Les conjectures, moteur des mathématiques

Élisabeth Busser

Mathématicienne,
rédactrice pour le magazine *Tangente*

Faire des hypothèses, en un mot « conjecturer », est à la base de bien des jeux. Les mathématiques elles-mêmes se sont souvent construites à partir d'hypothèses plus ou moins hasardeuses, de suspicions, d'intuitions… bref, de conjectures.

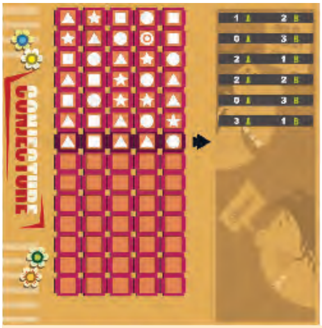
« Je suis une conjecture. Maman dit que, quand je serai grande, je serai un théorème. » Cette phrase, énoncée sérieusement par un petit bout de chou dans un dessin humoristique, traduit bien la réalité du mot « conjecture ». C'est un résultat que l'on espère vrai, qui est souvent vérifié sur de nombreux cas, mais jamais vraiment démontré rigoureusement. *Conjecturer,* c'est faire l'hypothèse que ce résultat est vrai. Les premières conjectures, l'enfant les fait en jouant, en faisant des expériences, en tâtonnant, en découvrant le monde. C'est plus tard qu'il les rencontre en mathématiques, soit parce qu'elles viennent d'être démontrées et que la presse s'en fait l'écho, soit parce qu'on s'y heurte encore et qu'on cherche toujours. C'est précisément cette recherche qui a, dans bien des cas, fait progresser les mathématiques.

Conjecturer pour jouer, c'est déjà faire des mathématiques

Un jeu répandu et simple, où conjecturer amène à la victoire, c'est le Tic-tac-toe, ou Morpion. Sur une grille 3 × 3, deux adversaires s'affrontent, à coup de croix et de ronds, chacun tentant d'aligner ses trois mêmes symboles. Et les hypothèses de s'échafauder, conjectures élémentaires : si je me mets ici, il va se mettre là, oui mais si je me mets là, il pourra alors aligner ses trois pions.

Un jeu de Tic-tac-toe.
© ThamBlog, 2015

Un autre jeu, très connu lui aussi, demande plus de finesse dans les hypothèses, qui deviennent de véritables conjectures : le Mastermind (Hasbro, 1972). Il s'agit de deviner, en un nombre d'essais fixé, la place exacte, sur une ligne, de cinq pions de couleur, connaissant seulement à chaque essai le nombre de pions bien placés et celui des pions de la bonne



couleur mais mal placés. Il en existe plusieurs versions gratuites en ligne, et l'une d'elles porte bien son nom puisqu'elle s'appelle précisément… Conjecture (Jeuxclic.com, 2008). Par rapport au Mastermind, les pions de couleur sont remplacés par cinq pièces différentes (toutes représentées sur le deuxième essai ci-contre). Jouer, c'est donc bien souvent passer par l'étape « conjecture », et conjecturer, c'est déjà faire des mathématiques.

Une partie de Conjecture gagnée en sept essais (sur quatorze tentatives autorisées).
« A » indique le nombre de pièces bien placées, « B » le nombre de pièces correctes mais mal placées.

« Un continent dont l'humanité serait assurée de l'existence »

Il est en mathématiques des conjectures qui ont joué un grand rôle, par leur attrait ou par l'apport que la recherche de leur démonstration a amené. *« Imagine un continent dont l'humanité entière serait assurée de l'existence et auquel on ne trouverait aucun moyen d'accès ; voilà ce qu'est une conjecture mathématique ! »* écrit Denis Guedj dans le *Théorème du perroque*t (Points, 2000).

Une des conjectures les plus célèbres des mathématiques depuis l'Antiquité, au point que son nom est passé dans le langage courant pour désigner une situation impossible ou inextricable, est celle de la *quadrature du cercle* : il serait impossible de construire, à la règle et au compas dans le plan euclidien, en un nombre fini d'étapes, un carré d'aire égale à celle d'un disque donné. Les mathématiciens se sont acharnés durant des siècles sur cette affirmation. Il faudra attendre le début du XIXe siècle pour trancher la question et démontrer l'impossibilité en question.

