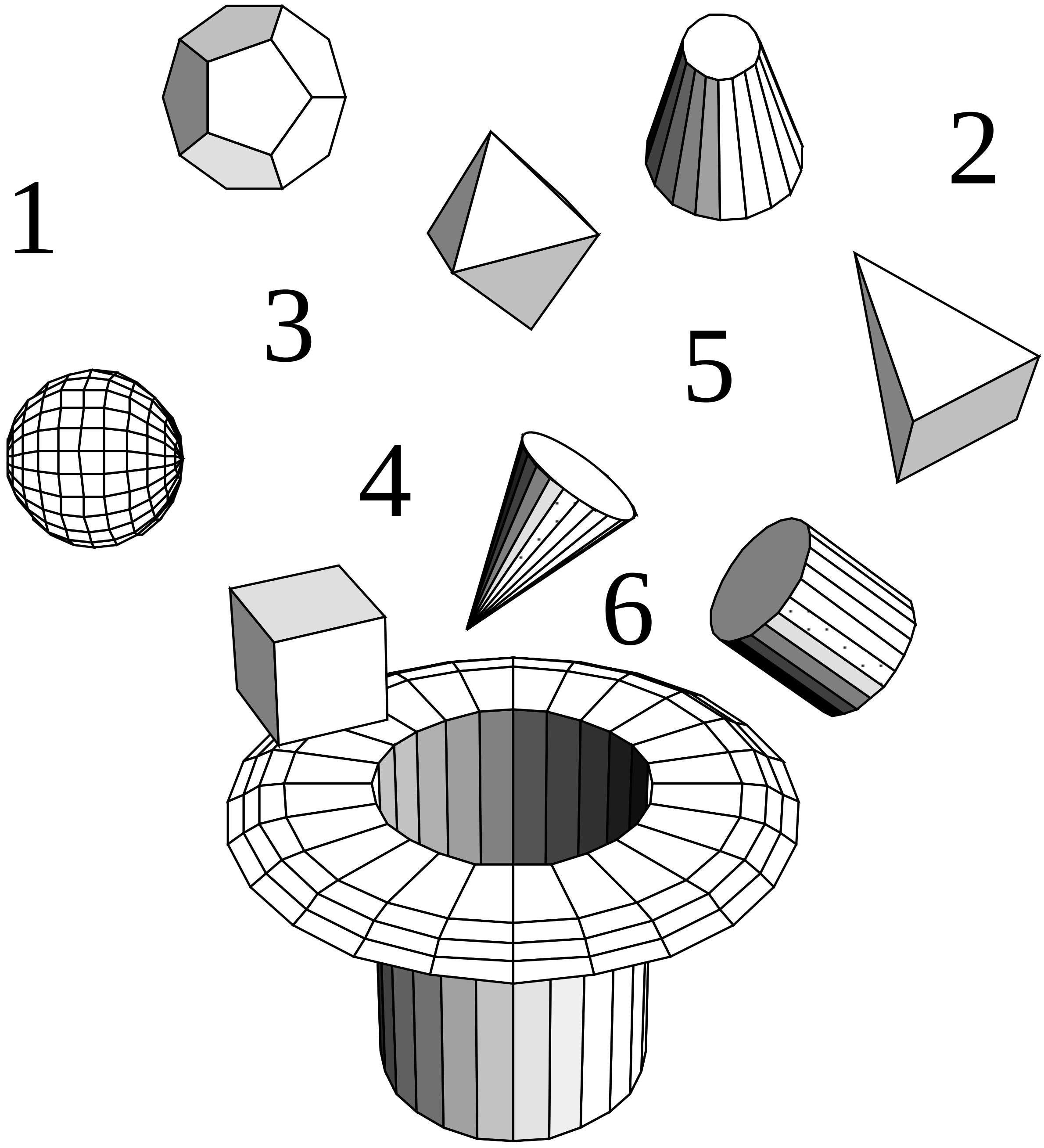
MATHÉMATIQUES VIVANTES



Bulletin de l'IREM
de BESANÇON

nº 65 – janvier 2001

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pufc

PRESSES UNIVERSITAIRES FRANC-COMTOISES

ISSN 1141-913X

Mathématiques vivantes

Bulletin IREM

n^{o} 65, janvier 2001

édité par François PÉTIARD

Presses Universitaires Franc-Comtoises 2001
Diffusé par l'IREM de Franche-Comté

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Franche-Comté (IREM)

Directrice Claude MERKER

Cette brochure a été réalisée en LaTeX 2_ε.

TABLE DES MATIÈRES.

L'art et l'enseignement des mathématiques à l'école primaire

Zdravka Novakova[1]
Docteur, maître de conférences en didactique des mathématiques
à l'Université de Sofia « Saint Climent Okhridski »

Sommaire

1 L'art didactique

Vers la fin du XIX^e siècle surgit l'art didactique comme courant visant l'utilisation de l'art pour l'éducation des enfants d'une part, et l'introduction de l'art dans l'enseignement d'autre part.

L'Anglais D. Raskin – historien de l'art et philosophe – se met à la tête d'une Union créée en 1883 qui a pour but de rapprocher l'art de l'école. À cette Union adhèrent d'éminents peintres, écrivains, pédagogues. Leur activité consiste à aider les écoles en leur procurant des reproductions d'art comme décorations mais aussi comme support d'enseignement, à organiser des visites de galeries d'art, de musées et à illustrer des livres d'enfant.

En 1886 en Allemagne est fondée l'Union des professeurs pour l'éducation des enfants par l'intermédiaire de l'art, à laquelle prennent part des professeurs qui se dressent contre les dogmes et les clichés.

Des théoriciens éminents de l'art didactique en Allemagne sont les pédagogues H. Charelman (1871–1940) et F. Hansberg (1871–1950).

L'objectif de H. Charelman est l'enseignement artistique, pictural. D'après lui chaque leçon, y compris de mathématiques, doit être un tableau artistique. Le professeur-peintre doit, selon ses propres conceptions et son imagination, animer le matériel didactique, le

[1] En Bulgarie les instituteurs sont formés dans une faculté de pédagogie scolaire et préscolaire, faisant partie de l'Université. Madame Novakova est en relation avec l'IUFM de Franche-Comté, et plusieurs échanges ont déjà eu lieu.

présenter par des descriptions pleines de vie, par des contes et des récits. Il doit être lui-même un artiste, il doit lui-même être créateur, capable d'éveiller les capacités créatrices des enfants, de les gagner par la joie de créer [Charelman 1909b, pp. 206–207]. « Des compositions d'élèves après des compositions d'élèves, des tableaux après des tableaux, des récits après des récits, des chansons après des chanson. Un positivisme sans fin » [Charelman 1909a, p. 109].

Selon H. Charelman le plus important, ce n'est pas tellement le choix et la collecte du matériel didactique, mais sa présentation, qui doit nourrir les sentiments et l'imagination des enfants [Charelman 1909b, p. 30]. H. Charelman refuse le processus d'étude planifié préalablement. Il défend l'idée de la créativité libre du professeur, fondée sur son intuition pédagogique et provenant de la situation concrète, qu'on ne doit pas prévoir à l'avance [Piskounov 1968, p. 687].

F. Hansberg partage les conceptions de H. Charelman. Il souligne que lors de l'enseignement, la création d'une atmosphère émotionnelle dans les leçons, la stimulation des penseurs et des inventeurs, la découverte des poètes et des narrateurs sont plus importants que la présentation des savoirs [Gansberg 1920, p. 23]. F. Hansberg met en évidence l'idée que le mieux est d'unir l'enseignement de l'arithmétique au dessin [Gansberg 1920, p. 127]. Il recommande encore d'introduire des problèmes pratiques intéressants qui créent la possibilité de réfléchir sur bien d'autres questions, d'éveiller des sentiments et l'intérêt des enfants [Gansberg 1920, pp. 127–130]. F. Hansberg est partisan, lui aussi, de l'activité artistique du professeur en tant qu'amateur, activité qui n'est pas limitée par des plans et des programmes d'étude [Gansberg 1920, p. 155].

En Bulgarie dans la période après 1900 l'art didactique trouve ses adhérents, mais il ne se développe pas dans la pratique pédagogique.

L'un des théoriciens de l'art didactique en Bulgarie s'appelle St. Thakarov. D'après lui sous le terme « art didactique » on doit comprendre la capacité du professeur d'animer le matériel didactique au moyen de sa propre pensée et imagination, de le présenter avec des tableaux et des scènes plastiques, à l'aide desquels on éveille différents sentiments et pensées chez les élèves. Ce qui est important ce n'est pas d'atteindre des résultats quelconques à la fin de la leçon, l'important ne consiste pas en ce que les élèves doivent tirer des conclusions individuelles de ce qu'ils ont appris, mais c'est de stimuler les enfants pour qu'ils créent et pensent [Tchakarov 1906, p. 515]. En un mot le professeur ne doit pas faire apprendre aux élèves, mais les pousser à apprendre eux-mêmes [Tchakarov 1921, p. 30]. Chaque enseignement ne doit pas être dirigé seulement vers la raison mais surtout vers l'imagination et les sentiments des élèves car ce sont les seules forces créatrices de l'homme [Tchakarov 1906, pp. 517–518]. St. Thakarov attribue une importance primordiale à la maîtrise artistique du professeur, il attire l'attention sur la mimique, le geste, l'intonation [TCHAKAROV 1921, p. 57]. De même que les autres représentants de l'art didactique St. Thakarov ne tient pas compte de la qualification du professeur, il compte plutôt sur son inspiration de l'instant [TCHAKAROV 1909, pp. 11 et 14].

Un autre représentant de l'art didactique en Bulgarie est le célèbre professeur et auteur pédagogique Violino Primo de son vrai nom Tz. Popov. V. Primo souligne de même l'idée que l'art doit être introduit dans le processus d'enseignement. Selon lui les récits poétiques, les contes, les chansons, les dessins et le modelage avec de l'agile doivent être largement appliqués dans les leçons. Tout en écoutant, en chantant, tout en modelant, les élèves apprennent le matériel didactique d'un façon spontanée et inconsciente. D'après Violino Primo les jeux (surtout ceux d'achat et de vente), l'utilisation de problèmes – contes, devinettes, proverbes, chansons, récits – dans lesquels sont introduits les nombres déjà étudiés, de même que le modelage avec argile et les dessins doivent occuper une grand place dans l'enseignement de l'arithmétique [VIOLINO 1927, pp. 57 et 198].

Il s'exclame : « Entourez les chiffres avec des noms d'enfant, animez-les, faites parler les chiffres, faites-les bouger... appelez au secours les héros des contes, des fées, des reines etc. et vous aurez souvent de belles leçons, des leçons amusantes, agréables, un enseignement enthousiaste et créateur. L'enseignement se transforme en un vécu de l'âme » [VIOLINO 1927, p. 134].

Si on veut généraliser les idées principales de l'art didactique pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, les points suivants méritent d'être soulignés :

- L'introduction de l'art dans l'enseignement de mathématiques, l'implication du matériel d'étude dans l'art, la représentation des savoirs mathématiques sous une forme artistique.

  La présentation du matériel de mathématiques vient dans un deuxième plan, tandis que le premier plan est le développement d'un récit intéressant, d'un conte, d'une chanson, d'un dessin, d'un modèle en argile ;

- L'exigence d'introduire des émotions dans l'enseignement de mathématiques avec des moyens artistiques, pour créer une atmosphère agréable dans les leçons, une attitude émotionnelle positive chez les élèves, grâce auxquelles l'humeur joyeuse et alerte des enfants contribue à l'éveil de leurs forces créatrices.

  En même temps il est nécessaire de souligner les défauts fondamentaux de l'art didactique :

– Dans l'art didactique on n'attache pas une importance suffisante aux connaissances que les élèves apprennent, mais à ce qu'ils sentent, l'éveil des émotions positives chez eux visant la stimulation de leurs capacités créatrices. Quand on sous-estime les connaissances, on n'assure pas de « nourriture » suffisante à l'intellect, alors que, en même temps on excite « l'appétit », l'élan des élèves à créer ;

Dans l'art didactique on conteste le rôle dirigeant du professeur, on nie la nécessité d'un plan d'étude ; on ne reconnaît pas la nécessité de la formation pédagogique du professeur, on ne compte que sur son inspiration instantanée.

2 L'art dans l'enseignement suggestopédique

L'art occupe aussi une place prépondérante dans l'enseignement suggestopédique [Lozanov 1973, pp. 649–650]. Au cours de l'année scolaire 1975–1976 en Bulgarie on a commencé une expérimentation élargie du système d'étude suggestopédique, élaboré par le professeur docteur G. Lozanov. Dans l'expérimentation sont incluses 13 écoles primaires – urbaines et rurales –, dans lesquelles sont présents aussi des enfants d'origine turque et tzigane.

Le système d'étude suggestopédique est un système dé-suggestif–suggestif, car il libère la personnalité de la norme sociale (les programmes, les manuels, ... qui suggèrent que les élèves de telle année ne peuvent apprendre que ce que le programme fixe) et stimule en même temps non seulement la mémoire, mais la personnalité tout entière : ses intérêts, son activité intellectuelle, sa motivation, son développement créateur et moral [Lozanov 1978, p. 25]. Par rapport à la personnalité, la suggestopédie est un système d'étude global, car il exploite non seulement les formes d'information conscientes, mais aussi inconscientes. L'élève n'est pas une machine dépourvue d'émotions et de motivation. De nombreux facteurs non conscients et intuitifs exercent une influence sur l'assimilation des connaissances, des savoir-faire et de l'expérience pratique [Lozanov 1975a, p. 2]. Ce système attribue une importance spéciale à l'harmonisation du premier plan de communication (les mots) au second plan (les gestes, la mimique, l'intonation, etc.) qui n'est pas perçu immédiatement par l'interlocuteur, mais ce second plan s'avère un canal de contrôle inconscient pour l'authenticité de l'information [Lozanov 1978, pp. 18–19].

« Des changements imperceptibles dans la mimique, l'allure, la parole, le décor supplémentaire et d'autres peuvent jouer un rôle décisif pour la formation du résultat suggestif » [Lozanov 1971, p. 231].

