Progressions et poursuites au Moyen Âge

Jacques Sesiano

Historien des mathématiques,
École polytechnique fédérale de Lausanne

Dès l'Antiquité on trouve des problèmes dits *récréatifs* dont le but est d'essayer de rendre agréable l'apprentissage des notions mathématiques. Le cadre en est la vie de tous les jours, mais la différence avec les problèmes d'application usuels est que les conditions sont peu vraisemblables, voire même absurdes. Comme il s'agit de provoquer l'intérêt de l'élève, ceci joint l'utile à l'agréable. Aussi de tels énoncés au charme inégalable apparaissent-ils régulièrement dans les ouvrages mathématiques médiévaux, à commencer par le recueil des *Propositions pour aiguiser l'esprit des jeunes gens* (*Propositiones ad acuendos iuvenes*) du moine irlandais Alcuin, que Charlemagne chargea peu avant 800 du l'établissement de l'enseignement public.

Représentation supposée de Charlemagne et d'Alcuin.
© British Library, Royal Manuscript 16.G.VI

Des classiques : progressions arithmétiques ou géométriques

L'un des thèmes les plus communs de ces récréations mathématiques est la sommation des progressions. Dans celles dites *arithmétiques*, chaque terme se différencie du précédent par l'addition d'une quantité fixe. Ainsi, si $a_1 = a$ est le premier terme et r la quantité fixe (la *raison*), alors $a_2 = a + r$, $a_3 = a + 2r$, et le $n^{\text{ième}}$ terme sera $a_n = a + (n-1)r$; la somme de la progression vaudra alors :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = na + r(1 + 2 + \ldots + (n-1)) = na + rn(n-1)/2.$$

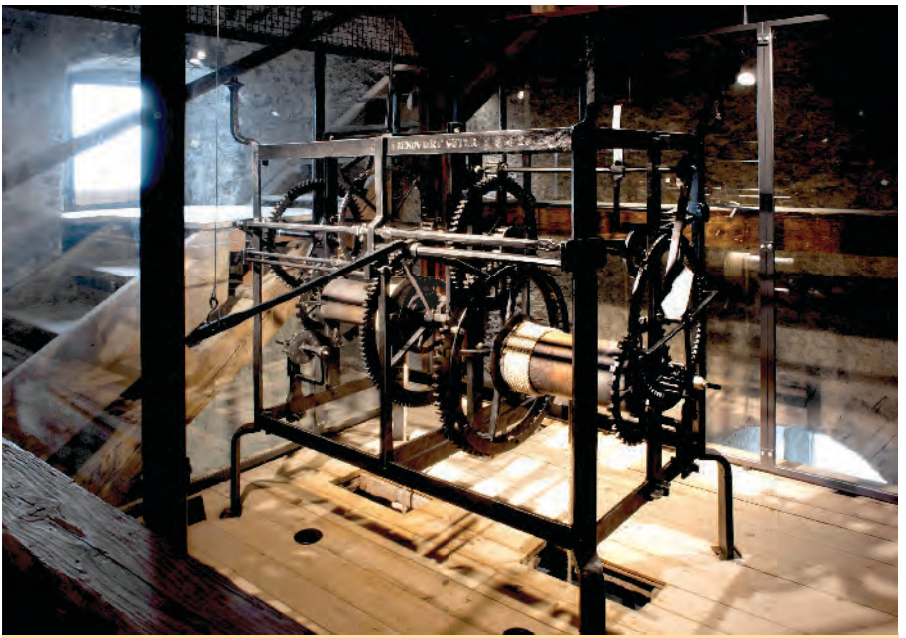
Dans le cas particulier où le premier terme a et la raison r sont égaux, cette somme est égale à $an(n+1)/2$.

Dans le cas des progressions dites *géométriques*, chaque terme se différencie du précédent par sa multiplication par une quantité fixe. Ainsi, si $a_1 = a$ est le premier terme et r la quantité fixe (la raison), alors $a_2 = r\,a$, $a_3 = r^2\,a$, et le $n^{ième}$ terme sera $a_n = r^{n-1}\,a$; la somme de la progression sera

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a\,(1 + r + \ldots + r^{n-1}) = a\,(r^n - 1)\,/\,(r - 1).$$

Ces formules étaient déjà connues dans l'Antiquité grecque, voire même en Mésopotamie, et des exemples de problèmes d'application ou récréatifs nous en sont parvenus. La présence de tels problèmes au Moyen Âge n'est donc pas surprenante.

Un manuscrit latin, écrit vers 1400, contient un problème dont voici la traduction de l'énoncé et de la réponse : *« Une horloge frappe durant un jour naturel vingt-quatre heures. On demande alors combien de coups elle a donnés au total, ajoutant tous les coups de chaque heure. [...] Tu verras qu'en vingt-quatre heures l'horloge a frappé trois cents coups. »* Telle est en effet la somme des entiers naturels de 1 à 24. Un tel problème est spécifiquement médiéval : les horloges mécaniques, à poids, apparaissent vers la fin du XIIIe siècle.



