Casse-tête et puzzles à découpage

Alain Zalmanski

Collectionneur de casse-tête
Administrateur du site *Fatrazie.com*

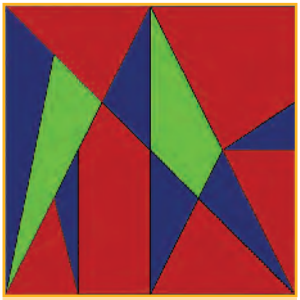
Faits de fragments découpés qu'il faut rassembler pour reconstituer une image, les puzzles à découpage sont sans doute l'origine même des jeux de patience. Vous avez peut-être eu l'occasion de jouer avec des boîtes de cubes constitués de morceaux de six illustrations découpées puis collées de façon adaptée sur chacune des faces des cubes. Le but est de reconstituer successivement chacune des six illustrations, souvent issues de contes de fées, données comme modèle. Il s'agit le plus souvent de jouets simplissimes, à nombre de pièces limité, destinés à apprendre la reconnaissance des formes ou des couleurs aux jeunes enfants.

Boîte de cubes en bois.
© *The French Attic Bazaar*

L'évolution vers des découpages non carrés, dont les pièces sont multiformes, mais difficiles à distinguer les unes des autres, a conduit aux puzzles, dont certains peuvent posséder plusieurs milliers de pièces. Ils représentent souvent un paysage, dont le fond de couleur pastel ou constitué de dégradés rend la résolution extrêmement difficile. Ils exigent de la patience et de la méthode, plus que des mathématiques, hors les observations géométriques qui s'imposent.

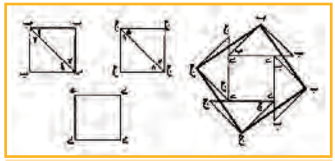
Un savoir-faire entre art et maths : les découpes géométriques

Il est une catégorie de jeux qui peut être employée avec succès pour se forger des intuitions mathématiques, ou au moins pour développer une certaine familiarité avec les objets dont traite la reine des sciences (nombres et calcul mental, géométrie élémentaire, symétrie, vision dans l'espace, représentation de formes et de volumes sophistiqués…). Ce sont les casse-tête. Leur spécificité est de ne pas opposer des adversaires : le joueur est seul face à l'énigme qui lui est proposée. En matière de création de casse-tête, la dernière tendance est de proposer des découpages élémentaires, en peu de pièces, non pour reconfigurer une figure géométrique imposée, mais pour réaliser soi-même une figure possédant une certaine symétrie. Les puzzles à base de décomposition et



Les quatorze pièces du Stomachion.
© Sterling, 2003

recomposition de figures sont connus depuis plusieurs siècles. Le Stomachion d'Archimède, par exemple, préfigure le Tangram. Un autre découpage géométrique emblématique semble remonter au X^e^ siècle, avec la proposition par Abu al-Wafa, mathématicien persan, de découper trois carrés égaux en neuf parties qui, assemblées, produisent un seul grand carré. À vos ciseaux !

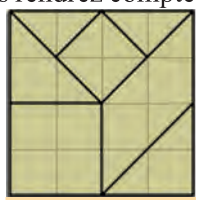


Les carrés d'Abu al-Wafa.
© Reza Sarhangi

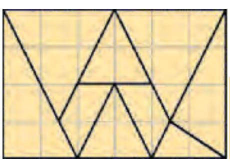
Au début du XIX^e^ siècle apparut le puzzle chinois par excellence, le Tangram, carré dont le découpage est un modèle du genre. Il s'agit d'utiliser les sept pièces qui le composent pour reproduire une silhouette ou une figure géométrique imposée. On raconte que Napoléon, durant son exil, s'en est distrait ! L'étude du Tangram fut enrichie en 1903 par Sam Loyd, avec son classique *Huitième livre de Tan* (Dover, 1968), qui contient près de sept cents modèles. Un monument aussi exhaustif que possible a été ensuite publié par Jerry Slocum, Jacob Botermans, Dieter Gebhardt, Monica Ma, Xiaohe Ma, Harold Raizer, Dic Sonneveld et Carla van Splunteren (*The Tangram Book*, Sterling, 2004).

