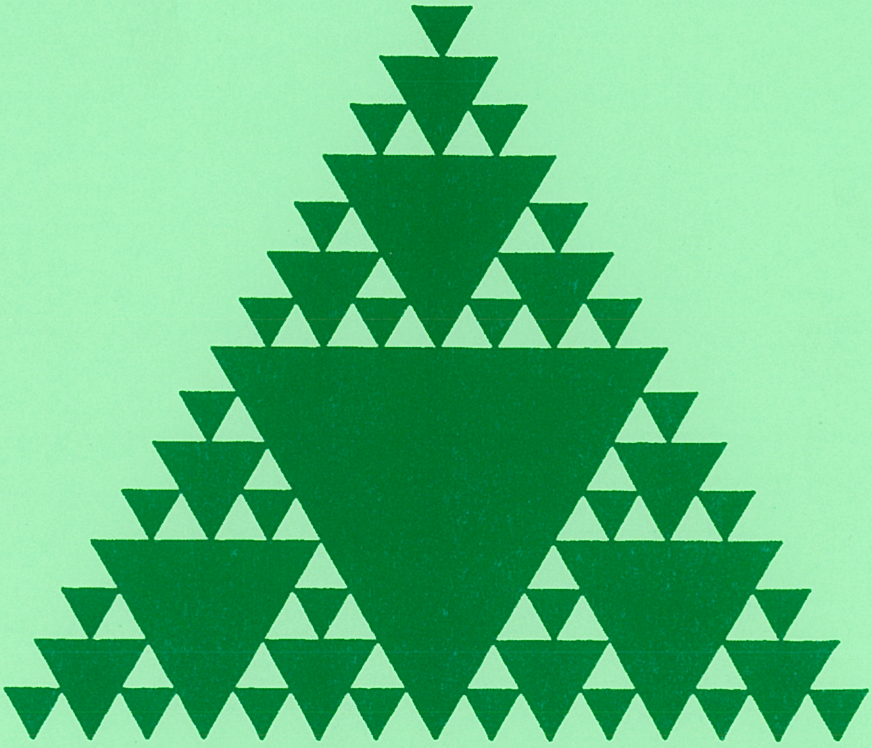
7 €

Les Publications de
l'IREM de BESANÇON

Pouvoir et savoir faire des Mathématiques

Deuxième édition



Aide pour la formation des Professeurs des Écoles
(première année)

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ
pufc
Presses Universitaires Franc-Comtoises

Groupe «ÉLÉMENTAIRE»

Pouvoir et savoir faire des Mathématiques

*Les Publications de l'*IREM de BESANÇON

Directeur de collection Yves **DUCEL**

ISBN2-913322-95-6

IREM de BESANÇON

Pouvoir et savoir faire des Mathématiques

Groupe « ÉLÉMENTAIRE »

PRESSES UNIVERSITAIRES FRANC-COMTOISES 2000
Diffusé par l'IREM de Franche-Comté

Table des matières

Introduction

La formation des futurs enseignants du premier degré a beaucoup évolué depuis la création des I.U.F.M., en particulier par le fait que le concours des Professeurs d'École se situe en fin de première année. Le travail de cette première année est devenu pour une part importante la préparation du concours.

Les étudiants se présentent donc pourvus d'une licence d'une discipline quelconque, et sont souvent très loin des questions auxquelles ils devront répondre dans l'épreuve de mathématiques de l'admissibilité du concours.

L'enseignement proposé à l' I.U.F.M. pour cette première année doit tenir compte de la très grande diversité des cursus antérieurs, et être un enseignement d'adultes à des fins professionnelles : la maîtrise d'un savoir fondamental nécessaire à une analyse sérieuse des démarches adaptées à des enfants de 3 à 11 ans.

Rien de très savant donc dans les contenus élaborés pour cette première année : plutôt l'essentiel des contenus exigés en fin de Collège et pour une part, en Seconde. Mais les ouvrages de ces niveaux sont souvent mal adaptés et ne permettent pas aux étudiants de reprendre ce qu'ils ont enfoui depuis longtemps au fond de leur mémoire. De plus, le temps d'enseignement d'une trentaine d'heures sur l'année impose la présentation de résumés simples et d'exemples variés dans lesquels entrent les démarches.

C'est dans ce contexte que le Groupe Élémentaire de l'I.R.E.M. de Besançon s'est mis à l'œuvre pour constituer ce document de travail personnel permettant à chacun de se préparer à son rythme et suivant ses besoins.

Chaque chapitre est constitué de 2 parties :

La première partie est une préparation de séances faite de deux ensembles de questions.

Les questions de savoir-faire : **Peux-tu ?** proposent des situations simples auxquelles chacun devrait pouvoir trouver seul une réponse avant la séance de cours ; réponse éventuellement intuitive ou incomplète, mais qui, par la mise en commun et la confrontation des méthodes employées, permettra de construire en cours le savoir institutionnalisé comme un outil plus performant, plus rapide et plus sûr pour résoudre la classe de problèmes à laquelle se rattache cette situation.

Les questions de savoir : **Sais-tu ?** font référence au bagage qui devrait être disponible chez l'étudiant, si l'oubli ou plutôt l'enfouissement des connaissances que nous ne pratiquons pas régulièrement ne venait contrarier les actions éducatives en général.

Ces deux séries de questions préparatoires sont donc l'occasion pour l'étudiant de faire le point sur ses capacités et sur ses connaissances à propos d'un sujet, de se poser des questions et donc de s'approprier les problèmes qui serviront de déclencheurs aux connaissances indispensables.

Le cours proprement dit - ou la recherche individuelle pour les étudiants qui préparent seuls le concours - permettra la mise en commun, la comparaison des démarches, fixera les limites de leur validité et se servira du canevas des questions pour bâtir un résumé des savoirs nécessaires et sur lesquels l'étudiant pourra dorénavant s'appuyer.

La seconde partie est faite d'exercices variés et non systématiques qui permettront la mise en œuvre du savoir acquis dans les situations les plus diverses, et ce pour éviter les stéréotypes. Ils sont indépendants les uns des autres, sauf quelques cas particuliers.

Une indication du degré de difficulté des exercices est proposée à la suite du numéro : les exercices d'entraînement simples n'ont pas d'astérisque, ceux qui demandent un enchaînement plus complexe sont repérés par * ou **.

Comme la réponse n'est en général pas incluse dans la question (La forme : "Démontrer que ... " y est rare), certains pourraient se trouver bloqués et se décourager. Aussi, avons-nous compilé en fin d'ouvrage des pistes de recherches permettant à l'étudiant de "rentrer dans le problème". Ce ne sont pas des solutions, et il convient de ne pas confondre : nous les avons voulues comme le coup de pouce qui force un peu la résistance éprouvée devant un problème qui paraît difficile. Cette aide ne dispensera pas l'étudiant du travail de résolution qui lui appartient et qui donne la satisfaction de se sentir capable de dépasser une difficulté. De plus, la forme de ces indications n'est pas celle de la rédaction qui sera exigée des étudiants au concours.

Nous avons tenu à terminer ce document par une solution complète d'un exercice par chapitre, afin de donner quelques exemples de rédaction. Ces exercices sont repérés par ^{c}.

Ce document, initialement destiné à la formation mathématique des futurs Professeurs des Écoles, pourra être utilisé avec profit par les enseignants du second degré (Collège, Lycée Professionnel, ...) dans le cadre de leurs enseignements (en particulier les modules).

NOMBRES ET FONCTIONS

Calculs numériques et littéraux

Peux-tu ?

P1 dire parmi les nombres suivants lesquels sont naturels, entiers relatifs, décimaux, rationnels, réels : -3 ; $-1{,}5$; $-0{,}02$; 0 ; 1 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{3}$; $-\frac{1}{5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{36}$; 100 ; 10^6 ; $\frac{1}{10^6}$; π

P2 dire quelles sont les fractions équivalentes parmi : $\frac{45}{35}$; $\frac{12}{19}$; $\frac{182}{74}$; $\frac{135}{105}$; $\frac{600}{950}$; $\frac{37}{91}$ et trouver la forme irréductible de chacune

P3 effectuer : $\frac{5}{7}+\frac{9}{4}$; $\frac{12}{9}-\frac{1}{8}$; $\frac{2}{3} \times \frac{19}{12}$; $\frac{5}{4} : \frac{3}{7}$

P4 exprimer sous forme d'une fraction irréductible : $2+\dfrac{1}{2+\frac{3}{4}}$

P5 encadrer le nombre π par 2 nombres décimaux à 2 chiffres après la virgule et en déduire un encadrement de : $\frac{1}{\pi}$; π^2 ; $3-\frac{1}{\pi}$

P6 écrire les nombres suivants sous forme fractionnaire : 0,25 ; 1,05 ; –3,4 ; 0,007

P7 encadrer avec une calculatrice - sans utiliser la touche $\boxed{\sqrt{}}$ - à 10^{-3} près : $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{19}$

P8 donner sans poser d'opération, une approximation décimale à 10^{-2} près par défaut de : $(3{,}04)^2$

P9 développer en une somme : $(a+1)^2$; $(x+y-3)^2$; $(4y-1)^2$; $(b^2-16)^2$

P10 écrire sous forme d'un produit : a^2-1 ; x^2-9 ; $4y^2-1$; b^4-16

Sais-tu ?

S1 caractériser les ensembles de nombres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

S2 transformer une fraction en une fraction équivalente

S3 simplifier une fraction et reconnaître sa forme irréductible

S4 réduire 2 ou plusieurs fractions à un même dénominateur

S5 ajouter ou retrancher 2 fractions ; comparer 2 fractions

S6 multiplier ou diviser 2 fractions

S7 si on peut toujours ajouter, retrancher, multiplier, membre à membre 2 inégalités de même sens

S8 ce qu'est l'approximation décimale d'ordre n par défaut ou excès, un encadrement à 10^{-n} près, la troncature et l'arrondi d'ordre n d'un nombre réel

S9 donner un encadrement de la somme, différence, produit ou quotient de 2 nombres réels positifs connus par encadrement

S10 ce que sont le carré et la racine carrée d'un nombre réel positif

S11 ce qu'est la valeur absolue d'un nombre réel

S12 transformer les expressions : $(a+b)^2$; $(a-b)^2$; a^2-b^2

S13 ce qu'est une puissance entière (positive ou négative) d'un nombre réel ; l'écriture scientifique d'un réel

Exercices

1 Simplifier : $\frac{33}{60}$; $\frac{720}{288}$; $\frac{1001}{1144}$; $\frac{540}{4545}$. Faire la somme des 2 premières et celle des 2 dernières et comparer les résultats obtenus

2 Ecrire, sous forme de fractions irréductibles, les produits 2 à 2 des 4 fractions de l'exercice 1. (6 calculs)

3 Ordonner du plus petit au plus grand : $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$; $3 \times \frac{1}{18}$; $\frac{72}{108} : 4$; $\frac{1}{5} + \frac{1}{7}$

4c Mettre sous forme d'une fraction irréductible : $3 - \dfrac{2 - \frac{1}{5}}{2 + \frac{5}{6}}$

5* Mettre sous forme d'une fraction irréductible et ordonner du plus petit au plus grand :
$a = \frac{1}{2}$; $b = \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}$; $c = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$; $d = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$

6** Comparer $\frac{22}{7}$ et π, et encadrer la différence à 10^{-3} près. Recommencer avec $\frac{355}{113}$
($\pi = 3,1415926535\ldots$)

7 Les nombres suivants sont-ils décimaux : $\frac{21}{28}$; $\frac{44}{55}$; $\frac{18}{210}$; $\frac{39}{75}$?

8 Développer en une somme : $(5 + x)^2$; $(4 - 3x)^2$; $(2x + 1)^4$; $(x^2 + 1)^2$

9* Reconnaître un produit de 2 facteurs dans les expressions : $a^2 - 16$; $9 - 4x^2$; $1 - 4b^2$; $c^4 - 4$; $x^2y^2 - 1$; $a^6 - b^6$; $x^4 - d^6$; $x^2 - 3$

10* Situer x sur la droite numérique dans chacun des cas suivants :
$|x| < 3$
$|x| \geq 2$
$2 < |x| \leq 10$
$|x - 2| < 7$
$5 \leq |x + 1| \leq 6$

11 Exprimer sous forme usuelle : $3,2 \times 10^4$; $1,5 \times 10^{-3}$; 10^{-6} ; $2 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-7}$
Mettre sous écriture scientifique : 100400 ; $\frac{1}{125}$; 0,008 ; 200000 ; 20,6 ; 0,0000001

<u>Mise en équation ; résolution</u>

Peux-tu ?

P1 exprimer les propriétés «Sais-tu» du chapitre précédent (excepté S1, S8 et S12) avec des lettres représentant les nombres

P2 trouver le nombre auquel je pense, sachant que si je le double, si j'ajoute 12 au résultat et si je divise ce nouveau résultat par 2 j'obtiens 49

P3 trouver un nombre tel que le produit par 11 de ce nombre soit 3

P4 trouver x dans chaque cas suivant : $7.x = 3$; $7 = 3.x$; $\frac{x}{3} = 7$; $\frac{1}{3} = 7.x$

P5 trouver les 2 nombres auxquels je pense, sachant que si j'en fais la somme, j'obtiens 142 et la différence 28

P6 traduire en une équation la question : quel <u>même</u> nombre ajouter au numérateur et au dénominateur de $\frac{31}{39}$ pour que la fraction obtenue soit $\frac{3}{4}$?

P7 transformer : $x^2 - 16$ en un produit et résoudre : $3.x^2 = 48$

P8 trouver une équation dont les nombres 3 et 7 sont solutions

P9 résoudre : $(x + 3)^2 = (2.x - 1)^2$

Sais-tu ?

S1 ce que signifie : résoudre une équation

S2 ce que signifie : résoudre un système d'équations

S3 attribuer une lettre à un nombre inconnu et transformer les informations le concernant comme s'il était connu

S4 résoudre un problème en suivant le plan :

a) choix de (ou des) l'inconnue(s) et contraintes

b) mise en équation du problème

c) résolution de l'équation (des équations)

d) confronter la (ou les) solution(s) trouvée(s) aux contraintes et rejeter les solutions invraisemblables

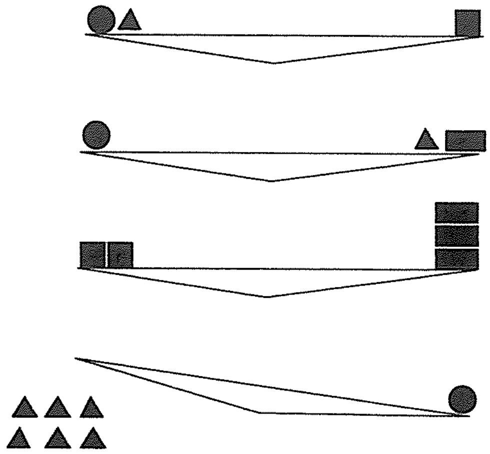
S5 reconnaître une équation du premier degré et la résoudre

S6 résoudre un système de 2 équations du premier degré à 2 inconnues x et y

S7 l'intérêt de remplacer un polynôme avec une inconnue x par un produit de facteurs du premier degré

S8 l'identité : $a^2 - b^2$ et son usage dans les factorisations

Exercices



1 Combien faut-il de triangles pour équilibrer la quatrième balance ?

2 Une personne a acheté un imperméable, un chapeau et des bottes. Elle a payé 2000 F. L'imperméable coûte 900 F de plus que le chapeau, et l'imperméable et le chapeau ensemble coûtent 1600 F de plus que les bottes. Quel est le prix de ces articles ?

3* Un train quitte Londres pour Édimbourg à 1 h, roulant à 50 miles à l'heure. Un autre train quitte Édimbourg pour Londres à 4 h, roulant à 25 miles à l'heure. Sachant que Édimbourg est à 400 miles de Londres, à quelle heure se rencontreront-ils ?

4* Deux secrétaires travaillent ensemble pour dactylographier un rapport. La première aurait pu le faire seule en une heure et demie ; la seconde en deux heures et demie.
Combien de temps leur faut-il ensemble ?

5** Quand j'aurai l'âge qu'a mon père actuellement, je serai cinq fois plus âgé que mon fils ne l'est à présent. A ce moment-là, mon fils aura 8 ans de plus que je n'ai maintenant. L'âge de mon père et le mien font ensemble 100 ans. Quel est l'âge de mon fils ?

6 «– Dis moi, illustre Pythagore, combien de disciples fréquentent ton école et écoutent tes instructions ?
– Voici leur nombre, répond le philosophe: une moitié étudie les mathématiques, un quart la musique, un septième garde le silence, et il y a 3 femmes par dessus.» (Problème grec)

7*c Un certain produit se vend liquide ou en poudre. Un sondage fait ressortir les faits suivants :
• un tiers des personnes interrogées n'utilisent pas la poudre
• 2 septièmes n'utilisent pas le liquide
• 427 personnes utilisent le liquide et la poudre
• le cinquième des personnes interrogées n'utilisent pas du tout le produit
Combien a-t-on interrogé de personnes ?

8 Trouver 2 nombres dont la somme est 330 et le rapport $\frac{7}{15}$

9* 2 ouvriers, un jeune et un vieux, habitent le même immeuble. Le jeune met 20 min et le vieux 30 min pour aller à l'usine. Si le jeune part 5 min plus tard que le vieux, au bout de combien de temps le rattrapera-t-il ?

10 L'ânesse et le mulet faisaient voyage ensemble ; l'ânesse se plaignait. «De quoi te plains-tu ?, dit le mulet, si tu me donnais une mesure j'en aurais double de toi et si je t'en donnais une, nous en aurions autant.» (Problème grec).

11* Il faut faire une couronne pesant 60 marcs avec de l'or, du cuivre, du fer et de l'étain. L'or et le cuivre représentent les 2/3 ; l'étain et l'or les 3/4 ; l'or et le fer les 3/5 (Problème grec).

12* Trouver 2 nombres dont la somme est 84 et la différence des carrés 3192

13* Le rapport de 2 nombres est $\frac{7}{13}$; si j'ajoute 3 à chacun, ce rapport devient $\frac{11}{20}$. Quels sont ces nombres ?

Fonctions outils

Peux-tu ?

P1 étudier les variations d'une dimension y d'un rectangle de périmètre fixé à 18 cm en fonction de l'autre x

P2 remplir un tableau de valeurs de cette correspondance (P1) pour des valeurs entières (en cm)

x										
y										

P3 représenter sur un graphique cette correspondance (P1) pour des valeurs entières (en cm)

P4 étudier les variations d'une dimension d'un rectangle d'aire fixée à 18 cm^2 en fonction de l'autre

P5 remplir un tableau de valeurs de cette correspondance (P4) pour des valeurs entières d'une dimension (en cm)

P6 représenter sur un graphique cette correspondance (P4) pour des valeurs entières d'une dimension (en cm)

P7 étudier les variations de l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté

P8 remplir un tableau de valeurs de cette correspondance (P7) pour des valeurs entières inférieures à 10 cm

P9 représenter sur un graphique cette correspondance (P7) pour des valeurs entières inf. à 10 cm

P10 étudier les variations de prix d'un article avec 30% de réduction, de 10 F en 10 F à partir de 100 F et jusqu'à 200 F et les représenter graphiquement

P11 dire, parmi les 4 fonctions de P1, P4, P7, P10, lesquelles respectent un ordre, la linéarité

Sais-tu ?

S1 ce que signifie : «en fonction d'une variable» (numérique) dans un problème

S2 ce qui caractérise une relation entre 2 variables où l'une est fonction de l'autre ; ce qu'est l'ensemble de définition d'une fonction, l'image d'un nombre, un antécédent par une fonction

S3 comment représenter une fonction à l'aide d'un tableau

S4 comment représenter une fonction à l'aide d'une formule : $x \longmapsto \ldots$

S5 comment représenter une fonction dans un repère cartésien

S6 quelle fonction caractérise une situation de proportionnalité

S7 quand on dit qu'une fonction respecte l'ordre (inverse l'ordre)

S8 quand on dit qu'une fonction respecte la linéarité

S9 quelles propriétés sont respectées par une fonction linéaire

S10 ce qu'est une fonction affine

Exercices

1 a) Exprimer l'aire des polygones de la figure 1 en fonction de x. Dire dans chaque cas si la fonction est linéaire, affine, si elle est croissante ou décroissante
b) Représenter graphiquement les 4 fonctions dans un même repère
c) Peut-on trouver une valeur x pour que 2 de ces polygones aient même aire ?

