De la symétrie en pâtisserie : comment couper une pomme

Mickaël Launay

Mathématicien, auteur et Youtubeur

Je devais avoir 11 ans lorsque, lors d'un repas au self du collège, un ami me montra une fascinante façon de couper une pomme en deux parts égales. Avec un couteau, il avait réalisé six sections très précises faisant des angles droits entre elles. À l'issue de la dernière, la pomme s'était alors séparée en deux morceaux symétriques comme ceux que vous pouvez voir sur la figure de gauche.

Une pomme coupée en deux morceaux symétriques.

Le résultat auquel je suis parvenu après quelques essais.

Une solution simple mais moins élégante.

Photo : M.L., 2021

Une fois rentré chez moi, je tentais de reproduire le truc en essayant de me rappeler ses gestes. Après quelques essais, je parvenais à un résultat qui toutefois ne me semblait pas identique. Vous le voyez sur la figure du milieu. Un peu plus tard, je découvris le lien qui existait entre ces découpages et l'étude des *polycubes*, ces figures formées de petits cubes assemblés les uns aux autres qui sont la source de nombreux puzzles. En considérant, très approximativement, que la pomme est « un cube de taille $2 \times 2 \times 2$ aux angles arrondis », il s'agissait de la couper en deux pièces composées chacune de quatre petits cubes $1 \times 1 \times 1$.

Il se trouve qu'il n'existe que trois façons différentes de réaliser un tel découpage. La troisième est cependant moins amusante : elle consiste simplement à trancher la pomme en deux en un seul coup de couteau (figure de droite).

Des jeux de construction à la symétrie en pâtisserie

À bien y réfléchir, il y avait une autre différence majeure entre le découpage de mon ami et le mien. Alors que les deux pièces de la première pomme étaient identiques, celles de la deuxième étaient seulement symétriques : l'une était le reflet de l'autre dans le miroir. C'est en effet une propriété bien connue des amateurs de puzzles et de jeux de construction : certaines pièces sont *chirales*, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent pas être superposées avec leur reflet dans le miroir. L'exemple le plus familier de telles formes est celui de nos mains : lorsque vous observez votre main droite dans un miroir, vous voyez une main gauche.

L'utilisation de la symétrie sous toutes ses formes est intéressante en cuisine, et particulièrement en pâtisserie, car elle permet de créer des motifs réguliers et particulièrement esthétiques.
Parfois, ces motifs se trouvent naturellement dans la forme des aliments travaillés. C'est le cas, entre autres, de la carambole, ce fruit dont la coupe donne d'élégantes étoiles à cinq branches, ou encore des graines de grenades, qui prennent la forme de *rhombo-dodécaèdres*, c'est-à-dire de solides à douze faces en losange. Dans d'autres cas, c'est au cuisinier de façonner avec sa matière première les formes qui nous donneront envie de croquer dans sa préparation. Selon les angles et le nombre de découpes, il est possible d'inventer de nombreuses variations géométriques de ces découpages et de les appliquer à divers autres fruits. Mais il est possible d'aller bien plus loin.

Des mathématiques appétissantes : du tressage des brioches

Le façonnage des brioches offre un autre domaine d'exploration des symétries. Après avoir fait lever la pâte, cette dernière est généralement divisée en plusieurs rondins, qui sont tressés entre eux afin de prendre, à la cuisson, des formes vallonnées et dorées. Les deux types de tressage les plus simples sont ceux à deux branches et ceux à trois branches. Comme pour le découpage des pommes, ils se distinguent assez aisément par leur symétrie.

À gauche,
le tressage à deux branches.
À droite,
le tressage à trois branches.
©M.L., 2021

La première brioche possède un centre de symétrie, ce qui signifie que vous ne verrez pas la différence dans son motif si vous la faites tourner d'un demi-tour sur la table (ou si vous regardez la figure de gauche en tenant cette brochure à l'envers). En revanche, cette symétrie particulière est chirale : la brioche n'est pas identique à son reflet. Il existe donc deux types de brioches à deux branches : les *dextrogyres*, dont l'hélice tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, et les *lévogyres*, qui tournent dans l'autre sens.

La seconde, en revanche, se confond avec son reflet et n'a pas de centre de symétrie. Vue de dessus, elle ressemble à un épi et possède un axe de *symétrie glissée*. En d'autres termes, l'axe qui la traverse dans sa longueur sépare la brioche en deux moitiés dont les motifs sont identiques, mais décalés. Les épis d'un côté se trouvent entre les épis de l'autre côté.

