

# Wanted Les mathématiques mises à prix

Édouard Thomas

Mathématicien et journaliste scientifique

«Jeu» rime avec «enjeu». Un joueur est le plus souvent face à des adversaires, l'enjeu est alors de les vaincre, d'accumuler plus de richesses qu'eux, ou d'arriver plus rapidement à un but. En mathématiques, il est rare que l'on soit en compétition contre un adversaire ; on cherche plutôt à «terminer la partie tous ensemble». En fait, la question ne se pose pas vraiment en ces termes. Le «jeu» joué par des mathématiciens professionnels dans le cadre de leurs activités de recherche est en effet du genre coopératif et collaboratif. Mais alors, quels sont les enjeux ? La quête désintéressée du savoir («finir la partie» ou au moins «passer un niveau», en un certain sens) ? Peut-être. La liberté de «sécher» sur les questions que l'on se choisit soi-même («le plaisir du jeu») ? Sans doute. Remporter des prix prestigieux, atteindre la gloire, associer son nom à un important résultat («jouer pour la gagne») ? C'est possible. Il existe d'ailleurs plusieurs prix richement dotés, spécifiques aux mathématiques ou qui peuvent les mettre à l'honneur. On pense au prix Abel (annuel, depuis 2003, environ 600 000 € de dotation), au Breakthrough Prize (annuel, depuis 2015, 2 700 000 €), aux prix Shaw (annuel, depuis 2004, 940 000 €), MacArthur (annuel, depuis 1981, 450 000 €), Wolf (annuel, depuis 1978, 90 000 €), Crafoord (tous les sept ans environ, depuis 1980, 450 000 €)... Face à cette surenchère somme toute récente, la médaille Fields, décernée tous les quatre ans, accompagnée des quelque 10 000 € dont elle est pourvue, prêterait presque à sourire.

Sourire ? Eh bien non : la «MF» reste en effet la plus célèbre distinction en mathématiques, celle qui fait le plus de sens pour les mathématiciens. Ce qui tendrait à prouver que ce n'est pas l'argent qui les fait courir. Mais jouons le jeu, et tirons le fil. Avec certains prix ronflants, il s'agit plus de politique, d'image, de marketing, de communication que de mathématiques. On sait moins que la mille fois vénérable reine des sciences foisonne de récompenses, promises à qui viendra à bout d'un problème de maths récalcitrant. Serait-on devenu vénal jusque dans les derniers bastions de la «science pure et dure» ?

On commence avec une grosse mise : un million de dollars ! C'est la somme, rondelette, qui sera offerte par l'Institut de mathématiques Clay, basé aux États-Unis, aux tombeurs de chacun des sept problèmes du millénaire

(voir l'article d'Hervé Lehning). Le même montant attend le premier qui viendra à bout de la *conjecture de Beal*. Andrew Beal, banquier et mathématicien amateur, s'est essayé sur le dernier théorème de Fermat (lui-même richement mis à prix par le passé, et finalement prouvé par Andrew Wiles). En 1993, il a proposé la généralisation suivante : si les entiers  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont supérieurs à 1 et deux à deux *premiers entre eux* (sans facteur en commun autre que 1) et si les entiers  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont supérieurs à 2, alors l'équation  $x^u + y^v = z^w$  ne possède aucune solution. La question est si obsédante que depuis 1997 Beal l'a mise à prix ! Aujourd'hui, elle vaut donc un million de dollars.

Mieux : deux millions de dollars avaient été proposés en 2007 par l'éditeur de jeux Tomy pour résoudre un puzzle, Eternity II, créé par Lord Christopher Monckton. Les deux cent cinquante-six pièces comportent un motif sur chaque bord et doivent paver un plateau de taille  $16 \times 16$  de manière à ce que les côtés adjacents des pièces correspondent. Succès commercial garanti ! Ce puzzle anodin pose en fait des questions combinatoires intéressantes. En 2010, aucune des quelque vingt mille solutions (selon l'éditeur) n'avait été trouvée, et le prix a cessé. Une première version du puzzle, Eternity I (Ertl Company, 1999), avait déjà été mise à prix un million de livres (plus d'un million d'euros) par le créateur du jeu et des assureurs ; aidés de puissants ordinateurs, deux mathématiciens obstinés, Alex Selby et Oliver Riordan, avaient raflé le jackpot.