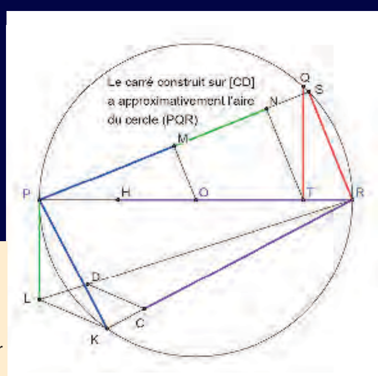
Vers 1621, le magistrat et mathématicien toulousain Pierre de Fermat posa « sa » conjecture : *« Il est impossible, écrit-il en marge de son exemplaire des Arithmétiques* de Diophante*, de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré : j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir. »* Non seulement on n'a jamais retrouvé trace de la démonstration, mais c'est en 1994 seulement qu'une preuve complète a été élaborée, par le mathématicien britannique Andrew Wiles : la célèbre conjecture est devenue théorème de Fermat–Wiles. La preuve de ce joli résultat arithmétique s'inscrit pleinement dans la recherche contemporaine : Wiles a en fait démontré qu'une conjecture fondamentale et redoutable (dite de *Taniyama – Shimura*) était vraie, et l'on savait que cette dernière impliquait l'énoncé de Fermat. La conjecture de Taniyama – Shimura fait elle-même partie d'un vaste édifice encore largement conjectural, le *programme de Langlands*, sur lequel travaillent avec acharnement plusieurs centaines de mathématiciens professionnels depuis des décennies. Les progrès obtenus ces dernières années sont sensationnels et prometteurs, mais le chantier reste encore largement en friche.

Timbre émis pour célébrer la démonstration de la fameuse conjecture énoncée par Fermat.
© La poste, 2001

La quadrature du cercle : un puissant moteur

Quoi, un résultat non démontré, ça existe en mathématiques ? Oui, et pire que cela : la recherche de la démonstration, plus précieuse bien souvent que la démonstration elle-même, est un puissant moteur dans la marche des mathématiques. Le mathématicien allemand David Hilbert ne s'y était pas trompé lorsqu'en 1900 il dressa la liste des vingt-trois problèmes non encore résolus dont la recherche orienterait *« la pensée mathématique des générations futures »*. Parmi ceux-ci, l'hypothèse de Riemann est toujours non résolue. Elle porte sur les nombres complexes s qui annulent la fonction zêta, définie par $1 + 1/2^s + 1/3^s + \ldots$ Cette question a fait et fait toujours avancer la science mathématique.

Mais peu de problèmes ont mis en émoi la communauté mathématique comme celui de la quadrature du cercle. D'innombrables amateurs ont imaginé d'invraisemblables tracés (constructions approchées, quadratrices...) et construit des traceurs de courbes spéciaux pour tenter de le résoudre. L'engouement a été tel qu'en 1775 l'Académie des sciences a décidé de refuser les mémoires sur le sujet ! Il n'empêche, les constructions approchées se sont développées en grand nombre, des valeurs de π de plus en plus précises sont apparues, tout un pan de l'algèbre a été exploré.
Ce problème a conduit à faire le lien entre des propriétés géométriques, algébriques et analytiques, comme la transcendance de π, qui a permis d'en venir à bout, avec un détour par les équations algébriques et la théorie de Galois.
Beau parcours !



La quadrature du cercle approchée par Ramanujan (les segments de même couleur ont même longueur).
© É. Busser

