchaniquement la courbure qu'on doit donner aux ondes, dans les machines pour mouvoir des leviers ou balanciers, au lieu des ovales qu'on a substituées aux manivelles en plusieurs endroits,*
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1747, pp. 243–258
1748, 16 août : *Description d'un niveau,*
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1748, pp. 313–322
1750, 27 juin : *Mémoire sur la conduite des eaux,*
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1750, pp. 39–53
1754 : *Mémoire dans lequel on démontre que l'eau d'une chute destinée à faire mouvoir quelque machine, moulin ou autre, peut toujours produire beaucoup plus d'effet en agissant par son poids qu'en agissant par son choc et que les roues à pots qui tournent lentement, produisent plus d'effet que celles qui tournent vite, relativement aux chûtes et aux dépenses,*
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1754, pp. 603–614
1754, 31 août : *Mémoire sur une expérience qui montre qu'à dépense égale, plus une roue à augets tourne lentement, plus elle fait d'effet,*
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1754, pp. 671–678
1759, 25 avril : *Mémoire dans lequel on prouve que les aubes de roues mues par les courants des grandes rivières feraient beaucoup plus d'effet si elles étaient inclinées aux rayons, qu'elles ne sont étant appliquées contre les rayons mêmes, comme elles le sont aux moulins pendans et aux moulins sur bateaux qui sont sur les rivières de Seine, Marne, Loire, etc.*
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1759, pp. 288–299
1760 : *Mémoire sur le tirage des chevaux,*
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1760, pp. 263–273
1760 : *Addition à l'essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine. Contenant trois Tables qui montrent comment une Rente viagère doit croître ou augmenter, si, au lieu de recevoir la Rente à la fin de chaque année, le Rentier la laisse comme un fonds afin d'avoir une augmentation proportionnée à ce fonds et à l'âge où il arrive d'année en année ; avec quelques Listes ou Ordres de mortalité du genre humain.*
Guérin et Delatour, Paris, 1760, réédité aux Éditions d'Histoire Sociale, Paris, 1973
1762, 13 mars : *Description d'un nouveau piston, par le moyen duquel les frottements sont considérablement diminués, et les cuirs rendus d'autant plus durables,*
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1762, pp. 1–9
1762 : *Mémoire sur la possibilité d'amener à Paris, à la même hauteur à laquelle y arrivent les eaux d'Arcueil, mille à douze cents pouces d'eau, belle et de bonne qualité, par un chemin facile et par un seul canal ou aqueduc,*
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1762, pp. 337–390
1764, 4 février : *Addition dans laquelle on fait voir que les eaux de toutes les petites rivières qui composent la Seine et autres grandes rivièrez, ont le goût de marais qu'on trouve à l'eau de l'Yvette,*
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1762, pp. 391–401
1764, 14 novembre : *Mémoire sur les inondations de la Seine à Paris,*
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1764, pp. 457–486
1766, 12 novembre : *Second mémoire sur le projet d'amener à Paris la rivière d'Yvette, dans lequel on constate que cette eau est très salubre et de la meilleure qualité, suivant les expériences faites par les Commissaires de la Faculté de Médecine*

Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1766, pp. 149–182
1767 : *Mémoire sur un moyen de se garantir de la puanteur des puisards quand on est contraint d'en faire dans le voisinage des maisons,*
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1767, pp. 133–136
1768, 13 avril : *Mémoire sur le froid de l'hiver de 1767 à 1768, sur la débâcle des glaces, et sur un moyen propre à rendre les suites moins fâcheuses,*
Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1768, pp. 54–81

L'INFÉRENCE STATISTIQUE, ESTIMATION ET SONDAGES

Michel Henry,
IREM de Franche-Comté

Sommaire

I Principes de l'inférence statistique

1 Populations statistiques et échantillons

On désire mieux connaître une **population** P (d'êtres vivants ou d'objets, comme par exemple une production de marchandises, ou tout autre ensemble relevant d'études statistiques) et notamment certaines de ses caractéristiques.

L'investigation exhaustive n'est généralement pas possible : coûts exorbitants, inaccessibilité de l'ensemble P, temps disponible pour obtenir les résultats de l'étude...

On peut penser par exemple à la différence de coût et de méthode entre un recensement de la population française (périodiquement nécessaire) et un sondage dont la pratique dépend d'hypothèses générales basées sur un recensement antérieur.