Le système d'étude suggestopédique suppose non seulement une approche globale de la personnalité, mais aussi la globalisation lors de l'élaboration du contenu d'enseignement. On élabore le matériel d'étude de chaque discipline scolaire en thèmes globaux. Quand on présente le thème global les élèves obtiennent une impression totale du matériel étudié. En même temps ils apprennent encore des détails, des cas concrets particuliers. Au cours des heures suivantes consacrées au thème global, ces cas particuliers se consolident, s'élargissent, certains nouveaux éléments s'introduisent lors de ce processus, les élèves reconnaissent leur place dans le tout, ils les considèrent en tant que parties constituantes de la totalité. Dans cette étape de la fixation du matériel, les éléments surgissent au premier plan tandis que la totalité reste au deuxième plan. Il faut souligner, que le double plan est un trait caractéristique du système d'étude suggestopédique.

G. Lozanov met en évidence l'idée que l'art en tant que moyen de l'harmonisation du deuxième plan cache en lui bien des ressources [Lozanov 1975b, p. 12], il doit s'introduire d'une façon naturelle dans le processus d'enseignement. Les moyens de l'art créent non seulement une atmosphère agréable dans les leçons, mais augmentent considérablement l'attitude suggestive des ressources de la personnalité de l'élève, de la motivation. Ils aident à l'acquisition immédiate d'une partie du matériel d'étude [Lozanov 1978, p. 37].

E. Gatéva, collaboratrice du docteur G. Lozanov, en utilisant comme base théorique la suggestologie et la suggestopédie, s'occupe de l'art suggestopédique. À la différence de l'art qui aide à un enseignement du matériel d'étude en petites parties, et qui, tout en créant une atmosphère émotionnelle et une relaxation, confirme la norme sociale des capacités limitées de l'homme pour apprendre et pour se développer, l'art suggestopédique est soumis au but primordial de la suggestopédie : la découverte du système des capacités potentielles de la personnalité de l'apprenant [Gateva 1982, pp. 72–73].

Pendant plus de 13 ans j'ai travaillé comme attachée scientifique à l'Institut scientifique de recherches de suggestologie. J'étais responsable de l'enseignement suggestopédique de mathématiques dans les écoles expérimentales de l'Institut.

Dans l'enseignement suggestopédique de mathématiques on introduit l'art non pas comme une étape de relaxation, de repos ; il n'y a pas succession d'activités ; le matériel d'étude s'introduit dans l'art. Le but est d'activer le système émotionnel de motivation, la pensée imagée et l'abstraction logique non pas l'un après l'autre, mais simultanément dans une union indissoluble. Tout cela est extrêmement important pour une discipline scolaire telle les mathématiques, dans laquelle tout en se basant sur la spécificité de la science mathématique, sur le caractère abstrait des connaissances mathématiques, l'enseignement se dirige surtout vers l'activité logique des élèves.

Dans l'enseignement de mathématiques dans les classes primaires en s'appuyant sur le système de l'étude suggestopédique on introduit des spectacles, qui sont préparés exprès pour chaque thème global, des séances de concert, de la musique de fond.

D'après l'idée de G. Lozanov on étudie un thème global de mathématiques en 4 étapes :

La première étape :

C'est une forme musicale, théâtrale ou récitative sous laquelle on présente l'essentiel du nouveau thème [Lozanov 1973, p. 541]. À la télévision on transmet un spectacle, accompagné d'une musique d'après un modèle classique. Les élèves regardent le spectacle pendant la leçon de mathématiques – le jour précédent dans la leçon de lecture ils font connaissance avec son contenu grâce aux livrets illustrés, préparés exprès. Ces livrets contiennent des répliques des personnages, de même que les notes de la plupart des chansons. Dans le sujet du spectacle on introduit certaines des idées les plus essentielles du thème. Les élèves ne sont pas seulement des observateurs passifs mais, entraînés par le professeur, ils se joignent insensiblement au spectacle.

À la télévision bulgare ont été émis 3 spectacles /texte et musique E. Gateva [Gateva 1977], [Gateva 1978a], [Gateva 1978b] : un cycle vocal avec un ballet, intitulé « La journée », se rapportant au thème « *Les nombres naturels jusqu'à* 10. *Addition et soustraction jusqu'à* 10 » ; un opéra enfantin « La terre des enfants », se rapportant au thème « *Addition et soustraction des nombres jusqu'à* 1000 *(les cas :* $452 + 236$, $978 - 635\ldots$*)* » et un opéra pour des enfants intitulé « Monde des contes » se rapportant au thème « *Addition et soustraction des nombres jusqu'à* 1000 *(les cas :* $564 + 273$, $825 - 372$, *…)* ».

Par exemple dans le spectacle « Monde des contes » avec la danse de Blanche-Neige et des 13 nains, on illustre l'addition avec retenue jusqu'à 10 : $6+7 = (6+4)+3 = 13$. La danse est accompagnée d'une chanson pour les 13 nains que les élèves après cela apprennent facilement :

> « Dans le premier rang – six nains sages
> plus sept du deuxième rang,
> ils savent garder la bonne Blanche-Neige
> Combien sont en tout quand même ?
> Six nains sages plus quatre nains braves
> sont dix – un nombre connu,
> plus encore trois nains rapides et rusés
> leur nombre est treize » [Gateva 1978b, pp. 12–13].

La deuxième étape : Le jour suivant dans la leçon de mathématiques on raconte le spectacle, on joue quelques parties du spectacle, on entend et on chante les chansons de ce même spectacle. On marque les moments dans lesquels est inclus le matériel de mathématiques et on les élargit avec de nouveaux exemples. On utilise les possibilités dans le spectacle en vue de réaliser des relations interdisciplinaires (langue maternelle, sciences naturelles, civilisation du pays).

La troisième étape : Le jour suivant au cours de deux leçons successives le professeur, tout en se basant sur les souvenirs du spectacle que les élèves ont gardés, et sur leur attitude positive, enseigne le thème global.

La quatrième étape : Dans les leçons suivantes on fixe le matériel de mathématiques enseigné, on élargit et on approfondit les savoirs des élèves.

Dans l'enseignement de mathématiques d'après le système suggestopédique de G. Lozanov on introduit encore des séances de concert – musique classique en récitant une partie du matériel mathématique en vue de le mémoriser (par exemple : addition des nombres jusqu'à 10, addition des nombres qui s'écrivent avec un chiffre, quand leur somme est un nombre, écrit avec deux chiffres, multiplication par 2, 3, ... 10). Lors des séances de concert on utilise l'influence suggestive de la musique classique choisie et la maîtrise artistique du professeur qui sont adaptés au processus d'enseignement. On écoute un enregistrement de musique du programme musical des écoles suggestopédiques dans lequel sont introduites des œuvres de la musique préclassique et classique (H. Pasel, A. Corelli, G. Haendel, A. Vivaldi, W. A. Mozart, J. Haydn, P. I. Tchaïkovski et autres). Après avoir créé une atmosphère correspondant au concert, le professeur lit lentement d'une intonation douce et d'un rythme en accord avec la musique le matériel de mathématiques prévu pour être mémorisé. Pendant la lecture on éprouve un sentiment d'optimisme qui provient de l'acquisition facilitée du matériel. Les élèves observent ce qui a été lu sur des tableaux correspondants qui sont accrochés au mur et qui sont préparés d'avance.

Dans l'enseignement suggestopédique de mathématiques, d'après l'idée de G. Lozanov, on introduit aussi de la musique de fond. On l'utilise lors du travail individuel des élèves qui exige relativement plus de temps. La musique que les élèves entendent, est tranquille ; dans la salle de classe règne un silence absolu.

Pendant l'enseignement de mathématiques on élabore certaines leçons par un thème qui permet aux élèves d'être en pensée dans une autre situation imagée où ils agissent, tout en réfléchissant et éprouvant des sentiments.

On attache une attention particulière à l'introduction des jeux. L'attitude spéciale du joueur qui croit et ne croit pas en même temps à la réalité de l'action, le double plan dans son comportement rapprochent le jeu de l'art. Dans l'enseignement suggestopédique on introduit les jeux de la même façon que l'art, non pas comme une étape de relaxation entre les surcharges mentales des élèves, non pas pour faire alterner les activités, mais unis au contenu d'étude [NOVAKOVA 1986, pp. 6–19].

On utilise encore des tableaux artistiques avec le contenu de mathématiques, qu'on accroche 4 à 5 jours avant l'étude du thème global correspondant. Le professeur ne dirige pas l'attention des élèves sur les tableaux, ils ne sont qu'une décoration de la salle de classe. Les recherches démontrent que l'information périphérique qui ne peut pas entrer dans la conscience (qui a un volume limité) est à la base de la mémoire à long terme [LOZANOV 1978, p. 20].

Ma thèse de doctorat a été consacrée à la recherche de l'influence de l'art sur l'acquisition du matériel de mathématiques, étudié par les élèves dans les classes primaires des écoles où l'on utilisait le système d'étude suggestopédique [HAMEAU 1996, pp. 54–62]. Au cours des trois années scolaires (1978–1981) j'ai fait des recherches sur l'influence des trois spectacles, de la séance de concert et de la musique de fond. Il y avait des classes-témoins dans le but de comparer l'efficacité de l'enseignement de mathématiques avec l'utilisation de l'art, en égalisant les temps de classes des élèves. On a observé plus de 200 élèves. Les résultats ont été traités en utilisant les critères statistiques de signification $\mathcal{T}$-critère de Student.

Il était difficile d'établir l'influence de la musique de fond, lors du travail individuel des élèves. Il était indispensable d'améliorer plusieurs fois l'organisation des recherches en vue de superposer l'influence de la musique de fond :

Les élèves du groupe expérimental ont résolu le premier jour des problèmes sans musique mais le deuxième jour sur fond de musique. Les élèves du groupe-témoin ont résolu les mêmes problèmes, mais le premier jour sur le fond de musique et le deuxième jour sans musique.

Des résultats du travail expérimental mené, on peut tirer les conséquences suivantes :

– Les spectacles « La journée » et « Monde de contes » améliorent l'acquisition du nouveau matériel de mathématiques, la différence au profit des spectacles est signifiante. On n'a pas trouvé une différence signifiante au profit du spectacle « Terre de contes ».
– La séance de concert améliore l'acquisition du nouveau matériel de mathématiques – la différence au profit de la séance est signifiante.
– La musique de fond améliore la réalisation des connaissances des élèves quand ils résolvent individuellement des problèmes pendant la quatrième leçon et quand ils font des exercices pendant la deuxième leçon – la différence au profit de la musique est signifiante.

L'utilisation de l'art dans l'enseignement suggestopédique de mathématiques dans les classes primaires fait surgir des problèmes suivants :

L'exigence que le spectacle doit introduire les idées principales du thème global, qui englobe un grand volume de matériel de mathématiques provoque des difficultés chez les enfants, qui sont absents à cause de maladie, de problèmes domestiques et autres, quand on regarde et joue le spectacle. Ils rattrapent difficilement ce qui est perdu, cela les oblige à prendre conscience d'un grand volume de connaissances de mathématiques, en plus ils sont privés de l'influence émotionnelle positive de l'art.

L'introduction de spectacles dans l'enseignement de mathématiques dans toutes les écoles pose encore des problèmes financiers, exige une bonne base matérielle, la présence d'un téléviseur dans chaque salle de classe. En outre il est nécessaire que l'enseignement des thèmes globaux de mathématiques soit présente dans un même jour d'étude pour toutes les écoles ce qui est pratiquement irréalisable. De même l'enseignement du thème global après que le spectacle est observé et joué en classe, exige du professeur une grande maîtrise se rapportant aussi bien à la formation professionnelle qu'à sa formation artistique, le pouvoir d'harmoniser les signaux du deuxième plan (c'est à dire des formes intonatives et gestuelles dans l'acte de communication) au premier plan communicatif, ce qui permet de découvrir les ressources de la personnalité de l'apprenant. La réalisation d'une telle formation de tous les professeurs est très difficile. Dans le cas contraire l'utilisation de matériel de mathématiques pourrait être vidée de sa substance.

La même qualification des professeurs quand on utilise la séance de concert est indispensable, et ceci même dans une plus grande mesure que dans les leçons. Il est nécessaire de souligner que la séance de concert – l'écoute de la musique classique accompagnée d'un récitatif de mémorisation d'un matériel de mathématiques fixé – ne doit pas être introduite pendant l'enseignement du thème global car on doit avoir en vue que chez les petits élèves c'est l'attitude mnémonique qui domine sur le cognitif, transformant la compréhension en mémorisation. Si on utilise la séance, elle doit être introduite plus tard et non pas pour tous les élèves.

R. Galisson et J. Lerède discutent sur l'avenir de la suggestopédie, ses mérites et ses limites, les impasses et les dangers [Galisson 1983, pp. 97–98], [Lerède 1987, pp. 229–278].

L'idée de l'utilisation de l'art dans l'enseignement des mathématiques peut trouver sa place dans toutes les classes primaires. Les expériences de V. Louendfeld (dans le domaine des beaux-arts) et de Dz. Guilford (dans le domaine de la science) démontrent une coïncidence presque totale des indices du potentiel créateur de la personnalité dans l'art et dans la science [Ussov 1969, p. 64]. Fokht Babouchkine défend d'une façon expérimentale la thèse que chez les enfants mathématiciens la prédisposition vers l'art augmente leurs possibilités dans la résolution des problèmes non-standards qui exigent chez le mathématicien la présence d'esprit créatif [Fokht–Babouchkine 1980, p. 97].

Pour qu'on perfectionne l'enseignement de mathématiques dans les classes primaires, il faut qu'on stimule et développe la personnalité tout entière de l'élève. Parallèlement avec le développement de leurs connaissances de mathématiques il est nécessaire qu'on éveille leurs intérêts, leur motivation, leur attitude, leurs ressources émotionnelles. J. Piaget souligne que « ... il n'y a pas de mécanisme cognitif sans éléments affectifs et il n'y a pas non plus d'état affectif pur, sans élément cognitif » [Piaget 1993, p. 78].

L. Williams lance l'idée « apprendre avec le cerveau tout entier », c'est-à-dire utiliser les deux hémisphères cérébraux. Elle souligne que « l'approche artistique peut être un apport très efficace dans toutes les disciplines et que non seulement cette approche est très stimulante et motivante pour les élèves mais elle leur fournit une voie supplémentaire vers la compréhension de concepts de base » [Williams 1986, pp. 16, 114, 115].

Dans le même ordre d'idées C. Hameau écrit que les élèves sont surchargés par des définitions, points, droites, demi-droites, segments. Il propose de partir de dessins, de beaux dessins, de « dessins riches, stimulants » [Hameau 1996, p. 5].

