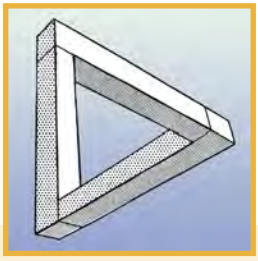
Les maths des figures impossibles avec Sir Roger Penrose

propos recueillis par Édouard Thomas
Mathématicien et journaliste scientifique

Roger Penrose est le parrain de l'édition 2021 du Salon culture et jeux mathématiques. Il revisite dans cet entretien certains de ses travaux relatifs aux figures impossibles, à la géométrie et à l'art.

É.T. : Faisons commencer notre voyage dans le monde des figures impossibles avec la publication du fameux *triangle de Penrose*. Nous sommes en 1958. Or, un objet similaire se trouve dès les années 1930 dans l'œuvre de l'artiste suédois Oscar Reutersvärd (1915 – 2002). Aviez-vous connaissance de son travail ?

R.P. : Dans l'œuvre de Reutersvärd, en fait ce sont des cubes empilés sous la forme des barres rigides, mais il s'agit essentiellement de la même figure impossible, de la même illusion. Je n'avais pas entendu parler de son œuvre. Je ne me souviens plus à quel moment quelqu'un, sans doute un Suédois, m'a mentionné son travail, avant l'édition d'une série de timbres commémoratifs. Reutersvärd s'est aussi amusé avec des escaliers un peu compliqués. Mais je n'avais pas connaissance de son œuvre.



À gauche, le triangle de Penrose (ou « tribarre »), tel que publié en 1958 par Roger Penrose et son père, Lionel Penrose, célèbre généticien.
© *L.P, R.P.*/The British Journal of Psychology *49(18), 1958*

À droite, les timbres suédois émis en 1982 en hommage à Oscar Reutersvärd.
© *Indiana University Libraries, Bloomington*

En fait, c'est un bel exemple de cohomologie *[voir encadré page 5]*, je m'en suis aperçu plus tard. Je peux vous raconter l'histoire. Il y a bien longtemps, j'étais impliqué dans un programme télévisé britannique consacré à la théorie des *twisteurs [la grande théorie à laquelle Roger Penrose se consacre depuis la fin des années 1960, qui vise à réconcilier la gravitation et la mécanique quantique]*. À un moment, ils m'ont demandé à quel point cette théorie est « la bonne ». Que peut-on faire avec la théorie des twisteurs ? J'ai répondu que l'on peut résoudre les équations de Maxwell *[qui expriment des lois fondamentales en physique]* ou représenter de manière élégante les solutions de l'équation du champ d'Einstein *[ce sont les équations qui fondent la théorie de la relativité générale]*. Ils m'ont demandé si je pouvais en dire plus, et j'ai répondu que ce ne serait pas une bonne idée, tout développement faisant intervenir la notion de cohomologie.

Le lendemain matin, je me suis rendu compte que la « tribarre » *[le triangle de Penrose]* était une incarnation de la cohomologie. Localement, la distance de la figure à vos yeux est le paramètre constant. Mais lorsque vous en faites visuellement le tour, il se passe quelque chose de non trivial sur le plan de la cohomologie. Je leur en ai parlé le lendemain, mais ils n'ont pas retenu cette idée dans l'émission.

Pourriez-vous développer cette idée ? Comment les mathématiques peuvent-elles aider à caractériser les figures « vraiment » impossibles ?

Après l'émission, j'ai reparlé de mon idée avec des collègues mathématiciens. Cette notion de distance à l'œil de l'observateur est essentielle en perspective. J'en ai tiré un article, *On the cohomology of impossible figures [The MIT Press, 1992, voir encadré page 7 pour un développement mathématique]*.

Triangle de Penrose, figures impossibles, paradoxes visuels… L'œuvre du graveur néerlandais Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972) n'est pas loin ! Comment l'avez-vous connu ?

