Reines rivales et indépendantes

Une première version de cet article (à jour seulement des résultats de 2015) est parue dans le n°459 (janvier 2016) de la revue *Pour la science* sous le titre «Le problème des huit reines et au-delà».

Jean-Paul Delahaye

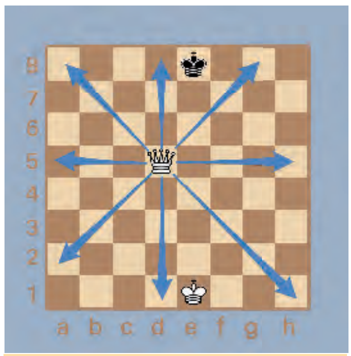
Professeur émérite à l'université de Lille-I, équipe Cristal (UMR CNRS 9189)

Avoir des interactions est difficile, ne pas en avoir aussi. *Le problème des n reines* le montre. Bien qu'on s'en occupe depuis bientôt deux siècles, il reste mystérieux !

Quand le grand Carl Friedrich Gauss oublie des solutions

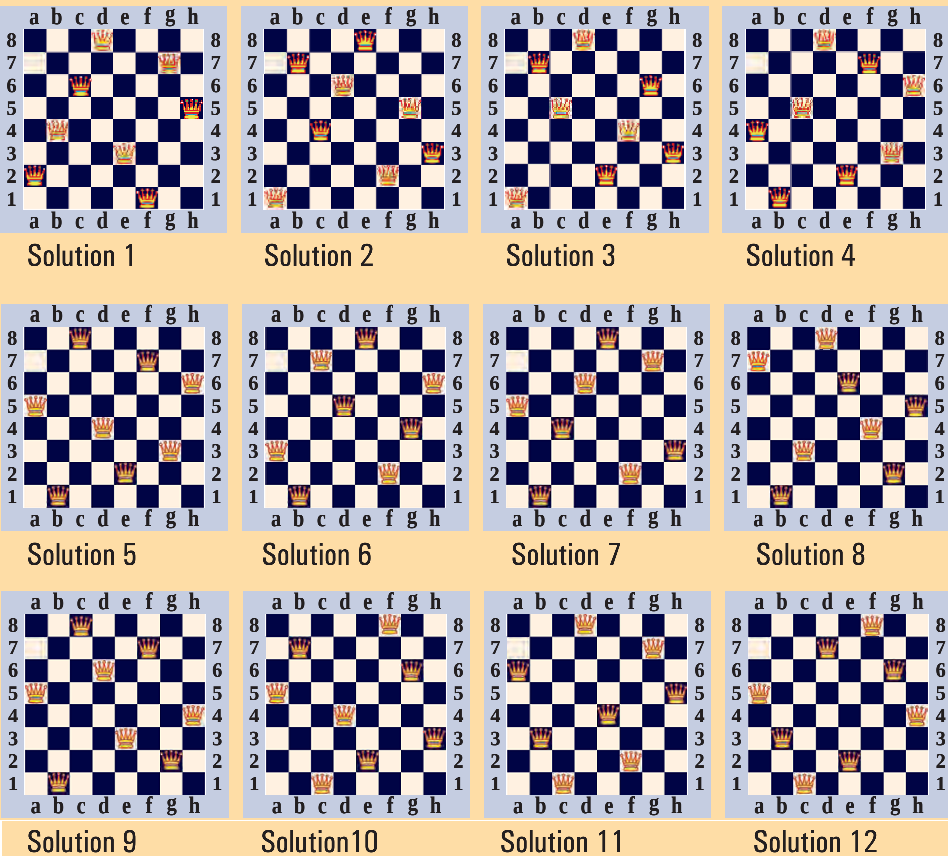
En 1848, un amateur du jeu d'échecs, Max Friedrich William Bezzel, pose le problème suivant : est-il possible de placer huit reines sur l'échiquier de telle façon qu'aucune ne soit en prise sur une autre ? Souvenez-vous : une reine aux échecs peut accéder à chacune des cases de la ligne horizontale, de la colonne verticale et des deux diagonales passant par la case qu'elle occupe.

Puisqu'il n'y a que huit lignes horizontales sur l'échiquier, et qu'une reine au plus peut se trouver sur une telle ligne dans une solution au problème, il est certain qu'il n'y aura pas plus de huit reines indépendantes sur l'échiquier 8×8, et que s'il existe des solutions elles comporteront toutes une reine par ligne au maximum. Il en va de même pour les colonnes.