M.-C. Landry écrit qu'il est nécessaire « d'intégrer intelligence et créativité » [Landry 1992]. La même thèse est défendue aussi par A. Beadot qui souligne que « la créativité est une base sur laquelle peut se fonder l'enseignement de n'importe quelle discipline d'enseignement. » L'auteur souligne que pour beaucoup d'enseignants le domaine de la créativité est « celui de la musique, de la peinture, du dessin ou des arts, du mime ou du théâtre d'enfants » [Beaudot 1974, p. 62].

S. Fontanel–Brassart et A. Rouquet soulignent que l'éducation doit être « artistique et interdisciplinaire », qu'il n'est plus alors nécessaire d'attendre l'heure de dessin pour avoir la possibilité de peindre. Poésie, mime, dessin, musique, expression gestuelle devraient être les outils quotidiens et permanents de l'expression et du travail en classe [Fontanel-Bressart 1975, pp. 22–23].

3 Utilisation de l'art dans l'enseignement expérimental

Dans l'enseignement on peut introduire l'art en tant que facteur contribuant à la stimulation de l'activité psychique intégrale des élèves. Voilà un des buts que je me suis fixé dans l'organisation de l'enseignement expérimental d'une école primaire dans la ville de Pavlikéni (1992–1997) et encore à présent (1998) dans les classes primaires de l'école n° 138 à Sofia, dans lequel j'utilise des éléments du système d'étude suggestopédique du docteur G. Lozanov.

Dans l'enseignement expérimental on introduit la dramatisation des problèmes surtout en première classe[2]. On utilise largement le dessin tout en gardant la tendance suivante : d'un dessin plein de détails vers un dessin plus schématique. Le dessin contribue à la prise de conscience de la part des élèves du contenu des problèmes de même que pour contrôler les résultats des problèmes après leur résolution.

Par exemple le problème « Yves a 9 billes bleues et des billes blanches ; il a 5 billes blanches de plus. Combien de billes blanches possède Yves ? Résous le problème. Fais un dessin qui correspond au problème » est introduit dans le test final pour la première classe (1994) ; Il est résolu correctement (y compris avec le dessin correspondant) par 70% des élèves de la classe expérimentale et 21% des élèves de la classe de contrôle. La plupart des élèves de la classe de contrôle font l'évaluation correcte du problème donné, mais ils ne sont pas capables de faire le dessin correspondant au problème. Une erreur typique qu'on commet est le dessin de 9 billes bleues et 5 billes blanches. Un problème semblable inclus dans le test pour la première classe (1993) est résolu correctement par 87% des élèves de la classe expérimentale et par 24% des élèves de la classe de contrôle [Novakova 1995, pp. 32–34]. L'incapacité des élèves de présenter la situation décrite dans le problème par un dessin démontre qu'ils ne prennent pas conscience de la résolution. Les élèves résolvent le problème en s'appuyant sur l'analyse segmentée : « … de plus » signifie addition. Cette erreur au début reste cachée, car le problème est résolu apparemment correctement et le professeur se satisfait de la réponse correcte (on n'exige pas le dessin). Mais plus tard quand on introduit des problèmes, posés sur une forme indirecte (par exemple : « Yves a 9 billes bleues, il en a 5 de plus que ses billes blanches. Combien de billes blanches possède Yves ? ») les élèves diminuent brusquement leur réussite. En outre ce qui est le plus important les élèves s'habituent aux associations « aveugles », liées aux mots inducteurs, qui n'ont rien de commun avec la prise de conscience, de la relativité des notions mathématiques [Novakova 1993, pp. 22–23].

Dans l'enseignement expérimental de mathématiques on introduit par des thèmes l'exploitation de certaines leçons, avec des jeux. Les éléments de l'art, les jeux sont introduits non pas comme pause de relaxation quand on doit répondre aux problèmes de mathématiques difficiles. Le matériel de mathématiques s'implique dans l'art, dans le jeu. Les sentiments agréables, les émotions positives des élèves sont mises à profit pour la résolution des problèmes créatifs.

Pour activer les élèves, pour augmenter leur intérêt pour les mathématiques,

[2]La première classe correspond au CP français

une importance primordiale est attachée aux soirées de mathématiques dans l'école expérimentale [Aurand 1998, pp. 95–96 et 102–103]. À ces soirées sont présents les parents. Tous les enfants y prennent part individuellement ou en groupe. Chaque groupe d'élèves sous une forme secrète prépare préalablement son numéro d'expression sous la direction du professeur. À cette soirée les élèves posent leurs problèmes et évaluent en même temps l'exactitude (et la vitesse) de résolution par les autres élèves, ils sont en même temps des acteurs et des mathématiciens. La possibilité qu'on donne à chaque enfant non seulement de se manifester tout en résolvant des problèmes, mais de poser lui-même des problèmes intéressants à leurs condisciples, d'évaluer l'exactitude de leur résolution – tout cela augmente pour chaque élève la confiance en ses propres forces et la motivation d'acquérir des savoirs mathématiques.

Dans l'enseignement expérimental ont été élaborés des tableaux contenant des tables d'addition des nombres jusqu'à 10, d'addition des nombres à un chiffre, quand leur somme est un nombre à deux chiffres, de table de multiplication par 2, 3, . . . , 10. Ont été faits encore des tableaux d'un contenu géométrique dans lesquels les idées principales sont : la variation des paramètres secondaires, la comparaison de concepts similaires et opposés. En ce qui concerne l'erreur typique que commettent les élèves qui changent les unités d'aires avec celles de longueur, on a préparé un tableau dans lequel on juxtapose la longueur d'un segment, par exemple 6 cm, avec l'aire d'une surface de rectangle 6 cm^2 (de même on juxtapose l'unité de longueur 1 cm avec l'unité d'aire 1 cm^2). Ces tableaux présentés artistiquement, contenant des dessins colorés intéressants sont fixés au mur comme décoration, 4 à 5 jours avant l'étude du matériel de mathématiques correspondant (on n'élabore pas des thèmes globaux) sans que l'attention des élèves ne soit dirigée vers eux.

Une ou deux fois par semaine (pas plus pour qu'on n'obtienne pas l'effet de saturation) pendant le travail individuel des élèves qui exige relativement plus de temps (5 à 10 minutes) on fait entendre de la musique de fond (G. Haendel, A. Vivaldi, W. A. Mozart, J. Haydn et autres d'après le système suggestopédique d'étude de G. Lozanov).

Sont élaborés les résultats des tests (non standardisés) faits dans la première et la deuxième classe[3] de l'école expérimentale de la ville de Pavlikéni dans un plan comparatif avec les classes de contrôle de Sofia. On a utilisé le $\mathcal{T}$-critère de Student. L'élaboration statistique des résultats a montré que la différence entre les acquisitions des élèves de l'école expérimentale et ceux, obtenus par les élèves de l'école de contrôle est statistiquement signifiante. On doit souligner, que dans cette expérimentation, une

[3]Correspond au CE1

des idées principales est l'illustration de l'art dans l'enseignement de mathématiques.

En conclusion on peut généraliser que l'idée d'introduire l'art dans l'enseignement de mathématiques à l'école primaire mérite de trouver sa place dans la pratique, dans la littérature de didactique [Novakova 1998, pp. 84–86], dans les manuels et les matériels didactiques destinés aux élèves, dans les guides pédagogiques de mathématiques pour les instituteurs.

L'utilisation de l'art dans l'enseignement contribuerait à l'humanisation du processus d'enseignement de mathématiques dans les classes primaires, tendance essentielle dans le développement du système éducatif.

4 Bibliographie.

[Aurand 1998] Aurand, C. et autres. *Dispositifs d'aide à la résolution de problèmes.* In *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, tome VI (issu du stage de Besançon 1997). Copirelem, IREM de Paris 7, 1998.

[Beaudot 1974] Beaudot, A. *La créativité à l'école.* Presses Universitaires de France, Vendôme, 1974.

[Charelman 1909a] Charelman, X. *Enseignement stimulant.* K. S. Ch., 1909. Trad. de l'allemand (en bulgare).

[Charelman 1909b] Charelman, X. *Une voie vers la force, II^e partie de l'enseignement stimulant.* K. S. T., 1909. Trad. de l'allemand (en bulgare).

[Fokht–Babouchkine 1980] Fokht–Babouchkine. *Au sujet de la relation entre les capacités mathématiques et artistiques.* In *L'art en tant que facteur du développement intellectuel et créatif des élèves.* M., 1980. (en russe).

[Fontanel-Bressart 1975] Fontanel-Bressart, S. ; Rouquet, A. *L'éducation artistique dans l'action éducative.* Librairie Larousse, Paris, 1975.

[Galisson 1983] Galisson, R. *La Suggestion dans l'enseignement.* CLE International, Paris, 1983.

[Gansberg 1920] Gansberg, E. *Un travail créatif à l'école.* M., 1920. (en russe).

[Gateva 1977] Gateva, E. *La journée.* S., 1977. (en bulgare).

[Gateva 1978a] Gateva, E. *La terre des enfants.* S., 1978. (en bulgare).

[Gateva 1978b] Gateva, E. *Monde de contes.* S., 1978. (en bulgare).

[Gateva 1982] Gateva, E. *Construction artistique globalisée du processus d'enseignement suggestopédique.* S., 1982. (en bulgare).

[Hameau 1996] Hameau, C. *La géométrie par le dessin au cycle III.* Nathan, 1996.

[Landry 1992] Landry, M.-C. *La créativité des enfants.* Québec, 1992.

[Lerède 1987] Lerède, J. *Suggérer pour apprendre.* CLE International, Paris, 1987.

[Lozanov 1971] Lozanov, G. *Suggestologie.* S., 1971. (en bulgare).

[Lozanov 1973] Lozanov, G. *Les bases de la suggestologie.* In *Problèmes de la suggestologie.* S., 1973. (en bulgare).

[Lozanov 1975a] Lozanov, G. *La suggestologie à l'école primaire.* In *Suggestologie et Suggestopédie n° 2.* S., 1975. (en bulgare).

[Lozanov 1975b] Lozanov, G. *Théorie suggestologique des communications et le processus d'enseignement.* In *Suggestologie et Suggestopédie n° 3.* S., 1975. (en bulgare).

[Lozanov 1978] Lozanov, G. *Suggestologie et suggestopédie. Document de travail pour la conférence internationale d'experts de l'UNESCO.* S., 1978. (en bulgare).

[Novakova 1980] Novakova, Z. *L'influence de l'art dans l'enseignement suggestopédique de mathématiques dans la première classe.* In *Narodna prosveta n° 6.* S., 1980. (en bulgare).

[Novakova 1986] Novakova, Z. *Pour l'influence du jeu dans l'enseignement suggestopédique de mathématiques dans les classes primaires.* In *Suggestologie et Suggestopédie.* S., 1986. (en bulgare).

[Novakova 1993] Novakova, Z. *Pour perfectionner l'enseignement de mathématiques dans les classes primaires.* In *Annuaire de l'Université de Sofia*, volume 84. Université de Sofia, 1993. (en bulgare).

[Novakova 1995] Novakova, Z. *Enseignement expérimental de mathématiques dans les classes primaires.* In *Natchalno obrasovanie n° 10.* S., 1995. (en bulgare).

[Novakova 1998] Novakova, Z. *Didactique de l'enseignement de mathématiques dans les classes primaires.* S., 1998. (en bulgare).

[Piaget 1993] Piaget, J. *Les relations entre l'intelligence et l'affectivité dans le développement de l'enfant*. In Sous la direction de B. Bimé et K. Scherer, editor, *Les émotions*. Delachaux et Niestlé, Neuchatel–Paris, 1993.

[Piskounov 1968] Piskounov, A. ; Chalerman, J. *Encyclopédie pédagogique*, volume 4. M., 1968. (en russe).

[Tchakarov 1906] Tchakarov, S. *Enseignement productif*. In *Outchilichna practica n^o 9*. V., 1906. (en bulgare).

[Tchakarov 1909] Tchakarov, S. *Personnalité et la méthode*. In *Outchilichna practica n^o 1*. Sch., 1909. (en bulgare).

[Tchakarov 1921] Tchakarov, S. ; Gospodinov, M. *Enseignement des disciplines en première et deuxième classe*. S., 1921. (en bulgare).

[Ussov 1969] Ussov, B. *Théorie et pratique de l'éducation esthétique aux USA. Le problème de la créativité dans les théories de l'éducation artistique*. In *L'art et les enfants*. M., 1969. (en russe).

[Violino 1927] Violino, Primo. *Pour les élèves de la deuxième classe des leçons agréables d'arithmétique avec des jeux de vente/achat pour un nouvel enseignement créatif*. S., 1927. (en bulgare).

[Williams 1986] Williams, L. *Deux cerveaux pour apprendre. Le gauche et le droit.* Les éditions d'Organisation, 1986.

Pour tout entier n, $\sqrt{n}$ est entier ou irrationnel

Une belle application du théorème de Gauss en Terminale.
Pourquoi pas un théorème d'Euclide ?

Michel Henry,
IREM de Franche-Comté

Sommaire

1 L'irrationalité de $\sqrt{2}$, conséquence immédiate du théorème de Gauss

1.1 $\sqrt{2}$ est irrationnel : la crise

L'irrationalité de $\sqrt{2}$ a illustré la « crise des irrationnelles[1] » dans la Grèce antique. L'Histoire a retenu la légende rapportant le désarroi de la secte pythagoricienne devant

[1]Il s'agit des « quantités irrationnelles ».

l'effondrement de sa conception réductrice du monde réel en termes de nombres entiers : Hippasos de Métaponte, celui qui vendit la mèche, fut englouti par les flots[2].

Le carré construit sur la diagonale d'un carré donné a une aire double de ce dernier, alors que leurs côtés ne sont pas dans un rapport exprimable avec les connaissances des Anciens. Cette construction de géométrie très élémentaire est exploitée par Socrate pour amener le serviteur de Ménon au constat de sa connaissance[3].

La preuve de l'incommensurabilité entre la diagonale et le côté d'un carré peut être purement géométrique :

> Si la diagonale et le côté étaient mesurés par une même unité (i.e. en seraient des multiples entiers), on pourrait construire un carré de côté plus petit que la moitié du précédent et qui serait mesuré par cette même unité. On peut itérer cette construction jusqu'à obtenir une longueur mesurée par une unité plus grande qu'elle !

