Quand les mathématiques se font coopératives

Jean-Jacques Dupas
Ingénieur-chercheur au Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
Président de l'association Playmaths

Édouard Thomas
Mathématicien et journaliste scientifique

Depuis l'origine des mathématiques, les défis et la compétition sont des moteurs puissants pour l'avancement des connaissances. Les duels que se lancent les chercheurs sont de plusieurs types. Certains mathématiciens, pour s'illustrer ou épater leurs collègues, s'amusent à les mettre au défi de retrouver un résultat qu'ils ont déjà obtenu. D'autres peuvent inciter leurs pairs à se pencher sur des problèmes qu'ils jugent importants.

La longue tradition des énigmes mathématiques mises à prix

L'histoire des mathématiques fourmille de ces deux types de démarches ! Ainsi, les mathématiciens italiens de la Renaissance se livraient à de redoutables joutes publiques, parfois richement dotées et aux enjeux d'importance, pour séduire un mécène et pouvoir poursuivre leurs activités. En France, le père jésuite Marin Mersenne (1588 – 1648), n'arrivant pas à établir la valeur de la surface sous une arche de cycloïde, encouragea ses contemporains à résoudre cette énigme, ce qui sera fait par Gilles Personne de Roberval.

Plus tard, ces défis seront lancés par des institutions. Le concours organisé en 1888 par le Suédois Gösta Mittag-Leffler (1846 – 1927) permit à Henri Poincaré de s'illustrer. Les vingt-trois problèmes énoncés en 1900 à Paris par David Hilbert (1862 – 1943) au Congrès international des mathématiciens ont été un moteur indiscutable de la recherche mathématique tout au long du XX^e^ siècle. D'ailleurs, certains tiennent encore. Dans la même veine, les sept « problèmes du millénaire » posés par l'Institut Clay en 2000 sont, chacun, dotés d'une récompense d'un million de dollars.

Cette petite liste illustre que l'émulation due à la compétition a joué et continue de jouer un grand rôle dans l'histoire des mathématiques. Mais les joutes ne représentent pas le travail quotidien des mathématiciens, qui est fait d'échanges, de discussions, de rencontres, de brassage d'idées… Pour cette raison, le monde des mathématiques est riche de *blogs* de grande qualité (essentiellement en anglais). De même, le « réseau social » MathOverflow

Le logo du site Mathoverflow.
©The MathOverflow Foundation

(**https://mathoverflow.net**), qui agit comme un site collaboratif ouvert ou un forum sur lequel les mathématiciens professionnels viennent exposer leurs problèmes de recherche, connaît un succès considérable. Les questions tendancieuses, litigeuses, mal formulées ou scolaires y sont découragées et rapidement supprimées. De nombreux mathématiciens de tout premier plan le fréquentent assidûment : des interrogations techniques très avancées sont souvent résolues en moins de quelques heures…

Les projets Polymath : la révolution mathématique en direct

Le projet Polymath (**https://polymathprojects.org**), né en 2009 sous le clavier de Sir William Timothy Gowers, médaillé Fields en 1998, va plus loin encore. Il prouve que plusieurs cerveaux peuvent travailler ensemble pour résoudre des problèmes de mathématiques ambitieux plus difficiles. L'idée de départ était de s'attaquer à un problème de mathématiques non résolu, mais à la façon des projets *open source*, comme Linux ou Wikipédia. La méthode utilise donc les nouveaux outils que sont les *blogs* et un *wiki*, mémoires collectives à court terme et supports d'échanges rapides et continus favorisant le brassage des idées et la spontanéité. Le projet Polymath est de plus complètement ouvert et simple d'utilisation (pas d'installation de logiciel, pas d'inscription, anonymat respecté pour ceux qui le souhaitent…). Chacun peut ainsi contribuer ou suivre le développement du projet en temps réel.

