

• • QUAND LES ONDES DESSINENT DES MOTIFS GÉOMÉTRIQUES

LAURE SAINT-RAYMOND

Professeur à l'École normale supérieure de Lyon

THIERRY DAUXOIS

Directeur de recherche CNRS à l'École normale supérieure de Lyon

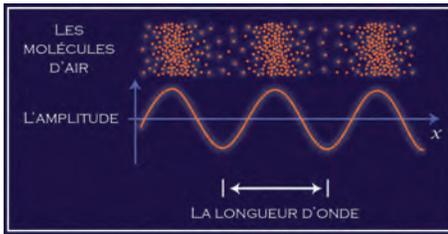
La découverte des phénomènes ondulatoires remonte à l'Antiquité, avec les travaux de Pythagore sur les cordes vibrantes, mais il existe une telle diversité d'ondes et de modes de propagation que leur étude reste encore aujourd'hui un immense champ de recherches pour les physiciens... et les mathématiciens. C'est un domaine riche et encore plein de surprises.

UNE ONDE PARMIS LES PLUS CONNUES : LE SON

Le son est sans doute le phénomène ondulatoire le mieux connu de tous, et pourtant sa réalité physique est difficile à appréhender. Des expériences simples peuvent permettre de voir comment il est émis : vibration d'une corde ou d'une plaque, de la peau d'un tambour... mais il est plus délicat de comprendre comment il se propage.

Les ondes sonores (ou *ondes acoustiques*), contrairement aux ondes électromagnétiques qui génèrent la lumière, n'existent pas dans le vide. Elles ont besoin d'un support matériel comme de l'air ou de l'eau. C'est pourquoi les explosions sonores dans le vide intersidéral des films de science fiction ne sont pas crédibles. Plus précisément, le signal correspond à de petites variations locales de la pression : en certains points, les particules se concentrent et la pression est plus élevée, alors qu'en d'autres points voisins le gaz ou le liquide se dilate et la pression diminue. Concrètement, les particules font de tout petits déplacements, et leur vitesse est assez faible. Mais le signal, lui, peut se déplacer très loin et très vite. Il y a donc une certaine indépendance entre le mouvement de la matière et la propagation de l'onde.

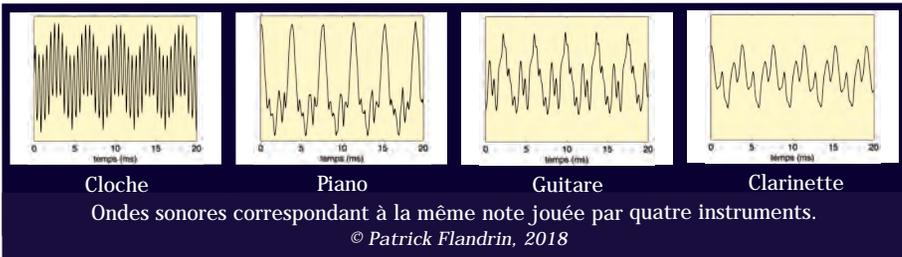
Si l'on mesure les fluctuations de pression, on peut « visualiser » le son. Un son qui semble invariable dans le temps, comme une longue note tenue,



Le signal sonore : des oscillations de la pression. © CB CIJM

correspond en fait à une oscillation régulière de la pression en espace et en temps. On parle de *longueur d'onde* pour désigner la distance entre deux crêtes, et de *période* pour désigner le temps (en secondes) séparant le passage au niveau de deux crêtes successives.

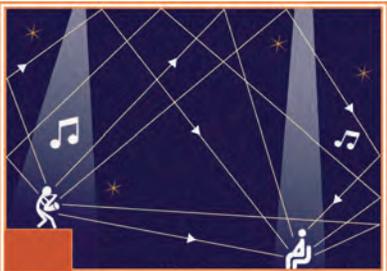
La fréquence, exprimée en hertz (Hz), est l'inverse de la période. Pour les ondes sonores, la longueur d'onde et la période de l'onde sont directement liées, et même proportionnelles. De façon simplifiée, le son propage en fait quatre types d'information : une *durée*, une *hauteur*, une *intensité* et un *timbre*. La hauteur est directement liée à la fréquence. L'intensité dépend de l'amplitude des variations de pression, c'est-à-dire de l'énergie qui est transportée par l'onde. Et le timbre dépend du profil élémentaire du signal.