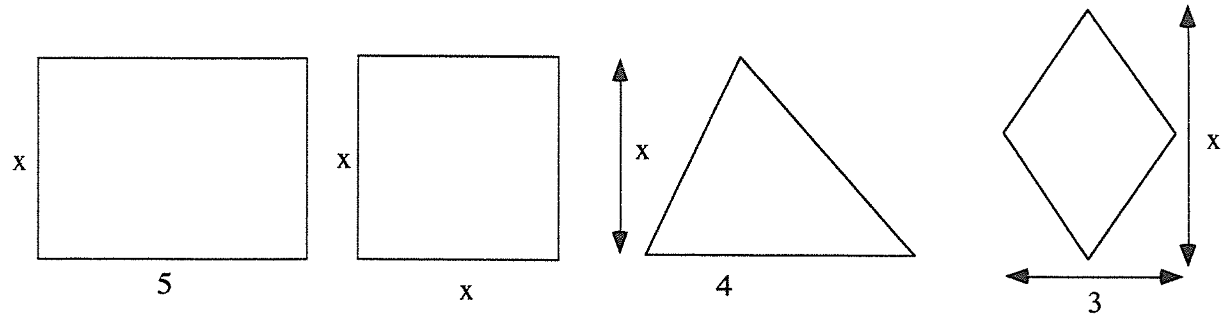


Figure 1

2 Exprimer l'aire des polygones grisés de la figure 2 en fonction de x. Dire dans chaque cas si la fonction est linéaire, affine, si elle est croissante ou décroissante

3* Dans un rectangle, peut-on exprimer l'aire en fonction du périmètre seul ; le périmètre en fonction de l'aire seule ? Est-ce la même chose si ce rectangle est carré ?

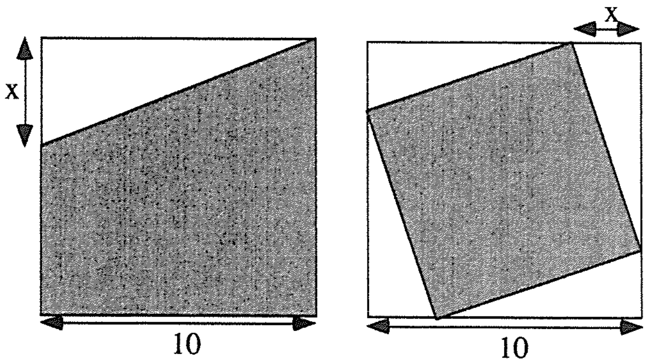


Figure 2

4 Sur les graphiques de la figure 3, préciser dans chaque cas si la fonction est linéaire, affine, si elle est croissante ou décroissante

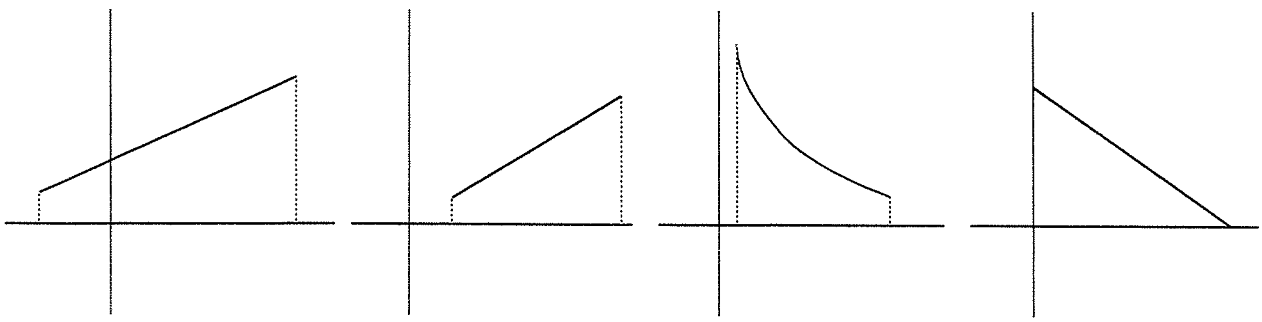


Figure 3

5 Les fonctions suivantes sont-elles linéaires (et pourquoi):
- périmètre d'un carré en fonction du côté
- aire d'un carré en fonction du côté
- longueur d'un cercle en fonction du rayon
- aire d'un disque en fonction du rayon
- aire d'un secteur circulaire de rayon donné en fonction de l'angle
- aire d'un secteur circulaire d'angle donné en fonction du rayon

6*c Les Anglo-Saxons utilisent le degré Fahrenheit et nous le degré Celsius pour les températures. L'eau bout à 212° F et fond à 32° F. La correspondance étant affine, donner la température en ° F en fonction de celle en ° C. A quelle température correspond 100° F?
Exprimer aussi la correspondance dans l'autre sens.

Proportionnalité

Peux-tu ?

P1 donner la vitesse d'un cycliste qui parcourt 1 km en 1 min 30 s

P2 M. MINI mesure 6 trombones ou 4 allumettes. Dire combien de trombones mesure M. MAX qui fait 6 allumettes

P3 trouver le prix d'un rôti de 2,300 kg sachant qu'un autre de 1,600 kg coûte 92,80 F

P4 remplir un tableau donnant les prix de 0,5 kg en 0,5 kg d'un produit à 16,20 F les 2 kg

P5 donner à 250 g près le poids d'un conditionnement du produit précédent à 26 F sans calcul en lisant le tableau

P6 dessiner un graphique traduisant le prix du rôti de la question P3

P7 lire sur le graphique précédent le prix d'un rôti de 3,100 kg et le poids d'un rôti à 110 F

P8 trouver le nombre d tel que : $\frac{16}{40} = \frac{36}{d}$

P9 écrire toutes les proportions entre les 4 nombres a, b, c, d qui vérifient : $a.d = b.c$

P10 trouver les nombres m tel que : $\frac{32}{m} = \frac{m}{8}$

P11 trouver 3 nombres proportionnels à 1, 2, 3 dont la somme est 66

Sais-tu ?

S1 ce qui correspond à la somme de 2 nombres de la première colonne d'un tableau de proportionnalité

S2 ce qui correspond au produit par k d'un nombre de la première colonne d'un tableau de proportionnalité

S3 ce qu'est une proportion et la transformer en "produits en croix"

S4 calculer le coefficient de proportionnalité

S5 passer par 1 dans une colonne d'un tableau de proportionnalité

S6 trouver une équation de la droite passant par O et un point dans un repère cartésien

S7 utiliser une équation de droite passant par O pour remplir un tableau de proportionnalité

S8 utiliser une échelle pour mesurer une distance à vol d'oiseau sur une carte

S9 traduire par une vitesse la relation (temps / distance) dans un mouvement uniforme

Exercices

1 Une voiture qui roule à vitesse constante, parcourt 70 m en 3 s. Quelle est sa vitesse en km/h ?

2 Comment est représentée une distance de 2,5 km sur une carte aux 1: 25 000 ?

3* Un cycliste suit un parcours qui se divise en 4 parties égales. Sur la première, en terrain plat, il fait 10 km/h ; sur la deuxième, une côte, il fait 5 km/h ; sur la troisième, une descente, il fait 30 km/h ; sur la dernière, à plat avec le vent dans le dos, il fait 15 km/h.
Quelle est sa vitesse moyenne sur ce parcours ?

4** L'eau en se congelant augmente d'environ $\frac{2}{23}$ de volume. Quelle est la masse volumique de la glace ?

5* Un réservoir reçoit l'eau de 4 canaux dont l'un le remplira en 1 jour, l'autre en 2, le troisième en 3 et le dernier en 4. Dans combien de temps sera-t-il rempli si les 4 canaux sont ouverts ?

6* 2 nombres ont pour somme 270. Si on ajoute 65 à chacun, leur rapport devient $\frac{3}{5}$. Quels sont ces nombres ?

7*c 4 joueurs ont des avoirs proportionnels à 1,2, 3, 4 en début de jeu. En fin de jeu, leurs avoirs respectifs sont proportionnels à 5, 4, 3, 2. Quels sont ces avoirs en fonction de la somme globale en jeu S qui reste constante ?

8 3 personnes ont gagné ensemble 5670 F en exécutant un travail commun. La première a travaillé 32 h, la deuxième 53 h et la troisième 41 h. Quels sont leurs salaires ?

9* Une poule et demie pond un œuf et demi en un jour et demi. Combien pondent 9 poules en 9 jours ?

10* Deux Arabes, l'un portant 5 galettes, l'autre 3 galettes, rencontrent dans le désert un voyageur riche et affamé. Ils décident de partager leur repas en 3 parts égales ; puis le riche voyageur, pour prix de son repas, leur donne 8 pièces d'or.
Comment faire le partage proportionnellement à leurs dons ? (Problème historique)

11** Si 12 bœufs mangent 3 cens de foin en 15 jours, combien faut-il de bœufs pour manger 5 cens de foin en 10 jours ?

12* Un nénuphar double sa surface chaque jour. Il a couvert la moitié de la surface de l'étang en 20 jours.
Combien de jours pour couvrir entièrement l'étang ?

13** Un skieur calcule qu'à 10 km/h il arrivera à l'endroit indiqué une heure après midi. A 15 km/h il arrivera une heure avant midi. A quelle vitesse doit-il aller pour arriver à midi ?

Pourcentages

Peux-tu ?

P1 calculer 15 % de 250 F

P2 augmenter 360 F de 25 %

P3 faire un rabais de 8 % sur le prix d'une voiture à 49 900 F

P4 dire le pourcentage d'augmentation d'un produit dont le prix passe de 120 F à 126 F

P5 dire à quelle opération arithmétique correspond une augmentation de 200 %

P6 dire à quelle opération arithmétique correspond une réduction de 100 %

P7 dire s'il revient au même de réduire le prix d'une lessive de 20 % ou de donner 20 % de produit en plus

P8 donner le résultat d'une augmentation de 30 % suivie d'une réduction de 30 %

P9 donner le résultat de 2 augmentations successives de 20 %

P10 calculer la fonction linéaire associée à une augmentation ou à une réduction de 3 %

P11 transformer en pourcentage l'action de prendre les $\frac{3}{4}$

P12 donner en pourcentages la répartition des salaires de cette entreprise

	Moins de 6000 F	Plus de 6000 F
Hommes	15	45
Femmes	32	53

Sais-tu ?

S1 quelles opérations représentent : prendre a % ; augmenter de a % ; diminuer de a %

S2 pourquoi la transcription en pourcentages d'un tableau de données met en œuvre la proportionnalité

S3 traduire un pourcentage en fraction

S4 quelles fractions se traduisent en pourcentages

S5 traduire des données numériques en pourcentages

S6 traduire un pourcentage en fonction linéaire

S7 pourquoi les pourcentages d'augmentations successives ne s'ajoutent pas

Exercices

1 Un produit subit une augmentation de 10 % puis une de 20 %. Quel est le pourcentage de l'augmentation totale ?

2 D'une somme d'argent, on enlève 30 % puis 10 % du résultat. Aurait-on obtenu la même somme en enlevant d'abord 10 % puis 30 % du résultat ?

3 Combien rapportent 1000 F placés à 5 % pendant 2 ans ?

4* Un commerçant réalise un bénéfice de 25 % sur le prix d'achat d'un produit. Exprimer ce bénéfice en pourcentage du prix de vente.

5 On allonge le côté d'un carré de 10 %. Quel est le pourcentage d'augmentation de son périmètre et de son aire ?

6* Si l'aire d'un carré a augmenté de 44 %, de combien a augmenté son côté ?

7*c Un marchand a acheté des journaux à un grossiste à 1,20 F pièce et les revend 1,60 F. Le grossiste reprend les invendus à 0,60 F. Quel pourcentage minimum doit-il en vendre pour couvrir sa dépense ?

8* Sur autoroute, la consommation d'essence de ma voiture est de 25 % supérieure à celle qu'elle a sur route. Pour un trajet sur route de 320 km, j'ai usé 25 l. Quel volume d'essence me permettra de parcourir 530 km sur autoroute ?

9 Vrai ou faux :

- diminuer de 50 % revient à diviser par 2
- multiplier par $\frac{1}{4}$ revient à diminuer de 25 %

10 Donner les fonctions linéaires associées aux actions suivantes :

- augmenter de 3,3 %
- augmenter de 33 %
- augmenter de 300 %
- augmenter de 0,33 %
- diminuer de 3 %
- diminuer de 33 %
- diminuer de 3,3 %
- diminuer de 0,33 %

11* Que penser de cette publicité TÉLÉCOM : «dès 18 h, la communication est 30 % moins chère, soit 30 % de temps en plus» ? (En réalité, le prix n'est pas proportionnel à la durée)

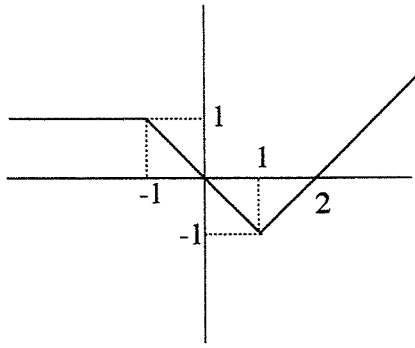
12* Une paire de chaussures a été payée 240 F par le marchand. Quel prix doit-il afficher, s'il veut faire un bénéfice de 20 % sur le prix de vente ?

13 Dans la ville A, sur 437 candidats, on a 158 reçus ; dans la ville B, sur 326 candidats, 103 sont reçus. Où a-t-on le plus de chance de réussir ?

14** Dans le magasin A on fait x % de réduction sur le prix d'un baril de lessive ; dans le magasin B on offre y % de produit gratuit. Quel est le plus avantageux si x = y = 10 ? si x = 20 et y = 25 ? Quelle relation doivent vérifier x et y pour que les promotions soient équivalentes ?

Fonctions usuelles

Peux-tu ?



P1 étudier et représenter un tarif de communication téléphonique

P2 étudier et représenter un tarif de location de voitures avec prix à la journée + prix au km

P3 étudier, en fonction de la distance parcourue, s'il est avantageux d'acheter une carte annuelle demi-tarif à 600 F sachant que le prix au km est de 0,30 F

P4 déterminer la fonction représentée sur la figure

P5 traduire par formules et par représentations graphiques les fonctions suivantes :
- Prix de places de cinéma à 29 F la place
- Prix de livres à 25 F pièce avec forfait de 10 F pour le port
- Volume d'un cube en fonction de la longueur de l'arête
- Argent rendu sur 50 F pour un achat

P6 représenter graphiquement une fonction linéaire, une affine, une affine par morceaux

P7 traduire par formules la fonction dont la représentation graphique relie les 4 points par des segments :
A (–2,4) ; B (0,2) ; C (1,–1) ; D (3,1)

Sais-tu ?

S1 écrire une équation d'une droite passant par 2 points donnés d'un repère

S2 traduire une équation de droite non parallèle à (Oy) en fonction affine : $x \longmapsto y$ ou f(x) = …

S3 interpréter géométriquement les nombres a et b dans $x \longmapsto a.x + b$

S4 lire sur les équations que 2 droites sont parallèles, perpendiculaires dans un repère orthonormal

S5 écrire l'expression d'une fonction affine par morceaux

S6 interpréter géométriquement un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues

Exercices

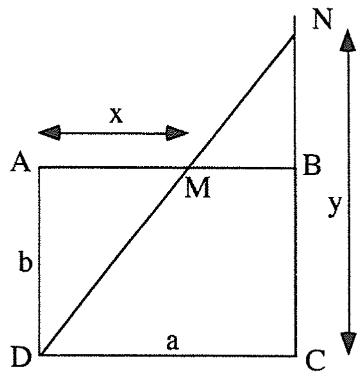
1*c Exprimer par un tableau de nombres, des équations et une représentation graphique, le tarif dégressif suivant :
5 premiers exemplaires : 3 F pièce
exemplaires suivants jusqu'à 20 : 2,50 F pièce
à partir de 20 : 2 F pièce
Lire sur la représentation graphique et trouver à partir de l'équation appropriée le prix pour 35 exemplaires

2 Représenter graphiquement la fonction :
pour $0 \leq x \leq 3$ $f(x) = 2x$; pour $3 < x \leq 5$ $f(x) = x + 3$; pour $x > 5$ $f(x) = 13 - x$

3** sur le segment [AB], on place M tel que AM = x. On construit côte à côte 2 carrés : l'un de côté [AM], l'autre de côté [MB].
Étudier le périmètre du polygone réunion des 2 carrés, en fonction de x.

4* Traduire par équations et représentation graphique le tableau de votre feuille d'impôts.

5** ABCD est un rectangle et M est un point de [AB] (Figure). AM = x. (DM) coupe (BC) en N et CN = y.
Exprimer y en fonction de x et résoudre l'équation : y = 10
pour un rectangle d'aire 20



Suites arithmétiques et géométriques

Peux-tu ?

P1 dire quel est le $20^{\text{ème}}$ nombre, lorsque tu énonces la suite des nombres de 3 en 3, à partir de 10 ? Et le $100^{\text{ème}}$ nombre ?

P2 nommer le $n^{\text{ème}}$ nombre des 2 suites de P1 en fonction de n

P3 dire quel est le $10^{\text{ème}}$ nombre, lorsque tu énonces la suite des doubles : 1, 2, 4, 8,... ? le $64^{\text{ème}}$ nombre ? As-tu une idée de sa valeur ?

P4 dire quel est le $43^{\text{ème}}$ nombre de la suite qui commence par 7 et où chacun est triple du précédent ?

P5 nommer le $n^{\text{ème}}$ nombre des 2 suites de P3 et P4 en fonction de n

P6 trouver la somme : $S = 1 + 2 + 3 + ...+ 100$ en ajoutant à S cette somme écrite à l'envers ?

P7 trouver la somme : $S' = 1 + 2 + 4 + 8 +...+ 1024$ en écrivant 2.S', et en comparant les 2 sommes ?

P8 trouver la somme $S'' = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +...+ \frac{1}{1024}$, par une méthode semblable à celle de P7 ?

Sais-tu ?

S1 ce qu'est une suite arithmétique de raison r (écart de 2 termes successifs) ?

S2 calculer la somme de n termes successifs d'une suite arithmétique en écrivant cette somme dans les 2 sens ?

S3 ce qu'est une suite géométrique de raison q (rapport de 2 termes successifs) ?

S4 calculer la somme S de n termes successifs d'une suite géométrique de raison q en comparant S et q.S ?

Exercices

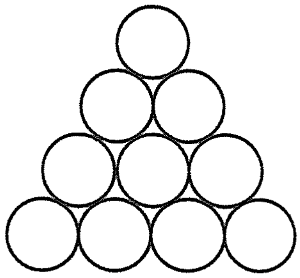


Figure 1

1 J'ai 100 F dans ma tirelire au 1er janvier 95. A la fin de chaque mois, j'ajouterai 50 F. Si je ne retire pas d'argent, de quelle somme disposerai-je dans n mois ?
Au bout de combien de temps aurai-je 2000 F ?

2 Sur la figure 2 de la page 39, on a la construction d'une spirale à 4 centres. Si le côté du petit carré central mesure c, quelle est la longueur du premier quart de cercle ? du deuxième ? du $n^{ème}$? Quelle est la longueur de la spirale jusqu'au $n^{ème}$ quart de cercle ?

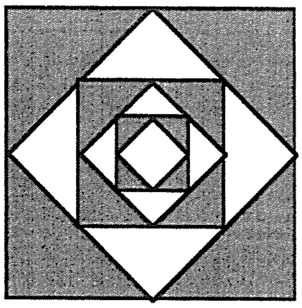


Figure 2

3* Un poète arabe du VIIIème siècle raconte l'histoire suivante :
«Sessa apprit au Pharaon le jeu d'échecs. Et pour le remercier, ce dernier lui dit :
- demande moi ce que tu veux, je te l'accorde
- Seigneur, pour la première case du jeu, je désire un grain de blé, pour la deuxième le double, pour la troisième, le double, et ainsi jusqu'à la dernière»
Quel est le nombre de grains de blés demandés par Sessa ?

4* Dans cette rame de papier de 100 feuilles, l'épaisseur est de 1 cm. On prend une feuille, on la déchire en deux et on superpose les morceaux. On recommence à déchirer les morceaux en deux et on superpose les morceaux obtenus. Quelle est la hauteur, ou une approximation de la hauteur de la pile obtenue par 10 opérations successives ?

5 Sur la figure 1, on voit le nombre triangulaire t_4. t_n est le nombre de disques empilés ainsi sur une base de n disques. Calculer t_1, t_2, t_3. Calculer t_n en fonction de n, puis $t_n + t_{n+1}$.

6c** Dans la figure 2, le carré extérieur mesure 10 cm de côté. Quelle est l'aire A_1 du premier carré emboîté ? du deuxième ? du $n^{ème}$? Quelle est l'aire B_0 des 4 grands triangles noirs ? B_1 des 4 grands triangles blancs ? B_n des 4 triangles alternativement noirs ou blancs qui séparent le $n^{ème}$ carré du $(n+1)^{ème}$? Quelle est la longueur du côté du $10^{ème}$ carré emboîté ?

