La musique éclairée par les mathématiques

Élisabeth Busser
Mathématicienne, rédactrice pour le magazine *Tangente*

Vibrations de l'air produisant le son, doigts courant sur un clavier, gammes ascendantes ou descendantes, arpèges, tessitures du plus bas au plus haut, tout en musique évoque le mouvement. Les mathématiques sont là pour le quantifier.

Le mot « mouvement » en musique évoque soit le *tempo*, c'est-à-dire la vitesse d'exécution d'une œuvre, soit les différentes parties d'une composition musicale. Symphonie et sonates ont par exemple trois ou quatre « mouvements » : rapide–lent–rapide, et parfois menuet. Le terme « mouvement » est donc bien ancré dans le vocabulaire musical, mais c'est plus dans le sens de « mobilité » que sont développés ici les aspects liés à la musique.

Un métronome mécanique.
© *Wittner, modèle 811M*

Quantifier le mouvement : le rôle du balancier

Prenons le mouvement dans son sens premier : la vitesse d'exécution n'étant pas une constante universelle, il a bien fallu lui fixer des normes. Comment jouer une œuvre avec le « bon » tempo ? C'est par un mouvement de balancier que l'on a résolu ce problème du mouvement d'une l'œuvre. C'est le musicien et théoricien de la musique Étienne Loulié qui, en 1696, inventa le premier métronome gradué, le *chronomètre de Loulié*. Haut de deux mètres, composé d'un fil lesté qui se balance par mouvements tous de même durée, cette dernière ne dépendant pas de l'amplitude du battement mais de la longueur du fil, ce premier « métronome » était muet : il fallait le surveiller pour connaître le tempo.

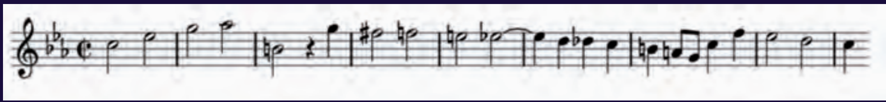
Le mécanisme s'est perfectionné par la suite, avec le métronome à battements sonores inventé par l'horloger néerlandais Dietrich Nikolaus Winkel en 1812 et breveté en 1816 par l'ingénieur bavarois Johann Nepomuk Mälzel. Il s'agit là d'un mouvement d'horlogerie à échappement, que l'on doit donc « remonter », muni d'un balancier gradué dont un contrepoids mobile permet de fixer la vitesse de battement. Les graduations indiquent la durée d'une noire : faire battre l'instrument à 120 signifie que la noire doit « tenir » en 1/120e de minute, donc une demi-seconde. C'est devenu une habitude pour les compositeurs d'indiquer en début de partition généralement la durée d'une noire : les mouvements lents (*largo*, *lento*, *andante*, jusqu'à *moderato*) correspondent aux graduations du métronome allant de 40 à 120, les mouvements plus rapides (*allegro*, *presto*) vont jusqu'à 208. Des instruments électroniques miniaturisés, ou des métronomes sur ordinateur, ont aujourd'hui remplacé le métronome de Mälzel, mais le résultat est le même : ils battent la mesure et définissent donc la rapidité du mouvement de l'œuvre.

La marche du crabe et le canon à l'écrevisse

On doit à Jean-Sébastien Bach un bel exemple de mouvement musical « à contre-sens » dans le premier canon de l'*Offrande musicale* (BWV 1079, 1747). Le titre officiel de cette œuvre est canon à *cancrizans*, c'est-à-dire, en latin, en marche arrière, mais on l'appelle aussi, de manière plus imagée, le *canon du crabe*, ou parfois *canon à l'écrevisse*. La particularité de ces deux crustacés étant de se déplacer de guingois, c'est exactement le mouvement qu'évoque le mode de composition de cette œuvre musicale. L'histoire de ses origines permet de décoder la composition de cette œuvre « palindromique ».

La partition du canon à *cancrizans* de Jean-Sébastien Bach.
© *Musikwissenschaftliche Studienbibliothek Peters, 1977*

En 1747, invité à Postdam par Frédéric II de Prusse, entre autres flûtiste amateur, Jean-Sébastien Bach est prié d'improviser une fugue à trois voix sur un thème proposé par le roi.



Le thème royal. © *Benjamin Esham, 2007*

Insatiable de musique, le roi demande au musicien de poursuivre sur une fugue à six voix, mais Bach demande quelques temps de réflexion. De retour à Leipzig, il développe le « thème royal » en une série de canons et de fugues, qu'il fait parvenir au souverain sous le nom d'*Offrande musicale*. Dans cette pièce, la partition écrite par Bach du canon 1, à deux voix, est codifiée par ses soins, selon une écriture dite *énigmatique*, et porte, sous la première voix, l'indication que la seconde voix doit être exactement la symétrique de la première. C'est dire que les exécutants avancent dans leur lecture, l'un du début à la fin, l'autre de la fin au début, en lisant les notes dans l'ordre inverse.