Les déplacements autorisés de la reine sur un échiquier (les deux autres pièces figurées sont les rois).
© SmartKids Chess, 2005

Le grand mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777–1855) étudia le problème et le résolut partiellement en proposant soixante-douze solutions avec, pour chacune, huit reines sur l'échiquier de soixante-quatre cases. Il avait oublié certaines configurations ! La première solution complète fut proposée en 1850, par Franz Nauk. Il y a quatre-vingt-douze dispositions convenables, donc vingt de plus que celles trouvées par Gauss. Elles se ramènent à douze quand on enlève les configurations se déduisant les unes des autres par des rotations ou des symétries. Deux d'entre elles possèdent la jolie propriété que jamais trois dames ne sont alignées, quelles que soient les droites que l'on envisage. Essayez de les trouver par vous-même !



Les douze solutions du problème des huit reines.

© Pour la Science 459, 2016

La généralisation du problème de Bezzel consiste à envisager un échiquier carré de n cases de côté et à essayer d'y placer n reines. C'est ce que l'on dénomme le *problème des n reines*. On découvre sans mal que pour $n = 2$ et $n = 3$ c'est impossible. En revanche, pour n plus grand, cela semble toujours possible.

On envisage le problème de deux façons : (*i*) trouver pour tout entier n une solution s'il en existe ; (*ii*) trouver toutes les solutions et les dénombrer, au moins pour les premières valeurs de n. Le problème (*i*) est aujourd'hui parfaitement résolu, cela sans avoir besoin d'un ordinateur : on décrit un procédé général sous forme géométrique qui, pour tout entier n à partir de 4, construit une configuration convenable. De tels procédés sont nombreux et on en découvre régulièrement de nouveaux.

Le problème (*ii*) est bien plus délicat ! Imaginer des procédés « simples » qui, pour tout entier n, décrivent toutes les solutions ne semble pas envisageable.

On utilise donc des ordinateurs pour mener des calculs systématiques. C'est un exercice de programmation que tout étudiant en informatique a pratiqué au moins une fois.

Il est assez facile d'écrire un programme qui traite le problème jusqu'à $n=12$. Aller au-delà demande plus de soin et de patience et est l'objet de records qui, du fait de l'explosion combinatoire, évoluent lentement.

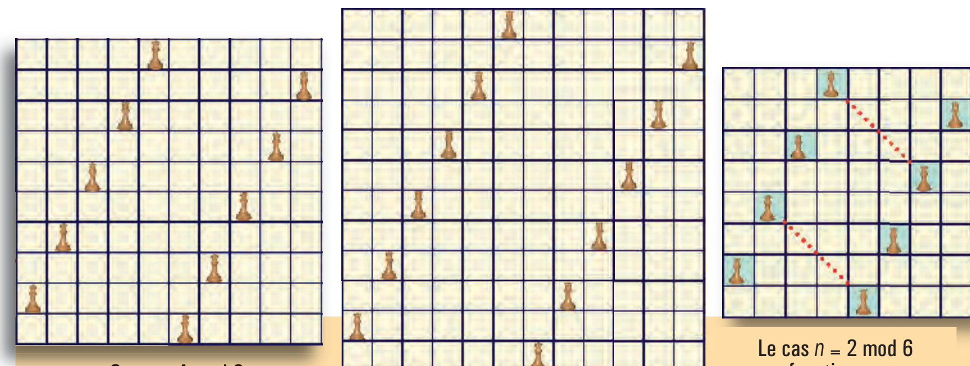
Aujourd'hui, le décompte des solutions a été mené jusqu'à $n=27$. Réussir le décompte pour $n=28$ est un difficile défi.

On peut déjà commencer sans l'aide d'un ordinateur…

À défaut de pouvoir trouver le nombre exact de solutions pour tout n, on essaie de minorer ce nombre, car il est intéressant de savoir (et de démontrer) que le nombre de solutions augmente très rapidement en fonction de n. Quelques résultats sont connus, qui donnent de telles minorations du nombre de solutions (voir l'article de l'auteur cité en référence).

L'idée la plus simple, proposée dès 1874 par Emil Pauls, pour trouver une solution pour un entier n quelconque est de disposer les reines régulièrement selon un double parcours rectiligne de cavalier, en s'arrangeant pour qu'il y ait une reine sur chaque ligne horizontale et une sur chaque rangée verticale.

La méthode est parfaite pour tout entier n multiple de 6 (on écrit $n=0$ mod 6), et pour tout entier n de quatre unités plus grand qu'un multiple de 6 (on écrit $n=4$ mod 6).