Dans le même état d'esprit, pour accompagner la sortie de l'ouvrage *Oncle Petros et la Conjecture de Goldbach* (Apostolos Doxiadis, 2000), les éditeurs Bloomsbury USA (aux États-Unis) et Faber and Faber (en Grande-Bretagne) ont proposé un million de dollars à quiconque résoudrait la fameuse conjecture (« tout nombre pair est somme de deux nombres premiers ») avant fin 2002.

Tous ces montants, faramineux en apparence, sont en fait bien faibles au regard de la difficulté des questions posées ! Tenter de les remporter est sans doute l'une des façons les plus vaines de s'enrichir...

Le roi des poseurs et des résolveurs de problèmes était le Hongrois Paul Erdős (1913–1996). Mathématicien errant, sans poste universitaire ou professionnel fixe, sans maison, sans biens, il parcourait le monde à la recherche de belles mathématiques. Il n'avait que sa petite valise, des carnets, des crayons, quelques effets, et son prodigieux cerveau. Bien que sans le sou, son enthousiasme pour certaines questions difficiles était tel qu'il proposait de les mettre à prix ! Depuis son décès, en la mémoire de ce mathématicien ermite étonnant par son talent, sa créativité, son dévouement et sa générosité intellectuelle, ses amis, notamment Fan Chung et Ron Graham, continuent d'entretenir ces prix. Mieux : Kevin Ford, Ben Green, Sergey Konyagin, James Maynard et Terence Tao, après avoir résolu en 2014 une importante question d'Erdős à 10 000 \$ relative aux grands écarts entre des nombres premiers consécutifs, renvoient l'ascenseur. Tao propose ainsi 10 000 \$ à quiconque réussira à améliorer leur résultat !

## Quelques problèmes mis à prix par Paul Erdős

500 \$. Prenez une infinité dénombrable de points du plan,  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , cinq d'entre eux n'étant jamais sur une même droite. Notez  $R(n)$  le nombre de droites qui passent par quatre points exactement parmi les  $n$  premiers points  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Est-il possible, pour une configuration donnée de ces points, que la limite  $R(n)/n^2$  existe et ne soit pas zéro ?

100 \$ ou 25 000 \$. La *moyenne arithmétique* de deux entiers positifs impairs  $a$  et  $b$  est égale à l'entier  $(a + b)/2$ . Un nombre premier supérieur à 5 est *en avance* s'il est strictement inférieur à la moyenne arithmétique du nombre premier qui le précède et du nombre premier qui le suit. Par exemple, 13 est en avance car  $13 < (11 + 17)/2$ . Conjecture : il existe une infinité de nombres premiers en avance tels que le nombre premier suivant soit lui aussi en avance (comme pour 19 et 23). Gagnez 100 \$ si vous prouvez que c'est vrai, ou 25 000 \$ si vous prouvez que c'est faux !

3 000 \$. Plus technique : soit  $E$  un ensemble infini d'entiers strictement positifs. Si la somme des inverses de tous les éléments de  $E$  diverge,  $E$  contient-il des progressions arithmétiques de longueur arbitraire ?

Le mathématicien américain John Horton Conway a lui aussi une liste de quatre questions mises à prix 1 000 \$ chacune. L'une d'elles porte sur un jeu. Deux joueurs, à tour de rôle, choisissent un nombre strictement positif qui n'est pas la somme de multiples de nombres déjà précédemment cités. La personne qui est obligée de choisir 1 a perdu (et le jeu s'arrête). Il a été prouvé que le jeu termine en un temps fini. Supposons que le premier joueur commence en choisissant 16, et que les deux joueurs jouent parfaitement. Qui gagne la partie ?

Le mathématicien et musicien américain Clark Kimberling a lui aussi établi une liste portant notamment sur les suites d'entiers, la combinatoire ou la géométrie. En voici un à 50 \$ (une récompense moyenne) : prenons un triangle  $ABC$  arbitraire. Noam Elkies a prouvé en 1987 qu'il existe un unique point  $X$  tel que les triangles  $AXB$ ,  $BXC$  et  $CXA$  aient des cercles inscrits de même rayon. Trouver les coordonnées barycentriques explicites de  $X$ .