L'étude de la population conduit à définir des **caractères** qui attribuent aux éléments de P certaines qualités ou valeurs qui résument les caractéristiques étudiées. L'ensemble des valeurs prises par un caractère $\boldsymbol{\chi}$ fournit une **série statistique** qui peut être répartie en **classes** et représentée par divers **diagrammes**.

Quand le caractère χ est **quantitatif**, la série peut à son tour être résumée par certains **paramètres**, notamment la **moyenne** $\boldsymbol{\mu}$ de χ et son **écart-type** $\boldsymbol{\sigma}$. Ces valeurs sont en général inconnues lorsque l'on entreprend une étude statistique. L'un de ses objets est d'en donner des approximations suffisantes pour prendre des décisions.

Quand χ est **qualitatif**, on s'intéresse aux proportions dans P de ses diverses modalités. Par exemple, on désire connaître le poids $\boldsymbol{p}$ de l'une d'entre elles (situation des sondages).

Le principe de l'inférence statistique est d'obtenir des informations sur la population P (population « mère ») à partir de la connaissance d'un échantillon E.

Précisons d'abord ce que l'on entend par « **échantillon** ».

Dans la réalité statistique, un n-échantillon est un ensemble de n objets prélevés dans la population. Quand le prélèvement se fait au hasard, on obtient un **échantillon aléatoire**.

Quand la population P est partagée en strates, dont les poids respectifs sont connus (à partir d'un recensement), on peut décider *a priori* de composer l'échantillon proportionnellement aux poids des strates dans la population. On dit alors qu'on a un « **échantillon représentatif** » de P. Ce n'est pas toujours le meilleur quant aux résultats que l'on veut en tirer[a].

Pour appliquer certains théorèmes de probabilité, il convient de faire l'hypothèse que les éléments de l'échantillon E sont prélevés indépendamment les uns des autres. Pour cela, afin que les prélèvements successifs ne modifient pas la composition de la population, il faudrait les effectuer avec remises, ce qui n'est pas toujours possible. Dans la pratique, les échantillons sont plutôt prélevés sans remises. Lorsque la population est vaste par rapport à la taille n de l'échantillon (au moins 1000 fois plus grande), cet inconvénient est mineur, entachant les probabilités en jeu d'une erreur négligeable.

En inférence statistique, quand on s'intéresse à un caractère quantitatif χ on peut **estimer** (évaluation statistique) les valeurs des paramètres qui résument la distribution du caractère χ sur la population P, à partir des valeurs de χ observées sur l'échantillon E. On peut aussi estimer la valeur de la proportion p des éléments de P qui appartiennent à une certaine modalité d'un caractère qualitatif χ, à partir de la fréquence f de cette modalité dans E. C'est notamment la situation des sondages aléatoires simples.

On peut aussi émettre des **hypothèses** concernant P et tester la validité de ces hypothèses à partir des renseignements que fournit l'échantillon (tests statistiques).

Quand l'échantillon est aléatoire, **cette inférence est en partie déterminée par le hasard** du prélèvement. Ainsi, toute déclaration à propos de la population, issue de l'observation d'un échantillon, est entachée d'une certain **risque** (probabilité) de se

[a] Car les valeurs du caractère sur certaines strates peuvent présenter une trop grande dispersion, ce qui peut faire surestimer le poids de la strate et augmenter la dispersion résultante. Or cette dispersion intervient pour déterminer un encadrement de la valeur pour la population P du paramètre étudié.

tromper. Le problème de l'inférence statistique est de pouvoir donner des résultats suffisamment précis avec un risque minimisé, deux contraintes qui varient en sens contraire. Pour améliorer à la fois la **précision** des résultats et la **fiabilité** des déclarations relatives à ces résultats, le statisticien ne peut qu'agrandir la taille de son échantillon, ce qui coûte plus cher.

2 Modèle probabiliste de l'échantillonnage

Nous allons maintenant construire le modèle mathématique général pour décrire une situation d'échantillonnage en précisant le problème :

Soit E un échantillon aléatoire de taille n, extrait de la population P.
Le caractère χ étudié a pour moyenne μ et pour écart type σ dans P.
Les éléments de P qui donnent à χ une certaine modalité A sont en proportion p.
La moyenne de χ sur E est m_n et son écart type est s_n.
La fréquence de la modalité A dans E est f_n.
Quel lien y a-t-il entre les valeurs inconnues μ, σ, p et les valeurs observées m_n, s_n et f_n ?

