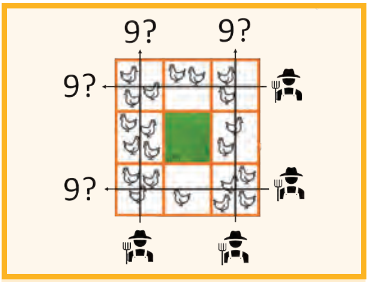
Le problème du fermier paresseux

Guillaume Reuiller

Médiateur scientifique au Palais de la découverte

Un fermier possède un poulailler. Au centre : une pelouse pour que les poules puissent se dégourdir les pattes. Autour d'elle : huit casiers pour que les gallinacés puissent dormir et couver. Chaque soir, notre fermier fait le décompte de ses fidèles pondeuses, d'une façon à la fois paresseuse, originale et, pour tout dire, assez inefficace… Jugez plutôt : il ne les compte pas casier par casier, mais préfère se positionner dans chaque alignement complet de trois casiers pour déterminer le nombre total de poules qu'il y aperçoit. S'il est toujours de 9, il estime qu'elles sont toutes rentrées. Comment peuvent-elles alors être réparties dans les casiers ?



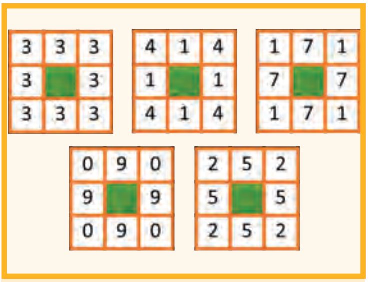
L'énoncé du problème.

© G. Reuiller, 2021

Le problème a été posé ainsi aux participants d'un atelier en ligne proposé lors du salon déMATHérialisé de 2020. Cette formulation se veut attrayante, pour donner envie de s'attaquer au problème, et suffisamment ouverte pour donner lieu à des investigations intéressantes. Et les joueurs, à l'aide de bouts de papier, de pions ou de céréales (à défaut d'avoir de vraies poules sous la main), ne se sont pas gênés pour expérimenter, se poser des questions, établir des conjectures, essayer de les démontrer. Bref : explorer le problème. Ce que vous êtes invités à faire !

Expérimentations dans la basse-cour !

Le chiffre 9 n'a pas été choisi au hasard : avec ce nombre de poules par alignement, il est très facile de trouver une, voire plusieurs solutions au problème. Surtout si le joueur dépasse une contrainte « psychologique » (c'est-à-dire qu'il s'est imposée de lui-même sans qu'elle soit stipulée) : il n'est nullement tenu de remplir toutes les cases !



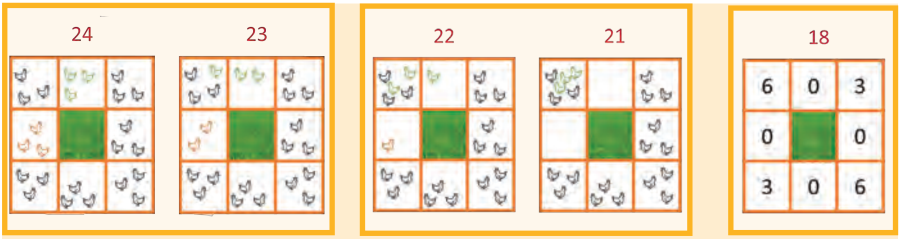
Quelques répartitions possibles, mobilisant respectivement vingt-quatre, vingt, trente-deux, trente-six et vingt-huit poules.

Le but est d'avoir rapidement un panel assez large de possibilités, pour amener les participants de l'atelier à se poser des questions assez naturelles :

- Toutes les solutions sont-elles symétriques ? Comme ce sont les plus simples à trouver, souvent les joueurs n'obtiennent que des solutions symétriques. Du moins au début. Puis les premiers contre-exemples arrivent…
- Pourquoi le nombre total de poules n'est-il pas toujours le même ? Les participants à cet atelier étaient, en général, très surpris de constater qu'ils trouvaient des solutions différentes, certes, mais mobilisant de plus des nombres de poules différents ! Sans parler de système de quatre équations à huit inconnues, un simple constat permet de le comprendre : les poules placées dans les casiers aux coins, contrairement aux casiers des milieux, sont comptées deux fois. On peut donc diminuer (ou augmenter) le nombre total de volatiles en en faisant passer d'un casier central à un casier en coin (ou l'inverse). Cette remarque offre en fait une clé de compréhension de la situation proposée et un levier très efficace pour explorer le problème.
- Quelles valeurs peut prendre le nombre total de poules ?
- Combien y a-t-il de répartitions possibles des poules répondant à la contrainte du fermier ?