Les sept pièces
du Tangram.
© Nathan, 1998

On en trouve deux variantes, le Pythagore et le To-Dong (ou Brise-croix), dont les découpages très élégants permettent la reconstitution de formes et figures des plus variées. En fabriquant ces puzzles, vous vous rendrez compte de la difficulté de reconstituer ne serait-ce que le carré ou le rectangle d'origine… On trouve des variantes de différentes formes, toutes difficiles à reconstituer et, surtout, génératrices de figures originales dont on trouve moult exemples dans les livres ou sur Internet.



Les sept pièces
du Pythagore
Image A. Zalmanski



Les neuf morceaux
du Puzzle de 9.
Image Thérèse Éveilleau

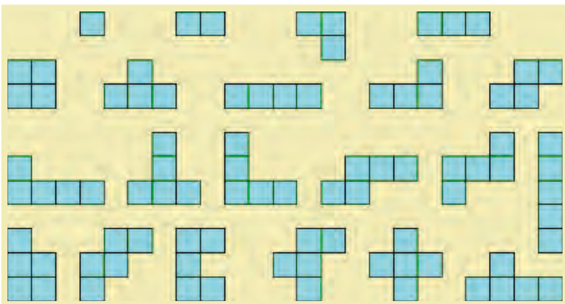
Les sept pièces
du Brise-croix.
Image Odile Berget

Les neuf morceaux
du Cœur brisé.
Photo A. Zalmanski

Les neuf morceaux
de l'Œuf magique.
Photo A. Zalmanski

Les objets géométriques combinatoires : vers un renouveau

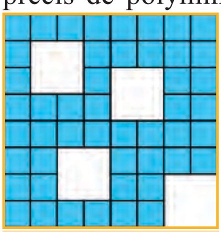
Il faut attendre 1953 pour voir apparaître un renouveau du découpage géométrique avec les travaux de Salomon Golomb sur les *polyminos*. Il s'agit dans un premier temps de dénombrer tous les assemblages possibles de carrés unitaires en les collant selon un de leurs côtés. Deux configurations sont considérées comme identiques si elles coïncident après rotation ou symétrie de l'une d'elles. On définit ainsi le *monomino* (carré unitaire isolé), puis le *domino* classique, le *trimino*, le *tétramino*, le *pentamino*, l'*hexamino*… obtenus à l'aide de respectivement deux, trois, quatre, cinq, six… carrés unitaires.



Il n'existe qu'un monomino (!) et qu'un domino. On dénombre ensuite deux triminos, cinq tétraminos et douze pentaminos.

© Bryan Derksen, 2006

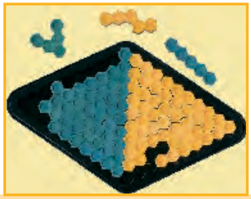
L'*ordre* du polymino est le nombre de carrés nécessaires à la construction d'une configuration. Un pentamino est ainsi un polymino d'ordre 5. Un polymino n'est pas nécessairement simplement connexe : il peut comporter des « trous ». À ce jour, il n'existe toujours aucune formule générale donnant le nombre de polyminos d'un ordre donné. André Sainte-Laguë (1882 – 1950), auteur du fameux *Avec des nombres et des lignes* (Vuibert, 1946), avait dès 1925 répertorié à la main les polyminos, sans en tirer parti du point de vue ludique. Golomb, lui, aidé de l'ordinateur, a su trouver des jeux exploitant ses découpages. Les polyminos ont donné lieu à une abondante littérature. Ils ont inspiré le jeu Tetris (Alekseï Pajitnov, 1984). Ils engendrent enfin d'innombrables questions ludiques ou plus sérieuses, notamment en combinatoire : recherche du nombre précis de polyminos d'un ordre donné, construction de figures diverses, pavages… Pour les amateurs, les plus intéressants sont les pentaminos. Ils permettent, par exemple, de constituer des rectangles de taille 3×20 (deux solutions seulement, à quatre symétries près), 4×15 (trois cent soixante-huit solutions), 5×12 (mille dix solutions) ou encore 6×10 (deux mille trois cent trente-neuf solutions).