On a beaucoup parlé ces dernières années de la résolution de la conjecture de Poincaré. Le mathématicien français Henri Poincaré formula en 1904 la conjecture qui porte son nom : *« La sphère S^3 est la seule variété orientable de dimension 3 sans bord et de taille finie qui soit simplement connexe. »* Dit autrement, imaginons, en 3D, un ballon et une bouée, tous deux avec un ruban autour. En faisant glisser le ruban doucement, on peut le ramener à un simple point sur le ballon, alors que si le ruban est enfilé autour de la bouée, le réduire en un point par glissement est impossible. Le ballon est qualifié de surface *simplement connexe* alors que la bouée ne l'est pas. Toute la différence entre les deux, disait Poincaré, est qu'une surface possédant cette propriété de connexité peut être déformée continûment en une sphère. La conjecture revêt une importance telle que sa résolution est mise à prix un million de dollars par le Clay Mathematics Institute en l'an 2000. À la surprise générale, le mathématicien russe Grigori Perelman en a donné une preuve dès 2003, refusant d'ailleurs la médaille Fields en 2006 et le prix en 2010…

Des quêtes et de belles gerbes de résultats

Un autre beau parcours est celui des trois cent cinquante années de tentatives de démonstration de la conjecture de Fermat. Elles ont été le théâtre de développements inattendus et de l'exploration de terres inconnues, ce qui a permis de relier des domaines jusqu'alors disjoints. Après la démonstration de quelques cas particuliers, de nombreux mathématiciens ont « planché » sur la question, ouvrant des brèches importantes : Sophie Germain en théorie des nombres, ou Ernst Kummer, précurseur de la notion d'idéal, centrale en algèbre. Deux autres notions nouvelles sont intervenues : les courbes elliptiques rationnelles (d'équation $y^2 = x^3 + ax + b$ avec a, b, x, y rationnels, a et b constantes) et les formes modulaires, qui ont de remarquables propriétés de symétrie. Les mathématiciens japonais Yutaka Taniyama et Goro Shimura les ont associées dans une conjecture éponyme : toute courbe elliptique rationnelle est modulaire. Mais où est donc le théorème de Fermat ? Ce sont l'Allemand Gerhard Frey et l'Américain Ken Ribet qui le relient à la conjecture précédente : si le théorème de Fermat est faux, alors la conjecture de Taniyama – Shimura l'est aussi. Il suffisait donc de démontrer cette dernière, ce que fit Andrew Wiles en 1994 dans le cas particulier, qui était suffisant, des courbes semi-stables.

Il reste de ces moments de quête un stimulant formidable pour la recherche, qui débouche toujours sur une belle gerbe de résultats.

Un florilège de conjectures qui attendent d'être vaincues

D'autres conjectures demeurent à ce jour sans démonstration, malgré d'intenses recherches ; c'est le cas de la conjecture de Goldbach, énoncée en 1742 (*« Tout entier pair supérieur à 4 peut s'écrire comme la somme de deux* *nombres premiers »*), ou celle de Riemann, de 1859 (*« Les zéros complexes de la fonction zêta qui ne sont pas les entiers relatifs* $-2, -4, -6$… *ont tous une partie réelle égale à 1/2 »*). C'est aussi le cas de la conjecture de Syracuse, posée semble-t-il en 1928 par le mathématicien allemand Lothar Collatz et médiatisée à partir de 1952 lors d'un congrès à l'université de Syracuse aux États-Unis. On part d'un entier positif et on lui applique l'algorithme suivant : pair, on le divise par 2 ; impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1 ; on recommence avec le résultat obtenu. On fabrique ainsi une suite de nombres, comme 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. La conjecture avance que, quel que soit le nombre de départ, on arrive toujours à 1. On attend encore la démonstration de cette propriété… Tout aussi redoutable : les seuls entiers qui peuvent s'écrire en base 3, en base 4 et en base 5 uniquement avec des 0 et des 1 sont-ils 0, 1 et 82 000 ?

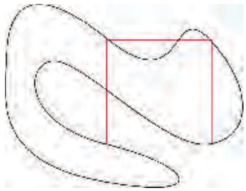
Énigmes, conjectures, problèmes ouverts… pour tous les goûts

La liste des conjectures semble s'étendre à l'infini. La plupart sont extrêmement techniques et nécessitent un bagage mathématique évolué pour être appréciées. Certaines cependant sont accessibles avec peu de prérequis.