Discours sur la méthode… du fermier

Si le but réel de notre éleveur est de s'assurer qu'il a, tous les soirs, le même nombre total de volatiles, nous pouvons nous interroger sur l'efficacité de sa méthode ! Partons de la solution à trois poules par casier. Elle mobilise vingt-quatre gallinacés. Si une poule part du casier central de la première ligne pour aller dans le casier à sa gauche, il y en a toujours 9 sur la première ligne, mais il y en a 10 sur la première colonne. Une cocotte du casier central de la première colonne peut donc prendre la poudre d'escampette sans que le fermier ne s'en rende compte : il verra toujours neuf poules par alignement alors qu'au total il en a perdu une. Cette opération peut être reproduite encore deux fois : une poule passe du casier central de la première ligne vers le casier à sa gauche, et une cocotte du casier central de la première colonne se fait la malle. Il n'y a alors plus que vingt-trois, vingt-deux puis vingt et une poules au total, mais toujours neuf par alignement de trois cases.



Comment trois, puis six poules peuvent quitter le poulailler, sans que le fermier ne s'en aperçoive...

Nous pouvons encore continuer à « vider » ainsi le poulailler, en faisant descendre une à une les trois poules du casier central de la troisième colonne, et en vidant celui de la dernière ligne, pour se retrouver successivement avec un total de vingt, dix-neuf et dix-huit volatiles. Dans cette dernière situation, tous les casiers centraux sont vides : il n'est plus possible de déplacer des volatiles vers les casiers dans les coins. Toutes les poules restantes sont « maximisées » : elles sont comptées deux fois chacune. 18 est donc le nombre minimum de volailles que possède le fermier.

À l'inverse, en faisant passer des ovipares d'un casier en coin à un casier central, il est possible de faire rentrer des poules en douce : le total des gallinacés sera passé successivement de 24 à 27. En vidant successivement tous les coins, nous pouvons monter, oiseau par oiseau, jusqu'à un total de 36, qui est un maximum (toutes les poules sont alors dans des casiers centraux, donc sont « minimisées » car comptées une seule fois). Et le fermier verra toujours ses neuf fidèles pondeuses sur chaque alignement complet de trois casiers ! Les poules peuvent atteindre tous les effectifs de 18 à 36, soit passer du simple au double, sans que le fermier ne s'en aperçoive. Elles peuvent donc tranquillement faire le mur ou inviter des copines, sans souci du qu'en-dira-t-on !

Comment trois, puis douze poules peuvent entrer dans le poulailler, sans que le fermier ne s'en aperçoive.

Trouver toutes les solutions ? L’algèbre à la rescousse !

Une fois qu’ils avaient compris le principe, les participants de l’atelier finissaient tous par arriver à ce résultat, en manipulant en direct leurs petits objets sur un quadrillage. En revanche, la dernière question sur le nombre de configurations possibles n’était jamais traitée et laissée en suspens. De fait, le dénombrement complet des solutions différentes est très loin d’être immédiat. Il faut d’abord s’entendre sur la signification de « différentes » : pour nous, deux solutions le sont si aucune ne peut être obtenue à partir de l’autre en la faisant tourner ou en utilisant un axe de symétrie. Il faut surtout dénombrer, pour chaque nombre total possible de poules entre 18 et 36, toutes les solutions correspondantes !

Un peu d’algèbre nous sera utile. Notons de A à H les nombres de poules dans chacun des huit casiers, et S le nombre total de volatiles : $S = A + B + C + D + E + F + G + H$. Puisque $A + B + C = F + G + H = 9$, on peut écrire que $D + E = S - 18$. De même, $A + D + F = C + E + H = 9$ nous donne $B + G = S - 18$.

$$A+B+C+D+E+F+G+H = S$$
$$9 + D + E + 9 = S$$
$$D + E = S-18$$
$$B + G = S-18$$

Algébrisation du problème.

Combien y a-t-il de solutions à dix-huit poules ?
Si S vaut 18, nécessairement $D = E = B = G = 0$: un total de 18 ne peut s’obtenir qu’en vidant complétement les casiers centraux. Reste alors à placer les dix-huit volailles dans les coins, en sachant que la somme des poules dans deux coins adjacents vaut nécessairement 9. Fixer la valeur dans deux coins adjacents fixe immédiatement la valeur dans les deux autres, donc trouver toutes les solutions à 18 revient en fait à regarder toutes les façons d’écrire 9 comme somme de deux nombres entiers : $9 = 0 + 9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$. Cela nous donne cinq solutions.

9	0	0
0		0
0	0	9

8	0	1
0		0
1	0	8

7	0	2
0		0
2	0	7

6	0	3
0		0
3	0	6

5	0	4
0		0
4	0	5

Il existe cinq configurations possibles avec un total de dix-huit poules. Et seulement une avec trente-six poules.