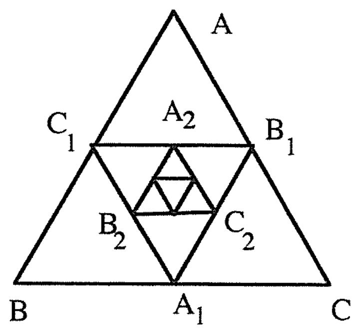


Figure 3

7** Sur la figure 3, le triangle ABC est équilatéral. Chaque triangle équilatéral est inscrit aux milieux des côtés du précédent. La longueur de [AB] est c. Quelle est la longueur de $[A_1B_1]$? de $[A_nB_n]$? L'aire de ABC est a. Quelle est l'aire de $A_1B_1C_1$? de $A_nB_nC_n$? Quelle est la somme des longueurs de tous les segments tracés jusqu'à $A_nB_nC_n$?

8** Dans la cible de la figure 4, les cercles sont concentriques et les rayons sont r, 2r, 3r,... Calculer l'aire des disques successifs puis des couronnes C_1 , C_2 , C_3 ,...
Comment cette suite est-elle associée à celle des nombres impairs ?

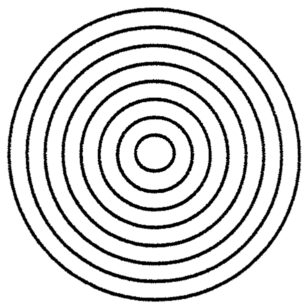


Figure 4

GÉOMÉTRIE

Distances et réflexions

Peux-tu ?

P1 dessiner un triangle équilatéral de longueur de côté 6 cm

P2 dessiner un triangle de longueurs de côté 5 cm, 7 cm, 10 cm

P3 dessiner un triangle de longueurs de côté 4 cm, 5 cm, 9 cm

P4 colorier l'ensemble des points à moins de 4 cm d'un point A

P5 prendre 2 crayons et les disposer pour qu'ils figurent 2 côtés d'un triangle et dire quelle est la plus petite et la plus grande longueurs possibles pour le troisième côté de ce triangle

P6 dessiner 3 cercles tangents deux à deux de rayons 3 cm, 4 cm, 6 cm

P7 dessiner tous les points à égale distance de A et B marqués sur ta feuille

P8 colorier tous les points plus proches de A que de B (A et B marqués sur ta feuille)

P8 colorier l'ensemble des points à moins de 7 cm d'un point A et à plus de 3 cm d'un point B avec A et B distants de 5 cm

P9 te donner une droite $\mathcal{D}$ et un triangle et tracer au compas le triangle symétrique par rapport à $\mathcal{D}$

Sais-tu ?

S1 définir un cercle en parlant de distance (d'un point au centre)

S2 définir un disque en parlant de distance (d'un point au centre)

S3 comparer AM + MB à AB, lorsque M est :

a) sur le segment [AB]

b) hors de ce segment

S4 quelle(s) relation(s) doivent vérifier 3 longueurs pour être celles des côtés d'un triangle

S5 quelle position relative occupent 2 cercles tangents extérieurement ; 2 cercles tangents intérieurement ; 2 cercles sécants ; 2 cercles extérieurs ; 2 cercles intérieurs

S6 quelle relation entre la distance de leurs centres et leurs rayons vérifient 2 cercles dans chaque cas précédent

S7 ce qu'est la médiatrice de 2 points ou d'un segment

S8 ce qu'est un axe de symétrie d'une figure

S9 construire avec un calque, par pliage, au compas, le symétrique par rapport à une droite d'un point, d'un segment, d'une droite

S10 pourquoi les médiatrices des 3 côtés d'un triangle concourent en un point

S11 quelle relation de distances vérifie le point de concours des médiatrices du triangle ABC et quel cercle il permet de construire

Exercices

1 Situer sur un plan (1 cm pour 1 km) 3 villages A, B, C tels que : AB = 8 km, BC = 6 km, AC = 10 km, et trouver dans quelle région placer un collège pour qu'il soit à moins de 6 km de chacun

2 Où le bateau doit-il naviguer pour rester toujours plus près d'une île française (✪) que d'une île anglaise (✳) (fig. 1) ?

Fig. 1

3 Marquer en rouge tous les points de la ligne aérienne où l'avion est plus proche de l'aéroport A que de B (Fig. 2)

4 Quels sont les triangles dont les côtés sont des nombres entiers et dont le périmètre est 12 cm ?

5 Dessiner au $\frac{1}{100}$ la surface accessible au chien C attaché à l'angle d'un bâtiment carré de 4 m de côté par une chaîne de 8 m (fig. 3)

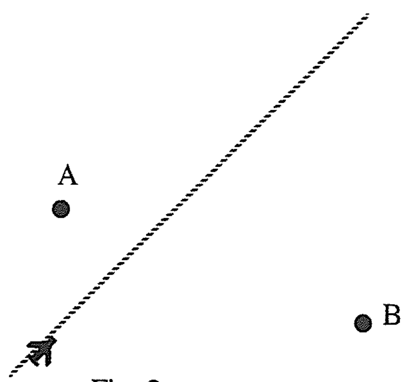


Fig. 2

6 Si A', B', C' sont chacun sur un côté du triangle ABC et différents de A, B, C, démontrer que le périmètre de A'B'C' est inférieur à celui de ABC

7 Si ABC est isocèle de sommet A, et D sur le segment]AC[, démontrer que : DB > DC

8* Si A et B sont de part et d'autre d'une droite $\mathcal{D}$, peut-on toujours trouver un point de $\mathcal{D}$ à égale distance de A et B ?

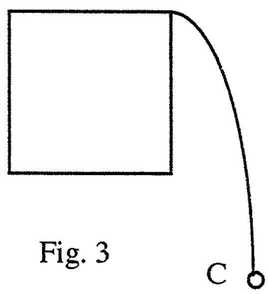


Fig. 3

9* Dans la fig. 4, les points A et B sont donnés ainsi que la droite $\mathcal{D}$. Où placer le point M sur $\mathcal{D}$ pour que le chemin AM + MB soit le plus court possible ?

10** Dans la fig. 5, les points A et B sont donnés ainsi que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Où placer les points M sur $\mathcal{D}$ et P sur $\mathcal{D}'$ pour que le chemin de AM + MP + PB soit le plus court possible?

11* On se donne 2 points distincts A et B. Construire la médiatrice $\mathcal{D}$ de [AB]. Comment peut-on construire l'image de n'importe quel point M par la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ avec seulement une règle non graduée ?

12 ABC est un triangle isocèle (AB = AC = 8). Peut-on avoir :

i) BC = 0,01 ?
ii) BC = 16,1 ?
iii) BC = 15,9

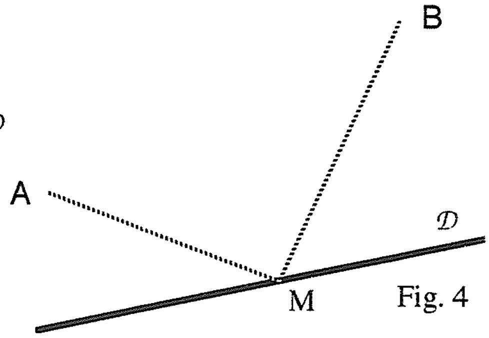


Fig. 4

13c** Si A' est intérieur au triangle ABC, montrer que le périmètre de A'BC est inférieur à celui de ABC (commencer avec A' sur le côté]AC[, puis lorsque A' est intérieur, prolonger [BA'] jusqu'à A" sur]AC[)

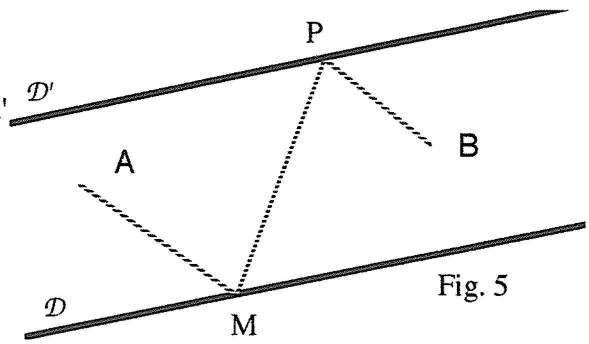


Fig. 5

Translations et rotations

Peux-tu ?

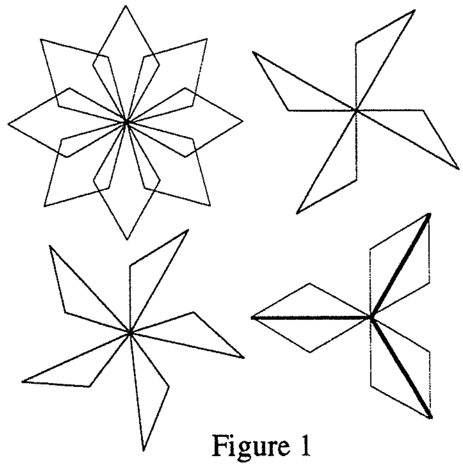


Figure 1

P1 dire quelles étoiles de la figure 1 ont un ou des axes de symétrie ? Lesquelles ont un centre de symétrie ? Lesquelles peuvent tourner sur elles-mêmes et de quel angle ?

P2 te donner un triangle gabarit, et en faire 2 copies telles qu'on passe de l'une à l'autre par glissement - sans tourner (translation). Comment construire l'image de tout point M à partir d'un point A et de son image A', avec des parallèles ?

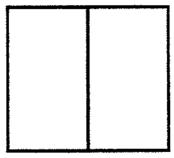


Figure 2

P3 te donner un triangle gabarit, et en faire 2 copies telles qu'on passe de l'une à l'autre par demi-tour autour d'un des 3 sommets fixé (symétrie centrale) ? Comment construire l'image de tout point M à partir du point fixé et à l'aide du compas ?

P4 te donner un triangle gabarit, et en faire 2 copies telles qu'on passe de l'une à l'autre en tournant autour d'un des 3 sommets fixé (rotation) ? Comment construire l'image de tout point M à partir du point fixé, d'un secteur angulaire gabarit et à l'aide du compas ?

P5 prendre 2 rectangles accolés (figure 2) et dire quels mouvements permettent de passer du premier au second. Idem avec 2 carrés accolés.

P6 à partir des différents quadrilatères de la figure 3 coupés par une diagonale, dire comment chaque moitié est transformée en la seconde, et quelle est l'image du point intérieur dans chaque cas (il peut y avoir plusieurs solutions pour un même quadrilatère)

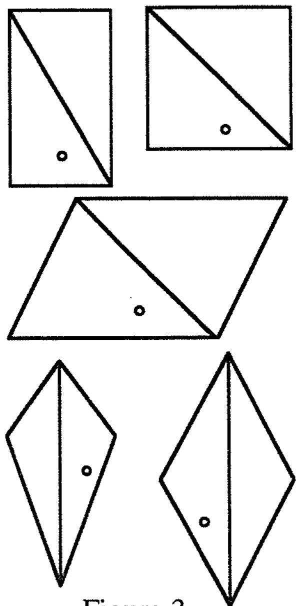


Figure 3

Sais-tu ?

S1 Comment définir l'image d'un point par la translation : $A \longmapsto A'$

S2 Comment définir l'image d'un point par la symétrie centrale de centre O

S3 Comment définir l'image d'un point par la rotation de centre O et d'angle (orienté) α

S4 En quoi se transforme un segment, une droite, une demi-droite, un cercle par une translation, une symétrie centrale, une rotation

S5 Quelle relation existe entre une droite et son image (ou un segment et son image) par une translation, une symétrie centrale, une rotation

S6 quelles sont les qualités géométriques (alignement des points, distances, angles, parallélisme, perpendicularité, milieux) qui sont conservées par une translation, une symétrie centrale, une rotation

S7 quand on dit qu'une figure a un centre de symétrie

Exercices

1 Observer les sigles des différentes marques de voitures et trouver les transformations qui les laissent inchangées, les axes ou centre de symétrie éventuels

2 Pour chaque quadrilatère particulier, faire la liste des déplacements qui le laissent invariant

3 Sur un papier quadrillé, choisir 2 carreaux et décrire toutes les transformations permettant de passer de l'un à l'autre. Inventer un motif de tapisserie tenant dans un carré et créer un papier peint par répétition.

4 Comment passe-t-on d'un secteur angulaire marqué à l'autre dans les 3 dessins de la figure 1

5 Un triangle ABC est donné. Trouver 2 symétries centrales, l'une transformant B en A, l'autre transformant C en A. En déduire que la somme des 3 angles de tout triangle est un angle plat.

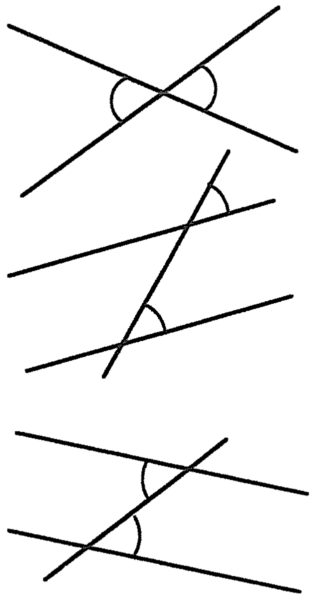


Figure 1

6* Faire la liste des translations, symétries centrales, rotations, réflexions qui permettent de passer d'un cercle à l'autre dans la figure 2, où les 2 cercles donnés ont même rayon et sont sécants

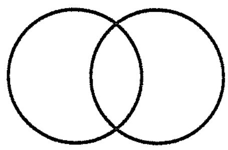


Figure 2

7 Choisir une tapisserie dans un catalogue de papier peint et chercher comment se reproduisent les motifs.

8c** 2 carrés de côté 1 sont donnés, le second a un sommet au centre du premier (figure 3). Quelle est l'aire du quadrilatère intersection ?

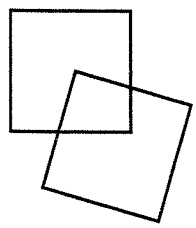


Figure 3

9 Un carré est une forme simple pour un carrelage. Essayer de déformer un carré par découpages sur les bords et reports de parties pour obtenir une nouvelle pièce permettant de carreler un sol (sans trou).

10* Un carré ABCD est donné. On construit les triangles équilatéraux ABE et BCF, E étant intérieur et F extérieur au carré. Démontrer, à l'aide d'une rotation, que : AC = EF

11** Autour du triangle ABC, on construit 3 carrés sur ses côtés (figure 4). Montrer que [BN] et [CO] sont perpendiculaires et de même longueur. Trouver 2 autres couples de segments en même relation.

12 Un triangle équilatéral ABC est donné, et un point P sur]BC[. Comment construire Q sur]AC[et R sur]AB[pour que PQR soit équilatéral ?

13** On se donne 2 droites sécantes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, et un point A hors de ces droites. Montrer, à l'aide d'une symétrie centrale, qu'on peut trouver un unique point M de $\mathcal{D}$ et un unique point M' de $\mathcal{D}'$ tels que A soit le milieu de [MM']

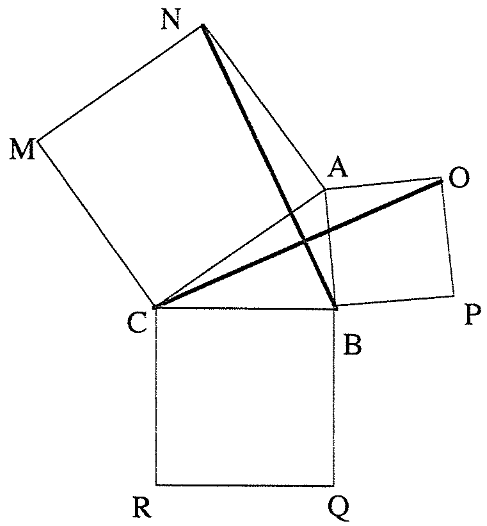


Figure 4

Quadrilatères particuliers

Peux-tu ?

P1 découper un carré en papier ou carton, marquer son contour sur une feuille, et étudier de quelles manières il peut être placé dans son contour (On pourra mettre des repères sur les côtés et/ou les angles).

P2 découper un losange en papier ou carton, marquer son contour sur une feuille, et étudier de quelles manières il peut être placé dans son contour.

P3 découper un rectangle en papier ou carton, marquer son contour sur une feuille, et étudier de quelles manières il peut être placé dans son contour.

P4 découper un parallélogramme en papier ou carton, marquer son contour sur une feuille, et étudier de quelles manières il peut être placé dans son contour.

P5 observer dans chaque déplacement reconnu ci-dessus, comment s'échangent les côtés, les angles, les diagonales, les triangles découpés par les diagonales, ... et en déduire une liste de propriétés caractéristiques des 4 familles de quadrilatères vues ci-dessus.

P6 dessiner un cercle et inscrire les 4 sommets d'un parallélogramme sur ce cercle

P7 construire un exemple dans chaque famille à la règle non graduée et au compas

P8 déformer un parallélogramme en un parallélogramme, un rectangle ou un losange

P9 déformer un rectangle ou un losange en un carré

P10 joindre les milieux des côtés d'un rectangle ; d'un losange ; d'un carré ; et décrire le quadrilatère obtenu

P11 découper un parallélogramme de papier d'un coup de ciseaux pour en faire par puzzle un rectangle

P12 trouver la longueur du côté d'un carré dont l'aire est 12 cm^2

Sais-tu ?

S1 quelles sont les propriétés des carrés, losanges, rectangles, parallélogrammes, concernant leurs côtés, diagonales ou angles

S2 ce qu'est une propriété caractéristique d'une famille (les carrés, losanges, rectangles, parallélogrammes)

S3 quelles sont celles des carrés, losanges, rectangles, parallélogrammes

S4 qu'un rectangle est un parallélogramme particulier, de même qu'un losange et un carré sont des parallélogrammes particuliers.

S5 indiquer sur un schéma l'inclusion des 4 familles

S6 quels sont les parallélogrammes inscriptibles (dans un cercle)

S7 quelle formule permet de trouver l'aire d'un parallélogramme

S8 trouver l'aire d'un carré en connaissant son côté et inversement

S9 quelle est la somme des angles d'un quadrilatère quelconque

Exercices

1 ABC est un triangle donné. Construire 3 parallélogrammes dont il est la moitié. Quelle est la figure obtenue ?

2* ABC est un triangle donné. Construire 3 rectangles dont il est la moitié en aire. Comparer ces rectangles

3 ABCD est un parallélogramme et (AB) = $\mathcal{D}$. Si on déplace [AB] sur $\mathcal{D}$ en gardant sa longueur, l'aire ne change pas. Pourquoi ?

4* ABCD est un quadrilatère quelconque. I, J, K, L les milieux de ses côtés. Que dire du quadrilatère IJKL ?
Comment choisir ABCD pour que IJKL soit un rectangle ? un losange ? un carré ?
Montrer que le périmètre de IJKL est égal à la somme des longueurs des diagonales de ABCD.

5 Montrer qu'un trapèze (quadrilatère à deux côtés parallèles) est la moitié d'un parallélogramme. En déduire une formule pour calculer son aire.

6 Pourquoi l'aire d'un losange peut-elle être donnée en se servant du produit de ses diagonales ?

7*c ABCD est un parallélogramme. I, J, K, L les milieux de ses côtés. Montrer que l'aire de IJKL est la moitié de celle de ABCD. Est-ce vrai si ABCD est un quadrilatère quelconque ?

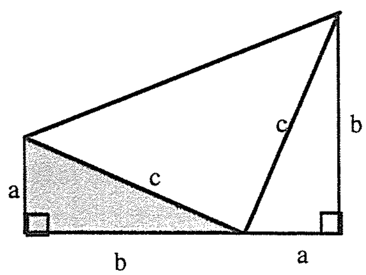
8* D est une droite et [AC] un segment donnés. Peut-on construire un losange ABCD tel que B soit sur la droite D ? et un rectangle ABCD ?

9* ABCD est un rectangle. On joint les milieux IJKL de ses côtés . Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? On recommence avec IJKL. Qu'obtient-on ? Quelles sont les aires des quadrilatères successifs si la première est a ?
Comment dessiner cette imbrication, avec seulement un gabarit de rectangle et une règle non graduée ?

10 Découper un rectangle gabarit. Comment dessiner le carré de sa largeur, le carré de sa longueur, le carré de la somme de ses côtés, le carré de la différence de ses côtés, le carré de sa diagonale ?

11 Avec un triangle rectangle on réalise la figure ci-contre. En se servant de l'aire du trapèze obtenu, trouver une démonstration du théorème de Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$.

12 Découper un parallélogramme gabarit. Peut-on le répéter pour en faire un carrelage ? Et avec un triangle quelconque ? Et avec un quadrilatère quelconque ?



13* ABCD est un parallélogramme. Par un point quelconque de la diagonale [AC] on trace les parallèles à (AB) et (BC). Montrer que les 2 parallélogrammes non coupés par [AC] ont la même aire.

14** Le point A est donné à l'intérieur d'un angle donné (Ox , Oy). Construire un segment [BC] avec B sur Ox et C sur Oy tel que A soit son milieu, avec un translateur.
En déduire la construction d'un triangle dont les médianes (droites passant par un sommet et le milieu du côté opposé) sont 3 droites concourantes données d'avance

Distance d'un point à une droite ; aire d'un triangle

Peux-tu ?