Cette démonstration (dite par anthyphérèse[4]) met en œuvre l'opposition de nature entre les nombres (entiers), prototypiques du discret, et les grandeurs (au sens euclidien), représentatives du continu (i.e. divisibles à l'infini).

Une démonstration d'inspiration arithmétique figure dans la traduction de Peyrard (1819)[5] des *Éléments* d'Euclide, formulée dans le cadre géométrique (Livre X, prop. 117, cf. cette démonstration en annexe page 30)[6].

La preuve arithmétique était déjà donnée par Aristote[7] (384–322 av. J.-C.), inspirant la démonstration traditionnelle[8] que l'on peut décomposer ainsi (petit échauffement) :

- Supposons qu'il existe un nombre rationnel α dont le carré soit égal à 2. Notons que α n'est pas entier, puisque 2 ne figure pas dans la suite croissante des carrés parfaits.

[2]Jean Dhombres, dans *Nombre, mesure et continu* (CEDIC-Nathan, IREM de Nantes, 1978), rapporte le commentaire de Proclus (Ve siècle apr. J.-C.) : « Les auteurs de la légende ont voulu parler par allégorie. Ils ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de formes doit demeurer caché. Que si quelque âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entraînée dans la mer du devenir et noyée dans l'incessant mouvement de ses courants ».

[3]Dialogue du *Ménon* de Platon (428–347 av. J.-C.).

[4]L'anthyphérèse de deux grandeurs est la suite des quotients successifs obtenus par l'algorithme d'Euclide (cf. section 2).

[5]*Les Œuvres d'Euclide, traduites littéralement par F. Peyrard*, réédité par la Librairie Blanchard, Paris, 1993.

[6]Le Livre X des *Éléments* traite des grandeurs incommensurables et propose une classification à base géométrique de l'irrationalité. Malgré les Livres d'arithmétique précédents (Livres VII à IX), les nombres considérés sont des mesures entières de grandeurs. Des recherches récentes (Bernard Vitrac : *Euclide, les Éléments*, vol. 3 p. 411, PUF, 1998) semblent indiquer que cette proposition 117 ne figurait pas dans l'original des *Éléments* (IIIe siècle av. J.-C.) et a été rajoutée par les premiers commentateurs avant le IVe siècle de notre ère, reprenant la démonstration d'Aristote.

[7]Notamment dans *Les Premiers Analytiques*, mais il l'évoque à plusieurs reprises comme une propriété familière de son lecteur. Sa réduction à l'absurde tient au fait qu'il n'existe aucun nombre qui soit à la fois pair et impair.

[8]Première question d'écrit au CAPES interne en 2000.

- Ce rationnel α peut être représenté par une fraction irréductible $\dfrac{a}{b}$.[9] D'après la remarque précédente, on a nécessairement : $b > 1$.
- Conservant avec l'existence de α les propriétés des opérations arithmétiques, on a :
$$a^2 = \alpha^2 b^2 = 2b^2.$$
- a^2 est donc pair. Mais comme le carré de tout nombre impair est impair (si $m = 2k+1$, alors $m^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k' + 1$), a est nécessairement pair : c'est le principe du tiers exclu (un nombre ne peut être à la fois pair et impair, argument d'Aristote) appliqué à l'énoncé contraposé du précédent.
- On a donc $a = 2a'$, d'où $4a'^2 = 2b^2$ et $2a'^2 = b^2$. b^2 est donc pair, ce qui, comme précédemment, montre que b est pair.
- La fraction α n'est donc pas irréductible puisque a et b ont 2 pour diviseur commun ![10]

L'hypothèse que $\sqrt{2}$ est rationnel est donc à rejeter.

Si l'on veut considérer le rapport entre la diagonale et le côté d'un carré comme un *nombre* (que nous désignons par $\sqrt{2}$ en application du théorème de Pythagore), ce nombre ne peut donc être rationnel. Il ne fait pas partie des nombres concevables en tant que tels par les Grecs, et pourtant il est facilement constructible en géométrie.

La question générale de l'irrationalité de $\sqrt{n}$ ne semble pas se poser naturellement pour les Anciens, même si elle est à leur portée. Il est curieux de constater que tous les arguments nécessaires sont rassemblés dans le Livre VII des *Éléments* d'Euclide[11] (prop. 20 à 25), comme nous le verrons dans la deuxième partie de cet article, mais que cette conclusion n'y figure pas.

Cependant, les cas $n = 3, 5, \ldots, 17$ ont été résolus séparément[12]. Pourquoi produire autant de démonstrations (que d'entiers non carrés parfaits !), se ramenant de plus en plus laborieusement à l'argument aristotélicien de parité, alors que l'on peut aisément démontrer la propriété générale pour $\sqrt{n}$ avec les connaissances de l'époque, aujourd'hui enseignées en Terminale ? Il y a là une petite énigme historique.

---

[9] Ce raisonnement suppose donc que tout rationnel peut être représenté par une fraction irréductible, conséquence de l'existence du PGCD. L'existence, l'unicité et les propriétés de la fraction irréductible égale à une fraction (un rationnel) donnée fait l'objet de la deuxième partie de cet article.

[10] Le symbole ! à la fin d'une démonstration signifie la mise en évidence d'une contradiction avec une hypothèse introduite antérieurement. Le raisonnement « par l'absurde » permet alors de conclure que cette hypothèse est fausse, ceci en admettant la non contradiction du reste de la théorie.

[11] Bernard Vitrac (*Euclide, Les Éléments*, vol. 2, p. 288) indique que ce Livre VII est « attribué à des Pythagoriciens, de l'époque précédant Archytas » (Archytas de Tarente, 428–347 av. J.-C.).

[12] Jean Dhombres (op. cité) signale que Théodore de Cyrène (460–369 av. J.-C.) avait obtenu l'irrationalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, … et cite le témoignage de Platon selon lequel Théétète disposait d'une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{17}$.

1.2 $\sqrt{n}$ est entier ou irrationnel

Nous allons voir que l'irrationalité de $\sqrt{n}$ pour n entier non carré parfait découle directement du théorème de Gauss[13], habituellement énoncé comme suit :

> *Soient a, b, c trois entiers naturels. Si a est premier avec b et si a divise le produit bc, alors a divise c.*[14]

Pour notre problème, nous utiliserons le cas particulier suivant, que l'on peut présenter comme conséquence directe du théorème de Gauss :

Lemme : *Si p premier divise a^2, alors p divise a.*[15]

> En effet, p étant premier, p et a ne peuvent avoir que p comme diviseur commun. Si p ne divisait pas a, alors p et a seraient premiers entre eux et, d'après le théorème de Gauss, p divisant le produit $a \times a$, p diviserait le second facteur a !

On peut obtenir l'irrationalité de $\sqrt{n}$ de deux manières différentes, aussi simples l'une que l'autre. On procède d'abord comme pour $\sqrt{2}$:

- Supposons que $\sqrt{n}$ soit rationnel non entier.
- Alors il existe un couple d'entiers non nuls (a, b), premiers entre eux, tels que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}\cdot$
- Comme $\sqrt{n}$ n'est pas entier, $b > 1$, et par définition de $\sqrt{n}$, $a^2 = nb^2$.

À partir de cette égalité, il y a deux démarches possibles pour établir une contradiction : considérer a ou b comme diviseurs respectivement de nb^2 ou de a^2 (dans le cas de $\sqrt{2}$, on avait considéré 2 comme diviseur, ce qui se prête moins facilement aux généralisations) :

---

[13] Au programme de Terminale S, enseignement de spécialité. C'est un théorème pivot (osons le terme !) de l'arithmétique dans $\mathbb{N}$.

[14] On peut aussi retenir la forme particulière suivante, donnée par Euclide dans les *Éléments* (Livre VII, prop. 30), que l'on peut énoncer ainsi : *Si p premier divise un produit ab, alors p divise a ou divise b.*

[15] Ce lemme se trouve aussi dans les *Éléments* d'Euclide (Livre VII, prop. 25) sous une forme contraposée plus générale : *Si deux nombres sont premiers entre eux, le carré de l'un est premier avec l'autre* (cf. paragraphe 2.6).

Première démarche avec b :

- Soit p un diviseur premier de b.[16]
- Comme $a^2 = nb^2$, p divise a^2.
- Alors, d'après le lemme, p divise a.
- Mais a et b ont été supposés premiers entre eux, ils ne peuvent avoir p pour diviseur commun !

Deuxième démarche avec a :

- Comme a et b sont premiers entre eux, a^2 et b^2 le sont également, sinon, d'après le lemme, un diviseur premier commun à a^2 et b^2 serait un diviseur commun à a et b.
- Comme $a^2 = nb^2$, d'après le théorème de Gauss, a^2 divise n, ce qui implique $b = 1$!

l'hypothèse « $\sqrt{n}$ non entier et rationnel » est donc absurde, sa négation « $\sqrt{n}$ est entier ou irrationnel » est donc démontrée.

1.3 Place du Théorème de Gauss dans les deux progressions usuelles en arithmétique

Remarquons que la première démarche n'utilise en fait que notre lemme : « si p premier divise a^2, alors il divise a », que nous avons introduit comme application du théorème de Gauss.

Dans la progression des *Éléments* d'Euclide, le théorème de Gauss est directement issu des propriétés de la division euclidienne mises en œuvre dans l'algorithme d'Euclide[17] :

- Si a et b sont premiers entre eux, 1 est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide engendré par a et b.
- En multipliant chaque égalité de cet algorithme par c, on obtient l'algorithme engendré par ac et bc, et le dernier reste non nul est c.
- a divise ac et bc, a divise donc tous les restes successifs de cet algorithme jusqu'au dernier non nul : a divise c.

Dans ce premier point de vue, le théorème de Gauss se présente comme un résultat précurseur du théorème fondamental de l'arithmétique[18] (sa démonstration n'est pas exigible en Terminale S) :

[16]Tout nombre $b \geqslant 2$ admet au moins un diviseur premier. En effet, l'ensemble de ses diviseurs est non vide (contenant b lui-même) et comme toute partie non vide de $\mathbb{N}$, il admet un plus petit élément p. p est donc un diviseur de b et p est premier, sinon un diviseur strict de p serait aussi diviseur de b et plus petit que p !

Cette remarque est à la base du théorème d'existence et d'unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.

[17]Ayant $a = bq + r$, avec $0 \leqslant r < b$, si $r \neq 0$, l'algorithme d'Euclide consiste à diviser b par r, ce qui donne un reste $r_1 < r$, puis alternativement les restes successifs entre eux, strictement décroissants, jusqu'à obtenir le dernier reste non nul δ qui est alors divisible par tous les diviseurs communs à a et b. δ est le PGCD de a et b (Livre VII, prop. 2).

[18]Ce théorème a été énoncé explicitement par Gauss dans ses *Recherches Arithmétiques* (1801), mais il

Pour tout a supérieur ou égal à 2, il existe une famille finie unique $p_1, \ldots, p_k$ de nombres premiers distincts et une famille unique d'entiers non nuls $\mu_1, \ldots, \mu_k$ telles que $a = p_1^{\mu_1} \ldots p_k^{\mu_k}$.

On peut cependant inverser la progression et tirer le théorème de Gauss de l'existence et de l'unicité de cette décomposition, obtenue comme conséquence d'axiomes du type de ceux de Péano, comme certains traités d'arithmétique le présentent. La division euclidienne est alors impliquée par le théorème de Gauss[19].

Dans ce deuxième point de vue, notre lemme (« *si p premier divise a^2, alors il divise a* ») est une conséquence immédiate du théorème de décomposition :

> En effet, si $a = p_1^{\mu_1} \ldots p_k^{\mu_k}$, alors $a^2 = p_1^{2\mu_1} \ldots p_k^{2\mu_k}$, a et a^2 ont donc la même famille de facteurs premiers. p fait partie de la famille des facteurs premiers de a^2, donc de celle de a.

La progression d'Euclide met bien en évidence le rôle de fondement de l'arithmétique (dans $\mathbb{N}$) joué par la division euclidienne. Cette progression exploite largement toutes les propriétés de la division que les élèves ont trop tendance à négliger.

La démonstration que l'on trouve dans les *Éléments* semble moins simple que la démonstration « classique », car elle fait le détour par une proposition « clé »[20] qui revient à prouver l'existence et l'unicité de la fraction irréductible égale à une fraction donnée. Elle a cependant l'avantage d'éviter le raisonnement par récurrence (techniquement lourd à exposer) implicite dans la démonstration « classique ».

La démonstration d'Euclide est assez belle, je vous invite à la regarder, car elle peut suggérer un excellent thème de travail autour de la division euclidienne, en fin de compte seule responsable de l'irrationalité de $\sqrt{n}$ quand n n'est pas un carré parfait.

2 Le théorème de Gauss dans *Les Éléments* d'Euclide

2.1 La division euclidienne

Pour Euclide, toute l'arithmétique dans $\mathbb{N}^*$ repose sur cette division qui n'est pas présentée explicitement, tellement elle est « naturelle ». Du point de vue pédagogique,

---

est quasiment présent dans les *Éléments* d'Euclide (Livre VII, prop. 32) : « *Tout nombre est soit premier soit mesuré par un certain nombre premier* ». L'existence de la décomposition d'un entier en facteurs premiers en découle par divisions de cet entier par ses facteurs premiers successifs jusqu'à épuisement du sujet. L'unicité provient directement de la forme particulière du théorème de Gauss (prop. 30) citée en note 14.

[19]Pour comparer ces deux démarches, on pourra consulter l'excellente brochure de l'IREM d'Aquitaine : *Initiation à l'arithmétique*, 1999.

[20]Livre VII, prop. 20. Son étude fait l'objet de la deuxième partie de cet article.

nous en faisons le « **Théorème de la division euclidienne** » :

> *Pour tout couple d'entiers non nuls (a, b) tels que $a \geqslant b$, il existe un couple unique d'entiers (q, r) tel que : $a = bq + r$, avec $q \geqslant 1$ et $0 \leqslant r < b$.*

Résultat obtenu simplement en retranchant b de a autant de fois qu'il est possible. Le reste r est donc strictement inférieur à b, sinon on pourrait enlever b de $a - bq$ une fois de plus.

Dans notre formulation modernisée, r peut être nul : c'est le cas où a est divisible par b.[21]

Nous disons alors que « b divise a » au lieu de « b mesure a » comme le fait Euclide qui pense l'arithmétique dans le cadre géométrique.

