

Croquer les maths, une question d'échelle

Sylvie Benzoni et Adrien Rossille

Mathématicienne à l'Université de Lyon
et directrice de l'Institut Henri Poincaré

Chargé de médiation scientifique à l'Institut Henri Poincaré

«Croquons les maths» ! Une formule qui peut être interprétée de deux façons : nous pouvons croquer les mathématiques en y goûtant, en s'en délectant, comme on croquerait une pomme, mais aussi croquer les mathématiques en les dessinant, en en faisant des croquis. Un double sens qui fait référence à la fois à la démarche scientifique et au plaisir qu'on peut, ou non, y éprouver. Ces deux sens du verbe «croquer» sont une invitation à parler avec gourmandise de concepts scientifiques. L'un d'eux, la notion d'échelle, nous semble tout indiqué. Si l'on croque les maths sur un dessin, il est souvent bienvenu – c'est aussi le cas pour la physique, la biologie, la géographie... – de faire figurer une échelle à côté de son croquis, sans quoi il serait difficile d'en comprendre le sens. De même pour le sens gastronomique du verbe croquer : l'échelle du gâteau aura toute son importance pour le plaisir à y goûter...

Le changement d'échelle : un simple mouvement de doigts ?

Réfléchir au sujet de l'échelle en sciences, c'est surtout réfléchir aux changements d'échelle. L'enjeu est de taille (c'est le cas de le dire), car l'étude d'un phénomène scientifique dépend de l'échelle à laquelle il se produit et où on l'observe. Si «zoomer» et «dézoomer» sont des gestes devenus instinctifs grâce aux interfaces graphiques telles que les tablettes et les *smartphones*, un changement d'échelle en sciences ne peut se faire par un simple mouvement de doigts. Comment transmettre à un large public cet aspect très important de la recherche scientifique ? Essayons de proposer des réponses avec deux éléments muséographiques de la Maison Poincaré, le futur espace de médiation scientifique porté par l'Institut Henri-Poincaré, qui ouvrira ses portes aux publics en 2022 dans le cinquième arrondissement de la capitale. Nos deux éléments sont situés dans deux espaces distincts du musée, de forme bien différente mais dont les contenus se répondent par rapport à la notion d'échelle.

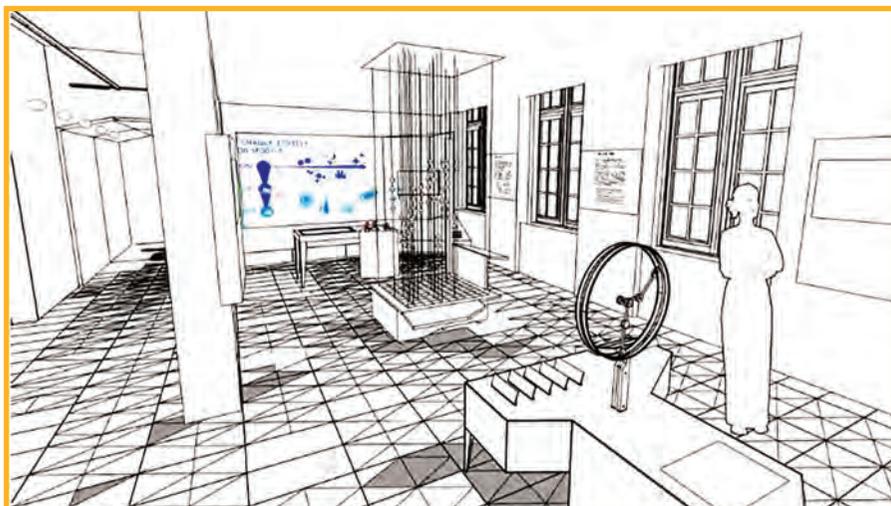
Différents formalismes mathématiques pour différentes échelles

L'échelle est d'abord une indication de la taille du phénomène ou de l'objet d'observation : est-il petit ou grand, et en quel sens ? Sur une carte géographique ou un GPS, peut-être l'exemple quotidien auquel nous sommes le plus confrontés, l'échelle donne le rapport entre une distance « sur la carte » et une distance « dans la réalité ». De la même manière que des cartographes utiliseront pour une carte de randonnée une échelle très différente de celle d'une carte routière nationale, les chercheuses, chercheurs, ingénieures et ingénieurs en mathématiques, physique, chimie, biologie... choisissent l'échelle de leur croquis « la plus commode » pour visualiser leur sujet d'étude. Sur un croquis, même esquissé rapidement à la main, un centimètre de schéma peut représenter plusieurs millions de kilomètres si on dessine la mécanique céleste, ou seulement quelques micromètres si on représente des bactéries.