P1 marquer le point de la droite $\mathcal{D}$ le plus proche du point A, A n'étant pas sur $\mathcal{D}$

P2 dessiner tous les points à 3 cm d'une droite $\mathcal{D}$

P3 découper un triangle de papier d'un coup de ciseaux pour en faire par puzzle un parallélogramme

P4 découper un triangle de papier de deux coups de ciseaux pour en faire par puzzle un rectangle

P5 replier les 3 sommets d'un triangle de papier vers un même point pour en faire un rectangle

P6 trouver un parallélogramme dont l'aire est double de celle d'un triangle donné ABC

P7 construire 3 parallélogrammes différents sans rien mesurer, mais avec un translateur (instrument servant à tracer des parallèles), chacun ayant une aire double de celle d'un triangle donné ABC

P8 trouver un rectangle dont l'aire est double de celle d'un triangle donné ABC

P9 construire 3 rectangles différents (avec une équerre et sans rien mesurer), chacun ayant une aire double de celle d'un triangle donné ABC à angles aigus.

P10 faire la même construction si le triangle donné ABC a un angle obtus

P11 partager un triangle donné ABC en deux parties de même aire

P12 dessiner tous les points à égale distance de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont 2 droites tracées sur ta feuille

Sais-tu ?

S1 ce qu'est la distance d'un point à une droite

S2 quelle relation de distances vérifient 1 cercle et une droite tangents ; sécants ; extérieurs

S3 le rôle des hauteurs par rapport à l'aire du triangle

S4 pourquoi l'aire d'un triangle est : $\frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$

S5 pourquoi l'aire ne change pas, si on déplace A sur une parallèle à (BC)

S6 le rôle des médianes par rapport à l'aire du triangle

S7 ce qu'est la bissectrice de 2 demi-droites de même origine

S8 pourquoi les bissectrices des 3 angles d'un triangle concourent en un point

S9 quelle relation de distances vérifie le point de concours des bissectrices du triangle ABC et quel cercle il permet de construire

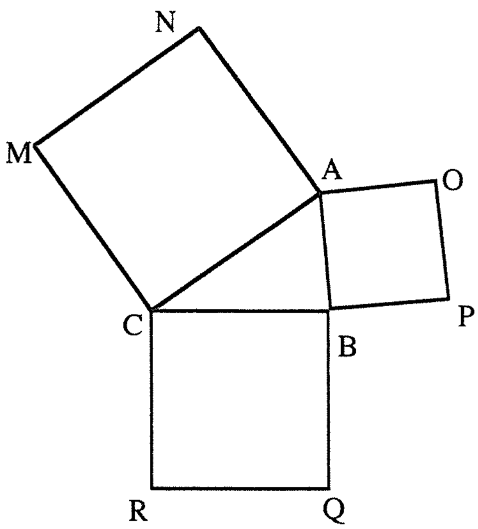
Exercices

1* Tracer les 3 médianes du triangle ABC. Elles le partagent en 6 parties de même aire. Pourquoi ?

2* ABC est un triangle donné. On prolonge [BC] du côté de C en A' tel que BC = CA' ; de même [CA] du côté de A en B' tel que CA = AB' et [AB] du côté de B en C' tel que AB = BC'. Quelle est la mesure de l'aire de A'B'C' si celle de ABC est 1 ?

3* Où placer D à l'intérieur du triangle ABC pour que les 3 triangles ABD, BCD, ACD aient la même aire ?

4*c ABC est un triangle donné dont le cercle inscrit a pour centre I et rayon r. Montrer qu'on peut couper ABC en 6 triangles de sommet I et qu'on peut les réorganiser en un rectangle de base r. Quelle relation s'en déduit entre le périmètre du triangle ABC, son aire et le rayon de son cercle inscrit ?



5 ABC est un triangle rectangle donné dont les côtés mesurent a, b, c. (c mesure l'hypoténuse) Quelle est la mesure h de la hauteur associée à l'hypoténuse ?

6** Transformer un quadrilatère quelconque ABCD en un triangle, sans changer son aire, à l'aide d'un translateur

7* M est à l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC et on désigne par a, b, c les distances de M à chacun des côtés. Montrer que si M se déplace à l'intérieur de ABC, a + b + c reste constante

8** ABC est un triangle donné. On construit extérieurement un carré sur chaque côté. Les points étant marqués sur la figure, montrer que les 3 triangles AON, BPQ, CRM ont même aire que ABC

9** La bissectrice (intérieure) de l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC coupe [BC] en I. H est la projection orthogonale de I sur [AB] et K sur [CA]. J est le pied de la hauteur issue de A. Exprimer de 2 façons l'aire des triangles ABI et ACI. En déduire par simplification 2 expressions du rapport de ces 2 aires.

10 Partager un triangle donné en p triangles de même aire

Propriétés des triangles

Peux-tu ?

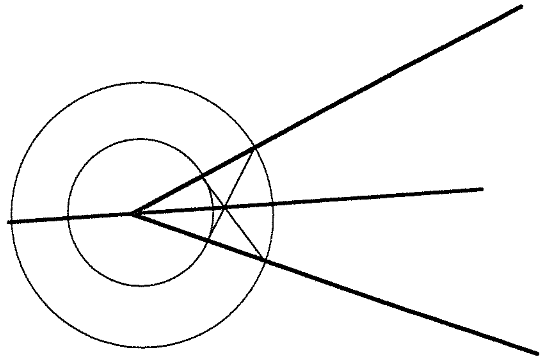
P1 reproduire exactement un triangle ABC donné

P2 construire les 3 médiatrices de ses côtés

P3 construire un triangle agrandi A'B'C' du triangle ABC en traçant par chaque sommet une parallèle au côté opposé

P4 tracer les hauteurs de ABC

P5 replier les 3 sommets d'un triangle de papier vers un même point pour en faire un rectangle, et observer la disposition des angles



P6 justifier la construction de la bissectrice d'un secteur, sur la figure ci-contre, en utilisant une réflexion

P7 construire à la règle non graduée et au compas, sans rapporteur, un angle égal à un angle donné

P8 partager un segment donné à l'aide de parallèles équidistantes (guide-âne du papier à lettres) en 3, 5 ou 7 segments de même longueur

P9 construire un triangle rectangle avec une règle non graduée et un compas, sans rapporteur ni équerre

Sais-tu ?

S1 distinguer et caractériser les différents triangles

S2 distinguer les lignes remarquables : médiatrices, bissectrices, hauteurs, médianes

S3 tracer les lignes remarquables : médiatrices, hauteurs, dans les triangles qui ont un angle obtus

S4 ce que le segment qui joint les milieux de 2 côtés d'un triangle vérifie

S5 que les 3 médiatrices, les 3 bissectrices, les 3 hauteurs, les 3 médianes sont concourantes en 4 centres remarquables

S6 distinguer les centres remarquables : orthocentre, centre de gravité, centre des cercle inscrit et circonscrit

S7 trouver orthocentre, centre de gravité, centre des cercles inscrit et circonscrit, dans les triangles qui ont un angle obtus

S8 comment sont placés ces 4 centres dans les triangles particuliers : équilatéral, isocèle, rectangle, isocèle et rectangle

S9 où se coupent les 3 médianes

S10 ce que vérifient les 3 angles d'un triangle

S11 la valeur des angles dans les triangles particuliers : équilatéral, isocèle, rectangle, isocèle et rectangle

S12 comment reconnaître 2 triangles isométriques par les longueurs des côtés

S13 comment reconnaître 2 triangles isométriques par les longueurs de 2 côtés et un angle bien choisi

S14 comment reconnaître 2 triangles isométriques par la longueur d'un côté et 2 angles bien choisis

S15 comment reconnaître 2 triangles rectangles isométriques

Exercices

1 A et B sont de part et d'autre de la droite $\mathcal{D}$ et les distances de A et B à $\mathcal{D}$ sont égales. Démontrer que le milieu de [AB] est sur $\mathcal{D}$

2 (Ox,Oy) est un secteur angulaire et (Oz) est sa bissectrice. M est sur (Oz). A et B sont l'un sur [Ox), l'autre sur [Oy) et OA = OB. Démontrer que MA = MB
En déduire une construction de la bissectrice d'un secteur angulaire avec un compas

3 ABC est un triangle d'orthocentre H. Quels sont les orthocentres de HBC, HAB, HAC ?

4 ABC est un triangle rectangle en A, et H est le pied de la hauteur issue de A. Montrer que [AH] coupe ABC en 2 triangles qui ont les mêmes angles que lui

5 ABC est un triangle rectangle en A, et I est le pied de la médiane issue de A. Montrer que [AI] a une longueur moitié de BC

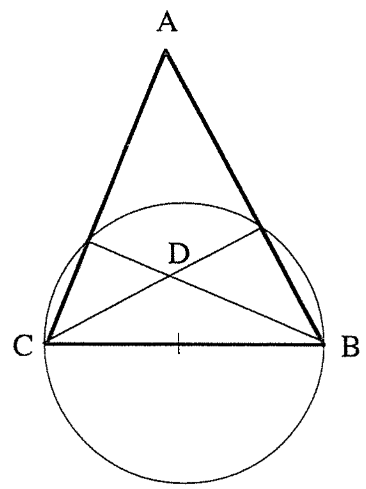
6 ABC est un triangle et D est sur la droite (AC) mais pas sur la demi-droite [AC). Démontrer que l'angle $\widehat{BAD}$ a pour mesure la somme des mesures de $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ABC}$
Démontrer que la bissectrice de $\widehat{BAD}$ et celle de $\widehat{CAB}$ sont perpendiculaires

7 ABC est un triangle et D est obtenu comme dans la figure ci-contre. Que peut-on dire de D ?

8*c Construire un triangle dont on connaît les longueurs d'un côté, de la médiane et de la hauteur relatives à ce côté

9* Construire un triangle dont les hauteurs sont 3 droites concourantes données d'avance

10** ABC est un triangle d'orthocentre H dont le dessin à demi effacé ne laisse plus apparaître que A, B et H. Peut-on le reconstruire aux instruments ?
Même problème avec A, B et G centre de gravité
Même problème avec A, B et I centre du cercle inscrit



Théorème de Pythagore

Peux-tu ?

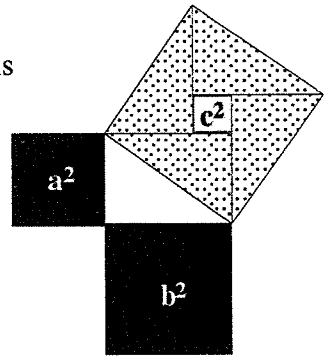
P1 découper 4 modèles superposables d'un triangle rectangle et les disposer dans un carré pour former un trou carré dont le côté est l'hypoténuse. Dans le même espace, peux-tu réorganiser ces 4 triangles pour former 2 trous carrés séparés (les carrés des côtés de l'angle droit).

P2 découper le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle comme sur la figure en 4 exemplaires du triangle et un carré central, et expliquer pourquoi ces 5 pièces peuvent être réorganisées en puzzle pour former la réunion des 2 carrés des côtés de l'angle droit

P3 découper 2 modèles superposables d'un triangle rectangle et les 3 carrés des côtés, et les organiser pour faire le même puzzle, une fois avec 2 carrés et 2 triangles, et l'autre avec 1 carré et 2 triangles.

P4 calculer la hauteur d'un triangle équilatéral en connaissant son côté

P5 calculer la diagonale d'un carré en connaissant son côté



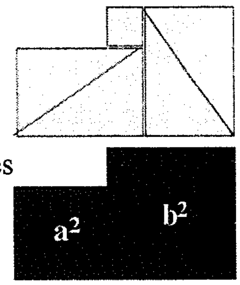
Sais-tu ?

S1 quelle relation remarquable vérifient les longueurs des 3 côtés d'un triangle rectangle

S2 montrer cette relation au moyen d'un des découpages ci-dessus

S3 trouver la longueur d'un côté d'un triangle rectangle en connaissant les 2 autres

S4 calculer la longueur d'un segment sur quadrillage entre 2 nœuds, connaissant les décalages horizontal et vertical



S5 qu'un triangle de côtés 3, 4, 5 ou multiples de ces nombres est rectangle et pourquoi

S6 quelle relation remarquable vérifie la hauteur d'un triangle rectangle avec les 2 segments découpés sur l'hypoténuse

Exercices

1 ABC est un triangle rectangle en A et I est le pied de la médiane issue de A. Montrer que I est le centre du cercle circonscrit et
que : $AI = \frac{1}{2} BC$.

2* Comment, par découpage, peut-on former un seul carré avec la matière de 2 carrés de même taille ou de tailles différentes ?

3* Les côtés d'un premier triangle mesurent 5, 5, 6 et ceux du second : 5 , 5 , 8. Quel est celui qui a la plus grande aire ?

4 Quelle est la longueur des côtés d'un losange dont les diagonales mesurent 10 cm et 4 cm ?

5 Quelle est la hauteur d'un triangle isocèle dont la base mesure 6 cm et les autres côtés 5 cm ?

6* Vérifier que 2 droites sont perpendiculaires avec seulement une règle graduée

7* Comment marquer des points d'une ficelle par des nœuds pour qu'elle devienne "une équerre" capable de nous permettre de tracer des angles droits

8* ABCD est un rectangle donné et M est un point intérieur dont les distances à A, B, C, D sont a, b, c, d. Montrer que :
$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ quelle que soit la position de M

9** A l'aide du découpage ci-contre (figure 1) où les 2 coupes passent par le centre du plus grand carré, et sont, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à l'hypoténuse, montrer qu'on peut recouvrir exactement le carré de l'hypoténuse avec la matière des 2 autres carrés. Comment et pourquoi ?

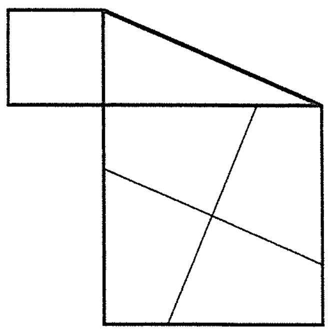


figure 1

10 ABCD est un rectangle dont les dimensions sont 7 cm et 4 cm. Quelle est la longueur de ses diagonales ?

11 ABCD est un rectangle double carré dont la largeur est 1. Quelle est la longueur de ses diagonales ?

12* Voici (figure 2) la construction au compas d'un rectangle d'or, à partir d'un carré de côté 1, où I est le milieu d'un côté. Sa largeur est 1, quelle est sa longueur ?

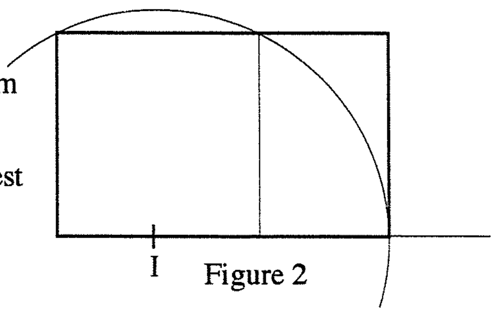


Figure 2

13* Dans un cube de 4 cm d'arête, quelle est la longueur des diagonales des faces ? et quelle est celle de ses grandes diagonales ?

14* Comment construire un segment de longueur $\sqrt{2}$ quand on a un segment unité ?
et un de $\sqrt{7}$?

15*c Calculer le carré (numérique) n^2 d'un nombre entier impair n particulier. Chercher un couple d'entiers consécutifs (p ; p+1) dont la somme est n^2. Quelle est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent p et n ?
Généraliser et en déduire des triplets de dimensions entières possibles pour un triangle rectangle.

Polygones réguliers

Peux-tu ?

P1 dessiner un polygone régulier convexe d'un nombre quelconque de côtés avec un rapporteur

P2 dessiner un hexagone régulier avec un compas

P3 dessiner un carré avec la règle non graduée et le compas

P4 découper un hexagone régulier, marquer son contour, et faire la liste des mouvements qu'il peut faire dans son contour.

P5 dessiner un octogone régulier avec la règle non graduée et le compas

P6 doubler le nombre de côtés d'un polygone régulier donné avec la règle non graduée et le compas

P7 joindre de 2 en 2, 3 en 3, ... les sommets d'un polygone régulier convexe à 6, 8, 10, 12 côtés

Sais-tu ?

S1 l'étymologie du mot : carré, et pourquoi il s'écrivait jusqu'au début du siècle : quarré

S2 quels sont les critères qui permettent d'affirmer qu'un polygone convexe est régulier

S3 ce qu'est un triangle régulier

S4 la mesure des angles d'un polygone régulier convexe à n côtés

S5 dans un polygone régulier convexe à n côtés, comparer les longueurs

- des côtés,
- des grandes diagonales

S6 donner le nom des polygones réguliers à 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 côtés

S7 la valeur des angles des polygones réguliers à 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 côtés

Exercices

1 L'aire de l'hexagone régulier est double de celle du triangle équilatéral inscrit (un sommet sur deux). Pourquoi ?

2 Un carré est inscrit dans un cercle de rayon r. Quelle est la longueur de son côté ?

3 Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle de rayon r. Quelle est la longueur de son côté ? Un rectangle s'inscrit dans l'hexagone. Quelles sont ses dimensions ? Un triangle équilatéral s'inscrit dans l'hexagone. Quelle est la longueur de son côté ?

4* On prolonge un côté sur deux d'un polygone régulier convexe dont le nombre des côtés est pair et supérieur à 4. Qu'obtient-on ?

5*c On joint les milieux des côtés d'un polygone régulier convexe à n côtés. Qu'obtient-on ? Comment est le cercle circonscrit à ce nouveau polygone ?

6* On joint de 3 en 3 les sommets d'un octogone régulier. Le cœur de l'étoile à 8 branches est aussi un octogone régulier. Pourquoi ?

7* Comment peut-on construire un octogone régulier avec un gabarit carré et une règle non graduée ? un dodécagone régulier avec un gabarit hexagone et une règle non graduée ?

8 Sur un papier quadrillé, il est facile de faire un octogone. Mais comment en faire un régulier ? Par exemple, celui de la figure 1 l'est-il ? Pourquoi ?

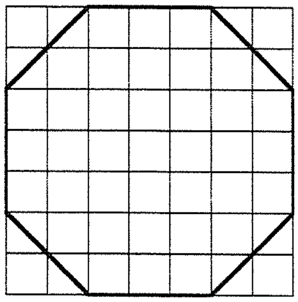


Figure 1

9 Si le côté d'un octogone régulier mesure c, peut-on donner la mesure du côté d'un carré "circonscrit" ?

10** Dans un octogone régulier, on inscrit 2 carrés en joignant les milieux des côtés (figure 2). Les points étant nommés sur la figure, montrer que :
IJ = JK = KL = LI = MN = NO = OP = PM
et IJ = AR = QB
En déduire que AR = QB = $\frac{1}{2}$AC = $\frac{1}{2}$BD et une construction au compas de l'octogone régulier inscrit dans un carré donné.

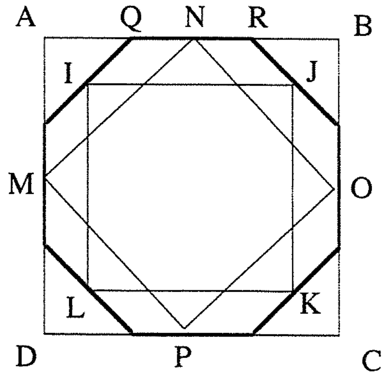


Figure 2

11 Pour calculer l'aire d'un dodécagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R, on le découpe en 6 "cerfs-volants" (figure 3). Montrer que l'aire d'un "cerf-volant" est $\frac{R^2}{2}$. En déduire l'aire du dodécagone.

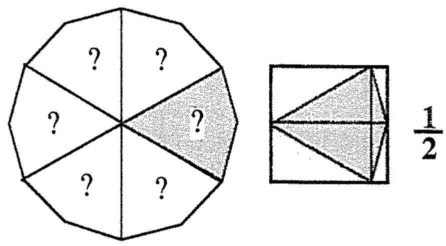


Figure 3

12* Pour utiliser le résultat précédent, Lindgren a réussi un très beau découpage du dodécagone régulier pour en faire un carré ; montrer que l'assemblage en carré est correct. Quelle est la longueur du côté du carré et quelle est son aire si le cercle circonscrit au dodécagone a un rayon r (figure 4) ?

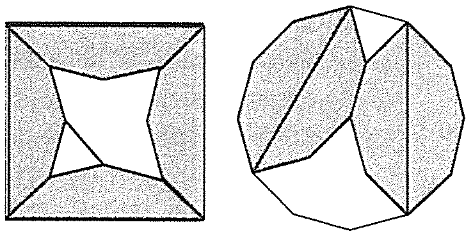


Figure 4

Cercles et disques. Secteurs circulaires.

Peux-tu ?

P1 partager un disque en 3 parties de même aire avec un rapporteur, en 5. Comment ?

P2 dessiner au $\frac{1}{100}$ la surface accessible au chien C attaché à l'angle d'un bâtiment de a mètres de côté par une chaîne de b mètres (a et b donnés en légende de chaque dessin de la figure 1) et calculer dans chaque cas son périmètre (extérieur) et son aire ?