L'objectif spécifique du premier projet Polymath était de trouver une preuve élémentaire d'un résultat, nommé DHJ (pour *density Hales–Jewett*), inspiré d'un théorème difficile de combinatoire dû à Alfred Hales et Robert Jewett en 1963. Les démonstrations connues de DHJ, datées de 1989 et 1991, étaient ardues, peu éclairantes et faisaient usage d'une machinerie mathématique lourde (la théorie ergodique). Une preuve plus élémentaire, au moins pour un cas particulier significatif, serait plus riche en idées nouvelles. Le projet commença quand Gowers mit en ligne une description du projet, des pointeurs vers des références, une liste de règles pour la collaboration afin de créer une atmosphère polie, respectueuse, invitant les participants à partager une idée par commentaire, dans le but d'encourager les contributeurs et de conserver à la conversation son côté informel.

Trente-sept jours plus tard, vingt-sept contributeurs avaient rédigé plus de huit cents commentaires, sans que personne ne soit spécialement invité à participer. Les échanges se firent en douceur malgré d'inévitables loupés (intervenants récurrents perturbant les débats, commentaires improductifs, idées prometteuses mais finalement stériles, arrivée de *spams*…). Tim Gowers fut déterminant dans son rôle d'administrateur et de modérateur.

Le groupe avait ainsi trouvé une preuve élémentaire de DHJ pour le cas envisagé (où $m=3$, voir les notations en encadré). Mais, de façon inattendue, les arguments pouvaient aisément être généralisés (à $m>3$) pour prouver le résultat complet. Le succès de ce premier projet fut foudroyant !

Le théorème de Hales – Jewett à densité

Tout commence avec le jeu du Morpion, qui oppose deux joueurs et qui se pratique sur une grille carrée de trois cases de côté. Maintenant, modifions le plateau de jeu en supprimant deux cases, par exemple celle en haut à gauche et celle du centre. La grille qui en résulte peut toujours permettre d'aligner trois symboles. Combien de cases de la grille, au minimum, doit-on supprimer pour qu'il soit impossible d'aligner trois symboles ?

Avec la grille 3 × 3, il est nécessaire de supprimer trois cases, par exemple une diagonale : impossible, sur les six cases restantes, d'aligner trois symboles !

Passons maintenant à un Morpion 3D, qui oppose deux joueurs sur une « grille » 4 × 4 × 4 (un cube C de quatre cases de côté, donc de soixante-quatre cellules en tout). Pour gagner, chacun des deux joueurs doit aligner quatre de ses symboles, dans l'une des trois directions de l'espace (selon chaque tranche de C), selon les diagonales d'une tranche de C, ou selon l'une des grandes diagonales de C. Le nombre de configurations gagnantes augmente alors considérablement !

Avec un tel cube, combien de cellules doit-on enlever, au minimum, de manière à ce qu'il ne soit plus possible d'aligner quatre symboles ? La question est plus subtile que pour le Morpion traditionnel. Ce jeu enfantin réserve encore bien des surprises...

DHJ établit une estimation quantitative précise de l'analogue de cette question dans un cadre extrêmement général : la « grille » (ou *cube de Moser* pour les mathématiciens) de ce « Morpion généralisé » peut avoir m cases de côté (où $m \geq 2$ est un entier quelconque), être placée dans un espace à n dimensions (avec $n \geq 2$) et opposer k joueurs ($k \geq 2$) qui donc, chacun, pour gagner, doivent aligner m symboles.

L'enregistrement et la disponibilité du travail de Polymath est une source unique pour les étudiants en mathématiques, pour les historiens, les sociologues et les philosophes des sciences. Pour la première fois, on peut documenter la naissance et l'évolution pas à pas d'un résultat fondamental : idées soumises qui seront améliorées ou abandonnées, addition d'une multitude de raffinements, persévérance, erreurs de compréhension, montée de la tension au fur et à mesure que l'on approchait du but… Un véritable thriller !

Dix années et une petite vingtaine de projets plus tard…

Depuis, les projets Polymath se sont succédé, généralement avec beaucoup d'enthousiasme, mais rarement avec le caractère « massivement collaboratif » observé pour la recherche d'une preuve élémentaire de DHJ. Les participants sont parfois les mêmes d'un projet à l'autre ; Tim Gowers et Terence Tao se sont particulièrement illustrés.