Dans le modèle probabiliste, on représente le <u>prélèvement au hasard</u> d'un élément de la population P par un élément ω d'un **ensemble référentiel** Ω, que l'on supposera fini. Ω symbolise donc à la fois les éléments de P et le fait qu'ils peuvent être issus d'un tirage aléatoire dans lequel les éléments de P ont la même « chance » d'être choisis.

Pour représenter un caractère quantitatif χ étudié (pour simplifier, on le supposera de dimension 1), on considère une **variable aléatoire** (v.a.) X_0, définie sur Ω, prenant pour chaque **éventualité** ω, la valeur du caractère χ pour l'élément de P dont ω représente le tirage au hasard. Pour un caractère qualitatif, X_0 prendra les valeurs 1 ou 0 suivant que pour cet élément, χ prend ou non la modalité A.

La variable X_0 est censée décrire la répartition des valeurs de χ, avec leurs poids respectifs. Sa **loi** (ensemble des probabilités des événements associés aux valeurs possibles de χ) modélise cette répartition.

Dans le cas d'un caractère quantitatif, on a noté μ la moyenne de χ sur la population P et σ^2 sa variance. La loi de X_0 est inconnue, mais on fait l'hypothèse que ces valeurs μ et σ^2 sont les valeurs de l'**espérance mathématique** et de la **variance** de cette loi : $\mathrm{E}(X_0) = \mu$ et $\mathrm{Var}(X_0) = \sigma^2$.

Dans le cas d'une proportion p, la loi de X_0 est donnée par $\mathbb{P}(X_0 = 1) = p$ (probabilité de tirer au hasard de P un élément présentant la modalité A) et on a :

$$\mathrm{E}(X_0) = p \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X_0) = p(1-p).$$

La réalisation de l'échantillon E fournit donc un n-uplet de valeurs observées de χ : $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, interprétées comme images d'événements $\{\omega_i \in \Omega\}$ par l'application répétée n fois de X_0. On considère que ces x_i sont les réalisations (observations) de n v.a. X_i qui représentent cette réplique successive de X_0.

On se place donc dans une hypothèse de travail : les éléments de E sont prélevés au hasard et indépendamment les uns des autres (notamment la taille de P est assez grande par rapport à celle de E).

Cette hypothèse de travail se traduit par une hypothèse de modèle : les X_i sont des variables aléatoires indépendantes (au sens probabiliste) et de même loi(b) que X_0. Notamment, on a pour tous les i : $\mathrm{E}(X_i) = \mathrm{E}(X_0)$ et $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}(X_0)$.

L'échantillonnage est donc représenté par un **vecteur aléatoire** $X = (X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)$ vérifiant cette hypothèse de modèle. Le résultat effectif de cet échantillonnage est donc un échantillon E, représenté par les valeurs observées $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$. X est encore appelé un « **échantillon de la v.a.** $\boldsymbol{X_0}$ » et X_0 est appelée « **variable parente** » de l'échantillon X.

Par définition, dans le modèle de la statistique :

Un échantillon est un $\boldsymbol{n}$-uplet de variables aléatoires, définies sur le même $\boldsymbol{\Omega}$, indépendantes et de même loi.

3 Modélisation des paramètres standards

Pour un caractère quantitatif, la moyenne m_n de χ sur l'échantillon E est représentée dans le modèle probabiliste par la moyenne arithmétique $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ (les probabilistes ont l'habitude de désigner cette moyenne par le symbole $\overline{x}$). $\overline{x}$ est donc la valeur observée d'une variable aléatoire $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$ définie sur Ω^n, par l'intermédiaire de X.

La variance sur E du caractère χ est aussi un paramètre important. Sa valeur est donnée par : $s_n^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^2$. C'est la valeur observée(c) de la variable aléatoire $V = \frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^2$ également définie sur Ω^n, par l'intermédiaire de X.

Pour l'étude d'une proportion, $\overline{x}$ représente aussi la fréquence observée f_n de la modalité A dans l'échantillon E, puisque le $\sum$ contient autant de nombres 1 qu'il y a d'éléments dans E de modalité A. Comme $\mathrm{Var}(X_0) = p(1-p)$, p est le seul paramètre inconnu pour caractériser la population du point de vue de la modalité A. L'introduction de la variable V est alors inutile.

(b) X_i est de même loi que X_0 si pour tout x, $\mathbb{P}(X_i = x) = \mathbb{P}(X_0 = x)$. Les X_i sont indépendantes si pour tout n-uplet $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, on a

$$\mathbb{P}\Big[(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) = (x_1, \dots x_i, \dots, x_n)\Big] = \mathbb{P}[X_1 = x_1].\mathbb{P}[X_2 = x_2] \dots \mathbb{P}[X_n = x_n].$$

(c) Rappelons que les valeurs $\overline{x}$ et s_n^2 sont issues d'un échantillonnage aléatoire et ne coïncident pas avec la moyenne et la variance inconnues μ et σ^2 de χ sur la population P. Il en est de même pour f_n et p.