Toutefois, ce qui importe le plus souvent est moins la taille exacte des objets que leur taille relativement à leur environnement. Une galaxie n'est qu'un petit point sur un schéma d'un amas de galaxies, alors qu'une bactérie est gigantesque comparée aux molécules qu'elle contient. Le choix de l'échelle de modélisation ne se fait donc pas selon la taille brute de l'objet, mais selon sa taille relativement au système étudié ! La galaxie ou la bactérie peuvent toutes deux être une particule élémentaire d'un système beaucoup plus grand qu'elles, comme elles peuvent aussi être le système étudié lui-même. C'est ce que montre la *frise des échelles*, un grand panneau qui habillera un mur entier dans l'espace « Modéliser » de la Maison Poincaré. Le but de cette frise est de mettre en évidence l'universalité du formalisme mathématique, qui permet d'étudier d'une manière analogue des phénomènes à première vue très distincts : écoulement du sang dans une veine, trajet d'un polluant dans une canalisation, mouvement d'une foule de personnes ou même vol d'une nuée d'oiseaux. Ces quatre exemples concernent des échelles physiques très différentes, mais ont une caractéristique commune : il s'agit d'un ensemble de « particules » élémentaires – globules, molécules, humains, oiseaux – regroupées dans un milieu – le sang, l'eau, la foule, la nuée – dont l'une des particularités est de s'écouler de manière fluide. La manière d'étudier ces phénomènes dépend directement de l'échelle d'observation à laquelle on se place. La frise en explicite trois :

- L'échelle *microscopique*, à laquelle le mouvement de chaque particule élémentaire est déterminé par les équations de la mécanique du point (ou éventuellement du solide) ;
- L'échelle *mésoscopique*, à laquelle on étudie le mouvement d'un grand nombre de particules élémentaires par des lois statistiques ;

- L'échelle *macroscopique*, à laquelle l'ensemble du fluide est décrit comme une entité globale, régie par les lois de la mécanique des milieux continus (conservation de la masse ou de l'énergie par exemple).



Vue de l'espace « Modéliser » de la Maison Poincaré, avec la frise des échelles en arrière-plan.

© Agence Du&Ma

À chacune de ces échelles correspondent des formalismes mathématiques différents : systèmes de particules en interaction pour l'échelle microscopique, les lois de physique statistique de Boltzmann à l'échelle mésoscopique, des équations aux dérivées partielles comme celles de Navier–Stokes à l'échelle macroscopique... On peut dans un premier temps se retrouver assommé par ces trois systèmes de pensée qui cohabitent pour l'étude d'un seul phénomène. Toutefois, ce que montre cette frise des échelles, c'est que ces trois méthodes de modélisation sont universelles, au sens où elles s'appliquent à des « fluides » constitués de « particules » de taille pouvant aller du dixième de nanomètre à des millions de kilomètres.

Cette grande frise est complétée par une vidéo qui invite les visiteurs et visiteuses de la Maison Poincaré à voir différemment des phénomènes dont notre perception est restreinte par nos habitudes. Découvrir les similarités entre l'écoulement de l'eau dans une canalisation et celui d'une foule de personnes dans une rue. Constaté que le mouvement d'un oiseau dans sa nuée est proche de celui d'un globule rouge dans le sang. Se rendre compte qu'une image d'étoiles vues de loin ressemble à un nuage de grains de pollen...

Une expérience en réalité mixte pour visualiser les maths autrement

Une autre expérience présentée dans la Maison Poincaré, celle-ci bien plus technologique et immersive, a aussi comme intention de mettre en évidence des situations de changement d'échelle en sciences. Il s'agit d'Holo-Math, une « Visualiser » de la Maison Poincaré. Ce parcours invite ses participantes et participants à s'équiper de casques HoloLens pour passer « de l'autre côté du miroir », dans un univers inspiré d'*Alice au pays des merveilles* de Lewis Carroll, où les mathématiques se matérialisent dans tous les éléments graphiques du décor. La réalité mixte permet de voir un spectacle d'hologrammes qui s'ajoutent à notre réalité sans pour autant l'occulter, contrairement à la réalité virtuelle, qui immerge complètement dans un univers numérique et solitaire. Les casques HoloLens sont en effet des sortes de grosses lunettes avec écran transparent intégré qui permettent de voir tout l'environnement et de se déplacer librement dans tout l'espace disponible.



L'expérience Holo-Math vue de l'extérieur...

© Camille Cier

... et vue depuis les casques.

