Réseaux de neurones et apprentissage

Gabriel Peyré

CNRS & DMA
PSL, École normale supérieure

Depuis 2012, les réseaux de neurones profonds ont révolutionné l'apprentissage automatique. Bien que relativement ancienne, cette technique a permis ces dernières années des avancées spectaculaires pour la reconnaissance de textes, de sons, d'images et de vidéos. Comprendre les enjeux de ces méthodes soulève des questions à l'interface entre les mathématiques et l'algorithmique.

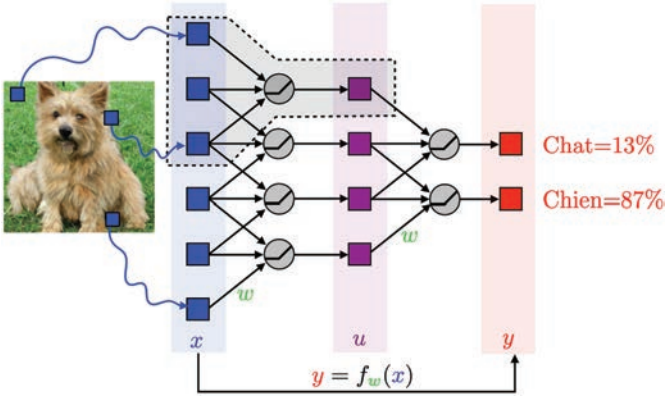
L'algorithmique et les mathématiques de l'apprentissage

Les réseaux de neurones sont des algorithmes, qui permettent à partir d'une entrée x (par exemple une image) de calculer une sortie y. Cette sortie est le plus souvent un ensemble de probabilités : sur la figure, la première sortie est la probabilité que l'image contienne un chat (plus ce nombre est proche de 100 %, plus cela signifie que l'algorithme est « sûr de lui »), la deuxième est la probabilité que l'image contienne un chien.

Pour simplifier, on ne considèrera que deux classes, les chats et les chiens, mais en pratique on peut considérer une sortie y avec plusieurs milliers de classes. On se restreint également à l'exemple des images, mais les réseaux de neurones sont aussi très performants pour reconnaître des textes ou des vidéos.

Exemple d'un réseau de neurones discriminatif s avec deux couches.

© G. Peyré



Mathématiquement, un tel algorithme définit une fonction f_w. Ainsi, on a $y = f_w(x)$. Le programme informatique qui permet de calculer cette fonction est très simple : il est composé d'un enchaînement de plusieurs étapes, et chaque étape effectue des calculs élémentaires (des additions, des multiplications, et l'évaluation d'un maximum entre plusieurs nombres). En comparaison, les programmes informatiques que l'on trouve dans le système d'exploitation d'un ordinateur sont beaucoup plus élaborés. Mais ce qui fait l'énorme différence entre un algorithme « classique » et un réseau de neurones, c'est que ce dernier dépend de *paramètres*, qui sont les *poids* des neurones. Avant d'utiliser un réseau de neurones, il faut modifier ces poids pour que l'algorithme puisse résoudre le mieux possible la tâche demandée. C'est ce que l'on appelle *entraîner* un réseau de neurones, et cela nécessite beaucoup de temps, de calculs machine et d'énergie.

Utiliser à bon escient de tels algorithmes nécessite donc des compétences en informatique et en mathématiques. Il faut ainsi manipuler les concepts clefs de l'algorithmique (méthodes itératives, temps de calcul, espace mémoire, implémentation efficace…) et des mathématiques (algèbre linéaire, optimisation, statistiques…).

De la biologie au modèle mathématique abstrait

Un réseau de neurones artificiel est construit autour d'une métaphore biologique. On connaît relativement bien la structure du cortex visuel primaire, et la découverte en 1962 de l'organisation des neurones dans les premières couches a valu le prix Nobel en physiologie à David Hubel et Torsten Wiesel. Ainsi, dans une vision extrêmement simplifiée du fonctionnement du cerveau, les neurones sont organisés en couches, chaque neurone récupère de l'information d'une couche précédente, effectue un calcul très simple, et communique son résultat à des neurones de la couche suivante.

Il ne s'agit cependant que d'une métaphore et d'une source d'inspiration : les réseaux biologiques ont des connexions beaucoup plus sophistiquées et les équations mathématiques qui les décrivent sont également très élaborées (elles ont été découvertes en 1952 par Alan Hodgkin et Sir Andrew Huxley, qui ont eux aussi reçu le prix Nobel). Il reste ainsi difficile de mettre précisément en relation les performances parfois surprenantes des neurones artificiels et les capacités cognitives du cerveau. Par exemple, les techniques d'entraînement des réseaux artificiels sont très différentes de la façon dont un enfant apprend.