Le deuxième projet, lancé par Gowers en 2009 dans l'euphorie du moment, portait sur la « bonne » définition de certains objets en théorie des espaces de Banach. L'objectif était volontairement vague, afin que le rythme soit moins soutenu, et de fait le projet n'a jamais vraiment décollé…

L'enthousiasme est revenu avec le projet « mini Polymath », qui consistait à résoudre collectivement, en ligne (sur le *blog* « What's New » de Terence Tao), la sixième et dernière question des Olympiades internationales de mathématiques (juillet 2009). L'énoncé, de nature purement combinatoire, était le suivant. Soient a_1, $a_2 \dots a_n$ des entiers strictement positifs distincts. Soit M un ensemble de $n-1$ entiers strictement positifs ne contenant pas la somme $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Une sauterelle doit faire des sauts le long de l'axe réel. Partant du point 0, elle doit effectuer n sauts vers la droite, de longueurs a_1, $a_2 \dots a_n$, dans l'ordre de son choix. Montrer que la sauterelle peut choisir l'ordre de ses sauts de façon à ne passer par aucun point de M. En quelques jours, cinq preuves différentes du résultat ont été obtenues ! L'expérience a été reconduite en 2010, 2011 et 2012, avec un enthousiasme moindre chaque année.

Les nombres premiers ont plusieurs fois suscité l'intérêt. Le quatrième projet visait à produire un algorithme déterministe permettant de générer un nombre premier de k chiffres en temps « rapide » (polynomial en k). Un tel algorithme n'a pas été trouvé, mais les participants ont pu dresser un état complet des connaissances sur cette question, comprendre pourquoi elle était si difficile et comment elle s'articulait avec d'autres conjectures ou problèmes ouverts en mathématiques.

Le huitième projet, qui a suscité un enthousiasme sans doute sans précédent, a fait suite à l'extraordinaire percée, totalement inattendue, du discret Yitang Zhang. En mai 2013, ce mathématicien américain d'origine chinoise a en effet été à l'origine d'un coup de tonnerre. On ne sait toujours pas, aujourd'hui, s'il existe une infinité de nombres premiers séparés de deux unités, comme 3 et 5, 17 et 19 ou 29 et 31 (on parle de nombres premiers *jumeaux*). On pense que c'est le cas. De même, on ne sait pas s'il existe une infinité de nombres premiers séparés de quatre unités, comme 7 et 11 (nombres premiers *cousins*), ou séparés de six unités, comme 5 et 11 (nombres premiers *sexys*). Là encore, on pense que oui. De manière générale, quel que soit l'entier n, on pense (conjecture de Polignac, 1849) qu'il existe une infinité de nombres premiers séparés de $2n$ unités. Ce qui revient à dire que tout entier pair $2n$ peut s'exprimer, d'une infinité de manières différentes, comme la différence de deux nombres premiers. Avant Yitang Zhang, on ne savait pas qu'un tel nombre pair existait. Depuis mai 2013, on sait qu'il doit nécessairement exister un tel entier inférieur à 70 000 000. En mobilisant des dizaines de mathématiciens durant plusieurs mois, le projet Polymath 8 a permis, fin 2014, de réduire la borne de Zhang à 246 et de mieux comprendre la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. Ainsi, il existe une infinité de nombres premiers séparés de $2n$ unités, avec un certain nombre pair $2n$ inférieur à 246. Mais on reste encore bien loin de la conjecture de Polignac qui avance que la propriété est vraie pour tous les nombres pairs…

Les projets Polymath, dont certains sont encore en cours actuellement, ne se sont cependant pas cantonnés à la théorie des nombres ou à la combinatoire, bien que cette dernière se taille la part du lion. La théorie des jeux (treizième projet, sur les propriétés de dés non transitifs) et les équations aux dérivées partielles (septième projet, relatif à l'équation de la chaleur) se sont par exemple invitées à la fête.

Un modèle mathématique à étendre aux autres sciences ?