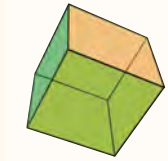
Ma rencontre avec Escher commence avec le Congrès international des mathématiciens en 1954, qui se déroulait à Amsterdam. Un collègue avait sur lui un catalogue d'exposition, avec sur la couverture cette œuvre *Jour et Nuit* (1934), qui représente des oiseaux allant en deux sens opposés. Il m'apprend qu'un artiste nommé Escher faisait l'objet d'une exposition au musée Van-Gogh. Je m'y suis rendu. J'ai été stupéfait, notamment par *Relativité* (1953) *[voir en page 8]*, qui montre des escaliers imbriqués, sans respect pour la gravité.

L'art de « compter les trous »

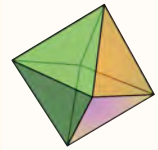
Les *groupes d'homologie* permettent de définir précisément ce qu'est un « trou » dans une surface mathématique abstraite de grande dimension, comme une variété, ou dans un espace topologique. L'*homologie* permet de « classer ces différentes catégories de trous ». On parle également de *cohomologie* et de *groupes de cohomologie* au lieu de « homologie » et « *groupe d'homologie* » ; la différence entre les deux terminologies est essentiellement technique.

L'histoire de cette théorie commence avec la fameuse *formule d'Euler*, ou *caractéristique d'Euler – Poincaré*. Dans le cas d'un polyèdre, elle avance que le nombre S des sommets plus le nombre F des faces moins le nombre A des arêtes est constant, égal à 2. René Descartes puis Leonhard Euler savaient que S + F – A = 2. Ce puissant invariant a été généralisé au cas de polyèdres « comportant des trous », puis à des contextes extrêmement généraux, par Henri Poincaré, André Weil et Alexander Grothendieck.

S = F = 4 et A = 6.



S = 8, F = 6 et A = 12.



S = 6, F = 8 et A = 12.

S = 20, F = 12 et A = 30.

© *Lwphillips, 2014*

Laissons Roger Penrose évoquer un joli problème cohomologique, qui inspirera peut-être des lecteurs amateurs d'illusions et de mathématiques :

« Voici un problème que je soumets à mes étudiants. Ils ne l'ont pas résolu, et moi non plus ! Nous nous trouvons dans une pièce, avec un dôme sphérique, comme un planétarium. Il y a des dessins sur tout le pourtour de la sphère, qui représentent une image qui ne peut pas exister, une figure impossible. Puis quelqu'un ouvre une porte. On a alors un trou dans la sphère, et soudain l'image qui était impossible devient possible. C'est un H^2 [le deuxième groupe de cohomologie]. *Est-ce réalisable ? »*

J'en suis sorti en me disant que je devais représenter des impossibilités que je n'avais jamais vues, même dans cette exposition. J'ai dessiné des ponts, des routes, des rivières empruntant des chemins incohérents. J'ai simplifié le résultat pour aboutir à la tribarre. Je l'ai montrée à mon père, qui a commencé à dessiner des bâtiments incohérents. Cela a évolué vers les escaliers impossibles. On a alors décidé d'écrire un article. Mais à quel journal soumettre cet article, quel était le sujet ? Mon père connaissait un éditeur au *British Journal of Psychology*, donc on a convenu que c'était de la psychologie, l'article a été publié *[Impossible objects: a special type of visual illusion, 1958]* et on en a envoyé une copie à Escher.

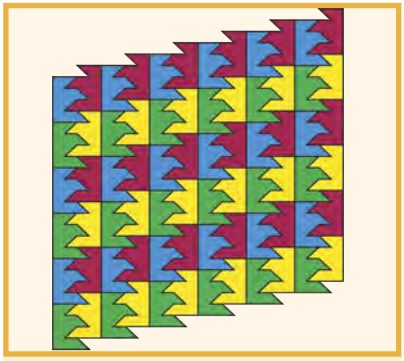
Mon père et lui ont beaucoup échangé, et Escher a réalisé *Montée et Descente* (1960), qui figure un escalier impossible. Je suis allé lui rendre visite à Apeldoorn. Il m'a montré nombre de ses gravures. Il y avait deux piles d'œuvres.

Il a proposé de m'en donner une de la seconde pile. Le choix a été difficile, bien sûr, mais je me suis arrêté sur *Poissons et Écailles* (1959). Il en a été très heureux car les gens semblaient ne pas trop apprécier cette œuvre. Il a utilisé le même procédé que pour *Exposition d'estampes* (1956), dans laquelle le garçon se retrouve dans l'image qu'il observe. On a une contradiction en théorie des types ; c'est un paradoxe de Russell. Il a été heureux que je comprenne ce qu'il avait voulu représenter.