Ces variables $\overline{X}$ et V sont aussi appelées des « résumés statistiques » (on dit plus brièvement « statistiques »[d]), car leurs réalisations combinent les valeurs de χ sur E.

L'étude des lois des variables $\overline{X}$ et V, en fonction éventuellement d'hypothèses supplémentaires sur la répartition de χ dans P, est une partie importante de la statistique inférentielle. Elles jouissent de propriétés générales obtenues à partir de certains théorèmes puissants de la théorie des probabilités. Nous utiliserons les suivants :

Espérance mathématique

1. L'espérance mathématique est une forme linéaire sur l'espace des v.a. définies sur le même Ω. Si Ω est un ensemble fini sur lequel une v.a. Y prend les valeurs y_k et dont la loi est donnée par les probabilités $p_k = \mathbb{P}(Y = y_k)$, on a $\mathrm{E}(Y) = \sum p_k y_k$.
2. Si Y et Z, définies sur Ω, sont deux variables indépendantes (tout événement lié à l'une est indépendant de tout événement lié à l'autre), on a : $\mathrm{E}(Y.Z) = \mathrm{E}(Y).\mathrm{E}(Z)$.

Variance

1. Avec les hypothèses et notations précédentes, la variance de Y est définie par $\mathrm{Var}(Y) = \sum p_k \Big(y_k - \mathrm{E}(Y)\Big)^2$. On a pour α réel : $\mathrm{Var}(\alpha Y) = \alpha^2 \mathrm{Var}(Y)$.
2. Si Y et Z sont indépendantes, on a : $\mathrm{Var}(Y + Z) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z)$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On montre assez facilement l'inégalité suivante : $\mathbb{P}\Big(\Big|Y - \mathrm{E}(Y)\Big| > \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{\mathrm{Var}(Y)}{\varepsilon^2}\cdot$

Cette inégalité permet de majorer la probabilité de se tromper (le risque que l'on prend) quand, à partir d'une observation y de Y, on affirme que la valeur moyenne $\mathrm{E}(Y)$ est dans l'intervalle $\Big]y - \varepsilon, y + \varepsilon\Big[$. Elle permet donc d'avoir une idée de la fiabilité de cette affirmation. Notons que la majoration de cette probabilité varie comme la dispersion (variance) de Y et est en $\dfrac{1}{\varepsilon^2}\cdot$

4 Propriétés des statistiques $\overline{X}$ et V

– $\overline{X}$, **moyenne de l'échantillon**, a des propriétés sympathiques. La linéarité de l'espérance mathématique donne immédiatement :

$$\mathrm{E}\left(\overline{X}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{n} n.\mathrm{E}(X_0) = \mathrm{E}(X_0).$$

D'où le résultat :

$$\mathrm{E}\left(\overline{X}\right) = \begin{cases} \mu & \text{pour un caractère quantitatif} \\ p & \text{pour un caractère qualitatif} \end{cases}$$

[d] Une statistique est donc une application réelle définie sur Ω^n, composée de X et d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

– Les propriétés de la variance, compte tenu de l'indépendance des X_i, donnent aussi :

$$\operatorname{Var}\left(\overline{X}\right) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}(X_i) = \frac{\operatorname{Var}(X_0)}{n}.$$

D'où :

$$\operatorname{Var}\left(\overline{X}\right) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{n} & \text{pour un caractère quantitatif} \\ \dfrac{p(1-p)}{n} & \text{pour un caractère qualitatif} \end{cases}$$

– **Application à la précision de mesures physiques.**

Anticipons un peu sur le paragraphe consacré à l'estimation par intervalle de confiance, pour montrer comment ces résultats justifient une intuition forte : sans changer d'appareil de mesure, on peut améliorer notablement sa **précision** (marge d'erreur sur le résultat annoncé) en faisant la moyenne de plusieurs mesures indépendantes.

