

COMMENT DÉGUSTER UN BON BROWNIEN

ROGER MANSUY

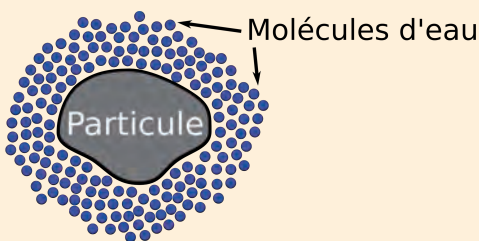
Enseignant

Quiconque fait des études scientifiques déguste un jour des brownies et croise, à un moment donné, le mouvement brownien. Morceau de choix pour tous les futurs mathématiciens, il apparaît aussi sur la table des apprentis physiciens, des biologistes en herbe et dans bien d'autres cursus. Mais lorsqu'il s'agit de définir un « bon » mouvement brownien, il y a autant de discussions que sur la recette d'un cassoulet traditionnel. Pour faire avancer le débat, observons comment le brownien a pu être mis à toutes les sauces.

DES BOTANISTES, DES PLANTES ET DES GRAINS DE POLLEN

Dans la quête de l'authentique, il faut souvent remonter à des sources lointaines et se référer à des personnalités qui font autorité. Celles qui peuvent légitimement se prévaloir du canal historique sont des spécialistes... des plantes. Le mouvement brownien porte d'ailleurs le nom d'un botaniste britannique, Robert Brown (1773–1858), qui, selon la légende, est le premier à observer et étudier, en 1827, le mouvement de petites « particules oblongues » à l'intérieur des grains du pollen d'une espèce ramenée d'une lointaine expédition. Si les hypothèses émises sur la nature de ces objets et la raison de leur mouvement peuvent sembler douteuses de nos jours, il n'en reste pas moins que c'est grâce à un microscope que l'on observe et étudie pour la première fois le mouvement devenu désormais « brownien ».

Soyons honnête : le mouvement existait déjà bien avant Brown ! La postérité aurait pu retenir d'autres découvreurs, comme le Français Adolphe Brongniart (1801–1876), également botaniste (et petit-fils de l'architecte de la bourse de Paris), qui l'avait observé dès 1826. On consolera notre déception patriotique en remarquant qu'il est plus facile de prononcer « mouvement brownien » que « mouvement brongnien ».

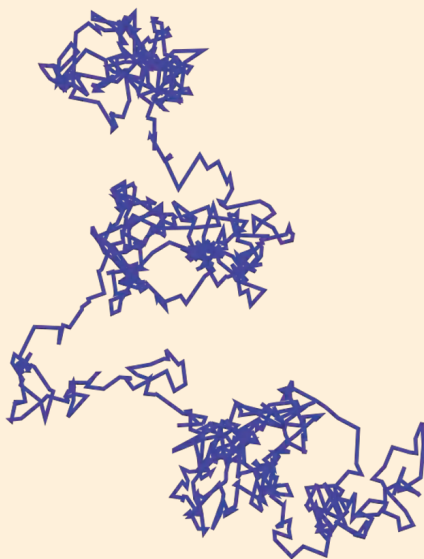


Force sur la particule due
à une molécule d'eau

Somme des forces
des molécules d'eau

Les molécules en agitation autour de la particule (par exemple plongée dans l'eau)
appliquent des forces aléatoires, dont la somme se traduit
par un déplacement de la particule.

© Nicolas Bruot, 2017



Trajectoire d'une particule soumise
à un mouvement Brownien

© PAR, 2010

À la fin du XIX^e siècle, on dispose d'une description du mouvement : grâce aux naturalistes, le phénomène sort de la phase de pure observation ; on peut commencer à faire des modèles pour l'expliquer. Comme il s'agit d'un mouvement, on convoque les spécialistes de la mécanique : habitués à expliquer les billes qui tombent et les lunes qui tournent, les physiciens ne peuvent qu'être excités par ce mouvement très irrégulier, voire complètement erratique.

