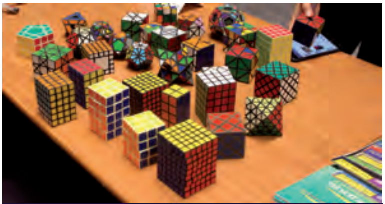
Jeux et déplacements

Anatole Dahan
École normale supérieure de Paris

La notion de déplacement est récurrente dans l'univers des jeux, qu'ils soient anciens ou récents, du Cube de Rubik aux dames en passant par les petits chevaux ou le renard et les poules. Cependant, les déplacements en œuvre peuvent varier grandement d'un jeu à l'autre : pensez aux rotations d'un casse-tête ou aux mouvements de pièces régis par le hasard.

Il semble alors naturel que ces différentes variétés de mouvement se modélisent différemment mathématiquement ; la démarche est qu'une pratique issue d'un jeu donné va être encodée à l'aide d'un formalisme approprié. Dans un premier temps, penchons-nous sur l'approche de la théorie des graphes, qui se montre pertinente pour des jeux de plateau déterministes, comme les échecs, pour ensuite aborder le jeu du taquin, qui admet unemodélisation mathématique des plus élégantes.



Variantes autour du Cube de Rubik, créées par Tom van der Zanden.
© *É. Thomas, 2017*

Casse-tête de désengagement.
© *É. Thomas, 2017*

La théorie des graphes pour le jeu d'échecs

Les échecs sont l'un des plus anciens jeux encore joués aujourd'hui, et si les ordinateurs ont aujourd'hui dépassé l'humain, on n'en a pas encore élucidé tous les mystères. Par exemple, existe-t-il une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs ? Nous allons ici prouver qu'il existe au moins une stratégie non perdante pour Blanc ou pour Noir.

Configuration initiale du jeu d'échecs.
© *Ihardlythinkso, 2016*

Le jeu d'échecs se joue sur un plateau de soixante-quatre cases, l'échiquier. Chaque joueur a à sa disposition un roi, une reine, deux fous, deux cavaliers, deux tours et huit pions, qui peuvent se déplacer différemment. En commençant par les Blancs, les joueurs déplacent leurs pièces à tour de rôle avec pour objectif de capturer le roi adverse (le joueur vaincu est alors *échec et mat*). Une dernière règle d'importance ici est la règle de *soixante-quinze coups* : il y a égalité si soixante-quinze coups sont joués à la suite sans qu'un pion soit avancé, ou qu'une pièce soit prise.

Afin de modéliser le jeu d'échecs, utilisons une structure mathématique bien connue. Un *graphe* est la donnée d'un ensemble de sommets, et d'un ensemble d'arêtes entre ces sommets. On considère le graphe suivant :

- Un sommet par état de la partie, c'est-à-dire deux sommets par positionnement de toutes les pièces sur l'échiquier : un où Blanc joue, et un où Noir joue. Un sommet est dit *gagnant* si au moins un roi (blanc ou noir) y est absent ;
- Une arête d'un sommet à un autre s'il s'agit d'un changement légal de configuration, c'est-à-dire que l'on passe d'un état non gagnant où c'est à Blanc (respectivement Noir) de jouer à un état où c'est à Noir (respectivement Blanc) de jouer, et que le changement de positionnement entre les deux sommets est un coup légal pour Blanc (respectivement Noir).

Ainsi, une partie complète est un chemin dans ce graphe, partant du sommet correspondant à l'état initial, et arrivant à un état gagnant, ou bien arrivant à un pat (situation d'égalité), ou bien parcourant soixante-quinze sommets à la suite sans réduction du nombre de pièces, ni avancée de pions. On dénote par $\mathrm{W}^{\mathrm{B}}(c)$ le fait que c soit une configuration gagnante pour B, et $\mathrm{E}(x, y)$ le fait que l'on passe de la configuration x à la configuration y en un coup légal.

Une suite de formules de récurrence $W^B{}_n(c)$ permet de représenter le fait que les Blancs peuvent gagner à coup sûr dans la configuration c ; il suffit simplement d'exprimer que Blanc peut gagner en $n + 1$ coups si c est déjà gagnée en un maximum de n coups (!), ou s'il existe un coup pour Blanc tel que, quel que soit le coup de Noir, Blanc peut gagner en n coups. Ainsi, $W^B{}_1(c)$ représente exactement l'existence d'un mat en un coup pour Blanc.