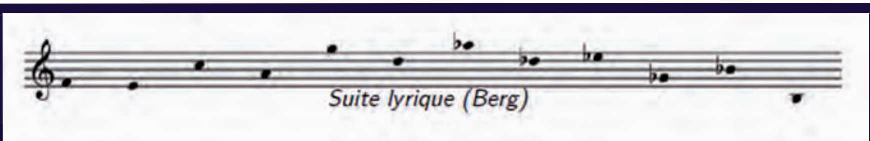
L'artiste géomètre Jos Leys en donne une interprétation toute dynamique : il plie la bande selon son axe médian horizontal et en fait un ruban de Möbius. Les musiciens n'auront plus qu'à suivre la partition en cheminant le long du ruban, l'un à l'endroit, l'autre à l'envers. La progression de cette lecture musicale (visible sur youtube.com/watch?v=xUHQ2ybTejU) fait magnifiquement apparaître les deux mouvements contraires, qui contribuent, au-delà de l'aspect ludique de l'exécution, à la richesse de l'œuvre.

Le canon 1 de l'*Offrande musicale* de Bach sur un ruban de Möbius.

© *Mathematical Imagery, Jos Leys (www.josleys.com), 2014*

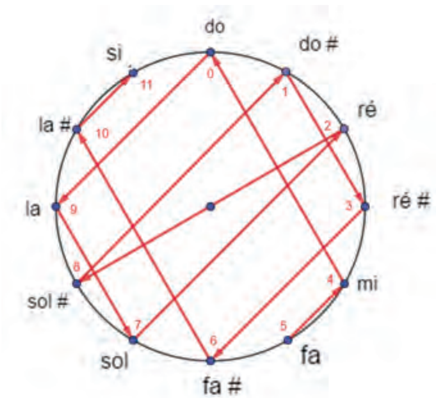
Parcours musical : sauter d'une note à l'autre

Se déplacer sur une partition musicale se fait bien sûr au gré des notes du compositeur, mais ce dernier suit parfois des règles cachées, qui vont régir notre mouvement. Ainsi, pour cette série musicale extraite de la *Suite lyrique* du compositeur autrichien Alban Berg, composée entre 1925 et 1926 et jouée pour la première fois en public en 1927, non seulement le compositeur utilise une série dodécaphonique (elle comporte une fois et une seule les douze notes de la gamme chromatique), mais encore il en fait une série *tous-intervalles* (on y trouve chacun des douze intervalles de la gamme chromatique) : double qualification !



Un thème de la Suite lyrique d'Alban Berg (1926).
© *Universal Edition, 1927*

Cette promenade musicale tout au long de ce thème peut se traduire en un parcours géométrique. Désignons les douze notes par les nombres de 0 à 11, figurant chaque demi-ton entre les deux *do* à l'octave l'un de l'autre (0 pour *do*, 1 pour *do* #, 2 pour *ré*, 3 pour *ré* #, 4 pour *mi*, 5 pour *fa*, 6 pour *fa* #, 7 pour *sol*, 8 pour *sol* #, 9 pour *la*, 10 pour *la* #, 11 pour *si*). On les représente traditionnellement autour d'un cercle. Le parcours musical sera, lui, représenté par les flèches rouges et s'énoncera, chiffré : **5–4–0–9–7–2–8–1–3–6–10–11**. Elles auront pour longueurs (on parcourt le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre) : **11–8–9–10–7–6–5–2–3–4–1**.



Déplacement sur le thème d'Alban Berg.
© *É. Busser, 2018*

C'est ainsi que l'on aura parcouru les douze étapes non seulement sans rater une marche, mais aussi par sauts de toutes les longueurs possibles, de 1 à 11.

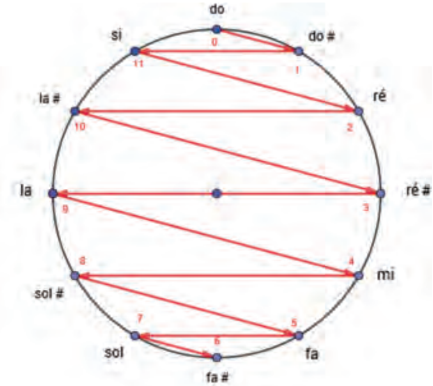
Alban Berg n'est pas l'inventeur d'une telle progression : en 1921 déjà, le compositeur Fritz Heinrich Klein, élève d'Arnold Schönberg, puis de Berg, avait déjà écrit une œuvre, *la Machine opus 1*, où il utilisait des séries tous-intervalles. Le compositeur italien contemporain Luigi Nono, dans *Il canto Sospeso*, l'Américain Milton Babbitt, spécialiste de musique électronique, dans *Three compositions* pour piano, ont eux aussi utilisé cette forme de composition.