Un polymino d'ordre 48.
© Herman Tulleken, 2018

La notion même de polymino, objet géométrique élémentaire formé de carrés juxtaposés, a été étendue à des configurations de polygones réguliers. Avec des triangles, on obtient des *polyamants* ou des *calissons*, comme les a appelés le mathématicien Thomas O'Beirne, qui leur a consacré en 1961 une étude (*Puzzles and Paradoxes*, Dover, 2017). David Klamer, lui, a opté pour l'étude des hexagones. Ces objets élémentaires, en plus de poser de redoutables questions combinatoires, permettent de réaliser des casse-tête élaborés.

Assemblages de triangles équilatéraux : un *diamant* (deux triangles), un *triamant* (trois), un *tétramant* (quatre) et un *pentamant* (cinq).
Photo A. Zalmanski



Casse-tête composé des vingt-deux *hexamants* d'ordre 5 (ou associations possibles de cinq hexagones). Il faut reconstituer le losange !
Photo A. Zalmanski

Casse-tête composé des douze *triamants* d'ordre 6 (ou associations possibles de six triangles).
Photo A. Zalmanski

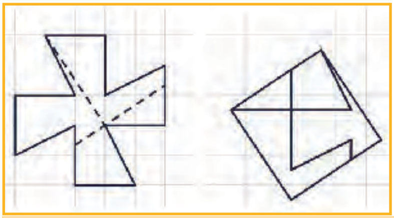
Tous ces casse-tête visent à paver un espace délimité avec des pièces de certaines formes engendrées de façon régulière et logique, afin d'aboutir à des figures, géométriques ou non. Le nombre de solutions est souvent élevé pour un pavage donné. L'amateur se rendra cependant vite compte que, malgré les plus de deux mille solutions que comporte le pavage d'un rectangle 6×10 par les douze pentaminos, en trouver une est loin d'être évident !

Casse-tête pour esthètes à base de découpes géométriques

La dissection de figures procède d'un autre principe : il s'agit de découper une pièce géométrique donnée en un nombre limité de formes qui permettent de reconstruire d'autres polygones (de même aire que la pièce de départ).

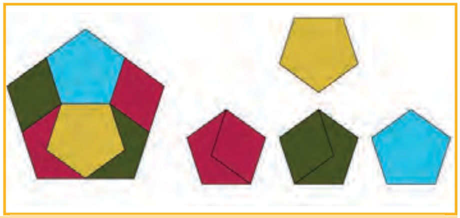
Des pièces « égales » (isométriques par exemple) rendent les problèmes d'autant plus élégants et intéressants. À leur époque, c'est-à-dire bien avant l'avènement de l'informatique, des créateurs tels que Sam Loyd (1841 – 1911), Henry Ernest Dudeney (1857–1930), Joseph Steven Madachy (1927 – 2014) ou encore Harry Lindgren (1912 – 1992) ont trouvé des découpes alliant la sobriété à une rare élégance.

Plus récemment, Gavin Theobald et Greg Frederickson ont rivalisé d'ingéniosité pour proposer des bijoux géométriques, souvent sophistiqués.



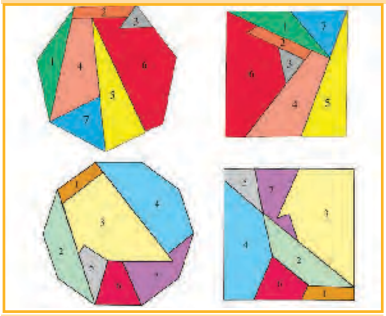
Découpe de la croix de fer de César
au carré en quatre pièces, par Sam Loyd.

Image Natacha Laugier



Découpe d'un grand pentagone en quatre petits
pentagones isométriques, en six pièces,
par Harry Lindgren.

© The Inner Frame

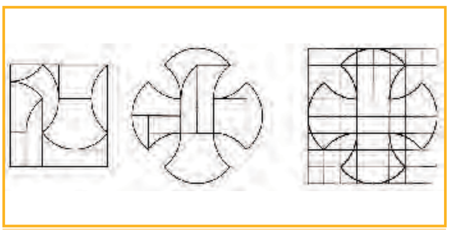


Quelques exploits de Gavin Theobald.
En haut : découpe de l'heptagone régulier
(sept côtés) au carré en sept pièces.
En bas : découpe du décagone régulier
(dix côtés) au carré en sept pièces.