La première figure détaille un exemple d'un réseau artificiel. Pour simplifier, il est ici composé de seulement deux couches de neurones (la première couche entre x et u, la seconde entre u et y), mais les réseaux actuels les plus performants peuvent comporter plusieurs dizaines de couches ; on dit qu'ils

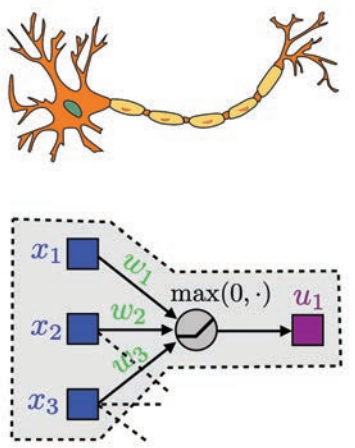
sont *plus profonds*. Ici, les entrées x sont les pixels d'une image. Une image contient typiquement des millions de pixels, et la figure n'en représente volontairement qu'un petit nombre (un réseau réaliste est très complexe). De plus, chaque pixel qui compose x est en fait constitué de trois valeurs (une pour chaque couleur primaire rouge, vert et bleu).

Le passage d'une couche (par exemple la couche x des entrées) à une autre (u, qui est une couche cachée au milieu du réseau) se fait par l'intermédiaire d'un ensemble de neurones artificiels.

Sur cette figure, c'est le premier neurone, celui qui calcule la première valeur u_1, qui compose la couche u. Ce neurone connecte un certain nombre d'éléments de la première couche (ici trois, à savoir x_1, x_2 et x_3, mais il peut y en avoir plus) à un seul élément de la deuxième, donc ici u_1. La formule calculée par le neurone est :

$$u_1 = \max(w_1 \times x_1 + w_2 \times x_2 + w_3 \times x_3 + w_4, 0).$$

Le neurone effectue ainsi une somme pondérée des trois entrées, avec trois poids (w_1, w_2, w_3), et on ajoute également w_4, qui est un biais. Puis le neurone calcule le maximum entre cette somme et zéro. On peut également utiliser une autre fonction que la fonction maximum, mais celle-ci est la plus populaire. Il s'agit d'une opération de seuillage. On peut la comparer aux neurones biologiques qui laissent ou non passer l'information suivant s'ils sont suffisamment excités ou pas. Ainsi, si la somme pondérée $w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4$ est plus petite que 0, alors le neurone renvoie la valeur $u_1 = 0$, sinon il renvoie la valeur de cette somme et la place dans u_1.



Neurone biologique
et
neurone artificiel
© G. Peyré

De tels réseaux de neurones ont été introduits par Frank Rosenblatt en 1957, qui les a appelés *perceptrons*. Les premiers perceptrons ne contenaient qu'une seule couche. De telles architectures avec une seule couche sont trop simples pour pouvoir effectuer des tâches complexes. C'est en rajoutant plusieurs couches que l'on peut calculer des fonctions plus élaborées. Les réseaux de neurones profonds utilisent ainsi un très grand nombre de couches. Depuis quelques années, ces architectures ont permis d'obtenir des résultats impressionnants pour faire de la reconnaissance d'images et de vidéos ainsi que pour la traduction automatique de textes. Ce sont ces recherches sur les réseaux

profonds qui ont permis au Français Yann Le Cun ainsi qu'aux Canadiens Geoffrey Hinton et Yoshua Bengio d'obtenir le prix Turing en 2018, considéré comme l'équivalent du prix Nobel en informatique. Pour se familiariser avec ces réseaux multi-couches, on peut utiliser l'application interactive **https://playground.tensorflow.org.**

Exemples d'images issues d'ImageNet, une base de données utilisées pour l'apprentissage.

L'apprentissage supervisé d'un réseau de neurones

L'entraînement d'un réseau de neurones consiste à choisir les « meilleurs » poids possibles de l'ensemble des neurones qui compose un réseau (typiquement ici les poids w_1, w_2 et w_3). Il faut ainsi choisir les valeurs de ces poids afin de résoudre le mieux possible la tâche étudiée, et ceci sur un ensemble de données d'apprentissage. Pour la reconnaissance d'objets dans les images, il s'agit d'un problème d'*apprentissage supervisé* : on dispose à la fois des images x et des y (les probabilités de présence d'un chat ou d'un chien dans l'image). La figure ci-dessus montre quelques exemples d'images utilisées pour entraîner un réseau, pour lesquelles on sait ce qu'elles contiennent (la classe des chats et la classe des chiens). Il faut donc, en amont de la phase d'apprentissage, que des humains fassent un long et fastidieux travail d'étiquetage de milliers voire de millions d'images !

La procédure d'entraînement consiste ainsi à modifier les poids w de sorte que, pour chaque x, le réseau f_w prédise aussi précisément que possible le y associé, c'est-à-dire que l'on souhaite à la fin de l'entraînement que y soit « très proche » de $f_w(x)$. Un choix simple est de minimiser la somme $E(w)$

des carrés des erreurs, ce que l'on écrit mathématiquement

$$\min_{w} \mathrm{E}(w) = \sum_{(x,y)} \left(f_w(x) - y \right)^2.$$

Ceci correspond à un problème d'optimisation, car il faut trouver un jeu de paramètres qui optimise une certaine quantité d'intérêt. C'est un problème difficile, car il y a beaucoup de paramètres. Ces derniers, surtout ceux des couches cachées, influencent de façon très subtile le résultat.