Poissons et écailles. M.C. Escher, 1959. L'œuvre est reproduite dans *le Miroir magique de M.C. Escher* (Bruno Ernst, Taschen, 1994).

Photo : É.T., 2021

Quels furent vos échanges mathématiques lors de cette rencontre ?



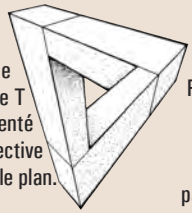
Exemple de pavage anisoédrique avec la *tuile de Heesch* H : les tuiles de Heesch bleues et vertes présentent une classe de symétrie (de translation), les tuiles de Heesch rouges et jaunes présentent une autre classe de symétrie (de translation également), et H ne peut pas paver le plan en n'utilisant qu'une seule des deux classes de symétrie.

© David Eppstein, 2013

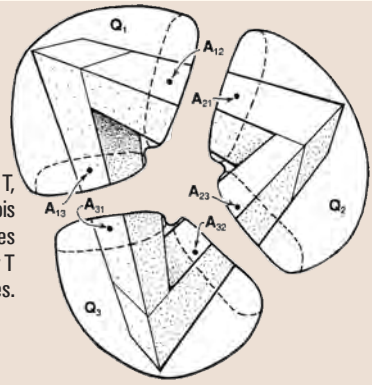
J'avais emporté avec moi des casse-tête et des éléments géométriques pour réaliser des pavages *[voir la brochure* Maths Jeux Culture Express *éditée par le CIJM en 2019]*. Or, les dix-sept groupes de symétrie du plan se retrouvent illustrés dans les œuvres d'Escher, suite sans doute à ses deux séjours à Grenade, où il a pu visiter l'Alhambra. Je lui ai alors montré un pavage *anisoédrique [dans lequel on peut trouver deux formes qui ne sont pas équivalentes, sous aucune symétrie du pavage ; voir la figure ci-contre]*.
Escher a résolu l'énigme géométrique que je lui ai proposée. Plus tard il m'a demandé, dans une lettre, quelle était l'explication derrière ces pavages. Je lui ai montré les règles d'assemblage de deux losanges *[qui permettent d'engendrer un* pavage de Penrose, *à savoir un pavage apériodique du plan]*. Il a utilisé ce procédé dans l'une de ses dernières

Caractériser les figures « impossibles »

Voici comment Roger Penrose explique le lien entre la cohomologie et certaines figures impossibles ou paradoxales dans son article d'à peine trois pages *On the cohomology of impossible figures* (*Visual Mathematics*, The MIT Press, 1992). C'est, comme toujours, un modèle de clarté, de concision et d'élégance.



Le triangle de Penrose T représenté en perspective sur le plan.



Partition du plan contenant T, de telle sorte que les trois structures élémentaires permettant d'assembler T par recollage sont possibles.

© *Roger Penrose, The MIT Press, ISAST, 1992*

Dans cette représentation, le plan Q de la figure se compose des trois régions Q_1, Q_2 et Q_3, dans lesquelles la seule ambiguïté possible (matériellement parlant) est la distance $d > 0$ à notre œil E. Le *groupe d'ambiguïté* introduit par Penrose est alors $\mathbb{R}^+$ muni de l'addition. Concentrons-nous sur Q_1. Le point A_{12} est confondu avec A_{21} dans Q_2 ; le point A_{13} est confondu avec A_{31} dans Q_3. Maintenant, regardons A_{23}, dans Q_2, qui doit correspondre à A_{32} dans Q_3.

S'il existait un objet tridimensionnel O_j représenté par Q_j (où i = 1, 2 et 3), le point de O_1 correspondant à A_{12} ne serait pas à la même distance de E que le point de O_2 correspondant à A_{21}. Soit $d_{1,2}$ le rapport de ces distances.