© Gavin Theobald

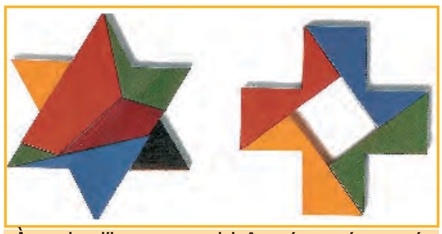
Ce type de dissection a fait l'objet d'études théoriques et pratiques extrêmement poussées. En France, le mathématicien Bernard Lemaire est l'un des spécialistes de la discipline. Un *blog* proposant des centaines de découpes originales, « Morceaux choisis de géométrie », hébergé par le site CultureMath, devrait bientôt voir le jour.

Mais revenons aux casse-tête…



Exemple de transformation obtenue
par Gavin Theobald : découpe articulée d'une croix
grecque arrondie en carré en onze pièces.

© Gavin Theobald



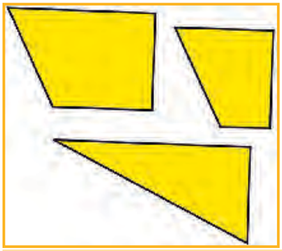
À gauche : l'hexagramme doit être réarrangé en carré,
de deux façons différentes. À droite : la croix grecque,
avec un carré central évidé, doit être réarrangée soit en
carré creux avec une croix grecque en son centre,
soit en carré plein de plus petite dimension.

Photo A. Zalmanski

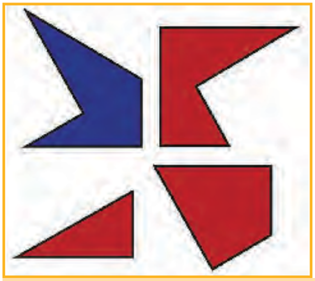
Chaque année, durant l'International Puzzle Party, grand raout réservé aux collectionneurs et créateurs, de nombreux casse-tête, toujours inédits, sont présentés. Un nouveau genre est apparu récemment : minimalistes, ils consistent en quelques pièces, de forme géométrique souvent élémentaire, qui sont à combiner afin de réaliser une ou plusieurs figures possédant un axe ou un centre de symétrie. Rotations et retournements sont autorisés, mais pas les chevauchements ni les constructions qui sortent du plan.

Ces casse-tête sont bien souvent redoutables !

A. Z.

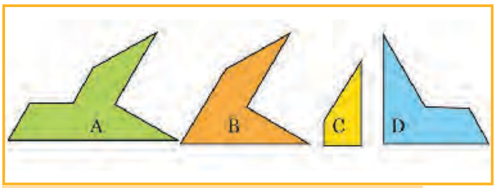


3 Pieces 9 Symmetric Shapes : utiliser ces trois morceaux pour réaliser une figure symétrique. Il existe neuf solutions. *© Emrehan Halici, 2017 (www.puzzleup.com)*

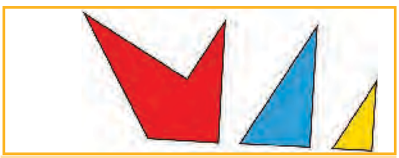


French Revolution : utiliser la pièce bleue et deux pièces rouges quelconques pour former une figure symétrique. Trois casse-tête sont ainsi posés, chacun possédant une solution unique. *© Nick Baxter, 2017*

Symmetrick : utiliser ces deux morceaux pour réaliser une figure symétrique. Ce casse-tête de Vesa Timonen (2012) accompagne le XX[e] salon Culture et Jeux Mathématiques. *Photo MJP*



Making Tower : placer les quatre pièces de manière à reconstituer une lettre « A » qui évoque la Tour Eiffel. Une autre disposition des pièces permet d'obtenir une autre forme symétrique. Par ailleurs, en assemblant A et B, une forme symétrique est possible, de même qu'avec A, C et D et qu'avec B, C et D. *© Tsugumitsu Noji, 2017*



Sym 353 : utiliser les trois pièces pour former une figure symétrique. Il existe quatre solutions *©Jerry Loo et Stanislas Knot, 2017*

Spir ala rips : placer les deux pièces à plat, toujours sans chevauchement, de façon à ce que la forme qui en résulte puisse être coupée en deux pour donner deux figures de forme identique. *© Vesa Timonen, 2017*