P3 mesurer au rapporteur les angles sous lesquels on voit à partir d'un sommet, chacun des côtés d'un octogone ou d'un dodécagone régulier (figure 2)

P4 mesurer au rapporteur des angles inscrits interceptant 1, 2, 3, ... côtés d'un dodécagone régulier (figure 2)

P5 dire quelle longueur tu parcours à chaque tour de roue de ton vélo équipé de "roues de 700" (diamètre de 700 mm)

P6 calculer quel diamètre donner à une roue pour que sa circonférence fasse un mètre et qu'elle permette de mesurer des longueurs topographiques ? comment la graduer ?

P7 faire un patron pour un cylindre de papier et dire quelles sont les dimensions du rectangle si le diamètre de base est 6 cm et la hauteur 8 cm ?

P9 plier un disque de papier pour obtenir des angles à 90° ? 45° ? 22,5° ?

P10 plier un disque de papier pour y inscrire un triangle équilatéral ?, un carré ?, un hexagone régulier ?

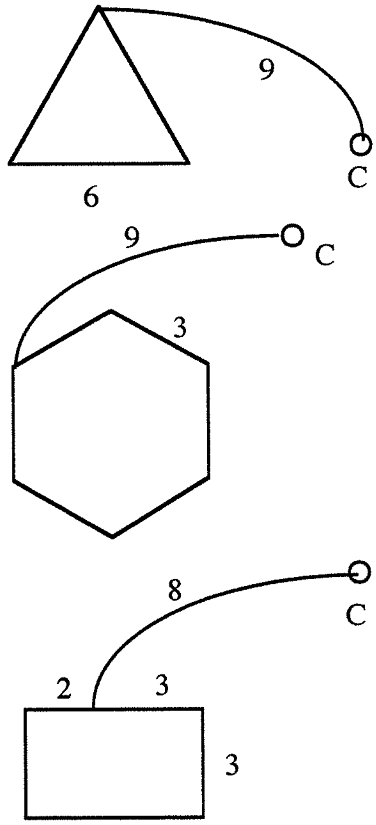


Figure 1

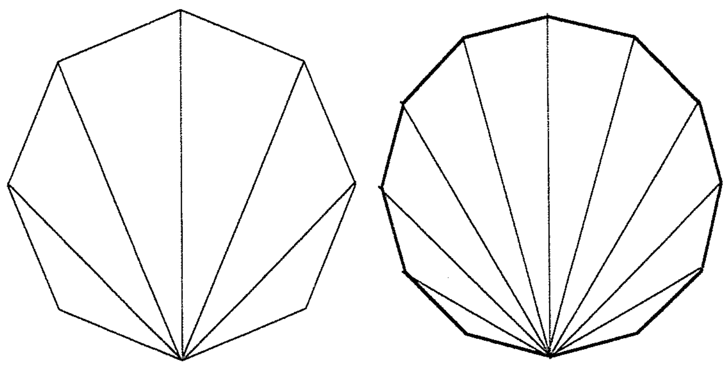


Figure 2

Sais-tu ?

S1 définir le cercle et le disque de centre O et de rayon r

S2 ce qu'est un diamètre, une corde d'un cercle

S3 justifier que les diamètres sont les plus grandes cordes

S4 quelle relation de distances vérifient 2 cercles tangents ; 2 cercles sécants ; 2 cercles extérieurs ; 2 cercles intérieurs (cf. **Distances**)

S5 quels parallélogrammes s'inscrivent dans un cercle

S6 quels angles s'inscrivent dans un demi-cercle

S7 quelle est la longueur d'un cercle de rayon r

S8 quelle est l'aire d'un disque de rayon r

S9 quelle est la longueur de l'arc d'un secteur circulaire de rayon r et d'angle α degrés

S10 quelle est l'aire d'un secteur circulaire de rayon r et d'angle α

Exercices

1* Donner la mesure des angles du pentagone étoilé. Ceux de l'étoile régulière à 8 branches.

2 Une couronne circulaire a un rayon extérieur de 7 cm et un rayon intérieur de 5 cm. Qui a l'aire la plus grande : la couronne ou le trou central ?

3* Montrer qu'une couronne circulaire a même aire que le disque dont le diamètre est une corde du cercle extérieur tangente au cercle intérieur (figure 1)

4 Calculer les aires des surfaces noircies de la figure 2

5 Dans la figure 3, les rayons des cercles sont 6, 4, 4, 2 cm. Qui a l'aire la plus grande parmi les 2 surfaces repérées par les 2 motifs ?

6 Le Ying et le Yang des Chinois sont représentés par 2 régions d'un disque séparées par des demi-cercles (figure 4). Quelle est l'aire de chaque partie par rapport à l'aire du disque ? quel est le périmètre de chaque partie par rapport à celui du disque ?

7 Pour dessiner des ovales plusieurs procédés sont possibles. Le plus simple est un rectangle avec 2 demi-disques (table ronde avec allonges). Quelle est l'aire d'une telle table de longueur 2 m et largeur 1,2 m ? Quel est son périmètre ?

8* Un second moyen pour faire un ovale est illustré par la figure 5 avec des quarts de disques. Quels sont l'aire et le périmètre si les rayons des secteurs sont 5 cm et 10 cm ?

9 Montrer qu'un disque a même aire qu'un triangle qui a pour base le périmètre du disque et pour hauteur son rayon.

10*c Archimède a inventé une figure intéressante, l'arbelon, décrite à la figure 6. Par un point quelconque M du diamètre [AB] d'un demi-disque, on trace deux demi-cercles comme sur la figure. La région grisée est l'arbelon. Montrer qu'il a toujours la même aire que le disque dont le diamètre est le segment vertical au-dessus de M.

11* Autour d'un carré donné, on dessine le cercle circonscrit, et 4 demi-cercles de diamètres chacun des côtés (figure 7). Montrer que l'ensemble des 4 croissants a même aire que le carré central.

12 Faire un patron pour un cône de papier dont le disque de base a un rayon r et le secteur latéral un rayon R. Quel est l'angle du secteur si R = 2.r ; si R = 3.r ; si R = 4.r ? (Prendre r = 3 cm)

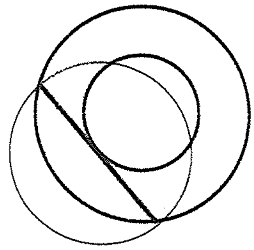


Figure 1

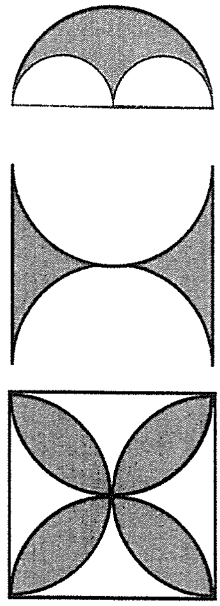


Figure 2

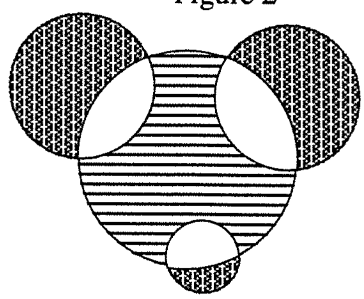


Figure 3

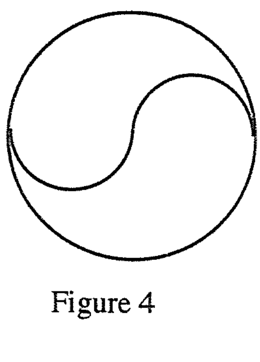


Figure 4

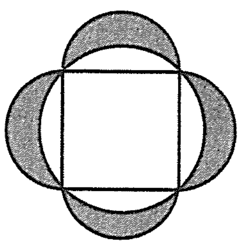


Figure 7

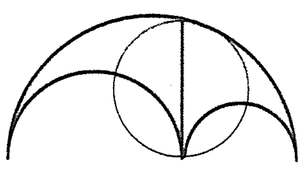


Figure 6

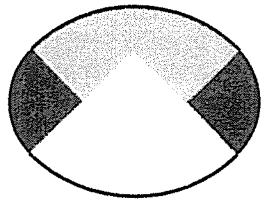


Figure 5

Théorème de Thalès et homothéties de rapport positif*

Peux-tu ?

P1 te servir d'un guide-âne (série de parallèles équidistantes) et d'un calque pour multiplier une longueur donnée par un entier n
P2 te servir du même guide-âne pour partager un segment donné en 7 segments de même longueur
P3 partager de même un segment donné en 3 segments de même longueur à la règle et au compas
P4 calculer la longueur x dans chacun des dessins de la figure 1
P5 calculer la longueur y dans chacun des dessins de la figure 2
P6 dessiner un segment mesurant les $\frac{4}{3}$ de la longueur d'un segment donné
P7 te donner un triangle gabarit, et en faire une image agrandie, mais non déformée (homothétie)
P8 te donner 2 longueurs différentes et partager un segment [AB] en 2 parties proportionnelles à ces 2 longueurs
P9 découper un triangle rectangle suivant sa hauteur et comparer les angles des 2 triangles obtenus avec celui de départ

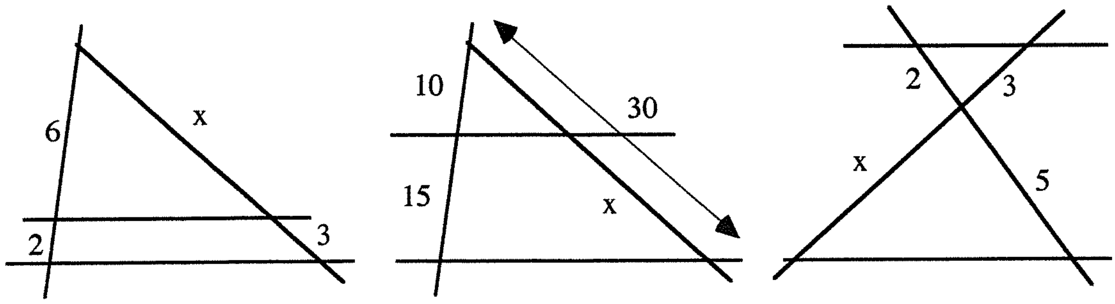


Figure 1

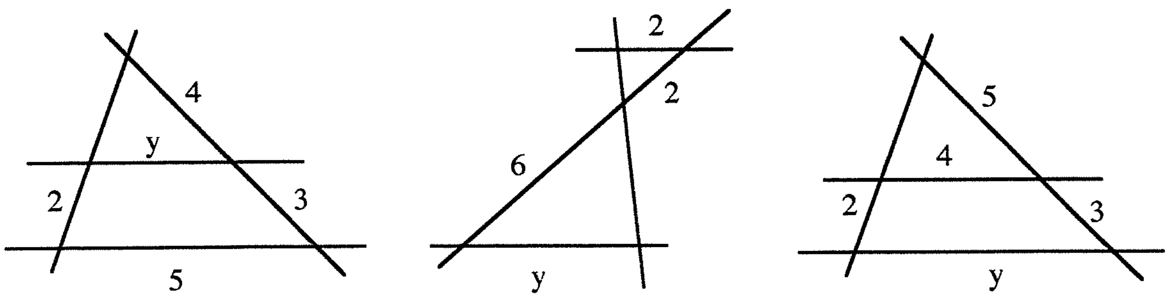


Figure 2

Sais-tu ?

S1 comment des parallèles équidistantes découpent une sécante
S2 comment une parallèle à un côté d'un triangle découpe les 2 autres
S3 énoncer le théorème de Thalès dans tous les cas de figure
S4 énoncer une réciproque au théorème de Thalès
S5 construire une fraction donnée d'un segment donné
S6 caractériser en termes d'angles deux triangles à côtés proportionnels
S7 définir l'homothétie de centre O et de rapport k positif
S8 quelles sont les qualités géométriques (alignement, longueurs, angles, parallélisme, perpendicularité, milieux, aires) qui sont conservées par une homothétie
S9 en quoi est transformé un segment, une droite , un cercle

* Ce chapitre doit être étudié après : **Proportionnalité**

Exercices

1* Écrire le programme du partage en 5 segments de même longueur d'un segment donné, à la règle non graduée et au compas

2* Comment partager un segment donné en 2 segments de longueurs proportionnelles à 5 et 7 ?

3 Comment partager un segment donné en 3 segments de longueurs proportionnelles à 3, 4, 5 ?

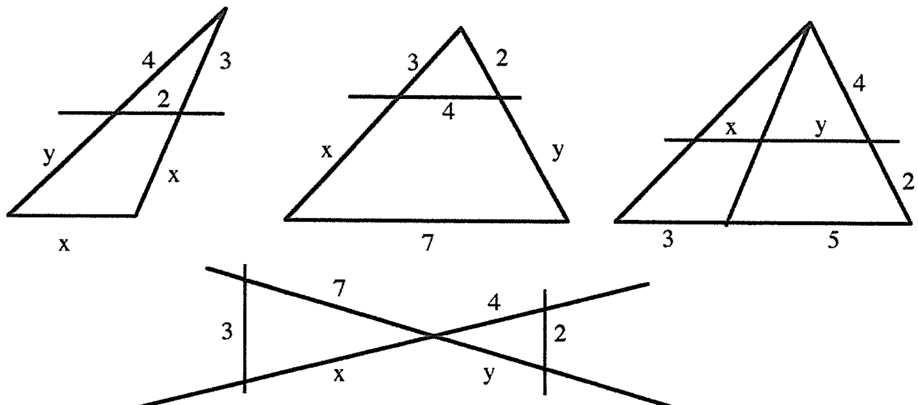


Figure 1

4* Calculer x et y dans les dessins de la figure 1

5* Construire sur un segment donné, un triangle de côtés proportionnels à 4, 5, 6

6c Avec les mesures lues sur la figure 2, trouver x pour que le périmètre du parallélogramme MNAP soit égal à 13,5

7 Quelles proportions doit avoir un rectangle pour que le rectangle obtenu en le pliant en 2 suivant sa longueur ait les mêmes proportions ? (formats A4, A3, ...)

8 2 segments parallèles et de longueurs différentes [AB] et [CD] sont donnés. Où est le centre de l'homothétie (de rapport positif) qui transforme [AB] en [CD] ? Quel est son rapport ?

9 Réduire à l'échelle $\frac{1}{4}$ un triangle ABC tel que :
AB = AC = 5 et BC = 6. Est-il vrai que :
- cette réduction diminue les périmètres de 25% ?
- cette réduction diminue les aires de 93,75% ?

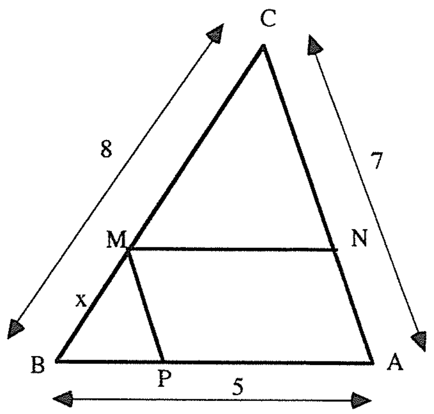


Figure 2

10 I, J, K sont les milieux des côtés du triangle ABC. Trouver une homothétie qui transforme ABC en IJK.

Constructions et reports aux instruments

Peux-tu ?

P1 dessiner un losange à la règle non graduée et au compas dont un côté ou une diagonale est donné

P2 dessiner un losange à la règle non graduée et au compas dans un secteur angulaire donné

P3 dessiner un triangle à la règle non graduée et au compas de dimensions données

P4 dessiner un parallélogramme à la règle non graduée et au compas dont 3 sommets sont donnés

P5 dessiner un rectangle à la règle non graduée et au compas de dimensions données

P6 dessiner un carré à la règle non graduée et au compas de diagonale donnée

P7 dessiner à la règle non graduée et au compas la parallèle à une droite donnée passant par un point donné

P8 dessiner à la règle non graduée et au compas la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné

P9 faire une copie d'un secteur angulaire donné au compas

P10 dessiner un losange, la médiatrice d'un segment donné, la bissectrice d'un secteur angulaire donné à l'aide d'une bande parallèle (règle non graduée à 2 bords) ou un gabarit de triangle

P11 partager en 3 parties de même longueur un segment donné au translateur

Sais-tu ?

S1 dessiner à la règle non graduée et au compas la médiatrice d'un segment donné

S2 dessiner à la règle non graduée et au compas la bissectrice d'un secteur angulaire donné

S3 dessiner un triangle équilatéral et un hexagone régulier à la règle non graduée et au compas

S4 dessiner un angle droit à la règle non graduée et au compas

S5 dessiner un secteur angulaire de même angle qu'un secteur donné, à la règle et au compas

S6 partager en n segments de même longueur un segment donné avec des parallèles

S7 décrire une construction, avec des informations numérotées de 4 types :

type α : je place les éléments donnés : points, droites, segments, cercles, …

type C : je trace le cercle de centre … et passant par … ou un arc de centre … et passant par …

type D : je trace la droite passant par … (et …) ou le segment d'extrémités … et …

type P : je nomme … le point intersection du segment, droite, cercle, arc … et du segment, droite, cercle, arc …

Exercices

1 Construire un octogone régulier et une étoile à 8 branches, à la règle non graduée et au compas.

2 Construire un dodécagone régulier, à la règle non graduée et au compas, et une étoile à 12 branches.

3 Construire 3 demi-cercles de diamètres les côtés d'un triangle rectangle donné. Démontrer que l'aire de celui qui est sur l'hypoténuse est la somme des aires des 2 autres.

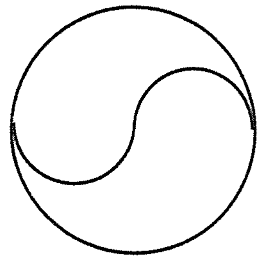


Figure 1

4 Enumérer les étapes de la construction à la règle non graduée et au compas de la figure 1 (elle possède un centre de symétrie).

5* Enumérer les étapes de la construction de la spirale à 4 centres à partir d'un carré central (figure 2)

6* Construire à la règle non graduée et au compas l'orthocentre d'un triangle donné.

7*c Construire un triangle rectangle d'hypoténuse et de hauteur associée données, à la règle non graduée et au compas.

8* Marquer le milieu d'un segment, au translateur ; les milieux des côtés d'un triangle donné.

9* Marquer le point qui est aux $\frac{3}{5}$ d'un segment donné, au compas ou au translateur.

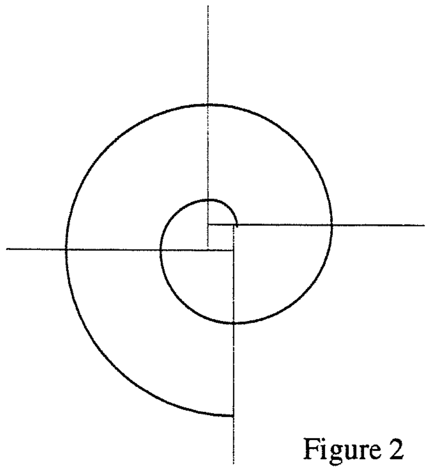


Figure 2

10* Construire un pentagone régulier (figure 4), en partant de la construction d'un rectangle d'or (figure 3)
On sait que la largeur du rectangle d'or est égale au côté du pentagone et la longueur à sa diagonale.

11* Décrire la construction de l'ovale "au tiers point " (figure 5).
Les données sont 4 points A, B, C, D alignés tels que :
AB = BC = CD (ce qui donne le nom de *tiers point*) et les triangles BCI et BCJ sont équilatéraux.

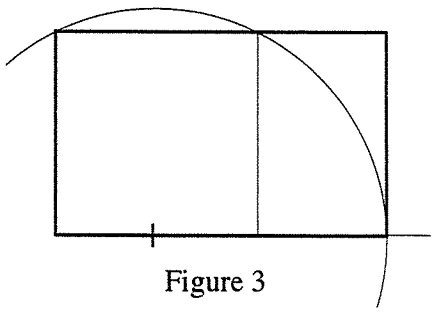


Figure 3

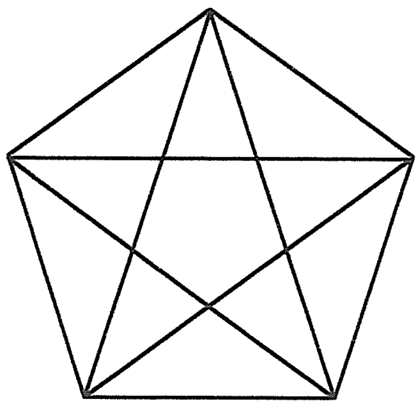


Figure 4

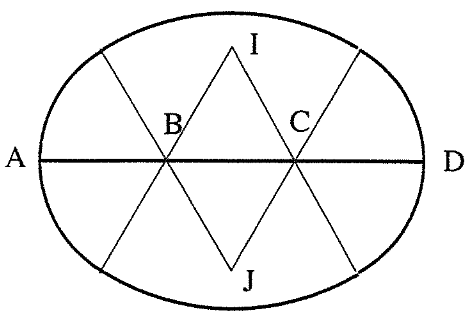


Figure 5

PISTES DE RECHERCHE

Calculs numériques et littéraux

3 Certaines peuvent être égales.

4 Commencer par simplifier le numérateur et le dénominateur de la fraction en les réduisant chacun à un dénominateur commun. Multiplier alors le numérateur par l'inverse du dénominateur.