La *conjecture d'Erdös–Straus* stipule que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe trois entiers strictement positifs t, u et v tels que $4/n = 1/t + 1/u + 1/v$. La *conjecture des nombres premiers jumeaux* propose qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux, comme 17 et 19, 101 et 103 ou 1019 et 1021, à savoir deux nombres premiers séparés de 2. Plus généralement, la *conjecture de Pollignac* avance qu'il existe, de même, une infinité de nombres premiers séparés de $2k$, et ce pour tout entier k. En 2013, Yitang Zhang, puis de nombreux autres mathématiciens en 2014, ont réussi à démontrer que la conjecture de Pollignac est vraie pour au moins un entier k inférieur à 246. On est encore loin d'établir le résultat pour tous les entiers k… Pour rester dans les entiers, un nombre n est *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs (n lui-même étant exclu). Ainsi, 6 et 28 sont parfaits : $6 = 3 + 2 + 1$ et $28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$. On conjecture qu'il n'existe pas de nombre parfait impair, et qu'il existe une infinité de nombres parfaits pairs.

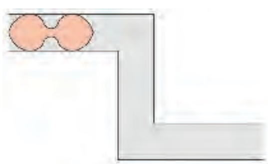
Les amateurs de pavages se demandent toujours si l'on peut couvrir un carré de côté 1 avec les rectangles de côtés 1 et 1/2, 1/2 et 1/3, 1/3 et 1/4, 1/4 et 1/5… utilisés chacun une seule fois dans le pavage (la somme de leurs aires est égale à 1). Ou s'il existe un polygone permettant de paver le plan, mais pas de manière périodique (*problème d'ein Stein*, de l'allemand « une pierre »). Ou encore si un disque D peut être découpé en deux parties congruentes connexes G et H telles que le centre de D ne soit ni sur le bord de G ni sur le bord de H. Ou enfin si un rectangle peut être partagé en trois polygones congruents (hors rectangles).

Pour rester dans la géométrie, on ne sait toujours pas s'il existe un parallélépipède rectangle dont toutes les longueurs (des douze côtés et des seize diagonales) sont des nombres entiers. Dans le plan, le *problème du nombre congruent* consiste à trouver quels sont les entiers qui sont l'aire d'un triangle rectangle de côtés tous rationnels. Le *problème du carré inscrit* (ou *conjecture de Toeplitz*) avance que toute courbe fermée simple dans le plan possède quatre points qui définissent un carré. C'est un théorème pour les courbes « suffisamment régulières », mais ça reste une question ouverte en général. À propos de carré, on ne sait toujours pas s'il existe un point P à l'intérieur du carré unité ABCD dont les distances PA, PB, PC et PD à chacun des quatre côtés sont tous des nombresrationnels…



Un carré inscrit dans une courbe.
© Étienne Ghys, 2012

Le *problème du sofa* demande de trouver le canapé d'aire A maximale que peut posséder un canapé que l'on peut déplacer horizontalement dans un couloir d'un mètre de large avec un angle droit. On sait seulement que 2,219 < A < 2,370.



La meilleure solution connue dans cette variante à deux angles droits du problème du sofa.
© Dan Romik, UC Davis, 2017

Enfin, les mathématiques discrètes, notamment la théorie des graphes, sont une mine inépuisable de conjectures. En voici une, redoutable, issue de la combinatoire (*conjecture de Frankl*). Une famille F d'ensembles est stable par union si l'union de deux ensembles quelconques de F est encore dans F. Ainsi, F = {Ø, {1,2}, {1,2,3}, {1}, {3}} est *stable par union* (avec Ø l'ensemble vide). La conjecture affirme que, dans toute telle famille F, il existe un élément appartenant à au moins la moitié des ensembles de F (ici, 1 appartient à trois des cinq ensembles de F).

Plus visuelle sont ces questions : existe-t-il huit points du plan (trois d'entre eux n'étant jamais alignés, quatre d'entre eux n'étant jamais sur un même cercle) dont les distances deux à deux sont des nombres entiers ? Tout polyèdre convexe admet-il un patron dont les faces, dessinées sur le plan, ne se chevauchent pas ? Quelle est la plus petite aire que peut avoir une surface recouvrant toute courbe du plan de longueur 1 ? Pour vous frotter à une jolie énigme mathématique, vous n'avez que l'embarras du choix !

É. B.