© OneMore

En s'affranchissant des contraintes du réel, cette nouvelle technologie permet de visualiser un univers dans lequel les mathématiques peuvent s'exprimer librement et devenir directement tangibles. L'immersion permet, entre autres, de changer librement d'échelle : ce qui était invisible dans la réalité vient alors nous envelopper visuellement et auditivement. C'est ainsi qu'Holo-Math permet à chaque participant et participante de zoomer vers l'infiniment petit, pour regarder sous différents angles le mouvement de petites particules dans l'air symbolisées par des grains de pollen. L'observation de leur trajectoire aléatoire, saccadée, en perpétuel mouvement sans qu'il y ait de déplacement global, amène à s'interroger sur la cause de ce mouvement : le chaos moléculaire. Immergés au milieu de l'agitation permanente des molécules de gaz qui

composent l'air, les petits grains de pollen sont percutés en permanence par celles-ci. Comme il y a une très grande quantité de molécules, et que celles-ci vont très vite, chaque grain de pollen se retrouve sans cesse percuté, changeant de direction à chaque collision. Son mouvement peut être modélisé à l'échelle microscopique par une *marche aléatoire*. On finit par l'observer après une série de zooms successifs, lors d'un voyage par étapes vers le chaos moléculaire. Cette approche des changements d'échelle grâce à la réalité mixte fait aussi constater que, tant qu'on ne « zoome pas trop », l'allure de la trajectoire des grains de pollen ne dépend pas de l'échelle d'observation. Autrement dit, avant d'atteindre l'échelle microscopique à laquelle deviennent visibles les trajets en ligne droite réalisés par la marche aléatoire d'un grain de pollen, les zooms sur leur trajectoire ne permettent pas d'obtenir plus d'informations sur celle-ci. Comme si on entrait dans une boucle infinie. Ce constat surprenant est symptomatique d'une *fractale*, une forme identique à elle-même quelle que soit l'échelle à laquelle on l'observe. Est-ce un concept mystérieux inobservable dans la réalité ? Pas du tout, il suffit de cuisiner un chou romanesco ou de regarder une carte satellite de la Bretagne pour le percevoir. Du moins faut-il ne pas trop zoomer, comme pour la trajectoire des grains de pollen...



Un chou romanesco et une carte satellite de la Bretagne : quel que soit le niveau de zoom, jusqu'à une certaine limite, la forme générale de l'objet reste identique.

© Héroïse Afman

© Google Earth / Google

Quand le temps s'écoule en continu : le mouvement brownien

La trajectoire aléatoire et d'apparence fractale du grain de pollen suggère qu'on peut aussi la modéliser par un mouvement brownien. Le mouvement brownien est un processus qui décrit l'évolution d'une variable aléatoire en

fonction du temps, comme l'exemple de la marche aléatoire. Mais à la différence de cette dernière, il le fait avec un temps qui s'écoule de manière continue. Dans la marche aléatoire, le temps avance « par sauts » : un mouvement correspond à un choc. Avec le mouvement brownien, le temps s'écoule de manière continue, mais la trajectoire devient plus difficile à appréhender : elle est fractale et correspond à une fonction continue mais dérivable nulle part. En d'autres termes, on peut en théorie la dessiner sans lever le crayon, mais la courbe ne peut admettre de tangente en aucun point, comme s'il y avait « un angle en chaque point ». Alors que la marche aléatoire était la modélisation du mouvement du grain de pollen la plus adaptée à l'échelle microscopique, la modélisation par le mouvement brownien est celle qui correspond le mieux à une échelle macroscopique.

Comme pour les modèles de la frise, la force du concept mathématique de mouvement brownien est son universalité : il peut modéliser le mouvement de petites particules dans l'air, mais aussi les cours de la bourse, le phénomène physique de percolation, la circulation des globules dans les vaisseaux sanguins, des techniques de gestion des risques dans le domaine de l'énergie ou encore le mouvement de chasse de certains animaux prédateurs.

Ainsi, les deux éléments muséographiques décrits ici permettent d'aborder la notion d'échelle de manière complémentaire. La frise permet d'embrasser d'un seul coup d'œil le fait que la notion d'échelle n'est pas qu'une question de taille. Les explications écrites et les illustrations graphiques sont pensées pour une visite en autonomie, mais l'expérience Holo-Math est quant à elle toujours accompagnée par un médiateur ou une médiatrice, par qui transite le discours scientifique, pendant que l'environnement numérique permet de percevoir physiquement un concept abstrait.

S. B. & A. R.

Pour en savoir (un peu) plus

Holo-Math, visualiser les mathématiques autrement. Adrien Rossille, hors-série 77 de *Tangente*, 2021.

La parole à Jean Perrin : les courbes sans tangente. Clotilde Fermanian Kammerer, Stéphane Jaffard et Guillaume Saes, *Image des mathématiques*, 2020, disponible en ligne.

« L'oreille mathématique : Nicolas Curien. » Un épisode du podcast produit par Hélène Delye pour l'Institut Henri Poincaré, disponible en ligne.

Random Search Wired Into Animals May Help Them Hunt. Liam Drew, *Quanta Magazine*, 2020, disponible en ligne.