Plus généralement, on note $d_{i,j}$ le rapport entre (au numérateur) la distance de E au point de O_j représenté par A_{ij} et (au dénominateur) la distance de E au point de O_j représenté par A_{ji}. Les quantités $d_{i,j}$ ne dépendent que des régions Q_1, Q_2 et Q_3, et pas du choix de points A_{ij} particuliers dans ces régions. Le réel positif $d_{i,j}$ représente le facteur de grossissement (ou de rétrécissement : $d_{i,j} = 1 / d_{j,i}$) que l'on doit appliquer en passant de O_j à O_i à l'endroit où ces deux régions doivent se recoller (et les points A_{ji} et A_{ij} coïncider). Du point de vue mathématique, c'est l'ensemble des nombres $d_{i,j}$ qui possède une interprétation cohomologique (ils sont les éléments du premier groupe de cohomologie $H_1(Q, \mathbb{R}^+)$ et forment un cocycle). La question, vague, de savoir s'il existe un « objet physique matériel global » dont la représentation serait T (ou toute autre représentation de Q) peut alors se reformuler de manière claire et non ambiguë, et se résoudre de façon purement calculatoire : la figure est impossible si, et seulement si, l'élément unité du premier groupe de cohomologie est égal à 1. En l'occurrence, dans le cas de T, on trouve effectivement 1 : on est en présence d'une figure impossible.

aquarelles, qu'il appelait *« Mes petits fantômes »* : les fantômes permettent de réaliser un pavage anisoédrique du plan. Historiquement, cette œuvre avec le pavage anisoédrique est liée au dix-huitième problème par David Hilbert en 1900. Il demandait s'il existait des formes en trois dimensions permettant de paver l'espace uniquement de manière anisoédrique. Il pensait le cas du plan trivial ! *[Hilbert pensait sans doute qu'une telle forme ne pouvait exister en deux dimensions, et que la démonstration en serait évidente.]* Heinrich Heesch a pourtant trouvé une telle forme pour le plan en 1935. *[Dès 1928, Karl Reinhardt en avait trouvé une en trois dimensions !]*

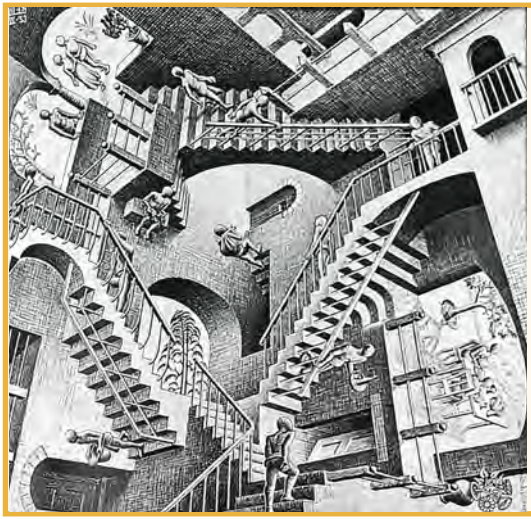
Roger Penrose montre l'une des dernières œuvres de Maurits Escher, réalisée alors que l'artiste était hospitalisé ; elle est reproduite dans *The World of M.C. Escher* (Maurits Cornelis Escher et Johannes Lodewijk « Hans » Locher, The New American Library, 1984).

© É.T., 2021

Cela représente deux influences d'origine mathématique de votre part sur Escher !

En quelque sorte ! J'ai même accepté il y a vingt ans d'écrire un livre sur les concepts mathématiques représentés par Escher. Pour l'instant, je n'ai rien fait du tout *[rires]*. Mais en 2020, j'ai mis la main sur une étudiante américaine en physique théorique qui est intéressée par ce projet ; nous y travaillons et espérons bien faire aboutir l'ouvrage !

R. P.** interviewé par **É. T.



Ci-dessus, *Jour et nuit*. M.C. Escher, 1938. L'œuvre est reproduite dans *M.C. Escher Taschen Calendar* (Taschen, 2000).

À gauche, *Relativité*. M.C. Escher, 1953. L'œuvre est reproduite dans *le Miroir magique de M.C. Escher* (Bruno Ernst, Taschen, 1994).

Photos : É.T., 2021

Toutes les œuvres de M.C. Escher : *© Cordon Art B.V., Baarn, Pays-bas*