5 Commencer par simplifier la fraction la plus basse dans l'échafaudage et remonter successivement.

6 Calculer une valeur approchée de $\frac{22}{7}$ avec suffisamment de décimales.

7 Simplifiez les fractions, puis essayez de leur trouver un dénominateur 10^n.

8 Utilisez $(a + b)^2$ ou $(a - b)^2$; $(2x + 1)^4 = [(2x + 1)^2]^2$

9 C'est toujours $a^2 - b^2$!

10 $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$ et $|x| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2$ ou $x \geq 2$

Mise en équation ; résolution

1 Appeler a, b, c, d les masses des 4 formes et traduire les équilibres par des égalités

2 x, y, z pour les 3 prix inconnus.

3 Prendre t pour la durée à partir de 1 h jusqu'à un instant choisi et traduire la distance parcourue par chaque train.

4 Trouver quelle fraction du rapport est tapée par chacune en 1 min.

5 x, y, z pour les 3 âges. Traduire chaque phrase par une équation.

6 x pour l'ensemble des disciples. Traduire la phrase par une équation.

7 p est le nombre de personnes. Traduire dans un tableau les possibilités.

8 x, y pour les 2 nombres. Trouver 2 équations et résoudre le système.

9 t pour la durée jusqu'à la rencontre. Traduire en rapport de vitesses les données.

10 x, y pour les 2 nombres. Trouver 2 équations et résoudre le système.

11 o, f, c, e pour les 4 masses.

12 x, y pour les 2 nombres. Trouver 2 équations et résoudre le système.

13 x, y pour les 2 nombres. Trouver 2 équations et résoudre le système.

Fonctions outils

1 a) Utiliser les formules classiques pour l'aire des triangles et quadrilatères.
c) Utiliser les formules avec le même x

2 Trouver l'aire d'un triangle ôté dans le grand carré.

3 L'aire et le périmètre s'expriment en fonction des 2 dimensions x et y du rectangle. Dans quel cas peut-on exprimer une dimension x en fonction du périmètre ? de l'aire ?

5 Exprimer algébriquement chaque fonction puis répondre.

6 $y = a.x + b$ où x et y désignent la même température en °C et °F. Trouver a et b.

Proportionnalité

1 Compter les secondes dans une heure

2 Traduire l'échelle en : 1 cm correspond à ...

3 d est la longueur de chaque partie. Exprimer le temps mis pour parcourir chacune.

4 Un litre d'eau a une masse de 1 kg. Prendre un litre d'eau et trouver le volume de glace obtenu, la masse étant inchangée.

5 Trouver la fraction du réservoir remplie en un jour par chaque canal seul, et en 1 h.

6 x et y sont les 2 nombres. Traduire les données en un tableau de proportionnalité.

7 Les avoirs a, b, c, d sont proportionnels à 1, 2, 3, 4 si : $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{d}{4}$

8 p est le prix d'une heure de travail.

9 Faire varier par proportionnalité en gardant chaque fois un facteur fixe.

10 Trouver la quantité de pain donnée par chaque Arabe (le partage en 5 pièces et 3 pièces n'est pas la bonne réponse).

11 Comme **10**.

12 Ne tombez pas dans l'étang.

13 Il lui reste le temps t jusqu'à midi et la distance d à parcourir. En (t+1) il parcourt d à 10 km/h. En (t–1) ...

Pourcentages

1 p est le prix de départ. p' après une augmentation, p" après la deuxième.

2 Mêmes notations que **1**.

3 C est le capital initial. Trouver le nouveau capital C' au bout d'un an.

4 A est le prix d'achat, V le prix de vente.

5 c est le côté du carré initial. Trouver son périmètre p et son aire a. c' est le côté allongé. Trouver de même p' et a'.

6 Même méthode que **5**.

7 Pour 100 journaux achetés, il doit en vendre x pour couvrir sa dépense. Traduire cette phrase en une équation.

8 Trouver la consommation sur route pour 100 km. Puis celle sur autoroute.

10 Augmenter de 3,3 % c'est multiplier par ...

11 P est le prix normal d'une communication. Quel en est le prix après 18 h ? Comment s'allonge le temps si la dépense est toujours P en supposant le prix proportionnel à la durée ?

12 V est le prix de vente. Traduire l'information en une équation.

13 Dans la ville A, sur 100 candidats on a x reçus... Trouver x et traduire en pourcentage

14 Trouver le prix promotionnel de 1 kg de produit et comparer

Fonctions usuelles

1 C'est une fonction affine par morceaux

2 C'est une fonction affine par morceaux

3 Envisager 2 cas suivant la position de M

4 C'est une fonction affine par morceaux

5 Utiliser Thalès appliqué au triangle

Suites arithmétiques et géométriques

1 Somme d'une suite arithmétique de premier terme 100 et raison 50

2 La longueur d'un quart de cercle de rayon r est $\frac{\pi}{2}.r$. Les rayons forment une suite arithmétique : c ; 2c ; 3c ;... et la longueur de la spirale est la somme des longueurs des arcs.

3 Somme des termes d'une suite géométrique de raison 2

4 Suite géométrique de raison 2

5 $t_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

6 A_n et B_n sont des suites géométriques de raison $\frac{1}{2}$

7 A_nB_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. $\mathcal{A}(A_nB_nC_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$

8 Les aires des disques sont : $\pi.r^2$; $\pi.4r^2$; $\pi.9r^2$; ... et par différence 2 à 2 on trouve l'aire C_n.

Distances et réflexions

1 Tracer 3 disques

2 Tracer les 4 médiatrices des segments dont une extrémité est une île française et l'autre anglaise, et discuter suivant les régions

3 Tracer la médiatrice de [AB]

4 Décomposer 12 en la somme de 3 entiers

5 La limite est formée d'arcs de cercles centrés à 3 sommets du carré

6 Utiliser l'inégalité triangulaire pour chacun des 3 triangles extérieurs à A'B'C'

7 Dans BAD : BA < BD + DA. Donc : BD > BA – DA et BA = CA.

8 Intersection, lorsqu'elle existe, de la médiatrice de [AB] et de $\mathcal{D}$

9 Utiliser soit le symétrique de A, soit celui de B pour joindre 2 points en ligne droite
(plus court chemin si on n'a pas de condition)

10 Utiliser le symétrique de A par rapport à une droite et celui de B par rapport à l'autre, comme en 9

11 La droite (AM) - sauf cas particulier - coupe $\mathcal{D}$ en I ; la droite image est (BI). La droite (BM) - sauf cas particulier - coupe $\mathcal{D}$ en J ; la droite image est (AJ). M' est à l'intersection de (BI) et (AJ).

12 Utiliser l'inégalité triangulaire

13 Si A' est sur le côté]AC[, BA' < BA + AA' dans le triangle BAA' par l'inégalité triangulaire. Il suffit d'ajouter les longueurs A'C + CB de part et d'autre pour conclure.
Si A' est intérieur, appliquer le résultat précédent 2 fois : ABC et A"BC puis A"BC et A'BC

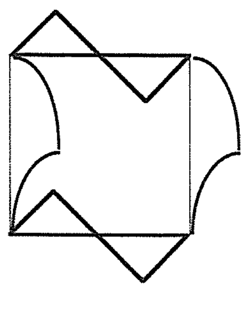
Translations et rotations

2 Prendre éventuellement un modèle en carton découpé de chaque quadrilatère, et marquer son contour sur une feuille. Étudier les différentes façons de le poser dans son contour.

3 La plus évidente est une translation. Mais penser aussi aux rotations d'un quart et d'un demi-tour, ainsi qu'aux réflexions d'axes horizontal, vertical ou "à 45°"

4 Envisager des translations et des rotations de 180°.

5 Utiliser un triangle gabarit et différencier les 3 angles par des signes.
Les images de [BC] sont 2 segments de même support.



6 Envisager des translations, rotations et réflexions. Il y a une <u>infinité</u> de rotations.

8 Si O est le centre du premier carré, appliquer 3 fois successivement la rotation de centre O et 90° au second carré.

9 Ci-contre, un exemple parmi beaucoup de variations possibles :

10 Une rotation de centre B transforme A en E et C en F.

11 Considérer une rotation de centre A et angle 90°. Idem avec B et C.

12 Penser aux rotations laissant ABC globalement invariant.

13 Trouver l'image Δ de $\mathcal{D}'$ par la symétrie centrale de centre A. Etudier l'originalité de la position du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ.

Quadrilatères particuliers

1 Utiliser un translateur et mener des parallèles aux côtés par le sommet opposé.

2 Inscrire le triangle dans 3 rectangles en s'appuyant chaque fois sur un côté.

3 Comparer au rectangle de même base et même hauteur.

4 Tracer une diagonale du quadrilatère et comparer dans chacun des triangles formés un côté de IJKL à cette diagonale. Recommencer avec l'autre.

5 Mettre 2 exemplaires tête-bêche

6 Inscrire le losange dans un rectangle dont les côtés sont parallèles aux diagonales.

7 Comme **4**.

8 Losange et rectangle : essayer de construire d'abord leurs diagonales en utilisant leurs caractéristiques.

9 Mesure : partager les figures successives en triangles rectangles.

10 Faire tourner le gabarit par quarts de tour.

11 Si s est l'aire du triangle, l'aire S du trapèze est : $S = \frac{c^2}{2} + 2s$
Comme trapèze (voir **5**) ses bases sont a et b et sa hauteur (a+b)

12 Avec le triangle et le quadrilatère, faire tourner chaque fois le gabarit d'un demi-tour entre 2 voisins

13 En observant le partage de l'aire de chacun des 2 triangles découpés dans le parallélogramme par la diagonale, comparer ce qui est ôté.

14 Voir [BC] comme une diagonale d'un parallélogramme qu'on construit. Construire un côté en choisissant un "milieu de côté" sur une droite et en appliquant la méthode précédente dans l'angle formé par les 2 autres. Terminer en utilisant la propriété caractéristique du centre de gravité.

Distance d'un point à une droite ; aire des triangles

1 Chaque médiane coupe un triangle en 2 parties de même aire. ABG, BCG et ACG ont une médiane commune avec ABC.

2 On crée 3 triangles autour de ABC par ce procédé. Montrer que chacun a une aire double de ABC.

3 Utiliser **1**.

4 Tracer le cercle inscrit et repérer ses 3 contacts avec ABC. Les 6 triangles sont les triangles rectangles ainsi définis qui tous ont un côté égal à r.

5 Exprimer de 2 façons l'aire du triangle en changeant de base.

6 Déplacer un sommet sur une parallèle à une diagonale.

7 Exprimer l'aire de chacun des triangles MAB, MBC, MCA en prenant M comme sommet et calculer l'aire de ABC par addition.

8 Par exemple pour MCR, le faire tourner autour de C de 90° à droite. M vient en A et R sur (BC). Comparer ABC et MCR par leur base et leur hauteur.

9 Calculer d'abord l'aire des triangles avec les bases portées par (BC) puis portées par (AB) et (AC). Faire leur rapport dans les 2 cas.

10 Partager l'un des côtés en p segments de même longueur

Propriétés des triangles

1 Soit I l'intersection de (AB) et $\mathcal{D}$ et H, K les pieds des perpendiculaires abaissées de A et B. Les triangles AHI et BKI sont isométriques.

2 Les triangles MOA et MOB sont isométriques.
Construire 2 points A et B avec un arc de cercle centré en O ; puis M avec 2 arcs de même rayon centrés en A et B (mais pas obligatoirement de même rayon que le premier !)

3 Il y a échange des rôles des côtés et des hauteurs. Par exemple pour HBC, la hauteur issue de B est portée par (AB) et la hauteur issue de C est portée par (AC). Son orthocentre est donc A.

4 Les 3 triangles sont des triangles rectangles. Pour les autres angles, chaque triangle intérieur en a un en commun avec ABC et comme la somme des 2 angles aigus est égale à un angle droit ...

5 ABC est inscrit dans un demi-cercle ; donc son centre est I et IA est un rayon et BC un diamètre.

6 $\widehat{BAD} + \widehat{BAC} = \pi$ (angle plat). Dans le triangle ABC : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$

7 Les 2 triangles inscrits dans le demi-cercle sont des triangles rectangles. Donc [BD] et [CD] sont 2 hauteurs du triangle ABC.

8 Soit [AB] le côté connu, I son milieu. C est sur le cercle de centre I et dont le rayon est la longueur m de la médiane. Il est aussi sur une parallèle à (AB) à la distance h de (AB),
(h hauteur connue).

9 Si 2 droites sont perpendiculaires, le triangle est rectangle et A est en O. Il suffit de tracer une perpendiculaire à la troisième pour déterminer B et C.
Sinon, les côtés étant perpendiculaires à ces 3 droites, tracer une perpendiculaire à la première, A et B sont à l'intersection avec les 2 autres ; il suffit de tracer une perpendiculaire à l'une ou l'autre pour déterminer C.

10 Orthocentre : Tracer la perpendiculaire à (AB) passant par H (première hauteur). Puis la perpendiculaire à (AH) passant par B (deuxième côté). C est à l'intersection.
Centre de gravité : Marquer le milieu M de [AB] ; (MG) porte la médiane [MC] et G est aux $\frac{1}{3}$ de sa longueur en partant de M.
Centre du cercle inscrit : I est à égale distance des 3 côtés. Il suffit de reporter l'angle $\widehat{BAI}$ pour le doubler et l'angle $\widehat{ABI}$ pour le doubler.

Théorème de Pythagore

1 Un triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle.

2 Découper comme dans la figure 1.

3 Découper chaque triangle en 2 triangles par l'axe de symétrie. Calculer la hauteur par le théorème de Pythagore.

4 Couper le losange en 4 triangles rectangles et utiliser le théorème de Pythagore.

5 Couper le triangle en 2 triangles rectangles et utiliser le théorème de Pythagore.

6 Créer un "triangle (3 ; 4 ; 5)" dans l'angle des 2 droites.

7 Partager la ficelle en 12 parties par des nœuds (12 = 3 + 4 + 5) et la tendre en "triangle (3 ; 4 ; 5)"

8 Couper le rectangle en 4 rectangles de sommet commun M. Les longueurs sont les 4 diagonales. Calculer chacune en fonction des côtés par le th. de Pythagore.

9 Il suffit de glisser les 4 parties du grand carré pour qu'elles entourent un trou. Il est clair qu'elles se juxtaposent et que le trou est carré. D'après le théorème de Pythagore, ce ne peut qu'être le petit carré.

10 Couper le rectangle en 2 triangles rectangles et utiliser le th. de Pythagore.

11 Comme **10**.

12 Calculer le rayon du cercle par le théorème de Pythagore .

13 Comme **10** pour les faces. En coupant le cube par un plan qui passe par 2 arêtes opposées, la coupe est un rectangle de largeur l'arête, de longueur une diagonale de face et de diagonale la grande diagonale du cube.

14 Faire un carré de côté 1 puis successivement des rectangles de largeur 1 et de longueur la diagonale précédemment tracée.

15 $n^2 = 2p + 1$; $p^2 + n^2 = p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$

Polygones réguliers

1 "L'extérieur du triangle" est formé de 3 triangles, et l'intérieur de 3 autres tous isométriques.

2 Donner d'abord la diagonale du carré, puis ... éventuellement théorème de Pythagore.

3 Utiliser le th. de théorème de Pythagore dans un triangle moitié du rectangle proposé.

4 Si le polygone a 2n côtés , une rotation de $\frac{1}{2n}$ tour le laisse invariant. Mais pour que les prolongements se recouvrent, il faut faire 2 telles rotations.

5 Utiliser une rotation de $\frac{1}{n}$ tour.

6 Utiliser une rotation de $\frac{1}{8}$ tour.

7 Trouver une manière de placer l'une sur l'autre 2 copies du carré ou de l'hexagone, de même centre et tournées de 45° ou de 30°.

8 Les angles sont corrects mais les longueurs des côtés sont différentes. Il est impossible de construire un octogone régulier passant par les nœuds d'un quadrillage.

9 Calculer le côté des "coins supplémentaires" qui sont des demi-carrés de diagonale c.

10 Pour l'égalité, faire tourner de $\frac{1}{8}$ tour chaque carré. Ensuite, AR = QB = IJ grâce à 2 parallélogrammes ARJI, QBJI. MN = $\frac{1}{2}$ BD et NO = $\frac{1}{2}$ AC dans les triangles ABD et ABC.
On prend au compas un rayon égal à la demi-diagonale du carré, puis de chaque sommet du carré, on repère les sommets de l'octogone (de A on marque R, de B on marque Q, ...)

12 Calculer les angles des pièces grises.
Donner l'aire du dodécagone par **11**. En déduire la longueur du côté du carré. Vérifier que le résultat correspond à celui de **3**.

Cercles et disques

1 Les voir comme des angles inscrits dans le cercle circonscrit.

2 Calculer l'aire des 2 disques.

3 Calculer le rayon du disque équivalent à la couronne avec le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle dont le centre est un sommet et la demi-tangente un côté.

4 Faire des différences entre les aires des demi-disques et du carré.

5 Comprendre chaque partie hachurée comme un disque ou des disques dont on a ôté le blanc.

6 Dissocier en demi-disques.

8 quelle est la partie commune aux 2 quarts de grands disques ?

9 Utiliser les formules de longueur du cercle et d'aire du disque.

10 Si r et R sont les rayons des 2 demi-disques ôtés, le grand demi-disque a un rayon (r + R). Calculer l'aire de l'arbelon.
La longueur du segment vertical est donnée par la propriété de la hauteur d'un triangle rectangle (voir : **Théorème de Pythagore**). Calculer l'aire du disque.

11 Montrer d'abord que les 4 demi-disques extérieurs ont même aire que le grand disque central.
Interpréter les lunules comme la réunion du carré et des 4 demi-disques moins le grand disque.

12 Essayer de combiner un disque de rayon r et un secteur circulaire de rayon R et d'angle adapté.

Théorème de Thalès et homothéties

1 Commencer par tracer sur une droite auxiliaire 5 segments de longueur égale. Puis construire une série de parallèles en traçant chaque fois un parallélogramme.

2 Mettre 5d puis 7d sur la même droite auxiliaire puis projeter parallèlement.

3 Même méthode que **2**.

4 Utiliser le théorème de Thalès dans le triangle.

5 Le segment correspondant à 4, trouver des segments correspondants à 5 et 6. Reporter ces segments au compas pour former le triangle.

6 Trouver MN et MP par le théorème de Thalès.

7 Les "proportions" d'un rectangle, c'est le rapport : $r = \frac{L}{l}$ de sa longueur à sa largeur.

8 Joindre deux à deux les extrémités. Quelle peut être l'image de A ?

9 Calculer le périmètre et l'aire du triangle réduit ; puis évaluer les diminutions correspondantes.

10 Penser aux propriétés du centre de gravité ou utiliser les résultats de l'exercice 8.

Constructions et reports

1 Partir d'un cercle ; tracer 2 diamètres perpendiculaires ; tracer les bissectrices ; construire l'octogone ; construire l'étoile

2 Partir d'un cercle ; construire un hexagone régulier ; tracer une médiane ; construire le dodécagone ; construire l'étoile

3 Se donner le triangle ABC ; construire le milieu de chaque côté ; tracer les demi-cercles. Calculer les aires des demi-disques de diamètres a, b, c et retrouver le théorème de Pythagore.

4 Il s'agit d'un cercle et de 2 demi-cercles dont les extrémités sont sur un diamètre, chacun en ayant une au centre du cercle

5 Tracer le carré ; prolonger les côtés ; tracer le premier arc de cercle puis successivement, les suivants.

6 Voir figure de : **Propriétés des triangles**

7 Il s'inscrit dans un demi-cercle de diamètre l'hypoténuse. Il a son sommet sur une parallèle à l'hypoténuse.

8 Construire un parallélogramme dont le segment soit une diagonale.

9 Si le segment est [AB], tracer une droite auxiliaire passant par A ; reporter 4 fois une longueur sur cette droite ; projeter cette graduation sur [AB].

10 Construire un rectangle d'or ; reporter sa largeur comme base du pentagone ; construire le point supérieur avec 2 arcs de rayon la longueur du rectangle ; construire chacun des 2 sommets restants comme intersection de 2 arcs de rayon la largeur du rectangle.