2.2 La progression des *Éléments* d'Euclide

Le premier Livre d'arithmétique, le Livre VII, commence par ce que l'on appelle aujourd'hui « l'algorithme d'Euclide » (Livre VII, prop. 1)[22], puis applique cet algorithme à des recherches de PGCD (prop. 2).

Algorithme d'Euclide : « *Deux nombres inégaux étant proposés et le plus petit étant retranché du plus grand de façon réitérée et en alternance, si le reste ne mesure jamais le [reste] précédent jusqu'à ce qu'il subsiste une unité, les nombres initiaux seront premiers entre eux* ».

Euclide établit ensuite quelques propriétés élémentaires des opérations arithmétiques et des proportions, puis s'intéresse particulièrement aux couples d'entiers proportionnels pour lesquelles le premier couple est formé par des nombres premiers entre eux (prop. 20 à 23, que nous proposerons de rassembler sous l'appellation de « théorème d'Euclide »). Il en tire la proposition 24, proche du théorème de Gauss (cf. paragraphe 2.6) :

Proposition 24 : « *Si deux nombres sont premiers avec un certain nombre, leur produit sera aussi premier avec ce même [nombre]* ».

Traduisons : Si a est premier avec b et avec c, a est premier avec le produit bc.

D'où le cas particulier qui nous intéresse, car il implique notre lemme :

---

[21] Dans la suite, les nombres considérés sont des entiers naturels non nuls, sauf mention du contraire. Pour rester dans le cadre de l'arithmétique dans $\mathbb{N}^*$, nous éviterons les écritures fractionnaires. Le mot diviseur désigne un entier strictement supérieur à 1 : d est diviseur de a non nul s'il existe un quotient $q \geqslant 1$ tel que $a = dq$. Ainsi, deux nombres sont premiers entre eux s'ils n'ont pas de diviseur commun.

[22] Les énoncés qui suivent ainsi que la numérotation des propositions sont ceux de l'ouvrage de Bernard Vitrac : *Euclide, les Éléments*, vol. 2, PUF, 1994. Pour bien apprécier la démarche euclidienne, il est bon de disposer des énoncés authentiques donnés par Euclide. Nous interpréterons cependant au besoin ces énoncés dans des formulations qui nous sont aujourd'hui plus claires et synthétiques.

Proposition 25 : « *Si deux nombres sont premiers entre eux, le produit de l'un d'eux [par lui-même] sera premier avec celui qui reste* ».

Si a est premier avec b, alors a est premier avec b^2.

Il déduit enfin de la proposition 24 la forme particulière du théorème de Gauss, utile en pratique :

Proposition 30 : « *Si deux nombres se multipliant l'un l'autre produisent un certain [nombre] et si un certain nombre premier mesure leur produit, il mesurera aussi l'un des nombres initiaux* ».

Si p premier divise ab, il divise a ou il divise b.

2.3 Couples d'entiers en « même rapport »

Pour comparer des grandeurs de même espèce, Euclide introduit la notion de « raison » comme « *une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes, suivant la quantité* »[23]. S'il ne peut donner une définition claire de cette notion de « raison » (car il s'agit en fait de rapports de nombres réels lorsque les grandeurs sont mesurées par une unité commune), il donne par contre une définition très précise mais sophistiquée de la propriété pour deux couples de grandeurs d'être « en même raison » (i.e. proportionnelles : Livre V, déf. 6).

Transposée aux couples de nombres (entiers) susceptibles de se multiplier, cette notion correspond à leur « rapport » qu'Euclide ne définit pas. Par contre, comme pour comparer les raisons entre grandeurs, Euclide définit précisément l'égalité entre rapports de nombres (Livre VII, déf. 21) :

« *Des nombres sont en proportion quand le premier, du deuxième, et le troisième, du quatrième, sont équimultiples...* »

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ s'il existe deux entiers p et q tels que $qa = pb$ et $qc = pd$.

Nous l'utiliserons plutôt sous la forme suivante :

Les couples de nombres entiers non nuls (a, b) et (c, d) sont « en même rapport » si et seulement si ils forment une proportion, c'est-à-dire s'ils vérifient l'égalité : $ad = bc$.

Euclide énonce ainsi cette proportionnalité : « *a est à b comme c est à d* », locution qui sera symbolisée plus tard par « $a : b :: c : d$ ».

Cette notation est maintenant désuète, remplacée pour les nombres par $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ (cela suppose d'avoir défini le rationnel représenté par ces fractions, ce qui n'est pas

[23]Dans sa traduction, Peyrard (op. cité) utilise le terme de « raison » plus vague que celui de « rapport » figurant dans le texte de Vitrac. Cette notion de raison est introduite dans le Livre V des *Éléments* comme fondement de la théorie des proportions entre grandeurs, dont la construction est vraisemblablement due à Eudoxe (408–355 av. J.-C.). Certains commentateurs prétendent que cette définition (Livre V, déf. 3) a été rajoutée par la suite.

nécessaire dans la suite), mais elle avait l'avantage d'être plus générale, concernant aussi bien des grandeurs que des entiers. Elle autorisait certaines pratiques et techniques de la proportionnalité entre couples de grandeurs non nécessairement commensurables et éventuellement de natures différentes : longueurs, aires, ... (dans ce cas, cette proportionnalité ne peut être exprimée en termes numériques sans une théorie de la mesure élaborée, supposant la construction des nombres réels).

Pour nous, un rationnel non nul est défini comme quotient de deux entiers (c, d) non nuls, représenté en écriture fractionnaire par $\frac{c}{d}\cdot$

Le fond de la démarche euclidienne est de remarquer que ce rationnel peut être représenté **de manière unique** par une fraction irréductible $\frac{a}{b}\cdot$ Cela revient à montrer qu'il existe un couple **unique** de nombres non nuls (a, b) premiers entre eux, qui sont dans le même rapport que (c, d) (i.e. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ où $\frac{a}{b}$ est irréductible)[24]. L'argument essentiel est que a et b sont les plus petits nombres parmi ceux qui sont dans le même rapport que c et d. Il s'en suit que pour tout autre couple (x, y) dans ce même rapport, x et y sont des équimultiples de a et b.

Remarquons que le résultat tire parti du lien entre la relation d'ordre naturel sur $\mathbb{N}^*$ et la relation de divisibilité. Ce lien sera finement exploité dans la démonstration d'Euclide que nous présentons dans le paragraphe suivant.

2.4 Le « théorème d'Euclide »

a) Les énoncés d'Euclide

Cette partie du Livre VII qui dégage les propriétés du couple minimal d'une proportion, comprend les trois propositions suivantes. Les énoncés donnés sont conformes au texte des *Éléments* puis interprétés :

Proposition 20, la clé de l'édifice :

« *Les plus petits nombres parmi ceux qui ont le même rapport qu'eux mesurent ceux qui ont le même rapport autant de fois, le plus grand le plus grand et le plus petit le plus petit* ».

> Si a et b sont deux entiers non nuls et si pour tout (c, d) formant avec (a, b) une proportion on a $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$, alors il existe un entier q tel que $c = qa$ et $d = qb$.

[24]L'existence est immédiate, il suffit de considérer le PGCD δ de c et d, obtenu par exemple par l'algorithme d'Euclide, pour exhiber le couple (a, b) : posant $c = \delta a$ et $d = \delta b$, on a bien $ad = bc$, car chaque membre vaut $ab\delta$. De plus a et b sont premiers entre eux, car s'ils avaient un diviseur commun $q > 1$, alors $q\delta$ serait diviseur de c et d, et δ ne serait pas leur plus grand commun diviseur. L'unicité, implicitement, fait l'objet de la démonstration d'Euclide.

Proposition 21, la bonne remarque :

« *Les nombres premiers entre eux sont les plus petits parmi ceux qui ont le même rapport qu'eux* ».

Si a et b sont premiers entre eux, alors pour tout (c, d) formant avec (a, b) une proportion, on a $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$.

Proposition 22, réciproque de la précédente :

« *Les nombres les plus petits parmi ceux qui ont le même rapport qu'eux sont premiers entre eux* ».

b) L'énoncé du « théorème d'Euclide »

De ces trois propositions, dégageons un énoncé synthétique plus moderne, que nous appelons le « **théorème d'Euclide** »[25] :

Soient (a, b) et (c, d) deux couples d'entiers non nuls en même rapport ($ad = bc$). Si a et b sont premiers entre eux, alors c et d sont équimultiples de a et b (i.e. il existe un entier q tel que $c = aq$ et $d = bq$).

L'existence d'une fraction irréductible égale à une fraction donnée (cf. note 22) est un résultat bien connu des élèves de collège (on peut rêver !) : « toute fraction non irréductible est simplifiable ». Mais le théorème d'Euclide apporte de plus l'unicité de la fraction réduite :

- Soit δ le PGCD de c et d, obtenu par l'algorithme d'Euclide initialisé par la division de c par d : on a $c = \delta\alpha$ et $d = \delta\beta$ où $\dfrac{\alpha}{\beta}$ est la fraction réduite égale à $\dfrac{c}{d}$.
- Si $\dfrac{a}{b}$ est une fraction irréductible égale à $\dfrac{c}{d}$, d'après le théorème, c et d sont des équimultiples de a et b : il existe q diviseur commun de c et d tel que $c = aq = \delta\alpha$ et $d = bq = \delta\beta$.
- q est un diviseur de δ : $\delta = q\delta'$, car dans l'algorithme d'Euclide, si q divise c et d, il divise les restes successifs jusqu'au dernier reste non nul δ.
- On a donc $a = \delta'\alpha$ et $b = \delta'\beta$, et comme a et b sont premiers entre eux, $\delta' = 1$, d'où l'unicité : $a = \alpha$ et $b = \beta$.

Pour résumer, le théorème d'Euclide peut être formulé en termes de fractions :

Étant donnée la fraction $\dfrac{c}{d}$, si la fraction $\dfrac{a}{b}$ est une fraction irréductible égale à $\dfrac{c}{d}$, alors $c = a\delta$ et $d = b\delta$, où δ est le PGCD de c et de d.

[25] Il est ainsi appelé dans certains pays étrangers.

c) Sa démonstration par Euclide

La démonstration qui suit est directement adaptée de celle des *Éléments*, dans des formulations condensées et une symbolique contemporaine à l'usage des élèves de Terminale[26].

L'idée est d'introduire le couple (a, b) des « plus petits entiers en même rapport » qu'un couple (c, d) donné (i.e. pour tout couple (x, y) en même rapport que (c, d), on a $a \leqslant x$ et $b \leqslant y$). Euclide en admet implicitement l'existence, mais cela ne va pas complètement de soi. En termes ensemblistes, on peut le voir ainsi :

> Soit E l'ensemble non vide des couples (x, y) d'entiers non nuls en même rapport que (c, d).
> Soit F l'ensemble des premières projections des éléments de E. F est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. Il existe donc dans F un plus petit élément a et par suite un couple (a, b) dans E tel que $ad = bc$.
> Pour tout autre couple (x, y) en même raison que (c, d), on a $ay = bx$ (car $xd = yc$ entraîne $bxd = bcy = ady$).
> Puisque a est le plus petit élément de F, on a $a \leqslant x$ et donc $b \leqslant y$ (sinon $ay < bx$!).

i. Voici d'abord la démonstration de la proposition 20, c'est le clou du spectacle :

- Supposons que a et b soient les nombres les plus petits de ceux qui sont en même rapport avec eux. Soit (c, d) en même rapport que (a, b), on a $ad = bc$ et $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$.
- La division euclidienne de c par a et de d par b donne l'existence et l'unicité des couples (q, r) et (q', r') tels que :

$$(1) \begin{cases} c = aq + r \\ d = bq' + r' \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} q \geqslant 1 \\ q' \geqslant 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 0 \leqslant r < a \\ 0 \leqslant r' < b \end{cases}$$

  d'où

$$(2) \begin{cases} bc = abq + br \\ ad = abq' + ar' \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} q \geqslant 1 \\ q' \geqslant 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 0 \leqslant rb < ab \\ 0 \leqslant r'a < ab \end{cases}$$

- Par unicité de la division euclidienne de $bc = ad$ par ab, on a $q = q'$ et $br = ar'$.
- En reportant cela dans (1), il vient :

$$(1') \begin{cases} c = aq + r \\ d = bq + r' \end{cases} \text{ avec } q \geqslant 1, \begin{cases} 0 \leqslant r < a \\ 0 \leqslant r' < b \end{cases} \text{ et } ar' = br$$

- Supposons que $r \neq 0$. Comme $ar' = br$, $r' \neq 0$ et (r, r') sont en même rapport que (a, b). De plus $r < a$ et $r' < b$. Mais on avait supposé que a et b sont les plus petits nombres de ceux qui sont dans ce même rapport !

[26] Nous avons dans ce qui suit une mine d'exercices sur le raisonnement mathématique, avec des démonstrations par l'absurde, des contrapositions, des réciproques et des manipulations logiques d'énoncés de la forme P et $Q \Rightarrow R$!

- Donc $r = 0$ et comme $br = ar'$, on a $r' = 0$, d'où $\begin{cases} c = aq \\ d = bq \end{cases}$: a divise c et b divise d avec le même quotient q.

ii. On établit ensuite l'équivalence indiquée par les propositions 21 et 22 :

Les entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si a et b sont les plus petits nombres parmi les couples qui sont en même rapport qu'eux.

(a)

- Soient a et b deux entiers premiers entre eux et supposons qu'ils ne soient pas les plus petits qui sont en même rapport qu'eux.
- Soit (a', b') le couple des entiers les plus petits parmi ceux qui sont en même rapport que (a, b) : $ab' = ba'$ [l'existence de ce couple (a', b') a été montrée ci-dessus].
- D'après la proposition 20, a' divise a et b' divise b dans le même rapport q : $a = qa'$ et $b = qb'$. Si q était plus grand que 1, il serait diviseur commun de a et b qui ne seraient pas premiers entre eux !
- Donc $q = 1$ et a et b sont les plus petits entiers de ceux qui sont en même rapport qu'eux.

(b)

- Réciproquement, supposons que a et b sont les plus petits entiers de ceux qui sont en même rapport qu'eux.
- Supposons que a et b ne soient pas premiers entre eux.
- Soit $\delta > 1$ le PGCD de a et b (obtenu par exemple par l'algorithme d'Euclide). Soient a' et b' les quotients de a et b par δ. a' et b' sont premiers entre eux et comme $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$, on a $a' < a$ et $b' < b$.
- Alors $ab' = \delta a'b' = a'b$. (a', b') sont donc en même rapport que (a, b) et plus petits qu'eux. Mais a et b sont les plus petits de ceux qui sont dans ce même rapport !
- a et b sont donc premiers entre eux.