Albert Einstein (1879–1955) est l’auteur en 1905 du premier modèle de ce mouvement. Il l’obtient en partant de la théorie cinétique moléculaire de la chaleur dans les fluides (autrement dit, la vision macroscopique de la thermodynamique), donc des chocs. Chacun de ces petits chocs réoriente la particule que l’on observe et, comme ils sont nombreux, la trajectoire observée change sans arrêt de direction.

D’autres scientifiques arrivent simultanément au même modèle, comme le Polonais Marian von Smoluchowski (1872–1917), ou proposent une description différente mais équivalente, comme le Français Paul Langevin (1872–1946). Ce dernier, plutôt que de partir du concept de chaleur, écrit le bilan des forces auxquelles est soumise une particule (le fameux principe fondamental de la dynamique).

Bref, avec les physiciens, on dispose désormais d’un modèle théorique précis. Il n’est plus question d’observer le mouvement au microscope. Enfin, presque : le modèle prédisant des valeurs pour certaines mesures, comme la distance moyenne parcourue en fonction du temps, il y aura des projets pour corroborer les hypothèses ! Jean Perrin (1870–1942) parviendra notamment à effectuer les mesures expérimentales délicates qui confirmeront l’existence d’atomes et permettront le calcul précis du nombre d’Avogadro. Pour cela, il recevra le prix Nobel de physique en 1926.

LES MATHÉMATIENS INTRODUISENT LES BONS OUTILS...

Bons derniers à apparaître dans notre panorama historique, les mathématiciens vont se rattraper à partir des années 1920. Car l’objet d’étude des biologistes et des physiciens conserve une limitation physique : si l’on regarde de très près, la trajectoire de la particule devient régulière sur des temps très courts (en effet, si elles sont très fréquentes, les collisions moléculaires ne sont pas permanentes). À de très petites échelles, le mouvement devient « plus lisse ».

Une description mathématique devrait pouvoir permettre de s’affranchir de ce phénomène et de garder l’irrégularité, même en « zoomant ». C’est à partir de cette idée que l’Américain Norbert Wiener (1894–1964) va introduire mathématiquement le mouvement brownien comme le « tirage au sort » d’une trajectoire « acceptable ». Plus précisément, cette fonction aléatoire

fondamentale est choisie sur l'ensemble des fonctions continues (physiquement, la particule ne se téléporte pas) mais nulle part dérivables (intuitivement, la trajectoire s'avère irrégulière à toute échelle), selon ce que l'on appelle la *mesure de Wiener*.

De notre côté de l'Atlantique, Paul Lévy (1886–1971), alors professeur à l'École polytechnique, remarque en 1933 que ce processus vérifie la *propriété de martingale*. Issue de la théorie des jeux, cette dernière indique que si l'on doit prédire la position de la particule au temps futur t sachant tout ce qui s'est passé jusqu'au temps présent $s < t$, on ne peut dire mieux que de conserver la position actuelle.



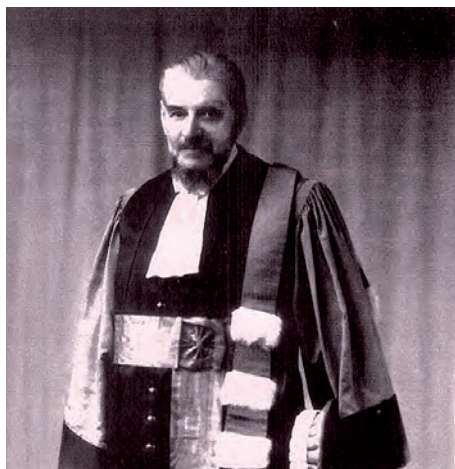
Kiyoshi Ito (1915–2008).
© Eugene Dynkin, 1985

Cette propriété qui ne paie pas de mine va s'avérer déterminante : elle servira au Japonais Kiyoshi Ito pour définir pendant les années 1940 et 1950 une nouvelle intégrale, désormais appelée en sa mémoire *intégrale d'Ito*, puis à faire de nombreux calculs sur ce mouvement (et sur de nombreux autres processus de diffusion qui en découlent).