11 Marquer A, B, C, D ; construire I et J ; tracer les petits arcs ; tracer les grands arcs.

SOLUTIONS RÉDIGÉES

CALCULS NUMÉRIQUES ET LITTÉRAUX : Exercice 4

$$a = 3 - \frac{2 - \frac{1}{5}}{2 + \frac{5}{6}}$$

On a $2 - \frac{1}{5} = \frac{10}{5} - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$ $\qquad 2 + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$

donc $a = 3 - \frac{\frac{9}{5}}{\frac{17}{6}} = 3 - \frac{9}{5} \times \frac{6}{17} = 3 - \frac{54}{5 \times 17} = \frac{255 - 54}{5 \times 17} = \frac{201}{85}$

Comme $85 = 5 \times 17$,
et que ni 5, ni 17 (qui sont deux entiers premiers) ne divisent 201, la fraction $\frac{201}{85}$ est irréductible.

MISE EN ÉQUATION : Exercice 7

I - Choix des inconnues

x : nombre de personnes interrogées

II - Mise équation du problème à l'aide d'un tableau à double entrée

	nombre de personnes utilisant la poudre	nombre de personnes n'utilisant pas la poudre	nombre total
nombre de personnes utilisant le liquide	427	$\boxed{\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x}$	
nombre de personnes n'utilisant pas le liquide	$\boxed{\frac{2}{7}x - \frac{1}{5}x}$	$\frac{1}{5}x$	$\frac{2}{7}x$
nombre total		$\frac{1}{3}x$	x

$\boxed{....}$: ces nombres ne sont pas donnés par l'énoncé mais sont obtenus à partir des nombres connus.

Équation

$$427 + \frac{2}{7}x - \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x = x$$

III- Résolution de l'équation

$$427 + \frac{30x - 21x + 35x}{7 \times 5 \times 3} = x$$

$$427 + \frac{44x}{105} = x$$

$$427 = \frac{105x - 44x}{105}$$

$$x = \frac{427 \times 105}{61}$$

$$x = 7 \times 105$$

$$\boxed{x = 735}$$

IV - Conclusion

x = 735 est un nombre entier, donc est la solution au problème.

FONCTIONS OUTILS : Exercice 6

I - Choix des variables

x : mesure de la température en degrés Celsius
y : mesure de la température en degrés Fahrenheit

II- Traduction des informations données.

1- l'eau bout à 212° F et à 100°C

2- la glace fond à 32° F et à 0° C

d'où le tableau de valeurs

x	100	0
y	212	32

3- la correspondance est affine

donc $y = ax + b$

III - Recherche de y en fonction de x

a et b sont solutions du système $\begin{cases} 212 = 100\,a + b \\ 32 = b \end{cases}$

d'où : $a = \dfrac{212 - 32}{100} = 1{,}8$

La fonction cherchée est : $\boxed{x \longmapsto \quad y = 1{,}8.x + 32}$

IV - Recherche de x en fonction de y

$$y = 1{,}8.x + 32$$
$$x = \frac{y - 32}{1{,}8}$$

$$\boxed{x = \frac{10}{18}y - \frac{320}{18} = \frac{5}{9}y - \frac{160}{9}}$$

PROPORTIONNALITÉ : Exercice 7

Soient a_1, b_1, c_1, d_1, les avoirs des 4 joueurs en début de jeu ; et a_2, b_2, c_2, d_2 leurs avoirs en fin de jeu.
On sait donc que : $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = S$

début de jeu :

a_1	b_1	c_1	d_1	S
1	2	3	4	1 + 2 + 3 + 4 = 10

donc

$a_1 = \dfrac{S}{10}$ $\quad b_1 = \dfrac{2S}{10} = \dfrac{S}{5}$ $\quad c_1 = \dfrac{3S}{10}$ $\quad d_1 = \dfrac{4S}{10} = \dfrac{2S}{5}$

fin de jeu :

a_2	b_2	c_2	d_2	S
5	4	3	2	5 + 4 + 3 + 2 = 14

donc : $a_2 = \dfrac{5S}{14}$ $\quad b_2 = \dfrac{4S}{14} = \dfrac{2S}{7}$ $\quad c_2 = \dfrac{3S}{14}$ $\quad d_2 = \dfrac{2S}{14} = \dfrac{S}{7}$

POURCENTAGES : Exercice 7

Pour 100 journaux achetés au grossiste, le marchand a dépensé en F :

$1{,}20 \times 100 = 120$

S'il vend x journaux, il rend alors au grossiste $(100 - x)$ journaux et gagne donc en F :
$1{,}60 \,.\, x + 0{,}60 \,.\, (100 - x) = 1{,}6.x + 60 - 0{,}6.x = x + 60$

Pour couvrir sa dépense, il doit donc vendre x journaux tel que :

$x + 60 = 120$

Le pourcentage minimum est donc 60 pour cent.

FONCTIONS USUELLES : Exercice 1

Étude d'un tarif dégressif

Appelons x le nombre d'exemplaires achetés ; y le prix payé.

1) Expression par un tableau de nombres (on choisit quelques valeurs) :

x	1	2	3	4	5	6	19	20	25
y	3	6	9	12	15	17,5	50	52,5	62,5

2) Expression par une fonction :

si $0 \leq x \leq 5$, chaque exemplaire vaut 3 F alors : $\boxed{y = 3x}$

si $5 < x \leq 20$, on paie 5 exemplaires à 3 F et les autres - soit $(x - 5)$ exemplaires - à 2,50 F ;
alors $y = (x - 5).2{,}5 + 15$ ou $\boxed{y = 2{,}5.x + 2{,}5}$

si $x > 20$, on paie 5 exemplaires à 3 F, 15 exemplaires à 2,50 F et les autres - soit $(x - 20)$ exemplaires - à 2 F ;
alors $y = 15 + 37{,}5 + (x - 20)\,2$ ou $\boxed{y = 2\,x - 12{,}5}$

En résumé :

$0 \leq x \leq 5 \Rightarrow y = 3\,x$
$5 < x \leq 20 \Rightarrow y = 2{,}5\,x + 2{,}5$
$x > 20 \Rightarrow y = 2x + 12{,}5$

il s'agit de la fonction : $x \longmapsto y$
(nombre d'ex.) (prix en F)

3) Représentation graphique : Cette fonction est une fonction affine par morceaux. La représentation sera la réunion des morceaux des droites d'équations
$y = 3x$; $y = 2{,}5x + 2{,}5$; $y = 2x + 12{,}5$
pour chaque droite, on choisira 2 points ; on ne conservera que les morceaux correspondant aux intervalles.

a) $y = 3x$

x	0	5
y	0	15

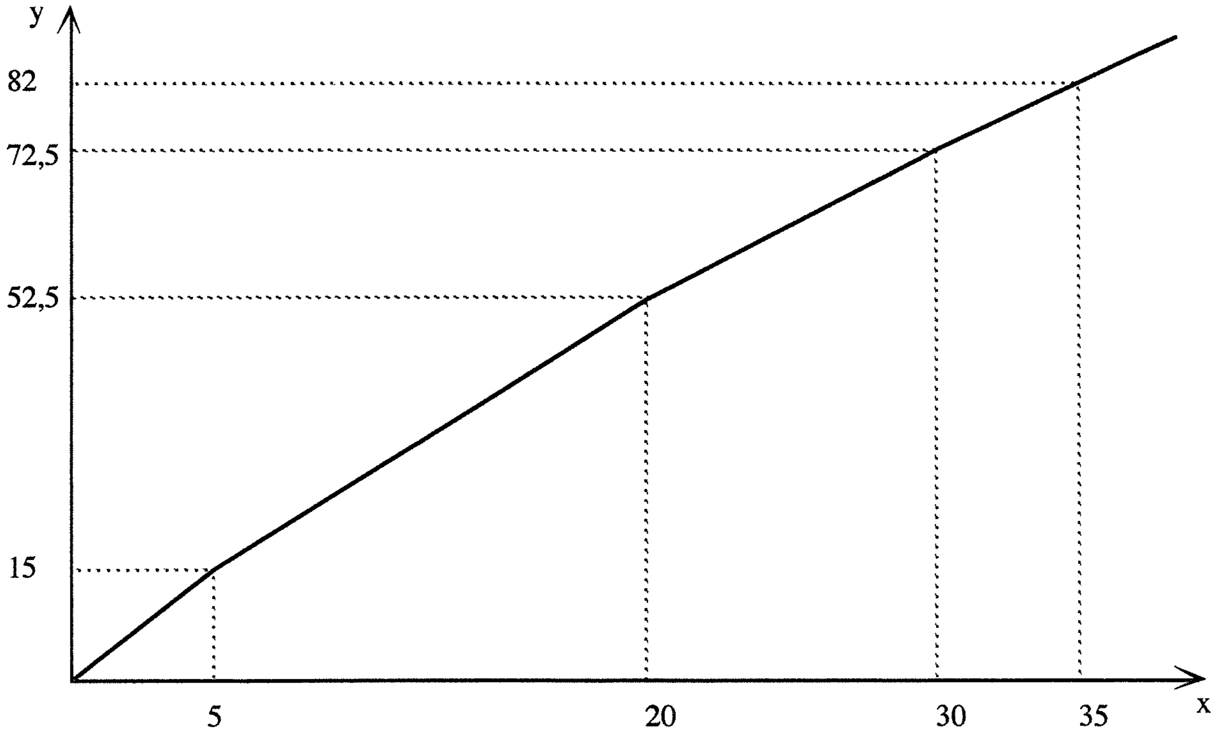
b) $y = 2{,}5x + 2{,}5$

x	5	20
y	15	52,5

c) $y = 2x + 12{,}5$

x	20	30
y	52,5	72,5

Représentation proprement dite : (échelle : 2 cm ⟷ 5 ex. et 1 cm ⟷ 10 F)



4) Lecture graphique du prix de 35 exemplaires .

On construit le point du graphique d'abscisse 35 et on lit son ordonnée soit 82 (F) approximativement.

Par le calcul :

comme 35 > 20 on calcule $y = 2 \times 35 + 12{,}5$

$y = 82{,}5$ (F).

SUITES NUMÉRIQUES : Exercice 6

1) a) Quelle est la longueur de $[A_1B_1]$?

→ A_1 est le milieu de [BC] et B_1 celui de [AC], donc $A_1B_1 = \frac{AB}{2}$, d'après le théorème de la "droite des milieux" d'un triangle : $\boxed{A_1B_1 = \frac{c}{2}}$

b) Quelle est la longueur de $[A_nB_n]$?

$\longrightarrow$ notons $l_n = A_nB_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $l_0 = c$. On a $\quad l_1 = \frac{l_0}{2} \quad l_2 = \frac{l_1}{2}$,

et plus généralement : $\quad l_{n+1} = \frac{l_n}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$

(d'après le théorème de la "droite des milieux" appliqué dans le triangle $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$), ce qui montre que :

(l_n) est la suite géométrique de 1er terme : $l_0 = c$ et de raison $\frac{1}{2}$

Donc : $\boxed{l_n = c \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{c}{2^n} \, (n \in \mathbb{N})}$

2) a) Quelle est l'aire de $A_1B_1C_1$?

$\longrightarrow$ les quatre triangles AB_1C_1, CA_1B_1, BC_1A_1 et $A_1B_1C_1$ sont équilatéraux et isométriques, donc ils ont la même aire.

Par suite, l'aire de $A_1B_1C_1$ est égale à $\frac{a}{4}$.

b) Quelle est l'aire de $A_nB_nC_n$?

$\longrightarrow$ notons a_n l'aire de $A_nB_nC_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $a_0 = a$. On a $\quad a_1 = \frac{a_0}{4} \quad a_2 = \frac{a_1}{4}$,

et plus généralement : $\quad a_{n+1} = \frac{a_n}{4}$

car l'aire de $A_n B_nC_n$ est égale à la somme de quatre aires de triangles équilatéraux isométriques à $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$.

Donc (a_n) est la suite géométrique de premier terme $a_0 = a$ et de raison $\frac{1}{4}$.

D'où $\boxed{a_n = a \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{a}{4^n} \, (n \in \mathbb{N})}$

3) a) Quelle est la somme L_n des longueurs de tous les segments tracés jusqu'à $A_nB_nC_n$?

$\longrightarrow L_n = 3\,(l_0 + l_1 + ... + l_n) = 3c\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$

On sait que si q est un nombre réel différent de 1, $1 + q + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, $\quad (n \in \mathbb{N})$,

donc $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n} = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

et $L_n = 6c\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$

b) L_n admet-elle une limite lorsque n tend vers $+\infty$?

$\rightarrow$ On sait que si $q > 1$, $\lim \frac{1}{q^n} = 0$

Donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = 6c}$

DISTANCES ET REFLEXIONS : Exercice 13

périmètre (A'BC) = A'B + BC + CA'
périmètre (ABC) = AB + BC + CA

1er cas : A' est sur le côté] AC [

* Alors AA' + A'C = AC (1)

* D'après l'inégalité triangulaire dans le triangle ABA' :

BA' < AB + AA' (2)

Ajoutons A'C + CB aux deux membres de l'inégalité (2).
On obtient une inégalité de même sens.

BA' + A'C + CB < AB + AC + CB

soit Périmètre (A'BC) < périmètre (ABC)

2ème cas : A' est intérieur au triangle ABC

On appelle A" le point d'intersection de la droite (BA') et du segment [AC].

* Appliquons le résultat précédent :

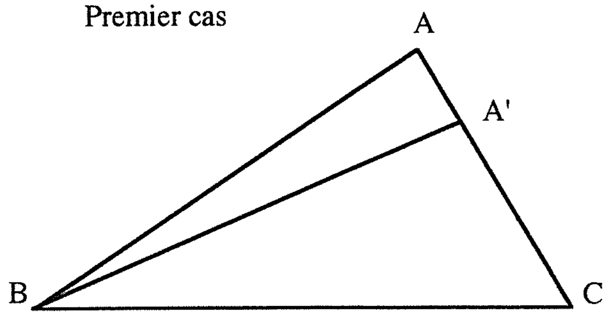
périmètre (A"BC) < périmètre (ABC) car A" sur] AC [

périmètre (A'BC) < périmètre (A"BC) car A' sur] BA"[

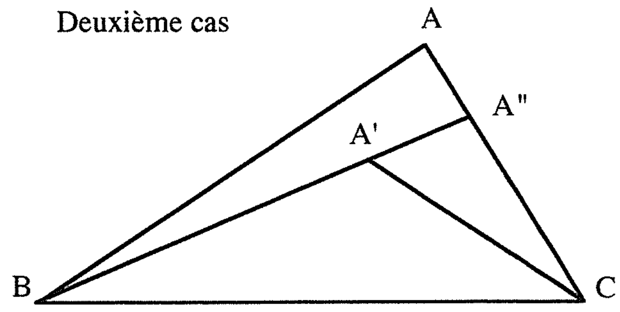
* d'où, par transitivité,

périmètre (A'BC) < périmètre (ABC) CQFD

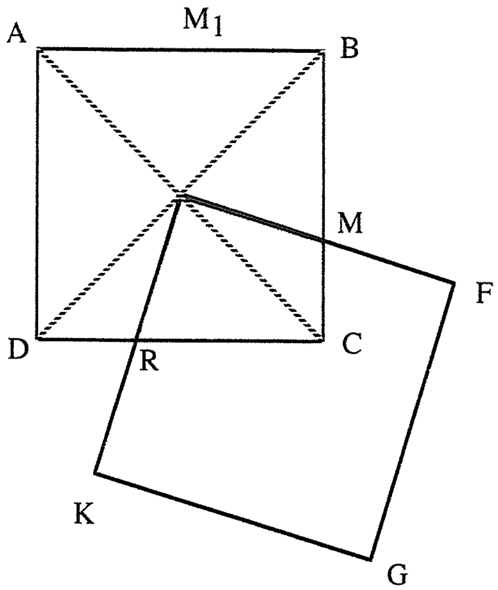
Premier cas



Deuxième cas



TRANSLATIONS ET ROTATIONS : Exercice 8



On effectue la rotation r de centre O, d'angle 90°, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

A - Cherchons l'image du triangle ODR par r

La droite (OD) devient la droite (OC) car (OD) et (OC) sont les diagonales d'un carré.
De même, la droite (OK) devient la droite (OF) car OKGF est un carré.

La droite (DC) devient la droite (CB) car les points D et C ont pour images C et B (propriété des diagonales d'un carré)

L'intersection des droites (DC) et (OK) a pour image l'intersection des droites (CB) et (OF)

c'est-à-dire : R a pour image M

En résumé, par r :

$O \longmapsto O$

$D \longmapsto C$

$R \longmapsto M$

Donc le triangle ODR devient le triangle OCM. Ces 2 triangles sont donc isométriques et ont même aire.

donc : aire (ODC) = aire (ODR) + aire (ORC)

= aire (OCM) + aire (ORC)

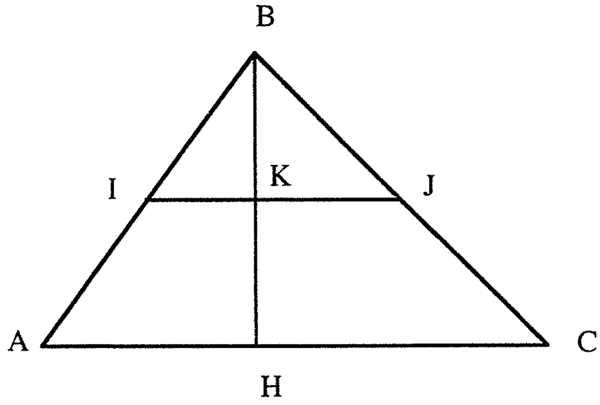
= aire (OMCR) = $\frac{1}{4}$

car : aire (ODC) = $\frac{1}{4}$ aire (ABCD) (carré de côté 1)

$$\boxed{\text{aire (OMCR)} = \frac{1}{4}}$$

QUADRILATÈRES PARTICULIERS : Exercice 7

Propriétés utilisées : Cf. P5 du chapitre **Triangles.**



Rappel :

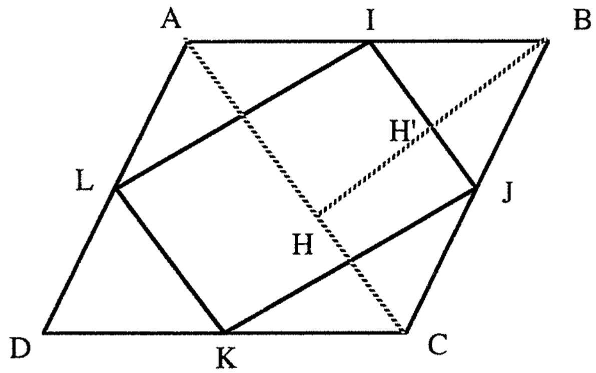
Si on sait que :

- ABC triangle quelconque
- I milieu de [AB]
- J milieu de [BC]
- (BH) hauteur du triangle ABC

alors :
- (IJ) // (AC)
- IJ = $\frac{1}{2}$ AC
- K milieu de [BH]

Solution 1 :

I - ABCD est un parallélogramme



aire (IJKL) = aire (ABCD) – [aire (BIJ) + aire (CJK) + aire (DKL) + aire (ALI)]

1 - Calculons l'aire (BIJ) en fonction de l'aire (ABC)

Soit (BH) la hauteur du triangle BAC, passant par B.
D'après le rappel ci-dessus,

$$\left.\begin{aligned} \text{aire (BIJ)} &= \frac{1}{2}\,\text{IJ} \times \text{BH'} \\ \text{aire (ABC)} &= \frac{1}{2}\,\text{AC} \times \text{BH} \\ \text{IJ} &= \frac{1}{2}\,\text{AC} \\ \text{BH'} &= \frac{1}{2}\,\text{BH} \end{aligned}\right\} \quad \text{donc} \quad \text{aire (BIJ)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \text{AC} \times \frac{1}{2} \times \text{BH}$$

$$\boxed{\text{aire (BIJ)} = \frac{1}{4} \times \text{aire (ABC)}}$$

De façon analogue, on démontre que :

aire (CJK) = $\frac{1}{4}$ × aire (CBD)

aire (DKL) = $\frac{1}{4}$ × aire (DCA)

aire (ALI) = $\frac{1}{4}$ × aire (ABD)

3 - donc aire (IJKL) = aire (ABCD) – $\frac{1}{4}$ [aire (ABC) + aire (CBD) + aire (DCA) + aire (ADB)]

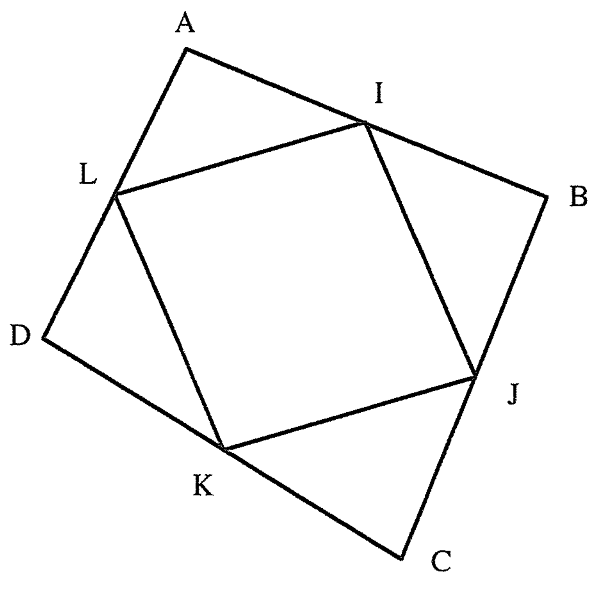
par construction

aire (ABC) + aire (DCA) = aire (ABCD)
aire (CBD) + aire (ADB) = aire (ABCD)