Des merveilles d'ingéniosité et une révolution scientifique

Heureusement, il existe des méthodes mathématiques et algorithmiques performantes pour résoudre de façon satisfaisante ce type de problème d'optimisation. Elles ne sont pas encore totalement comprises sur le plan théorique ; c'est d'ailleurs un domaine de recherche en pleine explosion. Ces méthodes d'optimisation modifient les poids w du réseau pour l'améliorer et diminuer l'erreur d'entraînement $\mathrm{E}(w)$. La règle mathématique pour décider de la stratégie de mise à jour des poids s'appelle la *rétro-propagation* et est une merveille d'ingéniosité. C'est en fait un cas particulier d'une méthode mathématique et algorithmique qui s'appelle la *différentiation automatique à l'envers*.

Ces techniques d'apprentissage supervisé datent pour l'essentiel des années 1980. Mais c'est seulement en 2012 qu'un travail d'Alex Krizhevsky, Ilya Sutskever et Geoffrey Hinton crée un coup de tonnerre en montrant que les réseaux profonds permettent de résoudre efficacement des problèmes de reconnaissance d'images. Cette révolution a été possible grâce à la combinaison de trois ingrédients : des nouvelles bases de données beaucoup plus grandes qu'auparavant, des grosses puissances de calcul grâce aux processeurs graphiques (les « GPU », qui étaient auparavant cantonnés aux jeux vidéo), et l'introduction de plusieurs techniques d'optimisation qui stabilisent l'apprentissage.

Capter efficacement l'information présente dans les données

George Cybenko a démontré en 1989 qu'un réseau de neurones f_w avec deux couches peut approcher, aussi précisément que l'on veut, n'importe quelle fonction continue f^* (donc en quelque sorte résoudre n'importe quelle tâche, représentée par la fonction f^* inconnue, qui serait capable de reconnaître des objets dans n'importe quelle image), pour peu que la taille de la couche interne u (donc le nombre de neurones) soit arbitrairement grande. Ce n'est pas pour autant qu'un tel réseau f_w avec seulement deux couches fonctionne bien en pratique. Pour appliquer le théorème de Cybenko, il faut pouvoir

disposer d'un nombre de données d'apprentissage potentiellement infini, ce qui est très loin d'être le cas en pratique. Le but final de l'apprentissage n'est pas de minimiser l'erreur d'apprentissage $E(w)$, mais de pouvoir prédire aussi précisément que possible sur des nouvelles données. Si l'on dispose de peu de données, on risque de ne pas pouvoir apprendre assez précisément, et donc de faire des mauvaises prédictions : la fonction f_w sera en réalité « très loin » de la fonction f^* idéale que l'on voudrait apprendre si l'on disposait d'une infinité d'exemples.

Afin d'effectuer les meilleures prédictions possibles avec un nombre limité de données d'entraînement, on cherche donc les architectures de réseaux « les plus adaptées », qui peuvent capter efficacement l'information présente dans les données. Les réseaux de neurones profonds (avec de nombreuses couches) mais avec relativement peu de connexions entre les couches se sont avérés très efficaces sur les données très « structurées » comme les textes, les sons et les images. Par exemple, pour une image, les pixels ont des relations de voisinage, et on peut imposer des connexions spécifiques (une architecture) et ne pas connecter un neurone avec tous les autres mais seulement avec ses voisins (sinon il y aurait trop de connexions). De plus, on peut imposer que les poids associés à un neurone soient les mêmes que ceux associés à un autre neurone. On appelle ce type de réseaux les *réseaux convolutifs*. Pour l'instant, il n'y a pas d'analyse mathématique qui explique cette efficacité des réseaux convolutifs profonds. Il y a donc besoin de nouvelles avancées mathématiques pour en comprendre les comportements et les limitations !

G. P.

Pour en savoir (un peu) plus :

The perceptron, a perceiving and recognizing automaton Project Para. Frank Rosenblatt, Cornell Aeronautical Laboratory, 1957.

Learning representations by back-propagating errors. David Rumelhart, Geoffrey Hinton et Ronald Williams, *Nature* 323, 1986.

ImageNet classification with deep convolutional neural networks. Alex Krizhevsky, Ilya Sutskever et Geoffrey Hinton. *Advances in neural information processing systems*, 2012.

Deep learning. Yann LeCun, Yoshua Bengio et Geoffrey Hinton, *Nature* 521, 2015.

ImageNet: a largescale hierarchical image database. Jia Deng, Wei Dong, Richard Socher, Li-Jia Li, Kai Li et Li Fei-Fei, 2009 IEEE conference on computer vision and pattern recognition, 2009.