Cette équivalence permet de remplacer l'hypothèse de la proposition 20 par « a et b premiers entre eux », ce qui donne notre théorème d'Euclide.

2.5 Équivalence entre le théorème d'Euclide et le théorème de Gauss

Le théorème de Gauss est une conséquence immédiate du théorème d'Euclide :

- Supposons que a divise bc et que a est premier avec b. Montrons que a divise c.

- Il existe donc d non nul tel que $ad = bc$. a et b sont donc premiers entre eux dans le même rapport que (c, d).

- D'après le théorème d'Euclide, a divise c.

Mais le théorème d'Euclide est aussi une conséquence immédiate du théorème de Gauss :

- Supposons que a et b sont premiers entre eux, en même rapport que (c, d). On a $ad = bc$.
- a divise donc bc et d'après le théorème de Gauss, a divise c : $c = aq$.
- De même, comme a et b sont premiers entre eux et comme b divise ad, alors (Gauss) b divise d : $d = bq'$.
- Comme $ad = bc$, on a : $abq' = baq$, d'où $q = q'$.
- c et d sont donc des équimultiples de a et b.

2.6 Le théorème de Gauss dans les *Éléments*

Le théorème de Gauss était donc à portée de la main. Mais Euclide lui a préféré sa proposition 24 (cf. paragraphe 2.2) que nous énonçons :

Si a est premier avec b et avec c, alors a est premier avec le produit bc.

La démonstration qu'en donne Euclide fait directement intervenir la proposition 20 :

- Supposons que a et bc ne soient pas premiers entre eux. Ils ont alors un diviseur commun $e > 1$.
- Comme e divise a et comme a est premier avec c, e est premier avec c (sinon un diviseur commun de e et c serait diviseur de a !).
- Comme e divise bc, il existe f tel que $bc = ef$. (e, c) et (b, f) sont en même rapport.
- Comme e et c sont premiers entre eux, ils sont les plus petits dans leur rapport (prop. 21) et par conséquent e divise b (prop. 20). Comme e divise a, a et b ne sont pas premiers entre eux !
- a et bc sont donc premiers entre eux.

La proposition 24 est très proche du théorème de Gauss. On le voit mieux sur la forme logiquement équivalente suivante, issue de l'énoncé contraposé :

Si a est premier avec b et si a et bc ont un diviseur commun, alors a et c ont un diviseur commun.

Cet énoncé semble plus général mais moins précis que celui de Gauss (via le théorème d'Euclide, il lui est équivalent).

En faisant $b = c$, Euclide en déduit son cas particulier (proposition 25, cf. paragraphe 2.2) :

si a est premier avec b, alors a est premier avec b^2, et notre lemme *(si p premier divise b^2, alors p divise b)* s'en déduit simplement par contraposition, en remarquant que si $a = p$ est premier, la négation de « p est premier avec b » est « p divise b ». C'est en effet l'objet de sa **proposition 29** :

« *Tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas* ».

En effet, ces deux nombres ne peuvent pas avoir de diviseur commun, puisqu'un nombre premier n'en a pas d'autre que lui-même.

Euclide utilise enfin la proposition 24 pour obtenir l'énoncé particulier du théorème de Gauss :

Proposition 30 :
« *Si deux nombres se multipliant l'un l'autre produisent un certain [nombre] et si un certain nombre premier mesure leur produit, il mesurera aussi l'un des nombres initiaux* ».

Traduisons : si a est un nombre premier et divise le produit bc, il divise b ou il divise c.

C'est exactement la contraposée de la proposition 24, appliquée au cas où a est premier, moyennant la remarque précédente.

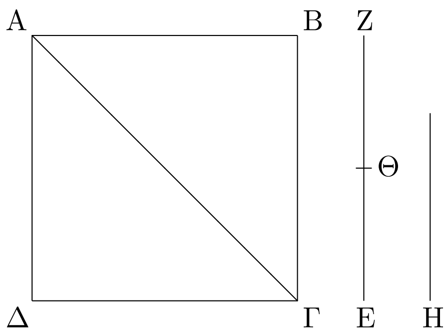
3 Annexe

Voici pour terminer la démonstration de l'incommensurabilité entre la diagonale et le côté d'un carré, inspirée par l'argument d'Aristote, telle qu'elle figure dans l'édition des *Éléments* par la librairie Blanchard (1993), issue de la traduction de François Peyrard (1819).

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE PROPOSITION CXVII.

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures quarrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Soit le quarré $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$, et que $\mathrm{A\Gamma}$ soit sa diagonale ; je dis que la droite $\mathrm{A\Gamma}$ est incommensurable en longueur avec AB.



Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible ; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair.

Or, il est évident que le quarré de $\mathrm{A\Gamma}$ est double du quarré de AB ; mais $\mathrm{A\Gamma}$ est commensurable avec AB ; la droite $\mathrm{A\Gamma}$ a donc avec la droite AB la raison qu'un nombre a avec un nombre. Que $\mathrm{A\Gamma}$ ait avec AB la raison que le nombre EZ a avec le nombre H, et que les nombres EZ, H soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux ; le nombre EZ ne sera pas l'unité. Car si EZ était l'unité, à cause que EZ a avec H la raison que $\mathrm{A\Gamma}$ a avec AB, et que $\mathrm{A\Gamma}$ est plus grand que AB, l'unité EZ serait plus grande que le nombre H, ce qui est absurde ; EZ n'est donc pas l'unité ; EZ est donc un nombre.

Et puisque $\mathrm{\Gamma A}$ est à AB comme EZ est à H, le quarré de $\mathrm{\Gamma A}$ sera au quarré de AB comme le quarré de EZ est au quarré de H.

Mais le quarré de $\mathrm{\Gamma A}$ est double du quarré de AB ; le quarré de EZ est donc double du quarré de H ; le quarré du nombre EZ est donc pair. Le nombre EZ est donc pair ; car s'il était impair, son quarré serait impair ; parce que si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, leur quantité étant impaire, leur somme est un nombre impair ; le nombre EZ est donc un nombre pair.

Partageons le nombre EZ en deux parties égales en Θ. Puisque les nombres EZ, H sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres seront premiers entr'eux. Mais le nombre EZ est pair ; le nombre H est donc impair. Car s'il était pair, les nombres EZ, H, qui sont premiers entr'eux, seraient mesurés par deux ; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible. Le nombre H n'est donc pas un nombre pair ; il est donc impair.

Mais EZ est double de $\mathrm{E\Theta}$; le quarré de EZ est donc quadruple du quarré de $\mathrm{E\Theta}$. Mais le quarré de EZ est double du quarré de H ; le quarré de H est donc double du quarré de $\mathrm{E\Theta}$; le quarré de H est donc pair ; le nombre H est donc pair, d'après ce qui a été dit.

Mais il est aussi impair, ce qui est impossible ; la droite $\mathrm{A\Gamma}$ n'est donc pas commensurable en longueur avec AB ; elle lui est donc incommensurable.

Ce qu'il fallait démontrer.

Introduction à la pensée mathématique de Buffon

Yves Ducel[1]

Sommaire

1 L'homme et son œuvre[2]

1.1 La vie de Buffon (1707–1788)

Georges Louis Leclerc, né à Montbard en Bourgogne, le 7 septembre 1707, est le fils d'un Conseiller au Parlement de Bourgogne. Après des études secondaires au Collège

[1] IREM. Département Mathématiques. UFR ST. Université de Franche-Comté. 25030 BESANCON CEDEX.

[2] Pour une biographie générale de Buffon on se reportera à [Roger 1989].

des Jésuites de Dijon et de rapides études de Droit, semble-t-il pour se destiner à la magistrature, le jeune Leclerc se rend à Angers (1728) pour suivre des cours de médecine. Après un duel dans cette ville, il s'enfuit de cette ville et fait alors connaissance du duc de Kingston avec lequel il voyagera (Sud de la France, Italie, Rome 1732).

En janvier 1734, G. L. Leclerc entre à l'Académie des Sciences comme Adjoint dans la section de Mécanique. À cette date il a déjà pris le nom de Buffon après le rachat de cette seigneurie. En 1739 il devient Académicien-Associé et passe dans la section de Botanique. La même année il est nommé Intendant du Jardin du Roi (équivalent de notre Muséum National d'Histoire Naturelle).

Dès lors pendant près de cinquante ans, passant l'hiver à Paris et l'été à Montbard, il administre et développe considérablement le Jardin du Roi, ainsi que sa fortune personnelle, et travaille à son *Histoire Naturelle*, dont les trois premiers volumes paraissent en 1749, le 36e et dernier en 1789 quelques mois après sa mort.

À sa mort le 16 avril 1788, il est devenu le plus célèbre naturaliste de son siècle avec Linné, a été anobli comte de Buffon par Louis XV. Il est membre de l'Académie Française et de toutes les grandes Académies d'Europe et d'Amérique.

1.2 Les écrits de Buffon

À partir de 1727 : Correspondance avec des savants (notamment avec Gabriel Cramer)

1730–1748 : Mémoires et observations à l'Académie des Sciences

1739–1749 : Préparation de l'*Histoire Naturelle* (La *Théorie de la Terre* est composée en 1744).

1749–1788 : *Histoire Naturelle* (35 volumes du vivant de Buffon) et *Suppléments* (7 volumes, le dernier paru un an après la mort de Buffon)

1.3 La formation mathématique

Buffon témoigne tôt d'un certain goût pour les mathématiques, semble-t-il dès le collège où il se lie avec l'abbé Le Blanc, un des révélateurs de la pensée anglaise en France[3]. C'est en 1727 qu'il débute sa correspondance scientifique avec G. Cramer[4]. C'est toujours à 20 ans que Buffon, d'après Hérault de Séchelles, aurait (re)découvert la formule du binôme de Newton sans savoir que Newton l'avait déjà établie [Hérault de Séchelles 1970, p. 81]. Durant ses voyages Buffon fera un séjour à Genève chez G. Cramer. Ce séjour

[3]Voir PIVETEAU, Jean, *Introduction à l'œuvre philosophique de Buffon* in [Buffon 1954].

[4]Gabriel Cramer (1704–1752) professeur à l'Université de Genève où il enseignait la géométrie et la mécanique. Buffon écrira à son sujet dans l'*Essai d'Arithmétique Morale* : « C'est au commerce et à l'amitié de ce savant que j'ai dû une partie des premières connaissances que j'ai acquises en ce genre [les mathématiques] » [Roger 1977, p. 50].

n'aurait en fait eu lieu qu'en août-septembre 1731(et non 1730) et n'aurait duré qu'un mois environ (et non une année) [Weil 1961, p. 98].

Au Collège des Jésuites, Buffon a lu très certainement[5] les *Éléments* d'Euclide et *L'Analyse des infiniment petits* du Marquis de l'Hôpital. Vers 1729, il lit les *Éléments de la géométrie de l'infini* de Fontenelle publiés en 1727 dont il écrira à G. Cramer le 21 janvier 1731,

> « [...] j'ai lu avec attention il y a 18 mois le livre de Mr de Fontenelle, [...] pour moi je vous l'avoue, [...] j'en suis l'admirateur [...] » [Weil 1961, p. 108]

Par des ouvrages portant sa signature on sait qu'il a lu l'*Équilibre des liqueurs et pesanteur de l'air* de Pascal et la 3e édition anglaise des *Principia* de Newton [Hanks 1966, p. 19, notes 30 et 31]. Concernant les probabilités, il est fort vraisemblable que Buffon a connu les travaux de Pascal sur les jeux de hasard et le calcul des probabilités [Roger 1989, p. 39]. Il a lu la *Doctrine des chances* (1718) de A. De Moivre [Roger 1962, p. XLIX] et la 2e édition (1713) de l'*Essai d'analyse des jeux de hazard* de R. De Montmort[6].

1.4 L'œuvre mathématique de Buffon

1727–1752 : Correspondance[7] Buffon-Cramer (période intéressante 1727–1736).

1733 : Solution de problèmes sur le jeu du Franc-Carreau[8] (mémoire à l'Académie Royale des Sciences de Paris).

1736 : Mémoire[9] sur le jeu du Franc-Carreau.

1740 : Traduction de la *Méthode des Fluxions et des suites infinies* de Newton et rédaction de la préface.

1741 : *Formules sur les échelles arithmétiques où l'on indique le moyen de ramener promptement de grands nombres à l'expression de l'espèce de progression dont on s'est*

[5]« Il [Buffon] m'a dit qu'il les [les mathématiques] avait étudiées avec soin et de bonne heure ; d'abord dans les écrits d'Euclide et ensuite dans ceux du Marquis de l'Hôpital. » [Hérault de Séchelles 1970, p. 81].

[6]La première édition de 1708 ne contenait pas la solution proposée par Montmort du problème de Saint-Pétersbourg qui sera ajoutée dans la deuxième édition de 1718. Or Buffon fait référence dans le § XV de l'*Essai d'Arithmétique Morale* à cette source.

[7]Cette correspondance est publiée dans [Weil 1961].

[8]Ce mémoire a disparu. On ne le connaît que par le résumé de Fontenelle publié dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, année 1733, Paris, publié en 1735, p. 43–45. Une partie de ce mémoire sera reprise dans l'*Essai d'Arithmétique Morale*.

[9]On n'en possède qu'une simple indication sur le Registre de l'Académie, séances des 14 et 17 mars 1736.

servi (mémoire[10] à l'Académie Royale des Sciences de Paris).

1745 : *Réflexion sur la loi d'attraction*, 1re et 2e Additions au mémoire précédent[11] (mémoires à l'Académie Royale des Sciences de Paris).

1749 : *De la manière d'étudier et de traiter l'histoire naturelle* [*Histoire Naturelle*, tome I].
De la vieillesse et de la mort, [*Histoire Naturelle*, tome II].

1777 : *Essai d'Arithmétique Morale* [*Supplément à l'Histoire Naturelle*, tome IV].
Des probabilités de la durée de la vie [*Supplément à l'Histoire Naturelle*, tome IV].