Supposons que la variable parente X_0 représente la mesure d'une grandeur (physique par exemple) inconnue μ. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliquée à X_0 avec $\varepsilon = \varepsilon'\sigma$ donne :

$$\mathbb{P}\left[X_0 - \varepsilon'\sigma \leqslant \mathrm{E}(X_0) \leqslant X_0 + \varepsilon'\sigma\right] \geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon'^2}.$$

L'intervalle $[x_0 - \varepsilon'\sigma ; x_0 + \varepsilon'\sigma]$ obtenu pour encadrer $\mu = \mathrm{E}(X_0)$ à partir d'une simple observation x_0 de X_0, a une longueur proportionnelle à l'écart type σ de X_0, pour une **fiabilité** $1 - \dfrac{1}{\varepsilon'^2}$ donnée (minorant de la probabilité d'annoncer un bon encadrement).

Appliquée à $\overline{X}$, avec $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'\sigma}{\sqrt{n}}$, on a : $\mathbb{P}\left[\overline{X} - \dfrac{\varepsilon'\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant E(\overline{X}) \leqslant \overline{X} + \dfrac{\varepsilon'\sigma}{\sqrt{n}}\right] \geqslant 1 - \dfrac{1}{\varepsilon'^2}$.

La « **fourchette** » $\left]\overline{x} - \dfrac{\varepsilon'\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{x} + \dfrac{\varepsilon'\sigma}{\sqrt{n}}\right[$ proposée cette fois-ci pour l'encadrement de cette valeur inconnue $\mu = \mathrm{E}\left(\overline{X}\right)$, montre que l'utilisation de $\overline{X}$ plutôt que X_0 divise la marge d'erreur par $\sqrt{n}$. On voit aussi que, pour un n donné, on améliore la précision (on resserre la fourchette en diminuant ε') en consentant une perte de fiabilité $\left(\text{en } 1 - \dfrac{1}{\varepsilon'^2}\right)$: on ne peut pas avoir le beurre et l'argent du beurre ! Même remarque pour l'estimation d'une proportion.

– **Espérance de *V***

On est dans le cas où χ est un caractère quantitatif.

La variance $V = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ de l'échantillon est moins agréable que sa moyenne. Pour l'étudier, il est commode d'introduire la variance de χ restreinte à l'échantillon. Pour cela, on considère la statistique notée Σ^2, définie par :

$$\Sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2.$$

On a la relation[e] : $V = \Sigma^2 - \left(\overline{X} - \mu\right)^2$.

Pour calculer $\mathrm{E}(V)$, on utilise les propriétés de linéarité de l'espérance mathématique :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(V) &= \mathrm{E}\left(\Sigma^2\right) - \mathrm{E}\left[\left(\overline{X} - \mu\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[(X_i - \mu)^2\right] - \mathrm{E}\left[\left(\overline{X} - \mu\right)^2\right] \\
&= \mathrm{Var}\left(X_0\right) - \mathrm{Var}\left(\overline{X}\right)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{E}\left(\Sigma^2\right) = \sigma^2 \text{ et } \mathrm{E}(V) = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2}$$

II Estimation

1 Principe de l'estimation

L'estimation d'un paramètre résumant les valeurs d'un caractère dans une population, consiste à donner pour la valeur τ prise par ce paramètre pour la population, une valeur approchée t_n, calculée à partir d'un échantillon, avec autant de précision que possible.

On utilise pour cela une statistique T appropriée, en retenant pour τ la valeur $t_n = \mathrm{T}(x)$, où x est l'observation de l'échantillon X.

Par exemple, pour estimer une moyenne μ ou une proportion p, on utilisera $\overline{X}$. Pour estimer une dispersion, on peut penser à la statistique V (qui n'est pas la meilleure !). Ces variables prennent alors le nom d'« **estimateurs** ».

Pour une **estimation ponctuelle**, on se contente des valeurs observées sur l'échantillon : $\overline{x}$ valeur de $\overline{X}$, m_n ou f_n suivant les cas pour estimer les valeurs théoriques μ (moyenne d'un caractère quantitatif) ou p (fréquence d'un caractère qualitatif) d'une part, s_n^2 valeur observée de V pour estimer la dispersion σ^2 du caractère dans la population d'autre part.

Le contrôle de la marge d'erreur renvoie à une **estimation par intervalle**. Par exemple, comment majorer la probabilité de se tromper en donnant pour une moyenne inconnue μ un encadrement issu de la valeur observée $\overline{x}$ sur l'échantillon :

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \alpha \ ?$$

---

[e] On trouve le lien entre V et Σ^2 en ramenant dans V les variables X_i et $\overline{X}$ à leur espérance m, en écrivant : $X_i - \overline{X} = (X_i - m) + \left(m - \overline{X}\right)$ et en développant le carré :

$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - m)^2 + 2\,(X_i - m)\left(m - \overline{X}\right) + \left(\overline{X} - m\right)^2\right]$,

d'où $V = \Sigma^2 + \frac{2}{n}\left(n\overline{X} - nm\right)\left(m - \overline{X}\right) + \left(\overline{X} - m\right)^2 = \sum{}^2 - \left(\overline{X} - m\right)^2$.