Donc aire (IJKL) = aire (ABCD) – $\frac{1}{4}$ [2 × aire (ABCD)]

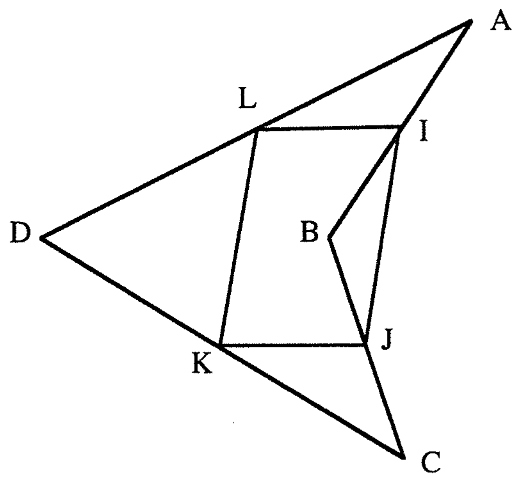
$$\boxed{\text{aire (IJKL)} = \frac{1}{2} \times \text{aire (ABCD)}}$$

II - ABCD quadrilatère convexe



La démonstration ci-dessus est vraie

III - ABCD quadrilatère concave



aire (IJKL) = aire (DAC) – [aire (AIL) + aire (DKL) + aire (CKJ) + aire (AIJC)]

or $\quad$ aire (AIL) = $\frac{1}{4}$ × aire (ABD)

aire (DKL) = $\frac{1}{4}$ × aire (DAC)

aire (CKJ) = $\frac{1}{4}$ × aire (CDB)

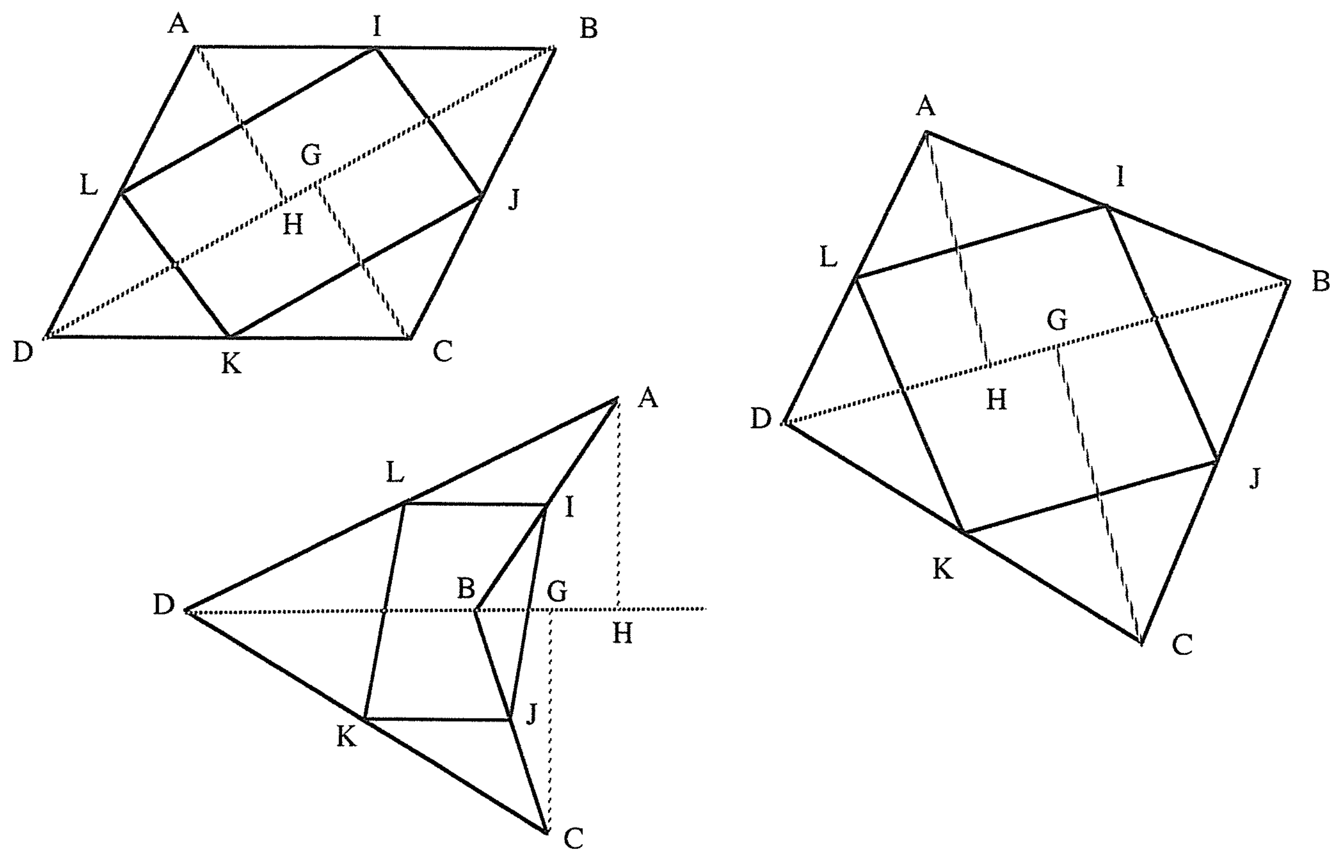
aire (AIJC) = aire (BAC) – aire (BIJ) = aire (BAC) – $\frac{1}{4}$ × aire (BAC) = $\frac{3}{4}$ × aire (BAC)

d'où $\quad$ aire (IJKL) = $\frac{3}{4}$ × [aire (DAC) – aire (BAC)] – $\frac{1}{4}$ × [aire (ABD) + aire (CDB)]

= $\frac{3}{4}$ × aire (ABCD) – $\frac{1}{4}$ × aire (ABCD)

$$\boxed{\text{aire (IJKL)} = \frac{1}{2} \times \text{aire (ABCD)}}$$

Solution 2 :



Dans les 3 cas de figures, on peut choisir une diagonale du quadrilatère ABCD qui le découpe en 2 triangles dont il est la réunion.

L'aire du quadrilatère ABCD est la somme des aires des triangles ABD et CBD qui ont une base commune [BD]

$$\text{aire (ABCD)} = \text{aire (ABD)} + \text{aire (CBD)} = \frac{1}{2} \times BD \times AH + \frac{1}{2} \times BD \times CG$$
$$= \frac{1}{2} \times BD \times (AH + CG)$$

L'aire du parallélogramme IJKL (résultat de l'exercice 4) est égale à : $LI \times h$ où h est la hauteur relative à la base [LI]

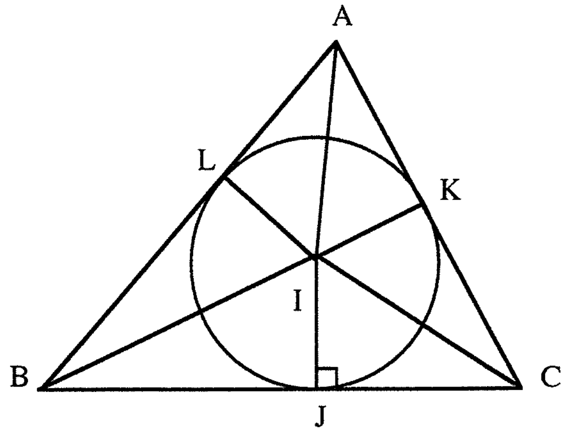
D'après le rappel : $h = \frac{1}{2} \times (AH + CG)$

et $\text{aire (IJKL)} = \frac{1}{2} \times LI \times (AH + CG) = \frac{1}{2} \times \text{aire (ABCD)}$

$$\boxed{\text{aire (IJKL)} = \frac{1}{2} \times \text{aire (ABCD)}}$$

DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE ; AIRE DES TRIANGLES : Exercice 4

1) Réalisation de la figure.



2) Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent en J, K, L aux côtés [BC], [CD]et [AB] et IL = IK = IJ = r (propriété des bissectrices d'un triangle)

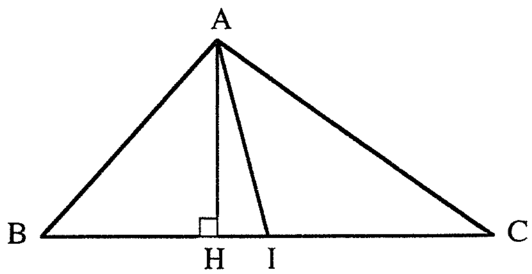
- les 2 triangles rectangles AIL et AIK sont isométriques et on peut former avec eux le rectangle r x AL
- les 2 triangles rectangles BIL et BIJ sont isométriques et on peut former avec eux le rectangle r x BL
- les 2 triangles rectangles CIJ et CIK sont isométriques et on peut former avec eux le rectangle r x CJ

- les 6 triangles constituent le triangle ABC
- Avec les 3 rectangles on peut former le rectangle : r x (AL + BL + CJ)

or AL + BL + CJ = p (demi-périmètre de ABC)
donc si on appelle S l'aire de ABC, on a $\boxed{S = p \times r}$

PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES : Exercice 8

1) a) Pour comprendre en quoi consiste le problème, je dessine un triangle ABC quelconque de médiane [AI] et de hauteur [AH]



b) Les données du problème sont :

a h m

c) L'énoncé nous dit que : BC = a ; AI = m ; AH = h

2) On pourra donc construire [BC] et fixer son milieu I

On cherche alors à construire le point A ;

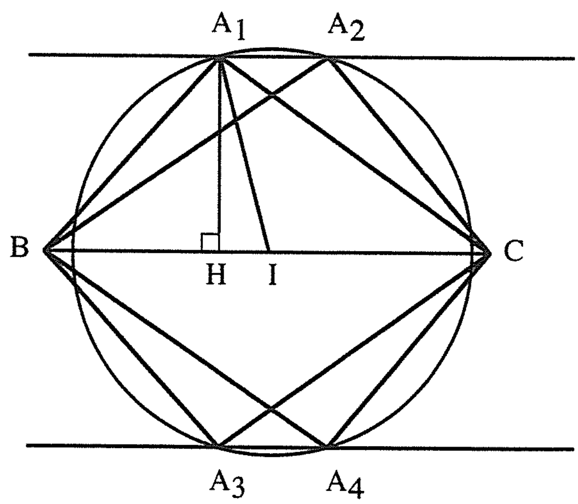
AI donnée donc $A \in C(I;m)$

AH donnée donc A est à la distance h de (BC) donc sur une parallèle à la distance h de (BC) (il y en a 2)

A est donc à l'intersection du cercle et d'une des parallèles qui se couperont si et seulement si $h \leq m$

3) Construction avec les données :

On obtient 4 solutions A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 (en effet $h \leq m$) symétriques 2 à 2 par rapport à (BC)



Remarque : Si h avait été plus grande que m : pas de solution
Si h avait été égale à m : 2 solutions

THÉORÈME DE PYTHAGORE : Exercice 15

1) On se donne un entier impair par exemple 9

On calcule $9^2 = 81$. Or 81 est la somme des entiers consécutifs 40 et 41 ($81 = 40 + 41$)
Le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 40 et 9 a son hypoténuse qui mesure 41 car $41^2 = 40^2 + 9^2$

2) Généralisation :

- soit n entier impair - Alors n est de la forme $n = 2k + 1$

et $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

donc n^2 est de la forme : $n^2 = 2p + 1 = p + (p+1)$ $\boxed{n^2 \text{ est somme de 2 entiers consécutifs}}$

Le triangle rectangle de côtés de l'angle droit n et p a pour hypoténuse x tel que

$x^2 = n^2 + p^2 = (2p + 1) + p^2 = p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$ donc $\boxed{x = p+1}$

3) Quelques triplets qui conviennent : (n , p , p+1)

(9 , 40 , 41) (11 , 60 , 61) (7 , 24 , 25) ...

POLYGONES RÉGULIERS : Exercice 5

On joint les milieux des côtés d'un polygone régulier convexe à n côtés (n entier ; $n \geq 3$)

1) Qu'obtient-on ?

2) Comment est le cercle circonscrit à ce nouveau polygone ?

1) Soit O le centre du polygone ; on sait que la rotation R de centre O et de $\frac{1}{n}$ tour dans le sens des aiguilles d'une montre laisse le polygone invariant. Soit A_1 l'un de ses sommets ; les sommets suivants sont :

$$A_2 = R(A_1)$$
$$A_3 = R(A_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = R(A_{n-1})$$

Soit I_1 le milieu de $[A_1 A_2]$, I_2 celui de $[A_2 A_3]$, ..., I_n celui de $[A_n A_1]$.

Une rotation conservant les milieux des segments, on a :

$$R(I_1) = I_2 \, , \; R(I_2) = I_3, \ldots, R(I_n) = I_1$$

Le polygone $I_1 I_2 \ldots I_n$ est invariant globalement par R, donc $\boxed{\text{c'est un polygone régulier convexe}}$. De plus, $\boxed{\text{il a n côtés}}$.

2) $OA_1 = OA_2$ et I_1 est le milieu de $[A_1A_2]$ donc $[OI_1] \perp [A_1A_2]$

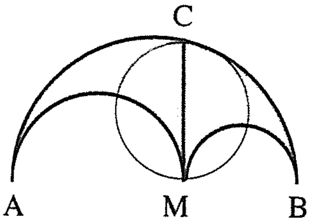
Donc $[A_1A_2]$ est tangent au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à $I_1I_2 \ldots I_n$.

On démontre de même* que : $[A_2 A_3], \ldots, [A_n A_1]$ sont tangents à $\mathcal{C}$,

donc : $\boxed{\mathcal{C} \text{ est le cercle inscrit au polygone } A_1A_2 \ldots A_n}$

* ou alors on peut invoquer la conservation du contact par R.

CERCLES ET DISQUES : Exercice 10



Notons AM = 2R
MB = 2r donc AB = 2 (R + r)

Calculons l'aire $\mathcal{A}$ de l'arbelon par différence de l'aire du disque de diamètre [AB] et des aires des disques de diamètres [AM] et [MB] :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\pi (R + r)^2 - \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \left((R + r)^2 - \pi R^2 - \pi r^2\right) = \frac{1}{2}\pi (2 R r) = \pi R r$$

Appelons C la 2ème extrémité du segment vertical au-dessus de M ; C est sur le cercle de diamètre [AB] et donc le triangle ACB est rectangle en C et [CM] est sa hauteur.

On sait que $CM^2 = MA \times MB$ (propriété de la hauteur d'un triangle rectangle).

$CM^2 = 2 R \times 2r = 4 R r$

Calculons l'aire $\mathcal{A}'$ du disque de diamètre [CM] :

$$\mathcal{A}' = \pi \frac{CM^2}{4} = \pi \frac{4 R r}{4} = \pi R r = \mathcal{A}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{A}'}$$

THÉORÈME DE THALES : Exercice 6

(MNAP) est un parallélogramme donc (MP) // (AC) et par Thalès appliqué au triangle ABC :

$$\frac{MP}{AC} = \frac{BM}{BC} \text{ soit } \frac{MP}{7} = \frac{x}{8} \quad \text{ou} \quad MP = \frac{7x}{8}$$

et (MN) // (BA) et par Thalès appliqué au triangle ABC :

$$\frac{MN}{BA} = \frac{CM}{CB} \quad \text{soit} \quad \frac{MN}{5} = \frac{8 - x}{8} \quad \text{ou} \quad MN = \frac{5}{8}(8 - x) = 5 - \frac{5}{8}x$$

Soit p le périmètre de (MNAP) : $p = 2MN + 2\,MP$

$$p = 2\left(5 - \frac{5}{8}x\right) + 2\,\frac{7x}{8} = 10 - \frac{5x}{4} + \frac{7x}{4} = 10 + \frac{2x}{4} = 10 + \frac{x}{2}$$

Si p = 13,5 alors $10 + \frac{x}{2} = 13,5$

soit : $\frac{x}{2} = 3,5$ ou $\boxed{x = 7}$

CONSTRUCTIONS ET REPORTS AUX INSTRUMENTS : Exercice 7

Construire un triangle rectangle d'hypoténuse et de hauteur associée données, à la règle non graduée et au compas.

Soit $h > 0$ la hauteur et $[BC]$ l'hypoténuse données. On note A le sommet cherché.

Analyse : on suppose le triangle ABC construit ; A est sur l'une des deux droites D_1 et D_2 parallèles à (BC) à la distance h.

De plus, l'angle $\widehat{ABC}$ étant droit, A est sur le cercle C de diamètre [BC].

Synthèse : a) A existe si et seulement si C et D_1 (ou C et D_2) ont au moins un point commun, c'est-à-dire $\boxed{\text{si et seulement si : } h \leq \frac{BC}{2}}$

b) Constructions : supposons $h \leq \frac{BC}{2}$

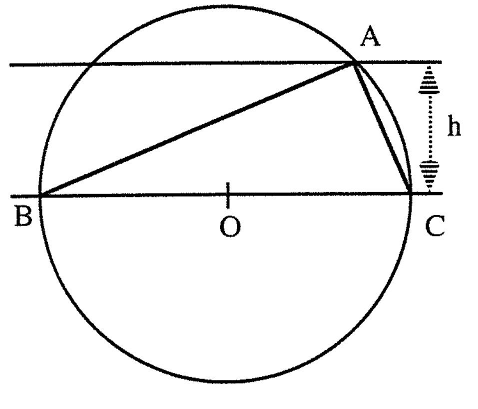
1er cas : $h < \frac{BC}{2}$

Construire le cercle C de diamètre [BC], et une droite D_1 parallèle à (BC), distante de h de (BC). D_1 coupe C en 2 points ; appelons A l'un d'eux.

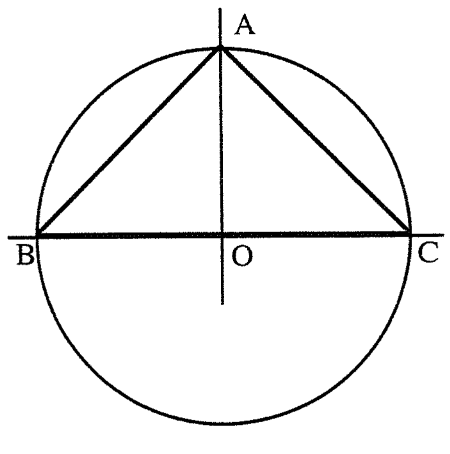
2ème cas : $h = \frac{BC}{2}$

Dans ce cas, ABC est rectangle isocèle (AB = AC) ;

Construire C et la médiatrice de [BC]. Elle coupe C en 2 points ; appelons A l'un d'eux



1er cas



2ème cas

Presses Universitaires Franc-Comtoises
Université de Franche-Comté
25030 Besançon Cedex

Imprimerie
BURS
9 rue lecourbe
25000 besancon
03.81.25.29.00

Dépôt légal 2e trimestre 2002

Auteur Groupe « ÉLÉMENTAIRE »

Titre Pouvoir et savoir faire des Mathématiques

Langage Français

Caractéristiques de l'édition

Édition	Réimpression de l'édition de 1993
Éditeur	Presses Universitaires Franc-Comtoises
Diffuseur	IREM de Franche-Comté
Année	2000
Format	21 x 29,7 cm (A4) 74 pages recto verso support papier
Dépôt légal	3ème trimestre 2000
ISBN	2-909963-20-9 et 2-913322-95-6
PUFC	768-IREM-PU

Public Enseignants du second degré, Professeur des Écoles, étudiants IUFM, formateurs IUFM.

Résumé Cette brochure est un document qui permet à l'étudiant un travail personnel à partir de ses connaissances-outils ("Peux-tu… ?") et de ses connaissances-savoirs ("Sais-tu… ?").
Elle est organisée par thèmes couvrant le programme de mathématiques du concours de recrutement des Professeurs des Écoles de l'Académie de Besançon.
Chaque chapitre est suivi d'exercices ; en fin de volume sont regroupées des pistes de recherche (en général, une par exercice) et des rédactions complètes de solutions (une par chapitre).
Ce document pourra être utilisé avec profit par les enseignants du second degré (Collège, Lycée Professionnel,…) dans le cadre de leurs enseignements (modules).

Mots clés École élémentaire - Collège - L.E.P. - Formation des Maîtres - numérique - proportionnalité - figures géométriques - isométries - constructions.

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Université de Franche-Comté
Département de Mathématiques - UFR Sciences et Techniques
16 route de Gray - 25030 BESANÇON Cedex - France

Tél. : 03 81 66 62 25 - Fax : 03 81 66 62 34
Mél : iremfc@math.univ-fcomte.fr
http : //pegase.univ-fcomte.fr