En outre, Buffon a rédigé, en collaboration avec d'autres académiciens, des rapports[12] pour l'Académie des Sciences sur certains travaux de mathématiques concernant notamment des machines d'arithmétiques (1735, de Bertier), la quadrature du cercle (1736, de Bugtendit), la trigonométrie (1736, auteur inconnu), l'intégration des équations différentielles (1741, de D'Alembert), une machine pour mesurer les distances (1742, de Bertier), les probabilités de la vie (1745, de Deparcieux), un ouvrage de Deparcieux (1746).

2 *L'Essai d'Arithmétique Morale* (EAM)

2.1 Le sens des affaires et l'épistémologie

Dès 1774, Buffon publie des *Suppléments à l'Histoire Naturelle* (au total 7 volumes, le dernier volume paraît un an après la mort de Buffon).

Les deux premiers volumes des *Suppléments à l'Histoire Naturelle* rassemble des mémoires à l'Académie présentés avant 1750 [*Réflexions sur la loi d'attraction* (tome I), *Expériences sur le bois* (tome II), *Sur l'effet de la gelée sur les végétaux, sur les couleurs accidentelles*, ...]. Ces morceaux sont alors présentés sans grand changement. À côté de ceux-ci se trouvent des textes plus anciens datant de 1773 comme les expériences sur la chaleur des corps. J. Roger voit tout un symbole dans une publication qui peut être considérée comme le pendant du supplément de la *Grande Encyclopédie*. La raison officielle, invoquée par Buffon pour ne pas préférer une nouvelle édition corrigée et augmentée de son histoire naturelle, est qu'il ne veut pas rendre ses éditions précédentes superflues. J. Roger[13] note cependant que derrière ce « pieux motif il y a peut-être une considération plus réaliste ». Une nouvelle édition aurait rendu les stocks encore existants

[10] On trouve un résumé dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, année 1741, publié en 1744, p. 87–89] et le texte du mémoire dans *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, année 1741, publié en 1744, p. 219–221.

[11] On trouve ces mémoires dans *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1745, publié en 1749, pp. 493–500, 551–552, 580–583.

[12] Consulter la bibliographie dans [Hanks 1966, p. 276–281].

[13] [Roger 1989, p. 503].

invendables.

On retrouve là un aspect important de la personnalité de Buffon : son sens des affaires[14]. Mais au-delà de ces considérations matérielles, on verra que la publication de l'EAM procède certainement d'une autre motivation.

2.2 L'EAM et les travaux de jeunesse

L'EAM est divisé en 35 sections.

Les sections II et III reprennent des idées parues pour la première fois en 1749 dans le discours *De la manière de traiter et d'étudier l'Histoire Naturelle* du tome I de son *Histoire Naturelle.*

Les sections XIV à XXII reprennent en les développant les réflexions de Buffon pour résoudre le paradoxe de Saint-Pétersbourg auquel Buffon s'était intéressé dans sa correspondance avec G. Cramer en 1731 (qui correspond aux section XIV et XV). Ces passages ont sans doute été retravaillés vers 1764 [cf. note du § XVII relative au mémoire de Fontaine de 1764].

La section XXIII reprend deux mémoires sur le jeu du Franc-carreau proposé à l'Académie en 1733 et 1736. Il s'agit de la seule version que nous ayons de ces mémoires.

La section XXIV est une reprise presque mot pour mot de la préface à la traduction de la *Méthode des Fluxions et des suites infinies* de Newton que Buffon a publié en 1740.

La section XXVII inclut strictement le mémoire *Formule sur les échelles arithmétiques* de 1741.

Le texte qui débute sous le titre *Mesures arithmétiques* dans la section XXV et se termine au XXVI[15] faisait peut-être partie du mémoire primitif indiqué dans les registres de l'Académie des 23/12/1738 et 25/02/1739, [Hanks 1966, p. 278, n° 22].

Le reste de l'EAM semble contemporain du projet de publication du tome IV du *Supplément à l'Histoire Naturelle.*

2.3 La date de composition

L'EAM est publié en 1777 dans le tome IV du *Supplément à l'Histoire Naturelle.* Selon Gouraud cet essai aurait été rédigé vers 1760 « environ » mais Gouraud ne donne pas vraiment de justifications [Gouraud 1848, p. 54, note de bas de page]. On peut facilement assigner à certaines parties des dates de composition allant de 1731 à 1749.

[14] On pourra consulter l'article *Buffon, homme d'affaires* in [Heim 1952].

[15] Ce texte commence par « Il n'était pas possible de leur appliquer une mesure commune qui fut réelle, ... » [Roger 1977, p. 69] et se termine par « ... et contraindrait les peuples à se servir de la nouvelle méthode » [Roger 1977, p. 74].

De plus, compte tenu que Buffon dit avoir communiqué en 1762 à D. Bernoulli une idée sur la manière d'estimer les probabilités morales développée dans l'EAM, section VIII, il est possible que Buffon ait rassemblé les fragments du texte de l'EAM vers cette époque[16].

2.4 À la recherche d'une unité

Buffon a le sentiment que ses textes mathématiques présentent une certaine unité (révélatrice de sa conception des mathématiques) et c'est cette unité que Buffon, certainement *a posteriori*, a voulu dégager et souligner en rassemblant des textes de jeunesse et en les fondant sous un titre commun dans l'*Essai d'Arithmétique Morale*.

Buffon présente son projet dans la première section de l'EAM. Après une introduction, visant à prévenir les réactions des Théologiens de la Sorbonne (souvenir des déboires[17] de 1749), Buffon délimite soigneusement son propos à la « mesure des choses incertaines » pour lesquelles il va « tâcher de donner quelques règles ».

Buffon signifie donc qu'il se propose d'étudier l'homme en tant qu'être agissant et doué de raison, et non en tant que créé à l'image de Dieu et à sa ressemblance. Son entreprise participe ainsi à la construction d'une science humaine dont il exclut d'entrée « les matières où la loi de Dieu fait nos principes et la Foi notre calcul ». Outre le rôle préventif de cette mise au point vis-à-vis des censeurs de la Religion, il faut noter que cette distinction est certainement aussi pour Buffon de nature méthodologique car dans les *Preuves de la Théorie de la Terre, article II : Du système de M. Whiston* (1749), il stigmatise[18] ceux qui « mêlent étrangement la science divine avec nos sciences humaines ».

En fait, ce programme correspond à une partie seulement (§ II–XXIII) de l'EAM. Les sections (§ XXIV–XXXV), quant à elles, sont centrées sur le thème général de la mesure dans les mathématiques et les sciences physiques sans accorder de place à l'« incertain ». Cette dernière partie de l'EAM semble répondre davantage à des questions scientifiques

[16]Consulter [HANKS 1966, p. 42, note 48].

[17]Après la publication des trois premiers volumes de l'*Histoire Naturelle* en 1749, Buffon avait été l'objet de vives critiques de la part des Théologiens de la Sorbonne, dans les *Nouvelles ecclésiastiques* des 6 et 13 février 1750, voir aussi la *Lettre de MM. les Députés et Syndic de la Faculté de Théologie de la Sorbonne du 15 janvier 1751* in [BUFFON 1954, pp. 106–109], au point que Buffon avait dû faire paraître des éclaircissements dans les feuillets liminaires du tome IV paru en 1753 où il marque sa soumission à la Faculté de Théologie.

[18][BUFFON 1845, tome I, p. 42].

soulevées lors des expériences[19] que Buffon dirigeait ou, comme le texte sur les échelles arithmétiques, issues de réflexions prolongeant ses travaux de traduction.

C'est donc à travers la problématique de la mesure qu'on doit chercher la logique d'agrégation des sections de l'EAM.

2.5 La mesure comme fondement de la connaissance

Le choix de la mesure comme thème unificateur de son *Essai d'Arithmétique Morale* prouve que pour Buffon cette question est au fondement de toute connaissance et au cœur de la nouvelle méthode qu'il préconise dans l'étude de l'histoire naturelle. Dès 1749 Buffon écrivait

> « Pour peu qu'on ait réfléchi sur l'origine de nos connaissances, il est aisé de s'apercevoir que nous ne pouvons en acquérir que par la voie de la comparaison ; ce qui est absolument incomparable est incompréhensible. [. . .] plus nous aurons des sujets de comparaison, de côtés différents, de points particuliers sous lesquels nous pourrons envisager notre objet, plus aussi nous aurons de moyens pour le connaître, et de facilité à réunir les idées sur lesquelles nous devons fonder notre jugement. »
> *De la nature de l'Homme* (*Histoire Naturelle*, tome II) [Buffon 1845, tome III, 222].

En 1777, dans l'*Essai d'Arithmétique Morale*, Buffon étendra la possibilité de la connaissance à tout l'univers

> « Toutes nos connaissances sont fondées sur des rapports et des comparaisons, tout est donc relation dans l'Univers ; et dès lors tout est susceptible de mesure, nos idées même étant toutes relatives n'ont rien d'absolu ».

2.6 L'influence de Newton

On peut mettre ce texte en regard d'un passage écrit en 1735 dans la préface de la traduction de la *Statique des végétaux* où Buffon préconisait,

> « Amassons donc toujours des expériences et éloignons-nous, s'il est possible de l'esprit de système, du moins jusqu'à ce que nous soyons instruits ; nous trouverons assurément à placer un jour ces matériaux ; [. . .] C'est cette méthode que mon auteur a choisi ; c'est celle du grand Newton. »

[19] Vers 1773, Buffon a réalisé des expériences sur la « chaleur dans les corps » dont les résultats rédigés sous forme de mémoires paraîtront dans les deux premiers tomes du *Supplément à l'Histoire Naturelle* en 1774 et 1775 (mémoires 1 à 4).

Grand admirateur de Newton, reconnu comme un des introducteurs en France de la pensée de Newton[20], Buffon est convaincu que c'est cette confrontation du calcul avec l'expérience qui a fait le succès du système de Newton. Buffon souhaite donc appliquer à l'histoire naturelle la méthode d'un homme qui, suivant la phrase de D'Alembert dans l'*Essai sur les éléments de philosophie*[21] (1759), Chapitre XX),

> « montra le premier ce que ses prédécesseurs n'avaient fait qu'entrevoir, l'art d'introduire la géométrie dans la physique, et de former, en réunissant l'expérience au calcul, une science exacte, profonde, lumineuse et nouvelle ».

Yvon Belaval[22] y voit une attitude caractéristique de la crise des mathématiques au siècle des Lumières dont Buffon est un témoin. Le recours à l'expérience suppose un instrument capable de faire le pont entre le champ des mathématiques et celui du réel : la mesure.

2.7 La critique de l'arbitraire des principes

L'effort de Buffon va alors porter dans deux directions[23]. D'une part, élaborer une critique de l'application du calcul au réel (ce sera l'objet des sections XXIV à XXXV), d'autre part d'élargir le champ d'application de ce calcul (sections I à XXIII).

Commençons par la critique que fait Buffon de l'application du calcul au réel. Celle-ci va principalement porter sur les considérations qui président au choix de la mesure. Buffon remarque que ces conditions laissent une trop grande place à l'arbitraire car trop liées à ce que les hommes ont déjà imaginé. La mesure doit être adaptée aux propriétés étudiées et ne peut être le fruit de la seule raison de l'homme.

Certes le nombre « qui pris généralement n'est autre chose que l'ordre des quantités » [Roger 1977, p. 69] est une mesure intellectuelle susceptible d'une application universelle. Mais c'est sans compter qu'elle « n'existe qu'autant que l'application [qu'on en fait] lui donne de la réalité » mieux, elle ne peut être conçue indépendamment. Sinon la mesure devient purement contingente. Elle ne nous informe que sur nous-mêmes et ne

[20] « D'autres géomètres physiciens, et surtout celui qui a traduit la *Statique des végétaux*, et qui enchérit encore sur ces expériences étonnantes, embrassaient avec courage cette physique admirable, qui n'est fondée que sur les faits et sur le calcul, qui rejette toute hypothèse, et qui par conséquent est la seule physique véritable », cf. *Réponse à toutes les objections principales qu'on a faites en France contre la philosophie de Newton* (1739) in [Voltaire 1992, p. 729].

[21] L'*Essai sur les éléments de philosophie*, corpus de philosophes français, Fayard, chapitre XX, p. 178.

[22] [Belaval 1952, p. 337–355]

[23] On peut noter ici encore l'ordre curieux de présentation de ces deux grandes parties. Peut-être peut-on voir là l'expression de la méthode de Buffon d'aller du particulier au général, de rassembler les faits et, à partir de ceux-ci, d'induire des idées plus générales. Cette disposition chronologique est certainement plus conforme à celle d'un esprit en mouvement dont la pensée n'est jamais complètement achevée.

peut prétendre donner une connaissance exacte des choses extérieures. Il n'est pas alors étonnant d'aboutir à des approximations qui, selon Buffon, « prouvent l'imperfection de la mesure » [ROGER 1977, p. 69].

À l'appui de sa critique Buffon cite l'exemple des nombres « sourds » (i.e. irrationnels) et les quantités incommensurables. Pour Buffon, l'existence de ces nombres est la preuve d'un mauvais choix dans les règles du système de numération. Le choix de la mesure se résume pour Buffon à celui de la racine de l'échelle arithmétique, i.e. la base du système de numération,

> « ce nombre dix, cette racine de notre échelle arithmétique, était-elle ce qu'il y avait de mieux ? [...] pourquoi l'a-t-on préféré aux autres nombres qui tous pouvaient aussi être la racine d'une échelle arithmétique ? »

et de répondre

> « on peut penser que la conformation de la main[24] a déterminé plutôt qu'une connaissance de réflexion » [ROGER 1977, p. 69].

Et même si Buffon reconnaît qu'il « n'est pas permis de rendre cette mesure parfaite à tous égards », comme l'origine de ces imperfections n'est pas dans une mauvaise compréhension des lois de l'arithmétique, c'est plutôt dans « les principes [...] posés d'une manière trop arbitraire, et sans avoir égard à ce qui était nécessaire pour leur donner une juste convenance avec les rapports réels des quantités » [ROGER 1977, p. 70] qu'il faudra chercher la source des imperfections.

Buffon ne conteste donc pas l'aide qu'apportent les mathématiques dans notre connaissance du monde mais dénonce plutôt la vision anthropomorphique de la science dont elles sont la cause. Cette critique de l'anthropomorphisme dans l'explication des faits de la nature sera fréquente dans l'œuvre de Buffon notamment dans les reproches adressés aux « classificateurs »[25]. Comme nous ne connaissons nous-mêmes qu'une voie pour arriver à un but, nous nous persuadons que la nature fait et opère tout dans les mêmes moyens et par des opérations semblables » [BUFFON 1845, Tome I, p. 2].