Un niveau de confiance $1-\alpha$ étant donné (0,9 ou 0,95 suivant les degrés de fiabilité que l'on souhaite), si l'on sait calculer cette probabilité, on peut obtenir une valeur minimale pour ε (le 1/2 écartement de la **fourchette**), telle qu'avec une probabilité meilleure que $1-\alpha$ on puisse affirmer que μ est dans l'intervalle $\left]\overline{x}-\varepsilon\ ;\ \overline{x}+\varepsilon\right[$.

La détermination de cet ε dans diverses situations concrètes est le problème du calcul des **intervalles de confiance**.

2 Qualités d'une estimation ponctuelle

Quand on donne une valeur expérimentale, issue de l'observation d'un échantillon aléatoire pour un paramètre inconnu, on peut se demander :

En quoi cette estimation ponctuelle est-elle une « bonne » estimation ?

On aimerait que cette inférence statistique jouisse des deux propriétés suivantes :

1. Si, pour chaque échantillon, chaque valeur observée t peut être différente de la valeur τ à estimer (cela dépend du hasard de l'échantillonnage), dans l'ensemble des échantillons de taille n possibles, on aimerait que ces valeurs se répartissent autour de τ de telle sorte qu'en moyenne, elles donnent τ. Autrement dit, on souhaite que $\mathrm{E(T)} = \tau$. On dit alors que l'estimateur T est « **sans biais** ».
2. On aimerait aussi que la précision et la fiabilité de l'estimation s'améliorent en augmentant la taille de l'échantillon (cf. l'exemple ci-dessus des mesures physiques). On dit alors que T est un estimateur **convergent** : plus on prend de grands échantillons, plus les valeurs observées t sont proches de τ, ou du moins la probabilité qu'elles s'en rapprochent tend vers 1.

Pour vérifier ces propriétés, on doit faire appel aux résultats théoriques en probabilités que l'on a rappelés et aux hypothèses de modèle. Voyons de plus près ce qu'il en est pour les deux estimateurs $\overline{X}$ et V introduits.

Estimation d'une moyenne ou d'une proportion

Dans le cas d'un caractère χ quantitatif, pour estimer la **moyenne $\boldsymbol{\mu}$** de χ prenons l'estimateur $\overline{X}$. Comme $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$, $\overline{X}$ est un <u>estimateur sans biais</u> de μ.

De plus, $\mathrm{Var}\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}\cdot$ L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit :

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}-m\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

ce qui montre que $\overline{X}$ est un <u>estimateur convergent</u>.

De même, pour estimer une **proportion $\boldsymbol{p}$**, l'estimateur $\overline{X}$ est performant : comme $\mathrm{E}\left(\overline{X}\right) = p$, $\overline{X}$ est encore un <u>estimateur sans biais</u>, et $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$ montre qu'il est convergent.

On retrouve un résultat attendu : pour estimer la probabilité d'un événement A, on peut prendre la **fréquence** des réalisations de A lors de la répétition d'un (assez) grand nombre d'expériences dont les issues constituent l'échantillon E.

Ce résultat ne démontre pas que la loi des grands nombres est une nécessité naturelle, il ne fait que donner une confirmation de l'efficacité du modèle probabiliste qui permet notamment de démontrer l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

Historiquement ce résultat a été le premier théorème important du calcul des probabilités, démontré par Jacques BERNOULLI dans *Ars Conjectandi* (1713), conséquence d'un théorème connu aujourd'hui sous le nom de « loi faible des grands nombres ». Le théorème de BERNOULLI montre que la fréquence observée est un estimateur sans biais convergeant pour la probabilité d'un événement.

Mais il ne permet pas évaluer assez finement l'erreur commise par cette estimation ponctuelle, c'est à dire de donner un encadrement de confiance pour cette probabilité. Un tel encadrement (intervalle de confiance) repose sur un théorème dû à MOIVRE et LAPLACE (démontré en 1814), cas particulier d'un résultat puissant connu aujourd'hui sous le nom de « théorème limite central ». C'est ce théorème qui fait de la statistique inférentielle un outil efficace.