Si ces deux-là sont les plus fréquentes, la diversité des tressages ne s'arrête pas à ces exemples. Les variations sont infinies. Certains tressages utilisent quatre, cinq ou même davantage de branches. Quelques-uns n'utilisent même qu'une seule branche ! Dans ce cas, en mathématique, le résultat obtenu ne s'appelle plus une *tresse*, mais un *nœud*. C'est le cas par exemple de la brioche dont le façonnage est représenté ci-dessous.

Une brioche « tressée avec une seule branche ».

© M.L., 2021

Les nœuds sont généralement classés par le nombre d'intersections de la bande avec elle-même. Un tableau complet des nœuds jusqu'à sept croisements se trouve ci-dessous.

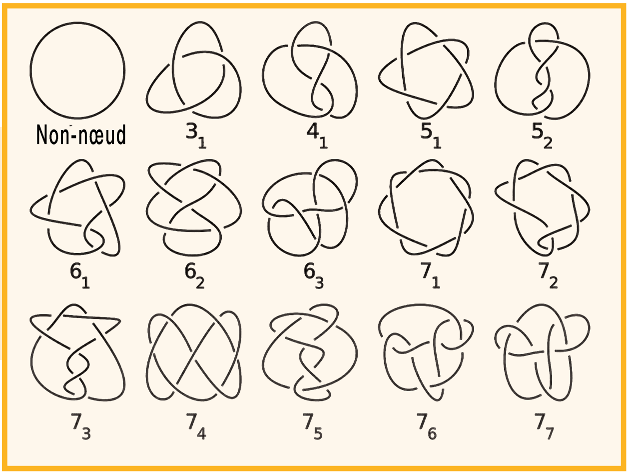


Tableau complet des nœuds de zéro à sept croisements.

© Dan Gruber, 2011

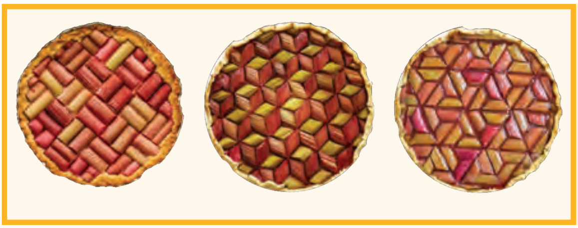
Pour leur étude théorique, les extrémités des nœuds ne sont pas laissées libres, mais réunies de façon à former une boucle. Ainsi, le *non-nœud* est simplement une boucle sans croisement, un beignet ou un *donut* pour le dire en termes pâtissiers. Celui numéroté 3_1 n'est nul autre que le classique *nœud de trèfle*. Les nœuds *étoilés*, tels que le 5_1 ou le 7_1, peuvent être vus comme des tresses à deux branches dont les extrémités ont été reliées : ils sont faciles à façonner et fréquemment utilisés pour former des brioches en couronne.

De l'importance d'une bonne vision dans l'espace…

Mais revenons à notre brioche à une branche. Imaginez que vous rejoigniez les deux extrémités libres en haut et en bas. Sauriez-vous alors dire à quel nœud mathématique du tableau elle correspond ?
La question n'est pas facile du tout et demande soit de bonnes facultés de vision dans l'espace, soit d'avoir une ficelle sous la main et de se prêter à quelques manipulations. D'une manière générale, un même nœud peut se présenter de multiples façons différentes et savoir en identifier deux égaux est une question très difficile qui suscite, aujourd'hui encore, de nombreuses recherches. C'est ainsi, par exemple, que le 2 février 2021, le mathématicien britannique Marc Lackenby (né en 1972) fit sensation en présentant un nouvel algorithme de reconnaissance de nœuds, plus rapide que tous ceux connus jusqu'à présent. Pour notre brioche à une seule branche, le nœud correspondant est celui numéroté 6_3. Mais bien sûr, libre aux gourmets amateurs de s'inspirer de toutes les autres pour former des structures briochées toujours plus surprenantes !

… pour apprécier brioches et autres tartes à la rhubarbe

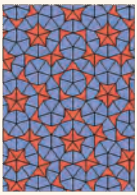
Les tartes permettent, elles aussi, de nombreuses variations géométriques et, parmi elles, celles à la rhubarbe sont sans doute mes préférées. Les tiges de rhubarbe se coupent aisément en pièces géométriques régulières, permettant la réalisation d'une grande variété de motifs. La figure suivante en présente un petit échantillon, mais je ne peux que vous encourager à chercher d'autres images de telles tartes sur Internet pour vous rendre compte de leur diversité.

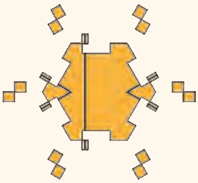


Des tartes et des symétries.