Comment construire une série tous-intervalles ? Rien de plus simple si le nombre de notes est pair. On peut en effet toujours trouver de telles séries pour une gamme de $2n$ notes, puisque la somme totale des longueurs des intervalles, de 1 à $2n-1$, est $n \times (2n-1)$. C'est comme si l'on avait parcouru $2n-1$ intervalles de longueur n. En partant de 0, on arrivera donc à n.

Par contre, si le nombre de notes est impair, la dernière note de la série pourrait être la même que la première Pour une série de douze notes par exemple, il suffira de partir de 0 et d'ajouter successivement les intervalles 1, –2, 3, –4, 5… selon le schéma ci-dessous. On obtient ainsi la série des notes **0–1–11–2–10–7–9–4–8–5–7–6** correspondant aux intervalles de longueur **1–10–3–8–5–6–7–4–9–2–11**.

Cette dernière série possède même une particularité, celle d'être symétrique, dans le sens que les intervalles de rang p et $12-p$ ont pour somme… précisément 12. On retrouve un exemple d'une telle symétrie en 1961 chez le compositeur autrichien Hanns Jelinek, avec la série suivante.

Ce sont là des cas très particuliers, mais une question demeure : si l'on vient d'exhiber plusieurs séries tous-intervalles différentes sur une gamme de douze tons, combien y en a-t-il en tout ? À partir de 1936, plusieurs compositeurs se sont intéressés à la question. Ce sont les travaux de l'Austro-Américain Ernst Krenek (1900–1991) puis du Français André Riotte (1928–2011) qui ont permis d'en faire le décompte précis et d'établir la structure algébrique de ces séries musicales singulières définissant sur douze notes des mouvements très précis. Il existe ainsi trois mille huit cent cinquante-six telles séries, dont cent soixante-seize sont symétriques. Un catalogue complet en a été dressé. Il offre en particulier



Une série tous-intervalles symétrique.
© *É. Busser, 2018*

L'exemple symétrique de Hanns Jelinek. © *Universal Edition, 1961* la possibilité de prendre conscience de la structure de l'ensemble de ces séries, que l'on peut obtenir à partir d'un nombre limité d'entre elles par huit opérations élémentaires dont l'ensemble est doté d'une structure algébrique de groupe.

Pour mieux comprendre quels sont les mouvements en jeu, prenons un exemple.

- **0–1–3–7–2–5–11–10–8–4–9–6** est la séquence **(S)** de notes de départ, la suite tous-intervalles associée **(T)** étant **1–2–4–7–3–6–11–10–8–5–9**.
- On peut évidemment construire une autre série tous-intervalles en renversant **(T)** en **9–5–8–10–11–6–3–7–4–2–1**, ce qui produit les notes **0–9–2–10–8–7–1–4–11–3–5–6**. On retrouve pour les intervalles la « marche du crabe » ! Les mouvements sur les notes, représentés comme précédemment sur un cercle, sont, eux, symétriques par rapport à un diamètre (voir le schéma).
- On peut aussi remplacer chaque intervalle par son complément à 12, soit **11–10–8–5–9–6–1–2–4–7–3**, d'où, pour les notes, **0–11–9–5–10–7–1–2–4–8–3–6**.
- On renversera ensuite la série précédente des intervalles en **3–7–4–2–1–6–9–5–8–10–11**, pour obtenir les notes **0–3–10–2–4–5–11–8–1–9–7–6**.
- On peut également multiplier chaque intervalle de **(S)** par 5 et considérer le reste dans la division par 12 de cette opération, c'est-à-dire calculer « modulo 12 ». On obtient alors **5–10–8–11–3–6–7–2–4–1–9**, d'où les notes **0–5–3–11–10–1–7–2–4–8–9–6**.
- Nouveau renversement des intervalles : **9–1–4–2–7–6–3–11–8–10–5**, avec pour notes **0–9–10–2–4–11–5–8–7–3–1–6**.
- On peut encore multiplier chaque intervalle de **(S)** par 7 et considérer le reste dans la division par 12 de cette opération : **7–2–4–1–9–6–5–10–8–11–3**, d'où les notes **0–7–9–1–2–11–5–10–8–4–3–6**.
- Dernière transformation, renverser la série précédente : **3–11–8–10–5–6–9–1–4–2–7**, ce qui donne les notes **0–3–2–10–8–1–7–4–5–9–11– 6**.

La boucle musicologique est bouclée grâce à un zeste de combinatoire et d'un soupçon d'algèbre ! Ce ne sont cependant là que quelques aspects des liens séculaires connectant musique et mouvement.

Balancements rythmés, danse et chorégraphie, choix d'une musique associée aux mouvements dans un film, musique de mise en scène de mouvements acrobatiques sont autant de thèmes qui restent encore à explorer…

É.B.