[24]On pourra comparer ce passage avec celui-ci : « Si nous étions nés dans un autre monde avec une autre forme de corps et d'autres sens, nous aurions eu d'autres rapports avec les objets extérieurs, nous aurions vu d'autres merveilles et n'en aurions pas été plus surpris ; les unes et les autres sont fondées sur l'ignorance des causes, et sur l'impossibilité de connaître la réalité des choses, dont il ne nous est permis d'apercevoir que les relations qu'elles ont avec nous-mêmes » [ROGER 1977, p. 34].

[25]En 1749, Buffon fait une critique analogue des méthodes de classification leur reprochant de « mesurer les forces [de la nature] par notre faible imagination ».

3 La réflexion sur les mathématiques

3.1 La lettre de 1731 à Cramer

Le début de cette interrogation sur les mathématiques et leur rapport au réel date certainement de 1731 où Cramer soumet à Buffon un problème de probabilités plus tard connu sous le nom de problème de Saint-Pétersbourg.

> « On suppose que deux hommes (Pierre & Paul) jouent l'un contre l'autre, à ces conditions que Pierre jettera en l'air une pièce de monnaie autant de fois qu'il sera nécessaire pour qu'elle présente croix, & que si cela arrive du premier coup, Paul lui donnera un écu ; si cela n'arrive qu'au second coup, Paul lui donnera deux écus ; si cela n'arrive qu'au troisième coup, il lui donnera quatre écus ; si cela n'arrive qu'au quatrième coup, Paul donnera huit écus ; si cela n'arrive qu'au cinquième coup, il donnera seize écus, & ainsi de suite en doublant toujours le nombre des écus [...]. On demande donc combien Pierre doit donner à Paul pour l'indemniser, ou ce qui revient au même, quelle est la somme équivalente à l'espérance de Pierre qui ne peut que gagner. »

Suivant la phrase de Hanks, si « pour Buffon mathématicien le problème de Saint-Pétersbourg n'est qu'une étape sans importance, pour Buffon philosophe, c'est peut-être un point de départ » [Hanks 1966, p. 33].

3.2 Le pouvoir des mathématiques et ses limites

Dès ses premières réflexions sur le problème de Saint-Pétersbourg, Buffon situe le problème dans la « contrariété entre la calcul et le bon-sens ». Buffon ne met donc pas en cause le pouvoir des mathématiques à nous informer sur le réel. Bien au contraire c'est pour lui une nécessité que le calcul conduise à des résultats conformes à l'expérience. S'il y a désaccord, il s'agit donc de s'interroger sur son origine et sur la façon de le supprimer.

Cette attitude suscite plusieurs questions quant au rapport de Buffon aux mathématiques dont les réponses seront à rechercher dans son œuvre.

Quel est le pouvoir des mathématiques, quelles sont ses limites et quelle utilisation peut-on en espérer ? Si les mathématiques doivent nécessairement conduire à des résultats conformes à la réalité, quelle est la nature de cette nécessité ? Enfin s'il y a désaccord entre calcul et réalité, à qui donner le dernier mot et quelle méthode, quel instrument mettre en place pour résoudre cette « contrariété » ?

La réflexion de Buffon sur les mathématiques se développe durant la période 1731–1749 qui voit à la fois les travaux mathématiques de Buffon et la préparation de l'*Histoire Naturelle*. Avec la publication en 1749 du *Discours sur la manière de d'étudier et de traiter l'histoire naturelle* dans le premier tome de son *Histoire Naturelle*, c'est véritablement, suivant le titre du chapitre IV de la biographie[26] de Buffon écrite par J. Roger, un « nouveau discours de la méthode » qui nous est proposé. Les conceptions de Buffon sur les mathématiques y prennent une forme quasi-définitive dont on retrouve les échos tout le long de son œuvre et en particulier dans son *Essai d'Arithmétique Morale*.

3.3 L'énumération des vérités

Dès le premier tome de l'*Histoire Naturelle* en 1749, le *Discours sur la manière d'étudier et de traiter l'histoire naturelle* apporte des éléments de réponses à ces questions qui seront reprises et développées dans l'EAM. S'interrogeant sur « la seule et vraie science qui est la connaissance des faits », et sur l'essence de la vérité dans cette science, Buffon constate la difficulté que nous avons à définir ce mot. Pragmatique, Buffon se limite à en distinguer plusieurs usages suivant qu'on parle de mathématique, de physique ou de morale.

> « Les vérités mathématiques ne sont que les répétitions exactes des définitions ou suppositions » [Buffon 1845, Tome I, p. 11].

Elles ont certes l'avantage d'être des idées sur lesquelles tout le monde s'accorde dès qu'on a convenu des suppositions de départ et des définitions qu'on utilise. Mais ce pouvoir des mathématiques est limité car la mathématique valide le raisonnement mais non sa conclusion qui possède exactement la même valeur épistémologique que la supposition de départ. Si celle-ci est arbitraire, celle-là le sera aussi. Ce que Buffon exprime dans son *Discours sur la manière d'étudier et de traiter l'histoire naturelle*

> « Il n'y a donc rien dans cette science que ce que nous y avons mis, et les vérités qu'on en tire ne peuvent être que des expressions différentes sous lesquelles se présentent les suppositions que nous avons employées » [Buffon 1845, Tome I, p. 11].

Le pouvoir des mathématiques réside donc dans cette capacité à combiner les suppositions et dans le consensus autour du résultat obtenu. Mais pour Buffon ce pouvoir ne peut à lui tout seul, sans le secours de l'expérience, nous aider à comprendre les mystères de la nature. D'où, visant implicitement Descartes, l'interrogation de Buffon en 1735 dans la préface à la traduction de la *Statique des végétaux et l'analyse de l'air*

[26] [Roger 1989, p. 118].

de S. Hales « comment ose-t-on se flatter de dévoiler ces mystères, sans autre guide que son imagination ? ».

À la différence des vérités mathématiques, les vérités physiques nous sont étrangères donc non arbitraires. Elles s'établissent à partir de l'observation des faits qui sont nos seules certitudes.

> « Nous existons sans savoir comment, et nous pensons sans savoir pourquoi ; mais quoi qu'il en soit de notre manière d'être et de sentir, quoi qu'il en soit de la vérité ou de la fausseté, de l'apparence ou de la réalité de nos sensations, les résultats de ces mêmes sensations n'en sont pas moins certains par rapport à nous. » *Histoire générale des animaux*, (1749) [Buffon 1845, Tome III, p. 115].

La certitude de la vérité physique sera induite de l'observation répétée des faits. C'est même à cela qu'on reconnaîtra une vérité physique car « Une répétition fréquente et une succession non interrompue des mêmes événements fait l'essence de la vérité physique. » [*Discours sur la manière d'étudier et de traiter l'histoire naturelle...*], mais rien cependant ne permet d'affirmer qu'un fait observé plusieurs fois se répétera encore si ce n'est que suivant Hume[27] dans l'*Enquête sur l'entendement humain*

> « Toutes nos conclusions expérimentales procèdent de la supposition que le futur sera conforme au passé ».

3.4 L'évidence et la certitude : leur mesure

L'évidence de la vérité mathématique de nature apodictique est remplacée par la certitude de la vérité physique de nature contingente. À l'absolu de l'évidence mathématique succédera le relatif des différents degrés de la certitude. Mais comme pour Buffon l'absolu de quelque genre qu'il soit n'est ni du ressort de notre esprit ni de celui de la nature, il faudra dès qu'on voudra dire quelque chose sur le réel sortir du cadre mathématique, ce qui prouve encore que pour Buffon les mathématiques seules ne peuvent nous aider à connaître le réel. En pratique connaître se résumera à mesurer le degré de certitude attaché à une vérité c'est-à-dire, suivant la tradition qui va de Port-Royal à Hume en passant par Locke, Leibniz et Bernoulli, à estimer des probabilités. Les probabilités devront nous permettre de décider, de trancher entre plusieurs hypothèses, de soupeser les éventualités. C'est une théorie générale de la décision que Buffon compte mettre en place.

[27] [Hume 1983, p. 95].

3.5 Les probabilités et l'analogie

C'est le projet de l'EAM de préciser quelques règles permettant d'estimer ces probabilités en faisant jouer un rôle à l'analogie « le premier instrument » malgré les dangers de cette méthode dénoncée par D'Alembert.

Selon Locke, l'analogie permet d'avoir « des opinions accompagnées de différents degrés d'assentiment » sur les choses qui, par nature, ne tombent pas sous nos sens.

Particulièrement

> « en ce qui regarde la manière d'opérer dans la plupart des parties des ouvrages de la Nature, où, quoique nous voyons des effets sensibles, leurs causes nous sont absolument inconnues, de sorte que nous ne saurions apercevoir les moyens et la manière dont ils sont produits. (...). Car elles ne peuvent paraître plus ou moins probables, qu'en tant qu'elles conviennent plus ou moins avec les vérités qui sont établies dans notre esprit, et qu'elles ont du rapport avec les autres parties de notre connaissance et de nos observations. L'analogie est le seul recours que nous ayons dans ces matières, et c'est de là seulement que nous tirons tous nos fondements de probabilité. »[Locke 1755, XVI, § 12, p. 555]

Buffon fait un grand usage de cet instrument pour établir des vérités physiques. S'interrogeant sur l'origine du mouvement progressif chez l'animal, Buffon utilise l'analogie pour prouver que ce type de mouvement a « pour cause unique l'impression des objets sur les sens ». Mais il « ne prétend pas assurer [cela] comme une vérité démontrée ». C'est « seulement une chose vraisemblable qui lui paraît fondée sur de bonnes analogies. » Il justifie l'utilisation de ce type de raisonnement parce que

> « les choses que nous pouvons mesurer, et dont nous pouvons en conséquence estimer au juste la quantité des effets, ne sont pas en aussi grand nombre que celles dont les qualités nous échappent, dont la manière d'agir nous est inconnue, et dont nous ignorons par conséquent la relation proportionnelle qu'elles peuvent avoir avec leurs effets. [...] Or dans la nature, la plupart des effets dépendent de plusieurs causes différemment combinées, de causes dont l'action varie, de causes dont les degrés d'activité ne semblent suivre aucune règle, aucune loi constante, et que nous ne pouvons par conséquent ni mesurer, ni même estimer que comme on estime des probabilités, en tâchant d'approcher de la vérité par le moyen des vraisemblances », *Sur la nature des animaux*, (1753), [Buffon 1845, Tome III, p. 431].

4 Bibliographie.

[Aude 1788] Aude, M. le Chevalier. *Vie privée du Comte de Buffon.* Lausanne, 1788.

[Belaval 1952] Belaval, Yvon. *La crise de la géométrisation de l'univers dans la philosophie des Lumières.* In *Revue Internationale de Philosophie*, tome VI n° 21 (fascicule 3). Bruxelles, 1952.

[Buffon 1845] Buffon, Georges-Louis Leclerc (Comte de). *Œuvres complètes de Buffon avec les suites de M. Achille Comte. Dessins par Victor Adam.* Abel Ledoux libraire-éditeur, Paris, 4e edition, 1845. 6 volumes.

[Buffon 1954] Buffon, Georges-Louis Leclerc (Comte de). *Œuvres philosophiques de Buffon.* In *Corpus général des philosophes français*, tome XLI. Éditées par Jean Piveteau, Presses Universitaires de France, Paris, 1954.

[Gouraud 1848] Gouraud, Charles. *Histoire du calcul des probabilités depuis ses origines jusqu'à nos jours.* Librairie Auguste Durand, Paris, 1848.

[Hanks 1966] Hanks, Lesley. *Buffon avant l'« Histoire Naturelle ».* Presses Universitaires de France, Paris, 1966.

[Heim 1952] Heim, Roger. *Buffon.* Muséum National d'Histoire Naturelle, Paris, 1952. Ouvrage collectif publié sous la direction de Roger Heim.

[Hérault de Séchelles 1970] Hérault de Séchelles, Marie-Jean. *Œuvres littéraires et politiques.* Édition établie et présentée par Hubert Juin (éditions Rencontre), Lausanne, 1970.

[Hume 1983] Hume, David. *Enquête sur l'entendement humain.* GF-Flammarion, Paris, 1983.

[Locke 1755] Locke, John. *Essai philosophique concernant l'entendement humain.* traduit par Pierre Coste, 5e édition revue et corrigée, chez J. Schreuder et Pierre Mortier le Jeune, Amsterdam et Leipzig, 1755. Réédité par Émilienne Naert, Vrin, Paris, 1972.

[Roger 1962] Roger, Jacques. *Buffon : Les Époques de la nature, édition critique.* In *Sciences de la Terre*, série C, tome 10. Mémoires du Muséum National d'Histoire Naturelle, Paris, 1962. Réimpression 1988.

[Roger 1977] Roger, Jacques. *Un autre Buffon.* Hermann, Paris, 1977. Préface de Jacques-Louis Binet ; introduction et annotations de Jacques Roger.

[ROGER 1989] Roger, Jacques. *Buffon, un philosophe au Jardin du Roi.* Fayard, Paris, 1989.

[VOLTAIRE 1992] Voltaire. *Éléments de la philosophie de Newton,* critical edition by R.L. Walters and W.H H. Barber. The Voltaire Foundation, Taylor Institution, Oxford, 1992.

[WEIL 1961] Weil, Françoise. *La correspondance Buffon-Cramer*, tome XIV, pages 97–136. Revue d'Histoire des Sciences, 1961.

Presses Universitaires Franc-Comtoises
Université de Franche-Comté
25030 BESANCON CEDEX

Maquette et mise en page François Pétiard (IREM)

Imprimerie: Reprographie du
Département de Mathématiques

Dépôt légal 1er trimestre 2001

Institut de **R**echerche sur
l'**E**nseignement des **M**athématiques
de Franche-Comté

Département de Mathématiques. UFR Sciences et Techniques.

16 route de Gray. 25030 BESANCON CEDEX

Tél. : 03 81 66 62 25 - Fax : 03 81 66 62 34

Mél : iremfc@math.univ-fcomte.fr

Site web : http://pegase.univ-fcomte.fr/CTU/IREM/

IREM
Bulletin n° 65. 2001

ISSN 1141-913X