La célèbre conjecture P*vs*NP

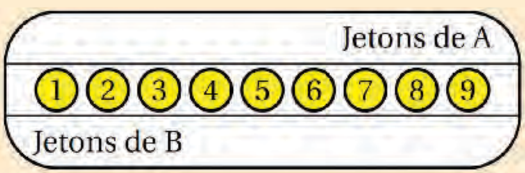
Abdallah Saffidine

Enseignant-chercheur,
Université de Nouvelle-Galles du Sud,
Sydney, Australie.

Avez-vous déjà joué à un jeu de société avec le plateau d'un autre jeu ? Très connue des enfants, cette pratique se retrouve sous le nom de *réduction* chez des chercheurs qui démontrent des équivalences entre jeux. Cette notion de réduction est fondamentale en informatique, notamment en théorie de la complexité. Elle est d'ailleurs à la base de la célèbre conjecture P *versus* NP, un problème ouvert parmi les plus difficiles des mathématiques et de l'informatique réunies. Examinons une succession de réductions de plus en plus élaborées entre divers jeux de stratégie abstraits.

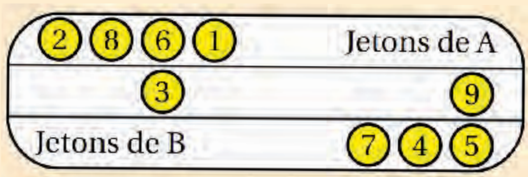
Du Jeu du 15 vers le Morpion : le principe de réduction

Le Jeu du 15 a des règles élémentaires. Des jetons numérotés de 1 à 9 sont disposés, faces visibles, entre deux joueurs, A et B. Tour à tour, chaque joueur s'approprie un jeton encore disponible. Ainsi, la collection de jetons de chaque joueur croît petit à petit. Un *triplet gagnant* est un ensemble de trois jetons dont la somme fait 15, par exemple $\{1, 6, 8\}$. Le premier joueur à avoir amassé une collection comportant un tel triplet gagnant remporte la partie. S'il n'y a plus de jeton au milieu de la table et qu'aucun joueur n'a de triplet gagnant, on déclare la partie nulle.



Début de partie du Jeu du 15.

© A.Saffidine

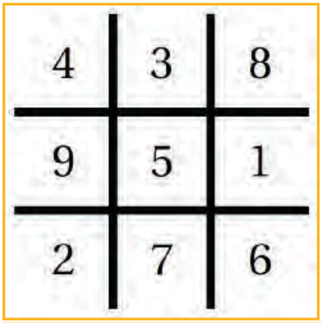


Fin de partie gagnée pour A.

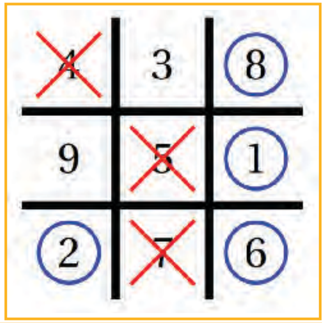
© A.Saffidine

Malgré ses règles simples, le jeu est peu visuel et identifier directement les meilleures stratégies pour A ou pour B n'est pas intuitif. L'astuce pour trouver les meilleurs coups est d'utiliser un carré magique (un arrangement des nombres de 1 à 9 en carré tel que trois nombres sont alignés horizontalement, verticalement ou en diagonal si, et seulement si, leur somme est 15).

Autrement dit, on peut représenter chaque position du Jeu du 15 comme un Morpion et appliquer ses stratégies du Morpion pour mieux jouer !



Position initiale du Morpion joué sur un carré magique de somme 15.



Fin de partie gagnée par A, qui utilise les cercles (et B les croix).

© A.Saffidine

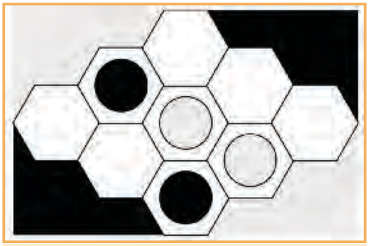
Une *réduction* est une transformation d'un problème P_1 en un autre problème P_2 telle que, si l'on sait résoudre P_2, alors on peut inférer une solution de P_1. Le principe du carré magique permet d'effectuer une réduction du Jeu du 15 vers le Morpion.