Nous entrons maintenant dans le domaine des pavages. Et encore une fois, leur classification peut se faire par l'observation de leurs symétries. Pour éviter toute irrégularité due au bord de la tarte, on peut imaginer que cette dernière « se prolonge à l'infini » (les gourmands apprécieront !) et que le motif de rhubarbe est sans limite. Dans ce cas, les axes de symétrie du pavage de gauche prennent deux directions perpendiculaires et forment un quadrillage carré. Ceux des deux autres tartes, en revanche, prennent six directions différentes, faisant des angles de 60° entre elles. D'une certaine manière, on peut donc identifier que ces deux dernières tartes appartiennent à la même famille… ou presque. En étudiant leur structure attentivement, il est possible de remarquer que le pavage du centre possède des centres de symétrie (au milieu de chacune des pièces en losange) tandis que celui de droite n'en a aucun. Leur parenté n'est pas parfaite.

À la fin du XIXe siècle, il fut établi par le mathématicien et cristallographe Evgraf Stepanovitch Fedorov (1853 – 1919) qu'il n'existe, en tout et pour tout, que dix-sept catégories de pavages réguliers, selon le nombre et la nature de leurs symétries. Mais un pavage n'a pas besoin d'être régulier pour être élégant. Les pavages étudiés par Roger Penrose, parrain de ce salon, dans les années 1970 et qui portent aujourd'hui son nom font partie des plus célèbres pavages *apériodiques*. Quoique composés de seulement deux pièces différentes (la *fléchette* et le *cerf-volant*), leur agencement se renouvelle sans cesse et il n'existe pas deux endroits du plan d'où ils s'emboîtent de la même façon. Voyez la figure suivante, à gauche. À mon grand regret, je n'ai pas pu trouver, parmi ces réalisations, de tartes aux pavages de Penrose. Peut-être se trouvera-t-il, parmi nos lecteurs et lectrices, quelques pâtissiers pour réparer cet inadmissible oubli !





À gauche, pavage de Penrose, réalisé à l'aide de fléchettes et de cerfs-volants.

© *Herbert Kociemba, 2018*

À droite, la tuile (non connexe) de Socolar et Taylor.

© *Parcly Taxel, 2015*

Si les pavages de Penrose se composent de deux pièces distinctes, savoir s'il existe une forme de pièce qui, à elle seule, permet de paver le plan, mais uniquement de façon apériodique, fut longtemps une question ouverte. On l'appelle le *problème einstein*. Rien à voir toutefois avec le père de la relativité, « ein Stein » signifie simplement « une pierre » en allemand. Ce n'est qu'au début des années 2010 que Joshua Socolar et Joan Taylor y répondirent par l'affirmative en proposant la tuile reproduite ci-dessus à droite et qui porte aujourd'hui leur nom. Cette pièce possède toutefois un défaut : elle n'est pas *connexe*, c'est-à-dire qu'elle est composée de plusieurs morceaux qui ne se touchent pas, mais doivent tout de même être considérés comme solidaires les uns des autres. Le problème einstein avec une tuile connexe est, lui, toujours sans réponse en 2021. Roger Penrose pense qu'un tel objet pourrait exister.

Paris-Brest, millefeuilles, pizzas… et kek lapis Sarawak !

Si vous pratiquez la pâtisserie, la géométrie est une alliée sans pareille pour votre imagination. Ces quelques pages sont trop courtes pour vous en dresser un panorama complet. Encore aurait-il fallu parler de la topologie des Paris-Brest, des mille-feuilles (qui n'en ont en fait que 730, tout comme les croissants), ou encore du *théorème de la pizza*, qui, bien entendu, s'applique aussi aux tartes aux fraises.

J'ai découvert en écrivant cet article les kek lapis Sarawak, desserts de fête originaires de Malaisie. D'apparence anodine à première vue, ils ne révèlent leurs secrets qu'une fois coupés : des empilements de gâteaux multicolores s'y intriquent en trois dimensions pour former de magnifiques motifs. Coupez le kek lapis dans un sens ou dans un autre et sa tranche vous montrera un décor différent !

Tranches de *kek lapis Sarawak* confectionnés par la patissière sarawakienne Jennifer Chen.

Ainsi en va-t-il des mathématiques : parfois austères de l'extérieur, un coup de cuillère sans complexes vous en dévoilera bien des merveilles !

M. L.

Pour en savoir (un peu) plus

Théorie des nœuds : première preuve d'un algorithme de dénouage rapide. Philippe Pajot, *La Recherche*, 2021, disponible en ligne.

« The Rolfsen Knot Table. » Table des nœuds (The Knot Atlas), disponible en ligne.

« Le mystère de la farfalle. » Mickaël Launay, conférence pour la journée de pi, 2017, disponible en ligne.