Polymath diffère des traditionnels projets de grandes équipes dans l'industrie ou dans les autres sciences, où le travail est en général découpé de façon statique et hiérarchique. Aujourd'hui, le seizième projet a été lancé (avril 2018), plusieurs sont arrivés à leur terme et ont abouti à la publication de résultats. Une question pertinente est de savoir si le processus peut être étendu pour intégrer encore plus de contributeurs. Ou de permettre à des contributeurs tardifs de rejoindre un projet lancé depuis plusieurs semaines et donc déjà très avancé. À quoi un nouveau participant peut-il être utile ? Des outils logiciels *open source* peuvent parcourir les contributions passées et favoriser le processus en découpant la discussion en modules… Des pistes restent à explorer pour encourager des sciences plus « ouvertes » ! L'application de ce modèle aux sciences expérimentales est cependant relativement délicate car les équipements sont assez difficiles à partager, même si les résultats, eux, le peuvent.

Est-il possible d'aller plus loin encore, et de fragmenter un problème de recherche ouvert de telle sorte que des amateurs non spécialisés mais motivés puissent résoudre l'un de ces morceaux ? Bien sûr, il existe de nombreux projets de calcul distribué visant à rassembler la capacité de calcul d'un grand nombre d'ordinateurs connectés au réseau Internet. Le plus célèbre d'entre eux, le Great Internet Mersenne Prime Search (George Woltman, 1996, **https://mersenne.org**), a permis, en vingt-deux ans, de trouver dix-sept nombres premiers gigantesques. On peut également « miner des *bitcoins* », pour ceux qui s'intéressent aux cryptomonnaies. Mais avec ces initiatives le « participant » reste relativement passif, voire n'a même pas connaissance du programme global de recherche ou des méthodes mises en œuvre. Il est possible d'impliquer beaucoup plus le « citoyen scientifique ».

Foldit (Université de Washington, 2008, **https://fold.it/portal**) consiste à proposer au grand public un jeu vidéo expérimental ludique, qui permet au final d'aider les biologistes à comprendre le repliement des protéines. Galaxy Zoo (Galaxy Zoo Team, 2007, **https://www.zooniverse.org**) est un projet astronomique en ligne qui propose aux internautes de collaborer à la classification de plus d'un million de galaxies. L'organisation non gouvernementale internationale Electronic Frontier Foundation (EFF, **https://www.eff.org/awards/coop**) encourage financièrement les internautes à contribuer à des tâches de calcul distribué sur la Toile. Fondée en 1990 aux États-Unis par Mitch Kapor, John Gilmore et John Perry Barlow, l'EFF s'est notamment donné pour mission de soutenir les avancées technologiques qui préservent les libertés individuelles. Cela passe par le développement d'une cryptographie à la fois sécurisée et conviviale. Les prix de calcul coopératif qu'elle attribue sont les suivants : cent cinquante mille dollars (plus de cent trente mille euros) pour la découverte d'un nombre premier d'au moins cent millions de chiffres ; deux cent cinquante mille dollars (plus de deux cent vingt mille euros) pour la découverte d'un nombre premier d'au moins un milliard de chiffres.

De manière plus générale, sans doute, en mathématiques il est possible d'identifier des objectifs (conjectures, classifications, algorithmes à tester …) suffisamment attrayants pour séduire des amateurs et suffisamment modulaires pour être fragmentés. Des idées ont été avancées en arithmétique, en combinatoire, en mathématiques discrètes ou encore en topologie (théorie des nœuds) mais rien n'a vraiment été tenté. Autant de pistes originales qui restent à explorer !

J.-J. D. & É. T.

Pour en savoir (un peu) plus :

La formule secrète – Le duel mathématique qui enflamma l'Italie de la Renaissance. Fabio Toscano, Belin, 2011.

L'homme, meilleur joueur que la machine. Jean-Paul Delahaye, *Pour la science* 423, janvier 2013.

Massively collaborative mathematics. Timothy Gowers et Michael Nielsen, *Nature* 461, 2009.