La règle des soixante-quinze coups implique que le nombre de coups d'une partie est borné. En effet, chaque pion peut avancer sept fois, il y a seize pions, et soixante-deux cases contenant potentiellement une pièce à capturer. Pour maximiser le nombre de tours d'une partie, on espace chaque capture ou avancée de pion de soixante-quatorze coups. On obtient donc $(7 \times 16 + 62) \times 75 = 13\,050$ coups.

Ainsi, l'existence d'une stratégie gagnante aux échecs pour les Blancs est exprimée par $W^B{}_{13\,050}(I)$, où I est la configuration initiale. Or, si les Blancs ne peuvent gagner à coup sûr en partant d'une configuration c donnée, c'est donc que c n'est pas gagnante ; aussi, pour tout coup de Blanc, Noir a une réponse qui mène à une situation où Blanc n'est pas gagnant en n coups. On a donc montré le résultat escompté : soit Blanc a une stratégie gagnante aux échecs, soit Noir a une stratégie non perdante. Donc au moins un joueur a une stratégie non perdante ! Mais notre formalisme ne nous permet pas d'en dire plus.

Le jeu du taquin et le groupe symétrique

Le jeu du taquin est un casse-tête créé au XIXe siècle. Quinze pièces carrées numérotées de 1 à 15 sont placées dans un carré de la taille de seize petits carrés. Le but du jeu est d'ordonner les carrés selon l'ordre de numérotation, en les faisant coulisser un par un. Voyons d'abord les outils mathématiques que nous allons utiliser, puis traçons ensuite le lien avec le problème.

À gauche, la configuration originale du taquin. À droite, la configuration dans laquelle les cases 14 et 15 ont été interverties. Est-il possible de passer de l'une à l'autre ?
© *A. Dahan*

Un *groupe* $(G, \bullet)$ est la donnée d'un ensemble G et d'une loi $\bullet : G \times G \rightarrow G$, qui à deux éléments associe un autre élément, tels que :

- ♦ La loi soit associative : $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$;
- ♦ La loi admette un élément neutre e, tel que pour tout x, $x \bullet e = e \bullet x = x$;
- ♦ Tout élément x de G admette un inverse x^{-1}, tel que $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = e$.

On rencontre beaucoup de groupes en mathématiques : les entiers relatifs avec l'addition (amusez-vous à le vérifier !), les rationnels (sans 0) et la multiplication, ou encore $\{1, -1\}$ muni de la multiplication. Ce dernier nous sera utile tout à l'heure ! Mais pour le moment, intéressons-nous à quelques groupes particuliers.

Soit E un ensemble. On appelle *groupe symétrique* de E, et l'on note S(E), l'ensemble des fonctions bijectives de E dans E muni de la loi de composition $\circ$, qui, deux bijections étant données, revient simplement à appliquer d'abord la seconde, puis la première.

C'est bien un groupe : la composition est associative ; l'élément neutre pour la composition est la fonction identité Id_E (qui à tout x associe x) ; et, les fonctions étant bijectives, tout élément f du groupe symétrique admet une fonction réciproque f^{-1}, qui par définition vérifie $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Étudions en particulier le cas où E est un ensemble fini de la forme $\{1, 2, 3\ldots n\}$. Dans ce cas, on note le groupe symétrique S_n, dont les éléments sont appelés des *permutations*. Par exemple, en le représentant par un tableau, l'élément s suivant de S_4 :

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

est la permutation qui échange 1 et 2 d'une part (s transforme 1 en 2 et 2 en 1), et 3 et 4 d'autre part (s envoie 3 sur 4 et 4 sur 3).

Un cas particulier de permutation est constitué par les *transpositions*, qui échangent exactement deux éléments. Le lien avec le taquin commence à se faire jour… On représente la transposition qui échange les entiers distincts i et j par la notation $(i\,j)$. Or, toute permutation peut être représentée comme produit de transpositions (voir en encadré).

Un peu d'algèbre, ça sert !

Prouvons que toute permutation s peut être représentée comme produit de transpositions. Déjà, si $s = \mathrm{Id}_{\{1,\, 2 \ldots n\}}$, alors s est le produit de zéro transposition (!) ; le résultat est donc vrai dans ce cas.

Sinon, il existe un plus petit entier k compris entre 1 et n tel que $s(k)$ est différent de k. On a alors $s = (k\ s(k)) \circ t$, où t est définie à partir de s de la manière suivante : $t(x) = s(k)$ si $x = s(k)$, $t(k) = k$, et $t(x) = s(x)$ sinon.