Cas n = 4 mod 6

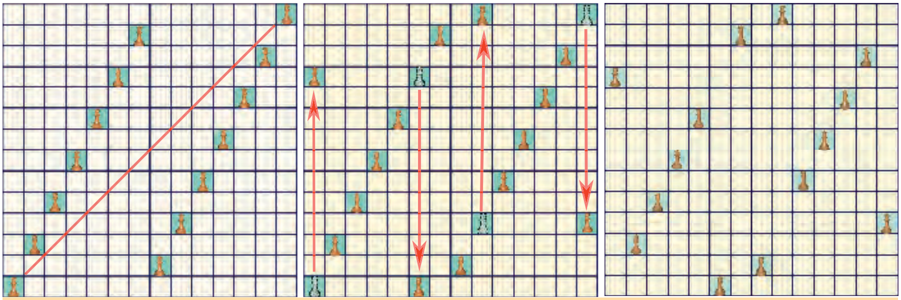
Cas n = 0 mod 6

Le cas n = 2 mod 6 ne fonctionne pas

La solution d'Emil Pauls pour certains entiers pairs.

© CIJM

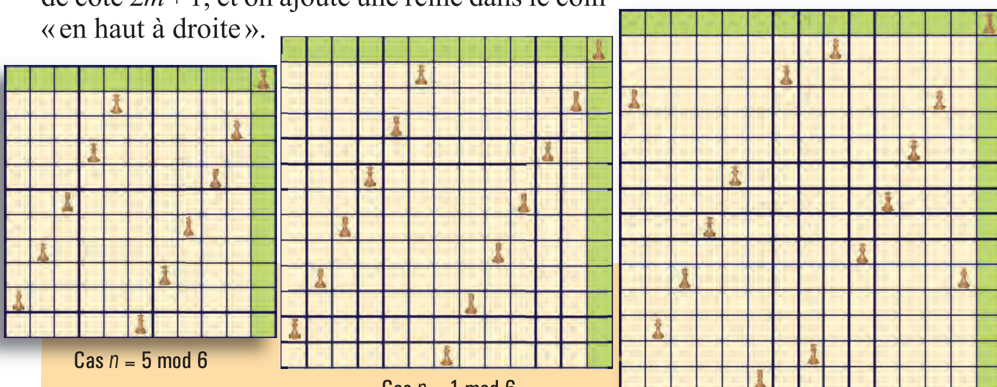
Pour les nombres pairs de deux unités plus grands qu'un multiple de 6 (on écrit donc $n = 2 \bmod 6$), la méthode ne convient pas à cause des diagonales. Un autre schéma un peu plus élaboré permet de s'en tirer. On a donc une solution pour tout entier pair à partir de 4.



Cas n = 2 mod 6 : on commence avec une solution où tout va bien sauf pour la grande diagonale. On déplace quelques reines. On obtient une solution.

© CIJM

Pour les nombres n impairs, que l'on peut donc écrire $n = 2m + 1$ avec m un entier adéquat, on prend une solution pour le nombre pair une unité plus petit, à savoir $2m$, on la place dans le coin « en bas à gauche » de l'échiquier de côté $2m + 1$, et on ajoute une reine dans le coin « en haut à droite ».



Cas n = 5 mod 6

Cas n = 1 mod 6

Cas n = 3 mod 6

Cas n impair : On part d'une solution pour n = 1. On ajoute une ligne, une colonne et une reine en haut à droite.

© CIJM

Le problème (i) de trouver une solution pour tout entier à partir de 4 est donc résolu… sans avoir utilisé d'ordinateur. Disposer d'une solution est très bien, mais les connaître toutes ou réussir à les compter serait encore mieux. À moins d'une découverte mathématique, l'ordinateur semble cette fois indispensable.

On peut envisager au moins trois façons, de plus en plus « intelligentes », de rechercher toutes les solutions pour une valeur de n donnée. Cette progression de la puissance quand on améliore les méthodes illustre l'idée qu'en informatique un programme peut être correct et fonctionner parfaitement pour les petites valeurs d'un paramètre, et pourtant être très « mauvais », car inefficace quand le paramètre augmente.

Des programmes absurdes et des programmes plus malins

On commence par écrire un sous-programme qui, quand on lui propose une configuration quelconque de n reines, indique si oui ou non elle est satisfaisante. Un tel sous-programme est facile à concevoir car deux dames en position (a, b) et (a', b') sur l'échiquier de côté n sont en prise l'une avec l'autre si, et seulement si :
• $a = a'$ (elles sont placées sur la même ligne) ;
• ou bien $b = b'$ (elles se trouvent sur la même colonne) ;
• ou encore $a - b = a' - b'$ (elles sont sur la même première diagonale) ;
• ou enfin $a + b = a' + b'$ (elles se situent sur la même seconde diagonale).