PROPAGATION DU SON : COMME UN ÉCHO ÉTRANGE...

Les équations de la physique (celles qui régissent l'écoulement d'un gaz ou d'un fluide) permettent de prédire la propagation du son, c'est-à-dire sa vitesse et la direction dans laquelle il se propage. Dans un milieu homogène, aucune direction n'est privilégiée. La vitesse du son ne dépend pas non plus de la fréquence du signal. Elle dépend en revanche du milieu dans lequel l'onde se propage, typiquement de sa température (qui correspond à la vitesse d'agitation des particules) si c'est un gaz. Quand l'onde change de milieu, elle est partiellement réfléchiée et partiellement réfractée. L'étude géométrique de la propagation est très similaire à celle des rayons lumineux. La réflexion frontale sur un bord solide entraîne notamment le phénomène bien connu d'écho : le signal revient, presque identique à lui-même, à l'exception en général de l'intensité, qui est moins forte à cause de la réflexion non parfaite

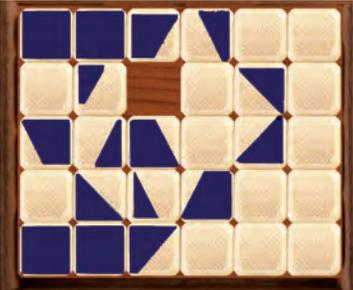
et d'un léger retard dû à la vitesse de propagation. Et si l'onde arrive de façon oblique par rapport au bord, elle se propage suivant la même trajectoire que le ferait une boule de billard.



Propagation du son dans une salle de concert. Il faut absorber les ondes sur les parois pour limiter le phénomène d'écho pour l'auditeur. © CB CIJM

Certaines ondes ont un comportement très différent des ondes sonores, bien que leurs supports physiques présentent de grandes ressemblances. Regardons, en deux dimensions pour simplifier, la stratification verticale d'un signal dans un fluide comme l'eau de mer, dont la densité

est stratifiée (elle dépend de la profondeur) : le liquide dense (plus salé) se trouve en dessous du liquide moins dense. Cette propriété rompt l'isotropie du système, il y aura donc des directions privilégiées. Cette configuration est stable, et on ne considère que de petites fluctuations autour de l'état d'équilibre, lesquelles modifient la densité du fluide et génèrent de petits mouvements des particules. Mais ici, on suppose que l'écoulement est *incompressible*, c'est-à-dire que la seule façon d'augmenter ou de réduire la densité en un point est d'y transporter un petit volume de fluide dont la densité est plus ou moins grande. Le mouvement est donc beaucoup plus contraint, un peu comme dans un jeu de taquin. La



Chaque élément de fluide a une densité fixée, représentée par la proportion de bleu et de blanc sur chaque case. On peut répartir différemment la densité (et retrouver l'image du ballon de foot) en faisant coulisser les pièces, mais on ne peut ni les retirer, ni les superposer. © PA CIJM

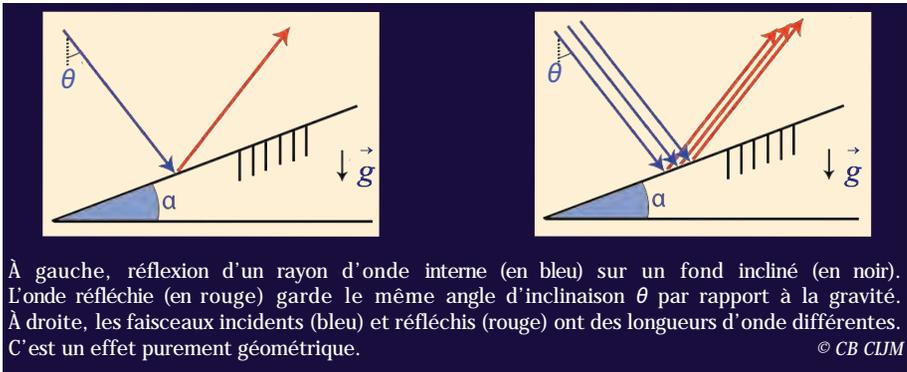
contrainte d'incompressibilité est non locale car le mouvement de chaque petit volume de fluide est conditionné par l'ensemble du fluide.