Remarquez que, pour l'entier k, on a $s(k) > k$, sans quoi l'entier $s(k)$ contredirait le caractère de minimal de k.

On applique alors le même procédé sur la permutation t, en remarquant que le plus petit entier k_0 (s'il existe !) tel que $t(k_0)$ est différent de k_0 est strictement supérieur à k, car t prend les mêmes valeurs que s sur l'ensemble $\{1, 2\ldots k - 1\}$.

S'il n'existe pas de tel entier k_0, on a gagné car alors t est l'identité de $\{1, 2\ldots n\}$ et on a bien écrit s comme la transposition $(k\ s(k))$.

Ainsi, en itérant le procédé au plus n fois, on obtient bien que s peut se décomposer en produit de transpositions.

Il ne nous manque maintenant qu'une seule notion pour pouvoir philosopher sur le taquin : celle de signature. Une *inversion* pour la permutation s est un ensemble de deux entiers distincts i et j de $\{1, 2\ldots n\}$ tels que : $i < j$ et $s(j) < s(i)$.

La *signature* est la fonction $\mathrm{sgn} : Sn \to \{-1, 1\}$ définie par $\mathrm{sgn}(s) = +1$ si la permutation s possède un nombre pair d'inversions, et $\mathrm{sgn}(s) = -1$ si s possède un nombre impair d'inversions. Ainsi, la signature de l'identité est égale à 1, et la signature d'une transposition est égale à –1. De même, la signature de la composée de deux permutations est le produit des signatures des deux transpositions.

De l'intérêt d'une modélisation impeccable

En numérotant les cases du taquin de 1 à 16, on peut représenter une configuration s du jeu comme la permutation qui à i associe le numéro du carré placé dans la case i, et 16 à la case vide. C'est bien un élément de S_{16}.

Un mouvement au jeu du taquin correspond à l'échange de la case vide avec une case adjacente, c'est-à-dire à la composition à gauche par la transposition $(16\ i)$, où i est une case adjacente, soit encore à $s^{-1}(16)$ plus ou moins 1 ou 4, selon que l'on déplace la case vide à droite ($s^{-1}(16) + 1$), à gauche ($s^{-1}(16) - 1$), en bas ($s^{-1}(16) + 4$) ou en haut ($s^{-1}(16) - 4$). Enfin, la position gagnante I correspond à la permutation identité $\mathrm{Id}_{\{1,\, 2\ldots\, 16\}}$.

Nous disposons maintenant d'une modélisation irréprochable du taquin ! Qui aurait imaginé que ce serait aussi laborieux ? En fait, c'est assez naturel si l'on réfléchit au fonctionnement du jeu, et le formalisme introduit est puissant. Servons-nous-en pour prouver le fait suivant : on ne peut pas gagner en commençant dans la position initiale

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 15 & 14 & 16 \end{pmatrix},$$

où les cases 14 et 15 ont été interverties.

Pour cela, on combine deux arguments de parité, en supposant qu'il soit effectivement possible de gagner en partant de la configuration P. C'est ce qui fait l'élégance et la simplicité du raisonnement, que les aspects techniques de la modélisation ne doivent pas nous faire oublier.
Le premier provient de la signature : en effet, sgn(P) = –1.
Maintenant, à chaque coup joué, on compose P avec une transposition de type (16 *i*), et la signature change donc de signe. Or, on veut arriver à la configuration I, de signature 1. On en déduit donc qu'il faudra un nombre de coups impair pour gagner.
De même, en supposant le tableau coloré en damier, avec la case en bas à droite noire, on observe que : à la position initiale P, la case vide est noire ; à chaque coup, la couleur de la case vide change ; au dernier coup, la case vide sera noire. On déduit donc qu'il faudra un nombre pair de coups pour gagner.
C'est impossible, aucun nombre n'est à la fois pair et impair, on aboutit à une contradiction évidente ! La configuration P est donc insoluble.

Qu'il y ait ou non des déplacements, les jeux de stratégie, de logique et même de hasard se prêtent ainsi à une modélisation mathématique, qui peut faire intervenir combinatoire, algèbre, probabilité, théorie des graphes, mathématiques discrètes… C'est le domaine, qui reste encore largement à explorer et qui trouve d'innombrables applications (en économie…), de la *théorie des jeux*. Enfin, derrière une modélisation parfois rebutante par ses aspects techniques se trouvent souvent quelques idées fortes et élégantes : il ne faut pas se fier aux apparences !

A.D.