La première idée qui vient à l'esprit pour calculer toutes les solutions pour un entier n donné est de placer n reines de toutes les façons possibles et, pour chaque configuration ainsi obtenue, d'utiliser le sous-programme qui indiquera si la configuration est solution ou non. Quand on place la première reine, il y a n^2 choix possibles ; de même pour la deuxième ; et cela jusqu'à la n-ième. Le nombre de configurations à tester est donc $(n^2)^n$, soit n^{2n}, ce qui pour $n = 8$ représente 281 474 976 710 656.

La deuxième idée consiste à remarquer que toute solution s'obtiendra en plaçant une reine par colonne, et qu'on peut même s'arranger pour que les reines placées ne soient pas situées sur les lignes déjà occupées au moment où on les place : il y a n façons de placer la première reine dans la première colonne ; il y a $n-1$ façons de placer la deuxième reine (car elle va sur la deuxième colonne, mais on n'envisage pas de la placer sur la ligne occupée par la première reine) ; il y a $n-2$ façons de placer la troisième reine… ce qui conduit donc en tout à $n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1$ configurations de n reines à essayer. On les teste une à une avec le sous-programme décrit plus haut, qui peut d'ailleurs être simplifié puisque, par construction, les configurations qu'on lui soumet maintenant sont correctes pour les contraintes de lignes et de colonnes. Le gain est considérable entre la première méthode et la seconde ! Pour $n = 8$, il n'y a plus que quarante mille trois cent vingt configurations à tester, soit sept milliards de fois moins environ que par la première méthode.

On peut encore faire mieux ! La troisième méthode consiste à remarquer que, lorsqu'on place les reines une à une comme avec la deuxième méthode, il est possible de s'apercevoir rapidement qu'on est en train de construire une configuration qui ne pourra pas aboutir. Si par exemple on a placé une reine en $(1, 1)$ puis la deuxième en $(2, 2)$, elles sont sur la même diagonale et donc il faut cesser de prolonger ce début de configuration, qui ne donnera jamais de solution, quelles que soient les reines qu'on y ajoutera. Découvrir le plus tôt possible deux reines en prises dans l'énumération ordonnée de toutes les possibilités, et remettre en cause le choix qui y a conduit, est ce que l'on nomme la méthode de *backtracking* (ou *retour arrière*). Elle est d'usage courant pour s'attaquer à de nombreux problèmes combinatoires. Le gain obtenu par rapport à la seconde méthode est encore très intéressant et ce gain augmente avec n. Si on compte comme un essai une position où, soit on a réussi à trouver une solution, soit on a découvert qu'il sera impossible d'aller plus loin, alors on trouve les quatre-vingt-douze solutions pour $n=8$ en treize mille sept cent cinquante-six essais. Cela correspond à trois fois moins d'essais que par la deuxième méthode ! Pour $n=12$, le nombre d'essais se monte à 9 261 880 au lieu de $12! = 479\,001\,600$ par la deuxième méthode ; le gain est donc d'un facteur 50. Hélas, aucune formule simple connue ne fournit le nombre d'essais par la troisième méthode…

Il se trouve cependant que pour battre les records, il faut non seulement utiliser une bonne méthode – donc une variante du *backtracking* – mais aussi (*a*) la programmer très soigneusement, (*b*) faire exécuter en parallèle les calculs (ce qui n'est pas difficile ici car la méthode s'y prête bien), et (*c*) fabriquer et utiliser des puces spécialisées qui iront plus vite que les processeurs généraux pour l'exécution des calculs. C'est d'ailleurs ainsi que fonctionne le système informatique aujourd'hui détenteur du record pour $n=27$.

Qui saura aller au-delà ?

J. - P. D.

Pour en savoir (un peu) plus :

Le problème des huit reines et au-delà. Jean-Paul Delahaye, *Pour la Science* 459, janvier 2016.

Le site « N-Queens Problem ». Rosetta code, ***rosettacode.org/wiki/N-Queens***, 2019.

Across the Board : The Mathematics of Chessboard Problems. John Watkins, Princeton University Press, 2007.

A Survey of Known Results and Research Areas for n-Queens. Jordan Bell et Brett Stevens, *Discrete Mathematics* 309, 2009. [Attention, le « théorème 2 » n'est en fait qu'une conjecture.]

The n-Queens Problem. Igor Rivin, Ilan Vardi et Paul Zimmerman, *American Mathematical Monthly*, 1994. [Attention, le « théorème 2 » et son corollaire sont faux.]