Une autre réduction a déjà été évoquée en introduction de la brochure : à toute position de Nim, on peut associer une opération de somme binaire sans retenue, la Nim-somme. Être capable de calculer le nombre de zéros dans cette somme permet de déterminer le gagnant théorique de la position de Nim. Il s'agit donc bien d'une réduction du problème de Nim vers le problème de la Nim-somme.

Un petit tour du côté des jeux combinatoires

Inventé en 1942 par le poète et physicien danois Piet Hein, le Hex est jeu de stratégie abstrait, comme les Échecs et le Go. Il a été redécouvert par le célèbre économiste et mathématicien américain John Forbes Nash en 1948. Il a depuis fasciné de nombreux amateurs de jeux combinatoires.

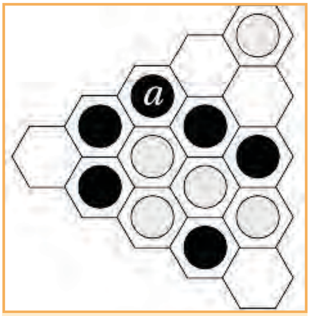
Les joueurs, appelés Noir et Blanc, posent tour à tour des pions de leur couleur sur un plateau losange à pavage hexagonal. Pas de capture, pas de déplacement : les pions posés restent en place jusqu'à la fin de partie. Deux côtés opposés du losange sont marqués en noir et les autres sont en blanc. L'objectif de Noir est de créer une chaîne de pions (noirs) deux à deux adjacents connectant les deux bords noirs, et l'objectif de Blanc est de relier d'une chaîne de pions (blancs) les deux autres côtés. Par exemple, le schéma représente une position de type Hex (sur un plateau 3×3) où chaque joueur a déjà effectué deux coups. Comme pour le jeu de Go, il est possible de jouer au Hex sur des plateaux de différentes tailles, les plus communes étant 13×13 et 19×19.



Quel coup de Noir choisir ?

© A.Saffidine.

Le Y est un autre jeu combinatoire abstrait aux règles élémentaires : tour à tour, les joueurs posent un pion de leur couleur sur le plateau triangulaire à pavage hexagonal jusqu'à ce qu'un joueur parvienne à créer une chaîne de pions connectant les trois bords d'un coup.



Positions du jeu du Y sur un plateau de taille 5. Noir vient de gagner en posant le pion *a*.

© A.Saffidine

Outre des règles très similaires, le Hex et le Y partagent de nombreuses propriétés, notamment l'absence de partie nulle : un plateau rempli de pions contient toujours une chaîne unique gagnante. La proximité entre les deux jeux va au-delà : on peut exhiber une réduction du Hex vers le Y faisant correspondre à toute position de Hex une position de Y.

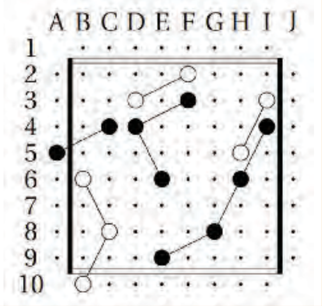
Cette réduction consiste à préparer le plateau en y jouant une série de pions blancs et noirs « dans les coins » afin de laisser un losange de cases vides, puis à reproduire la partie de Hex sur ce qu'il reste du plateau de Y.

Réduction du Hex vers le Y. La configuration précédente est surlignée en rouge.