L'analyste italien Alberto Bressan a mis deux problèmes à prix (500 \$ chacun). Le premier peut être paraphrasé ainsi. Le feu se déclenche à l'instant  $t = 0$  dans un disque de rayon 1. Il se propage à vitesse unitaire dans toutes les directions. Pour stopper sa progression, une barrière est construite, en temps réel, à une certaine vitesse constante  $v$ , de sorte que la longueur de la barrière au temps  $t$  est égale à  $v \times t$ . Quelle doit être la vitesse de construction  $v$  de manière à pouvoir toujours circonscrire l'incendie ?

Sur Internet, les pages d'accueil des mathématiciens regorgent de pépites. Anatole Katok a convaincu le Center for Dynamics and Geometry de l'université d'État de Pennsylvanie (États-Unis) d'offrir dix mille dollars à quiconque réussirait à décrire le comportement des trajectoires régulières sur un billard triangulaire quelconque. Cela fait en particulier des décennies que l'on se demande si ces trajectoires sont *ergodiques* (à savoir, si elles décrivent tout le triangle et si, en moyenne, elles passent dans une surface  $S$  du triangle un temps proportionnel à l'aire de  $S$ ).

Zhi-Wei Sun offre 2 400 \$ à qui prouvera que tout entier peut s'écrire  $t^2 + u^2 + v^2 + w^2$  avec  $t, u, v$  et  $w$  quatre entiers,  $t$  étant lui-même un carré et  $t + 24u$  étant aussi un carré. De même, il offre 1 350 \$ à qui établira (ou invalidera) que tout entier peut s'écrire  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  avec  $a, b, c$  et  $d$  quatre entiers,  $a + 3b + 5c$  également un carré. Et bien d'autres dans le même goût !

En France, Michel Talagrand propose 1 000 \$ ou 5 000 \$ pour la résolution de quelques conjectures en analyse ou en combinatoire. Jusqu'en décembre 2020, Gérard Cornuéjols offre 5 000 \$ de prix pour quiconque résoudra l'une des douze conjectures d'optimisation combinatoire qu'il propose. Pour revenir à des mathématiques plus accessibles au grand public, Christian Boyer, administrateur du site [www.multimagie.com](http://www.multimagie.com), propose huit mille euros et douze bouteilles de champagne pour des énigmes portant sur les carrés magiques. Il suit en cela une démarche initiée par Martin Gardner (1914–2010), journaliste scientifique, mathématicien amateur et chroniqueur légendaire.

De son côté, le 14 mars 2017 (jour de  $\pi$ ), Mickaël Launay proposait une récompense de trois euros et quatorze centimes (!) à qui ferait « *des avancées significatives* » dans l'étude de la « farfalle de Fibonacci » (voir en ligne sa vidéo « Le mystère de la farfalle »)...

Scott Aaronson, Jeffrey Shallit, Doron Zeilberger, Ian Morrison, Alexandre Eremenko... offrent des récompenses pour résoudre des problèmes de maths. D'autres encore, moins fortunés, plus imaginatifs ou plus joueurs, proposent des livres dédicacés, un café, une bière, un repas dans un restaurant gastronomique... Donald Knuth expédie des « dollars hexadécimaux » de la banque (imaginaire) de San Serriffe à qui trouvera des erreurs dans ses ouvrages. Stanislaw Mazur a offert en 1972 une oie (vivante) à Per Enflo pour avoir « cracké » un problème relatif aux espaces de Banach. Pour obtenir la réponse à une question probabiliste portant sur un modèle d'évolution, Elizabeth Allman est prête à aller pêcher, fumer et expédier un saumon d'Alaska...

En fait, les mathématiciens semblent plutôt chercher à attirer l'attention de leurs collègues sur les défis qui s'immiscent dans leur quotidien et qui invitent à la modestie. Les récompenses promises à qui résoudra ces énigmes témoignent surtout de l'enthousiasme, de l'humour décalé et de la bonne ambiance qui règnent globalement dans cette communauté !

*É. T.*