LONGUEUR D'ONDE ET PÉRIODE NE SONT PAS LIÉES

Les ondes, dites *internes* (par opposition aux ondes de surfaces comme les vagues, qui sont *externes*), ne sont pas contraintes, mais leur mode de propagation est complètement modifié. Les équations des fluides incompressibles permettent de prédire cette propagation. Mais elle est très contre-intuitive car on a l'habitude de travailler avec les lois de l'optique ou de l'acoustique.

Le son se propage dans toutes les directions. Une caractéristique des ondes internes est que leur direction de propagation est déterminée par leur fréquence. Autrement dit, une fois qu'on a fixé la fréquence d'une onde, elle ne peut se propager que dans quatre directions, qui forment toutes le même angle θ par rapport à la verticale (la gravité). Les règles de réflexion sur les bords solides sont par conséquent complètement modifiées. Comme il n'y a pas de liberté (ou très peu) sur la direction de l'onde réfléchi, la seule façon possible de préserver l'énergie du système est de réémettre une onde dont la structure spatiale est différente. Le signal est déformé, et amplifié dans certaines configurations du bord. L'onde renvoyée par l'écho ne ressemble plus à l'onde initiale !

Une seconde caractéristique étonnante de ces ondes est que longueur d'onde et période (ou fréquence) ne sont pas liées. L'angle par rapport à la verticale est inchangé, mais la longueur d'onde peut être fortement modifiée.

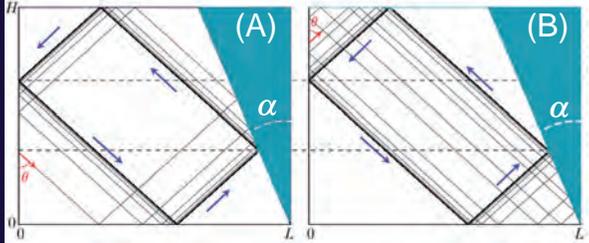


LES TRAJECTOIRES : DES MATHÉMATIQUES RICHES

Des expériences menées (entre autres) au laboratoire de physique de l'École normale supérieure de Lyon montrent que, dans une cavité fermée, cet écho étrange, qui se répète au fur et à mesure des rebonds de l'onde sur les bords, peut produire des motifs géométriques particuliers. Ainsi, dans la figure en haut de la page ci-contre, deux rayons sont émis (du bord gauche d'un domaine trapézoïdal de longueur L , de hauteur H , et de pente inclinée d'un angle α) et se propagent avec un angle constant θ .

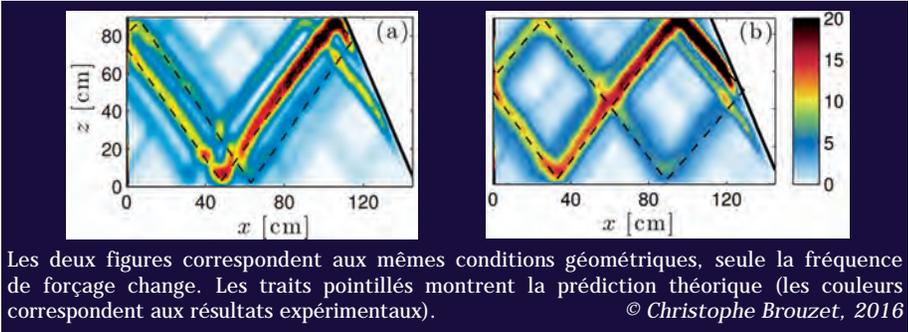
Dans les deux cas, les rayons semblent attirés par une trajectoire piège (un *attracteur*, représenté en noir sur la figure). Elle ne dépend que de la fréquence des ondes, et pas du profil du signal ou de la position où l'on injecte l'onde.