... QUE LES FINANCIERS PRENNENT POUR ARGENT COMPTANT

Pourquoi vouloir faire tant de calculs sur le mouvement brownien et pas se contenter d'apprécier sa majestueuse danse ? C'est le moment de ressortir un acteur jusqu'ici oublié : Louis Bachelier, élève d'Henri Poincaré et auteur au début du XX^e siècle d'une thèse intitulée *Théorie de la spéculation*. Ce mémoire indique comment le mouvement brownien peut servir à modéliser des données financières. Si le travail n'a pas été apprécié

à sa juste valeur à l'époque, il est le point de départ de nombreuses modélisations plus récentes. Par exemple, le fameux modèle Black–Scholes utilise ces idées afin de calculer des prix raisonnables pour certains contrats financiers, et de répondre à des questions d'assurance ou de finance quantitative (comme *«combien dois-je payer pour m'assurer de pouvoir vendre mon action à tel prix l'an prochain ?»*).



Louis Bachelier (1870–1946).
© Presses universitaires
franc-comtoises, 2002

Il y a quelques années, le grand spécialiste du monde brownien Marc Yor et son étudiant David Baker ont discuté de la pertinence de ces modèles. Leur conclusion est que l'hypothèse brownienne permet de faire des calculs, mais ne colle pas parfaitement à la réalité des flux boursiers ! Il faut donc être prudent sur cet usage.

Si certains mathématiciens ont construit et manipulé le mouvement brownien à la suite de Wiener, Lévy et Ito, d'autres ont retrouvé cet objet dans un contexte différent, celui des marches aléatoires. Repartons d'une particule et imaginons cette fois-ci qu'à chaque instant elle se déplace d'un «pas» au hasard dans l'une des directions (haut, bas, gauche, droite, devant, derrière). Une trajectoire pourrait ainsi commencer par haut, haut, bas, bas, gauche, droite, gauche, droite (on est revenu au point de départ)... et chaque nouveau pas est choisi indépendamment des précédents.



Marc Yor (1949–2014).
© Murad Taqqu, 2009

HoloMath et la réalité augmentée

En tant que bétien, on peut toujours rêver devant le grain de poussière dans un rayon de lumière ou, beaucoup plus ambitieux, essayer de refaire par soi-même l'expérience de Robert Brown, minutieusement reproduite par Brian Ford en 1992.

Une autre possibilité arrivera bientôt avec le développement d'une activité de réalité augmentée appelée HoloMath par l'Institut Henri-Poincaré et ses partenaires pour la future Maison des mathématiques : des hologrammes tridimensionnels permettront en effet de jouer avec ces trajectoires, offrant à coup sûr un nouveau moyen de goûter au brownien !

On obtient ainsi un mouvement aléatoire avec des « petits » déplacements perpendiculaires les uns aux autres, alors que le mouvement qu'observaient botanistes et physiciens semblait partir dans toutes les directions. Le théorème amusant, appelé *théorème de Donsker* après Monroe Donsker (1925–1991), est que si l'on redimensionne judicieusement cette trajectoire en diminuant la durée des instants et la taille des pas de manière coordonnée, alors la marche aléatoire se rapproche du mouvement brownien authentique !

S'il y a bien un unique objet appelé « mouvement brownien », les moyens de l'appréhender sont variés et l'incessant aller-retour historique entre théorie et expérience montre la richesse du sujet. Selon que l'on colle à une description du réel ou que l'on cherche à effectuer des calculs, on n'utilise pas les mêmes propriétés. Cela a beau être le même gâteau, des convives différents vont y trouver des choses différentes : l'un s'intéresse davantage au moelleux de la texture, un autre à la présence d'une note de noisette... Peu importe le couteau, pourvu qu'on ait du gâteau !

R.M.

Pour en savoir (un peu) plus :

Le mouvement brownien, divers et ondoyant. Bertrand Duplantier, séminaire Bourbaphy, 2005, disponible en ligne.

Louis Bachelier. Laurent Carraro et Pierre Crépel, Images des mathématiques, 2006, disponible en ligne.

Le mouvement brownien : quelques développements de 1950 à 1995. Marc Yor, in *Development of Mathematics 1950–2000*, Jean-Paul Pier (éditeur), Birkhäuser Verlag 2000.