Moteur de l'horloge de la tour de Lucerne (Suisse), remontant à 1385 et refait en 1535.

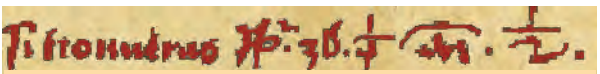
© *Luzerner Zeitturm*

D'autres énoncés sont plus classiques, comme cette version (en français du XVe siècle) d'un problème du recueil d'Alcuin.
« Je vis une eschielle qui avoit cent eschellons. Ou [Au] prem[i]er eschellon estoit un coulon [pigeon], ou second eschellon deux coulons, et ou tiers trois, et ou quart quatre, et ainsi jusques a cent. On demande quans [combien de] coulons estoient en toute l'eschielle. Responce : 5 050. »

Nicolas Chuquet, mathématicien lyonnais de 1484, nous narre la singulière histoire d'une personne se déplaçant à pied en augmentant chaque jour la distance qu'elle couvre d'une lieue (la lieue, d'environ 4 000 m, est la mesure usuelle de distance à cette époque ; c'est ce que couvrirait en une heure un piéton marchant normalement). *« Ung homme va le premier jour une lyeue, le second jour deux lyeues, le tiers jour trois lyeues, et ainsi continuant et progredissant par ung. Assavoir monlt [On désire beaucoup savoir] en quantz jours il aura cheminé dix huyt lyeues. »*
Le nombre de lieues parcourues en t jours égalera $t(t+1)/2$, qu'il faut donc égaler à 18 : *« Il convient trouver ung nombre que, adjousté avec 1 et icelle addicion multipliee par le subdouble [la moitié] d'icellui nombre, la multiplicacion monte dix huyt. [...] Si [Tu] trouveras R'* $36\frac{1}{4}\overline{m}\frac{1}{2}$ *.»*

On obtient en effet, en notation moderne : $t=\sqrt{36+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$.

C'est là l'une des premières ébauches de symbolisme au Moyen Âge : $\overline{m}$ est l'abréviation de « moins », cependant que R signifie « racine ». Ce symbolisme, tout comme celui qu'utilisait l'Antiquité grecque, résulte d'une abréviation des mots correspondants ; leur abondante répétition dans les textes mena tout naturellement à une simplification de leur écriture.



Extrait du manuscrit français, 1346.
© Bibliothèque Nationale de France

Les problèmes de poursuite et les problèmes de rencontre

Une complication toute naturelle est de faire intervenir deux personnes dont l'une, partie après le premier, doit le rattraper. C'est l'origine des problèmes dits *de poursuite*.

Un manuscrit du XVe siècle contient l'exemple suivant : *« Deux pelerins partent de Montpellier pour aller à Saint-Jaques [de Compostelle] ; et partent tous deux en une eure, et y a [...] 250 legues [lieues]. Avient que ils par-*

tent touz deux ensemble, mes [mais] l'un chemine tous les jours dix legues, ne plus ne mains, et l'autre chemine le premier jour 1 legue, et le 2e jour 2 legues, et le 3e jour 3 legues, et va touz les jours en craissent de une legue fins qu'il ayt aconceu [jusqu'à ce qu'il ait rejoint] son compagnon. Je te demande en quans jours il aura aconceu son compagnon et combien ilz auront fait de chemin quant il [l']aura aconceu.»

Girolamo Tagliente, *Libro de abacho*, 1554.
© *Bibliothèque nationale de France*

Le texte trouve, pour le temps t cherché, dix-neuf jours. L'indication de la distance entre les deux villes est inutile, puisqu'ils partent du même point ; la mention de la seconde ville est donc seulement anecdotique…

Voici le problème de poursuite que propose pour sa part, dans son manuel mathématique, le célèbre peintre Piero della Francesca (l'original est en italien). *« Deux amis veulent cheminer. Le premier a 25 milles d'avance sur l'autre, et chemine chaque jour 25 milles. Le second le suit et chemine le premier jour 1 mille, le second 2, le troisième 4, le quatrième 8, et va ainsi, doublant chaque jour, jusqu'à ce qu'il le rejoigne. Je demande en combien de jours il le rejoindra. »* Les distances couvertes après t jours sont ici $25(t+1)$ et 2^t-1. La rencontre aura donc lieu durant le huitième jour. Le moment de la jonction y est précisé : les « vitesses » au huitième jour étant respectivement 25 et 128, l'intervalle restant de $200-127=73$ milles sera couvert après les $73/103^{e}$ du huitième jour.

L'étude de telles poursuites serait devenue lassante si on n'avait trouvé le moyen de les compliquer, en introduisant des mesures de longueur différenciées.