© A.Saffidine

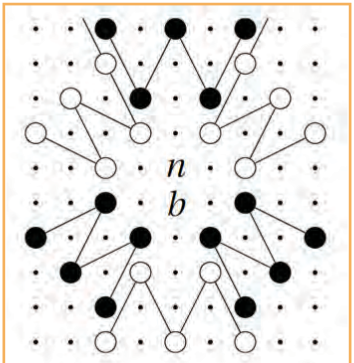
La réduction est telle que si la partie de Hex se joue sur un plateau de taille $n \times n$, la partie de Y correspondante se joue sur un plateau de côté $2n-1$. Si un joueur, humain ou machine, est capable de jouer parfaitement au Y sur toute taille, alors ce joueur peut utiliser la réduction pour jouer parfaitement au Hex sur toute taille. Bien sûr, la position issue de la réduction n'est pas une position de Y « naturelle » : aucun bon joueur de Y ne commencerait la partie en jouant dans les coins ! Mais cet aspect artificiel n'arrêtera pas un joueur « parfait » qui saura déterminer le meilleur coup dans n'importe quelle position de Y, y compris les plus biscornues.

Tout comme le Hex et le Y, le Twixt est un jeu de connexion inspiré d'Alex Randolph. On y joue sur un plateau carré en posant chacun son tour (Noir et Blanc) des pions de sa couleur. On ne connecte pas directement les pions adjacents mais on trace un trait entre les pions de même couleur à distance « saut de cavalier », du moment que cela ne croise pas de ligne adverse. Ainsi dans la figure ci-contre, les pions C4 et D4 ne sont pas connectés, mais Noir jouant C6 les connecterait indirectement via A5. Par contre, jouer Blanc en F4 ne connecterait pas H5 à D3 car le segment D4–F3 bloque le passage. Le premier joueur à connecter les deux bords qui lui appartiennent gagne la partie.

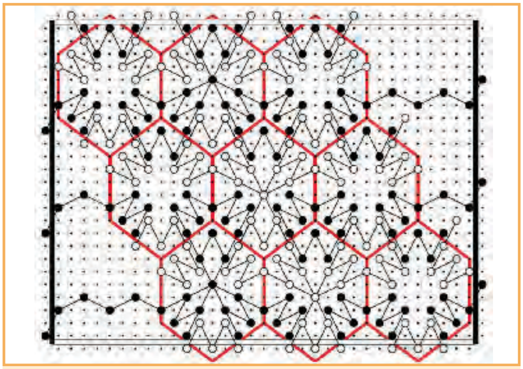


Une configuration de Twixt.
Quel coup de Blanc choisir ?
© A.Saffidine

De même que le Y, le Twixt se prête à une réduction depuis le Hex. Le pavage du plateau non hexagonal et les connexions à sauts de cavalier rendent la représentation du Hex moins directe que dans le cas du Y. On représente une case individuelle de Hex comme sur le schéma suivant. On fait ainsi correspondre à toute position de Hex une position de Twixt (la position de Hex précédente est encodée ici).



Noir simule jouer sur une case de Hex en posant un pion en *n*, et Blanc simule ce coup de Hex en jouant en *b*.
© A.Saffidine



Réduction du Hex vers le Twixt.
La configuration précédente est surlignée en rouge.
© A.Saffidine

D'une manière générale, si la partie de Hex est pratiquée sur un plateau de taille $n \times n$, alors la partie correspondante de Twixt est jouée sur un plateau de taille $(12n-1)\times(8n+3)$. Un joueur sachant jouer parfaitement au Twixt sur toute taille de plateau pourra donc jouer parfaitement au Hex.

Des chercheurs canadiens sont parvenus à construire une machine jouant parfaitement sur les « petits » plateaux de Hex (jusqu'à 9×9). Cependant, résoudre les plateaux de taille arbitraire semble bien plus complexe qu'au jeu de Nim : malgré les efforts de milliers de joueurs, de mathématiciens et d'informaticiens depuis soixante-dix ans, personne n'a trouvé de stratégie parfaite fonctionnant pour toute position. Aujourd'hui, le consensus est qu'il est impossible d'inventer une méthode « générale et rapide » pour la résolution des positions de Hex.