Estimation d'une variance

Par contre, $\mathrm{E}(V) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$, V est donc un estimateur biaisé de σ^2. Mais $\mathrm{E}\left(\dfrac{n}{n-1}V\right) = \sigma^2$, et par conséquent la statistique $S^2 = \dfrac{n}{n-1}V$, qui s'écrit aussi :

$$\boxed{S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

est un estimateur sans biais de σ^2.

Habituellement, on désigne par s^2 ou σ_{n-1}^2 la valeur observée de S^2 sur l'échantillon et on l'appelle la **variance estimée** de la population (les calculettes statistiques présentent les deux valeurs σ_n et σ_{n-1}, ça fait plus riche). $s^2 = \sigma_{n-1}^2$ est donc une estimation ponctuelle sans biais de la variance σ^2 du caractère χ dans la population. On démontre que S^2 est aussi un estimateur convergent de σ^2.

Remarque : $\mathrm{E}(S^2) = \sigma^2$ n'entraîne pas $\mathrm{E}(S) = \sigma$, S n'est pas un estimateur sans biais de σ !

3 Estimation par intervalle de confiance

a) Niveau de confiance

On veut estimer la valeur d'un paramètre τ relatif à un caractère χ défini sur une population P. Une estimation ponctuelle à partir d'un échantillon ne renseigne pas sur la précision de l'approximation de τ. On voudrait donc obtenir un « intervalle aléatoire », pas trop grand, à partir de l'échantillon prélevé, tel que la probabilité qu'il contienne τ soit acceptable.

Cette probabilité sera appelée « **niveau de confiance** » de l'estimation, on la désigne par $1-\alpha$. Le nombre α est le risque que l'on prend de se tromper en affirmant que τ est bien dans l'intervalle proposé.

Pour préciser cela, prenons un niveau de confiance de 90 %. À chaque échantillon correspond la valeur observée t de l'estimateur T utilisé.

On considère l'intervalle centré en t : $]t-\varepsilon\ ;\ t+\varepsilon[$, où ε est choisi de sorte qu'en moyenne, pour 9 échantillons sur 10, τ soit dans $]t-\varepsilon\ ;\ t+\varepsilon[$.

Autrement dit, on désire trouver ε tel que $\mathbb{P}(\tau \in]\mathrm{T}-\varepsilon\ ;\ \mathrm{T}+\varepsilon[) \geqslant 0,9$. On a rencontré cette situation dans le cas où τ est l'espérance mathématique de la variable parente. On a vu que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors une solution, mais celle-ci se révèle peu performante. Pour avoir un bon résultat, le calcul de cette probabilité fait nécessairement intervenir la loi de T. L'intervalle aléatoire $]\mathrm{T}-\varepsilon,\ \mathrm{T}+\varepsilon[$ est appelé **intervalle de confiance** pour τ de niveau $1-\alpha$.

L'intervalle réel $]t-\varepsilon,\ t+\varepsilon[$ est « l'observation de l'intervalle de confiance » ou la « **fourchette** ». On ne sait pas avec certitude si τ est dedans.

b) Estimation d'une proportion p

Soit une population dans laquelle une modalité A d'un caractère qualitatif est en proportion p. Dans un prélèvement au hasard d'un élément de cette population, la probabilité qu'il présente la modalité A est donc p, valeur que l'on désire estimer.

Exemple : *Un sondage effectué auprès de 150 personnes choisies de façon aléatoire dans une circonscription donne 45 suffrages au candidat A. Quelle est la proportion p des partisans de A dans la population ?*

La valeur observée de la fréquence de A dans l'échantillon est ici : $f = 0,3$.

On choisit f comme estimation ponctuelle de la proportion p d'électeurs favorables au candidat A. Soit X_0 la variable de Bernoulli qui prend la valeur 1 pour un électeur de A et 0 sinon. La variable $\sum X_i = n\overline{X}$ est égale au nombre des partisans de A dans l'échantillon. C'est une variable binomiale $B(n;p)$.

On sait que $\mathrm{E}\left(\sum X_i\right) = np$, $\mathrm{Var}\left(\sum X_i\right) = np(1-p)$, d'où $\mathrm{E}\left(\overline{X}\right) = p$ et $\mathrm{Var}\left(\overline{X}\right) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

$\overline{X}$ est donc un estimateur sans biais et convergent de p.