© *G. Reuiller, 2021*

0	9	0
9		9
0	9	0

Combien existe-t-il de solutions avec trente-six gallinacés ?
En remplaçant S par 36, on obtient $B+G=D+E=36-18=18$, qui ne peut être réalisé que si $B=G=D=E=9$: il n'existe qu'une seule solution à trente-six poules, constituée de neuf animaux dans chaque casier central et aucun dans les coins.

Combien y a-t-il de solutions à vingt-quatre poules ?
Nous n'avons pas trouvé de méthode simple et élégante permettant de répondre à cette question, et n'avons pas voulu utiliser d'ordinateur. Voici comment nous avons procédé. En remplaçant S par 24 dans les relations précédentes, on apprend que la somme des nombres de poules des casiers centraux des deux colonnes et des deux lignes complètes vaut 6. Or il n'y a que quatre façons d'écrire 6 comme somme de deux nombres entiers, qui nous donnent autant de combinaisons possibles pour les couples (D,E) et (B,G) : $6=0+6=1+5=2+4=3+3$.
Explorons un premier cas : $D=B=0$ et $E=G=6$. Hélas ! La donnée de ces quatre valeurs ne suffit pas à déterminer une solution unique : il y a plusieurs façons de finir de remplir la grille. En fait, une donnée supplémentaire impose une unique solution : si vous remplissez une case en coin, les autres s'obtiendront par soustraction à partir de la somme imposée. L'idée est donc de fixer une

D = 0 et E = 6
B = 0 et G = 6

9	0	0
0		6
0	6	3

8	0	1
0		6
1	6	2

7	0	2
0		6
2	6	1

6	0	3
0		6
3	6	0

Les quatre solutions obtenues pour deux combinaisons de cases centrales données, en faisant varier le nombre de la case dans le coin en haut à droite.

© *G. Reuiller, 2021*

position de coin (en haut et à droite par exemple), de décliner toutes les valeurs possibles qu'elle peut contenir, puis de finir de remplir la grille. Mesurez toute la lourdeur de cette méthode : il faut trouver toutes les solutions pour chacun des duos de combinaisons, en faisant bien attention de ne pas compter deux fois la même ! Vous avez le droit de trouver cela pénible. Et ce, même si la symétrie vient parfois à notre secours… Par exemple, une fois étudié le cas « D = 0, E = 6, B = 2 et G = 4 », il est inutile d'étudier « D = 2, E = 4, B = 0 et G = 6 » : les solutions qu'il peut nous donner sont toutes des rotations de celles du premier cas. Soit tout de même quarante solutions à vingt-quatre poules.

	D=0 E=6	D=1 E=5	D=2 E=4	D=3 E=3
B=0 G=6	4			
B=1 G=5	4	5		
B=2 G=4	4	5	6	
B=3 G=3	2	3	3	4

Décompte des solutions obtenues pour chaque couple de combinaisons de valeurs pour les cases centrales.

18	19	20	21	22	23	24
5	9	17	22	30	34	40
25	26	27	28	29	30	31
40	41	35	29	20	16	10
32	33	34	35	36	365	
8	4	3	1	1		

Décompte de toutes les configurations possibles pour chaque total admissible de poules.

Pour finir de répondre à la question initiale, il aurait fallu faire le même genre de dénombrements pour les autres nombres totaux possibles de poules… Ni les participants, ni les organisateurs n'en ont eu le courage, mais une bonne âme a écrit un programme pour les trouver à notre place (remerciements à Sabrina Coudry !). Chaque jour d'une année non bissextile, les poules peuvent adopter une configuration correcte différente… Notez l'étonnante répartition des nombres de configurations : elle n'est absolument pas symétrique !

Il est passionnant de voir comment un problème à l'énoncé si simple et au contenu mathématique si élémentaire peut donner lieu à tant d'explorations, qui dépassent largement ce qu'il est possible de faire lors d'un atelier d'une heure. Surtout que la situation initiale peut être vue sous un autre angle. Il y a deux paramètres dans ce problème : le nombre total de poules dans le poulailler et le nombre de poules exigé par ligne ou par colonne. Nous avons considéré le deuxième comme constant, et fait varier le premier. Mais nous pourrions faire le contraire : avoir toujours le même nombre total de poules, et se demander quelles seraient les valeurs possibles pour ce second paramètre… À vous de jouer !

G. R.

Pour en savoir (un peu) plus

Récréations mathématiques. Jacques Ozanam, extraits commentés par André Deledicq, problème 10, ACL – Éditions du Kangourou, 2010.

Récréations mathématiques d'Ozanam. Pierre Crépel et Nicolas Pelay, *Images des mathématiques*, 2011, disponible en ligne.