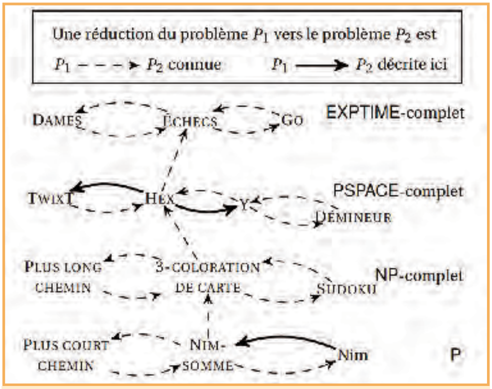
Moins de gens ont étudié le Twixt, mais la réduction ci-dessus conduit à la même conclusion : l'improbabilité d'une méthode rapide pour résoudre les positions de Twixt. En effet, une telle méthode, si elle existait, mènerait à une procédure rapide pour jouer parfaitement au Hex, contredisant l'opinion des chercheurs qui se sont penchés sur la question.

Ainsi, une réduction d'un problème P_1 vers un problème P_2 peut servir deux buts : si l'on sait résoudre « efficacement » P_2, alors on peut utiliser la réduction pour résoudre P_1. On l'a fait avec la réduction de Nim vers le problème de la Nim-somme. À l'inverse, si l'on a de bonnes raisons de croire que P_1 est « trop difficile », alors la réduction permet de propager tous ses arguments à P_2 et d'en conclure que P_2 est également « trop difficile pour être résolu de manière rapide et générale ». On l'a fait avec la réduction du Hex vers le Twixt !

Classes de complexité et une question à un million de dollars

Le diagramme suivant liste certaines réductions reliant quelques jeux et puzzles. On s'intéresse toujours à une version généralisée du problème : il s'agit par exemple de jouer aux Échecs sur un plateau de taille arbitraire. Outre des jeux bien connus, le diagramme mentionne la tâche de colorier tous les pays d'une carte donnée en utilisant au plus trois couleurs et de sorte que deux pays ayant une frontière commune soient de couleurs différentes. On trouve également la tâches de trouver le plus long (ou le plus court) chemin entre l'entrée et la sortie d'un labyrinthe.

Le diagramme n'est pas exhaustif ! Chaque année, de nouveaux problèmes sont formulés et de nouvelles réductions sont inventées ou découvertes pour les relier aux problèmes connus.



Quelques réductions connues.

© A.Saffidine

Si l'on dispose d'une réduction d'un problème P_1 vers un problème P_2 et d'une autre réduction de P_2 vers un problème P_3, alors il est possible de combiner les deux réductions pour en obtenir une nouvelle de P_1 vers P_3 (c'est la transitivité des réductions). Par exemple, si l'on nous dit qu'il existe une réduction du Y vers le Démineur, on peut déduire qu'il existe une réduction du Hex vers le Démineur.

Le principe de transitivité permet ainsi de regrouper les problèmes du diagramme en classes de complexité telles que si P_1 et P_2 sont deux problèmes dans la même classe alors il existe une réduction de P_1 vers P_2 et il existe une réduction de P_2 vers P_1, chacune de ces réduction pouvant être donnée directement ou par transitivité. On peut voir sur le diagramme que les problèmes listés ici se rassemblent en quatre classes de complexité : EXPTIME-complet, PSPACE-complet, NP-complet, et P.

Il existe une preuve formelle démontrant qu'on ne pourra jamais « inventer » de réduction d'un problème EXPTIME-complet (comme les Échecs) vers un problème dans P (comme Nim). La fameuse question « La classe P est-elle égale à la classe NP ? », qui date du milieu des années 1970, revient à se demander s'il est possible d'inventer une réduction depuis un problème de la classe NP (par exemple le Sudoku) vers un problème de la classe P (par exemple Nim). Jusqu'à ce jour, personne n'est parvenu à exhiber une telle réduction, ni à démontrer qu'il n'en existait pas !

Cette situation fait de « P *vs* NP » une question mathématique difficile, si fondamentale qu'en 2000 le Clay Mathematics Institute l'a mise à prix un million de dollars.

A. S.

Pour en savoir (un peu) plus :

Les énigmes mathématiques du troisième millénaire. Keith Devlin, Le Pommier, 2005.

Logique, informatique et paradoxes. Jean-Paul Delahaye, Belin – Pour la Science, 1995.

L'intelligence et le calcul. Jean-Paul Delahaye, Belin – Pour la Science, 2002.