A gauche, le rayon, démarré de la flèche rouge, se propage d'abord vers le bas et tourne dans le sens trigonométrique. À droite, le rayon se propage d'abord vers le haut et suit un sens horaire, avant de tourner dans le sens trigonométrique.
 © Christophe Brouzet, 2016



En faisant cette construction géométrique sur un ordinateur, on découvre différents motifs géométriques. La figure ci-dessus correspond à $H/L = 2/3$ et $\alpha = 27^\circ$, pour un angle $\theta = 53^\circ$. Mais avec $\theta = 32^\circ, 74,8^\circ, 15^\circ$ ou 69° , on obtient des motifs différents, et pas moins intéressants... À vos ordinateurs !

Les trajectoires des ondes internes ressemblent donc à celles sur un billard dont on aurait modifié la loi de réflexion. Cette prédiction géométrique est conforme aux mesures expérimentales reproduites ci-dessous. Une cuve d'eau salée stratifiée est soumise à un forçage à fréquence constante sur le bord gauche, à l'aide d'un batteur. En suivant à l'aide d'un appareil photo la position de petites particules dispersées dans le fluide, on peut déterminer le champ de vitesse en tout point du fluide grâce à un traitement du signal approprié.



Le fait qu'il existe un attracteur est très intrigant. Cela semble contredire la possibilité pour l'onde de prendre le chemin inverse (propriété de renversement temporel). Les physiciens ont proposé des modèles simplifiés pour expliquer ce phénomène, et parviennent à le reproduire parfaitement grâce à des simulations numériques ou des expériences. Mais certains points restent mal compris, ce qui ouvre un formidable terrain de jeu pour les mathématiciens !

Le but du jeu est simple à : comprendre l'apparition de ces motifs géométriques sans faire d'hypothèse simplificatrice sur la dynamique du fluide. Une première difficulté vient du fait que les ondes ne se «promènent pas toutes seules». Même si l'on excite une fréquence donnée, il se développe des paquets d'ondes à toutes les fréquences voisines. Il est alors délicat d'isoler une seule onde, encore plus d'identifier son écho. Le signal est brouillé, il ne ressemble plus à une oscillation périodique, il faut donc trouver un moyen de le décomposer en des structures plus simples à analyser.

Une deuxième difficulté est liée à l'incompressibilité du fluide, qui induit une contrainte fortement non locale sur la dynamique. En d'autres termes, il n'est pas possible d'étudier le comportement près de l'attracteur indépendamment de ce qui se passe ailleurs dans la cavité (et en particulier près des bords) car tout est intriqué.

Finalement, le problème est beaucoup trop complexe pour espérer avoir des représentations explicites de sa solution. Mais en combinant de la géométrie, de la dynamique et des outils fins de la théorie des opérateurs, on parvient (dans certains cas simples) à caractériser précisément les singularités de la solution, c'est-à-dire la façon dont l'énergie s'accumule au fur et à mesure du temps au voisinage de l'attracteur.

Comprendre de façon fine les ondes et prédire leur comportement reste un défi très actuel pour les océanographes, les physiciens et les mathématiciens. Les systèmes naturels sont plus complexes que les expériences de laboratoire. En trois dimensions, peut-on encore mettre en évidence l'apparition de motifs géométriques? et les prédire théoriquement? Ces motifs sont liés à la géométrie du bassin et à la fréquence d'excitation. Cela appelle une exploration plus systématique des propriétés mathématiques, appelées *propriétés spectrales*, de ces systèmes.

Par ailleurs, le modèle utilisé pour étudier ces phénomènes repose sur l'hypothèse que les fluctuations de densité restent «petites». Mais il prédit une concentration de l'énergie sur les attracteurs, ce qui signifie qu'à ces endroits l'amplitude des variations de densité devient «grande». Il est donc important de comprendre quand la théorie cesse d'être valide et comment on peut en repousser les limites!

L.S.—R. & T.D.