On cherche un intervalle de confiance de p de niveau $1-\alpha = 0,95$. Pour avoir un bon résultat, il nous faut connaître la loi de $\overline{X}$, moyenne des X_i. Or la loi binomiale se prête mal aux calculs. On démontre (théorème de Moivre-Laplace) que la loi de la variable réduite $U = \dfrac{\overline{X} - p}{\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}}$ peut être approchée par la loi normale[f] $N(0;1)$ pour n assez grand ($n \geqslant 50$).

La condition que doit vérifier l'intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ est : $\mathbb{P}\left(\overline{X} - \varepsilon < p < \overline{X} + \varepsilon\right) = 1 - \alpha$, elle s'écrit

$$\mathbb{P}\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}} < U < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}}\right) = 1 - \alpha.$$

α étant donné, pour chaque valeur prise par $\overline{X}$, la table de la loi normale centrée réduite donne une valeur u pour $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}}$ qui vérifie la condition de confiance $\mathbb{P}(-u < U < u) = 1 - \alpha$. On obtient donc l'intervalle de confiance pour p :

$$\left]\overline{X} - u\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\ ;\ \overline{X} + u\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\right[$$

Avec l'observation f de $\overline{X}$, la demi-longueur de l'intervalle de confiance est alors $\varepsilon = u\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}$ et la fourchette obtenue pour estimer la proportion p au niveau de confiance $1-\alpha$ est donc :

$$\boxed{\left]f - u\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + u\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right[}$$

Dans l'exemple, on a la valeur observée $f = 0,3$ pour $\overline{X}$ et une taille $n = 150$ pour l'échantillon. Avec $\alpha = 0,05$, on obtient $u = 1,96$, ce qui donne la fourchette $]0,226\ ;\ 0,374[$ pour estimer p au niveau de confiance 0,95.

Remarquons qu'en pourcentage, p est donnée à 7,4 % près avec 5 chances sur 100 de se tromper, ce qui n'est pas fameux pour un sondage. L'échantillon est trop petit pour estimer assez précisément cette proportion. En prenant $n = 1000$, on obtient la fourchette $]0,271\ ;\ 0,329[$ susceptible d'encadrer p à environ 3 % près, ce qui est la performance habituelle des sondages médiatisés.

Remarquons aussi que la précision de cette estimation ne dépend pas de la taille de la population P mais qu'elle est inversement proportionnelle à la racine carrée de la taille n de l'échantillon sondé.

[f] On utilise ici cette loi dont la connaissance n'est pas essentielle pour comprendre la suite.

Pour simplifier un peu grossièrement, on peut aussi majorer $\sqrt{f(1-f)}$ par 0,5 ce qui, en augmentant la valeur calculée pour ε, garantit un niveau de confiance supérieur à $1-\alpha$. Cette majoration n'est pas trop brutale : pour $f = 0,3$, on a $\sqrt{f(1-f)} = 0,46$ et pour $f = 0,1$, on a $\sqrt{f(1-f)} = 0,3$.

Avec cette simplification, la condition $\mathbb{P}(|U| < u) \geqslant 1-\alpha$ donne $\varepsilon < \dfrac{u}{2\sqrt{n}}\cdot$ Mais pour $\alpha = 0,05$, on a $u = 1,96$ d'où à peu près $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, valeur proposée dans un thème du nouveau programme de statistique de seconde. On obtient, en fonction de différentes valeurs de n et de α, les demi-fourchettes ε suivantes en pourcentages :

α \ n	500	800	1 000	2 000	10 000
$0,1$	$3,7$	$2,9$	$2,6$	$1,8$	$0,8$
$0,05$	$4,4$	$3,5$	3	$2,2$	1
$0,01$	$5,7$	$4,5$	4	$2,9$	$1,3$

Par exemple, il faudrait un sondage de 10 000 personnes pour donner la répartition d'un choix dans la population à 1 % près, avec encore 5 chances sur 100 de se tromper.

Presses Universitaires Franc-Comtoises
Université de Franche-Comté
25030 BESANCON CEDEX

Maquette et mise en page François Pétiard (IREM)

Imprimerie : Reprographie du
Département de Mathématiques

Dépôt légal 4e trimestre 2001

Institut de **R**echerche sur
l'**E**nseignement des **M**athématiques
de Franche-Comté

Département de Mathématiques. UFR Sciences et Techniques.

16 route de Gray. 25030 BESANCON CEDEX

Tél. : 03 81 66 62 25 - Fax : 03 81 66 62 34

Mél : iremfc@math.univ-fcomte.fr

Site web : http ://www-irem.univ-fcomte.fr

IREM
Bulletin n° 66. 2001 ISSN 1141-913X