© *Manuscrit 2669 de la Biblioteca Riccardiana de Florence*

Dans la forme, cela embrouille le problème ! Cette pratique peut avoir eu lieu dès l'Antiquité puisque Alcuin, fidèle adepte du savoir gréco-romain, en a déjà un exemple. *« À une extrémité d'un champ de 150 pieds de longueur se tenait un chien, à l'autre un lièvre. Le chien s'élança à la poursuite du lièvre. Mais alors que le chien faisait en un saut 9 pieds, le lièvre en franchissait 7. Que celui qui le désire dise*

combien de pieds ou combien de sauts le chien poursuivant ou le lièvre poursuivi couvrirent jusqu'à leur jonction. »
Ici on donne l'écart initial et les longueurs des sauts de chaque animal en pieds, l'unité de longueur usuelle durant l'Antiquité et le Moyen Âge. Le problème est en fait élémentaire : avec chaque saut, l'écart initial s'amenuise de deux pieds, et le chien rejoindra le lièvre après $150/2=75$ sauts. La distance couverte par le lièvre sera ainsi de $75\times7=525$ pieds, celle qu'aura parcourue le chien de $75\times9=675$, dont la différence correspond bien à l'écart initial.

L'Allemand Christoff Rudolff, au milieu du XVIe siècle, propose un autre cas particulier (l'original est en allemand). *« Un lièvre devance un chien de 90 sauts. Chaque fois que le lièvre effectue 12 sauts, le chien en effectue 15, et le lièvre saute aussi loin que le chien. On demande combien de fois le chien doit effectuer 15 sauts pour rattraper le lièvre. »* Ici, les sauts ont même longueur, mais c'est leur fréquence qui diffère, et c'est cette différence de trois sauts qui réduira progressivement l'écart initial. Le lièvre sera donc atteint après trente groupes de sauts, soit un total de quatre cent cinquante sauts pour le chien et de trois cent soixante sauts pour le lièvre.

Un sommet de sophistication en Italie avec Luca Pacioli

En fait, Rudolff résout d'une manière particulièrement simple le problème général où les sauts diffèrent non seulement en longueur mais aussi en fréquence. *« Un chien de chasse poursuit un renard, qui a 60 sauts d'avance. Chaque fois que le renard effectue 9 sauts, le chien en effectue 6, et 3 sauts du chien font autant que 7 sauts du renard. On demande combien de sauts devra faire le chien pour rattraper le renard. »* Ainsi, dans le temps que le chien effectue six sauts, le renard en effectue neuf ; mais, ces six sauts du chien égalent en longueur quatorze sauts du renard.

© Manuscrit Magliabechiano XI, 86 de la Biblioteca Nazionale de Florence

Donc, chaque fois que le chien effectue six sauts, la distance les séparant initialement, à savoir soixante sauts du renard, s'amoindrira de $14-9=5$ sauts du renard. Elle sera donc annulée après $60/5=12$ groupes de sauts, ce qui correspondra à $12\times6=72$ sauts du chien, équivalents à $12\times9=108$ sauts du renard, le chien couvrant avec ses soixante-douze sauts une distance de $(14/6)\times72=168=108+60$ sauts du renard.

Le sommet de la sophistication est atteint en Italie. Un chat est au pied d'un arbre, un rat se trouve au sommet. Le chat monte un peu durant le jour mais redescend (d'une distance moindre) durant la nuit, et le rat descend durant le jour et remonte sensiblement durant la nuit. Quant à l'arbre, il croît entre eux durant le jour, mais rapetisse aussi durant la nuit ! Ce problème de trois mouvements élastiques doit avoir joui d'une grande faveur, car il apparaît (avec diverses données) dès le XVe siècle. Celui qui suit est rapporté dans la *Summa de arithmetica* de Luca Pacioli, l'un des tout premiers ouvrages imprimés de mathématique (en 1494). La mesure utilisée est le bras, d'environ 60 cm.

Girolamo Tagliente, *Libro de abacho*, 1554

© Bibliothèque nationale de France

« Un rat est au sommet d'un arbre haut de 60 bras, et un chat est à son pied sur le sol. Le rat descend durant la journée de 1/2 bras et remonte la nuit de 1/6e de bras. Le chat monte de 1 bras durant la journée et redescend la nuit de 1/4 de bras. L'arbre croît durant la journée, entre le rat et le chat, de 1/4 de bras, et rétrécit de 1/8 de bras durant la nuit. Je demande en combien de jours le chat rejoindra le rat, c'est-à-dire quand ils se rencontreront, et combien de bras l'arbre aura atteint en tout par suite de cette croissance, et de combien de bras auront avancé individuellement le rat et le chat. »

À vos stylos !

J. S.

Pour en savoir (un peu) plus :

Récréations mathématiques au Moyen Âge. Jacques Sesiano, Presses polytechniques romandes, 2014.