

LES POINTS DE LAGRANGE : UN TICKET GRATUIT VERS LES ÉTOILES ?

EMMANUEL TRÉLAT

Sorbonne Université, Laboratoire Jacques-Louis Lions

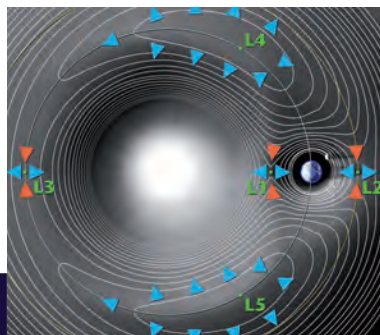
Un fameux problème en mécanique céleste s'appelle le *problème des trois corps restreint*. Trois objets sont en présence, dont deux très massifs (comme le Soleil et la Terre) par rapport au troisième (une poussière, un astéroïde, un engin spatial...). Dans un repère tournant où les deux corps massifs sont fixes, les lois de Newton permettent de décrire l'évolution en temps du troisième objet par un système d'équations différentielles : ce dernier est soumis aux forces d'attraction des deux premiers, et à la force centrifuge puisque l'on est dans un repère tournant. Il s'avère que cette dynamique admet exactement cinq points d'équilibre, que l'on appelle les *points de Lagrange* L1, L2, L3, L4 et L5, en lesquels les trois forces se compensent exactement.

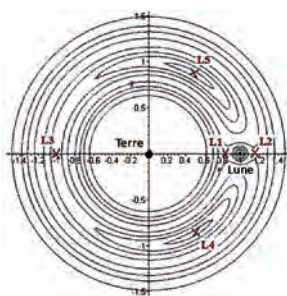
Historiquement, L1, L2 et L3 ont été découverts par Leonhard Euler (1707–1783), et on les appelle parfois les *points d'Euler*. Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) a découvert les deux derniers (que l'on appelle aussi les *points équilatéraux*, cf. figure) et a ainsi emporté le morceau : on appelle tous ces lieux les «points de Lagrange» !

POINTS DE LAGRANGE : QUAND J'Y SUIS, J'Y RESTE !

La propriété d'être un point d'équilibre offre la possibilité d'avoir une configuration fixe relativement à deux corps célestes et permet donc de concevoir des sites d'observation spatiale : en effet, si l'on place un objet exactement en un point de Lagrange, alors (en théorie) il y reste.

Les cinq points de Lagrange dans le système Soleil-Terre. © NASA / WMAP Science Team





Les cinq points de Lagrange
dans le système Terre—Lune.
© NASA / WMAP Science Team

Sur les figures sont représentées des orbites (les trajectoires possibles d'une pierre). Les points L1, L2 et L3 sont naturellement instables alors que les points L4 et L5 sont stables. Au premier abord, cette stabilité semble être une bonne nouvelle : si l'on place un engin spatial au voisinage de L4 (ou L5), alors il va y rester. Mais en fait, cette stabilité implique que, au voisinage de L4 comme de L5, on a un puits de potentiel qui, comme une cuvette, au fur et à mesure des hasards astronomiques, a piégé quantité de poussières, de pierres et d'astéroïdes, rendant ainsi impossible la présence d'un engin spatial dans cette zone à cause des inévitables chocs qui l'abîmeraient rapidement !

L'instabilité des points L1, L2 et L3 est donc finalement une bonne nouvelle : ce sont des sites « naturellement propres » ! Toutefois, si un objet est placé « juste à côté » d'un tel point, alors il ne va pas y rester. Il y a donc un léger prix à payer : pour garder l'objet au voisinage du point de Lagrange (instable), il faut faire appel à la théorie mathématique du contrôle, et en particulier de la stabilisation. Considérons l'exercice du maintien d'un bâton en équilibre vertical au creux de sa main. Si le bâton est exactement vertical, en l'absence complète de perturbations il reste vertical, mais cet équilibre est instable : à la moindre perturbation, ou si le bâton n'est pas exactement vertical, alors il va tomber. La stabilisation consiste alors à faire bouger légèrement sa main (on fait du contrôle) de manière à compenser de faibles variations autour de l'équilibre, et ainsi maintenir le bâton autour de son équilibre instable. Dans le cas d'un engin spatial, l'idée est qu'une légère propulsion (fournie par exemple par des panneaux solaires) suffit à maintenir l'engin au voisinage d'un point instable.

De plus, la théorie mathématique des systèmes dynamiques permet de démontrer qu'il existe, au voisinage de chacun des points de Lagrange, une multitude d'orbites périodiques et quasi périodiques, les plus connues étant les *orbites de halo* (qui sont des déformations de cercles), mais on y trouve aussi toutes les orbites possibles de Lissajous : des orbites *en huit*, en *triple huit*... Ces propriétés surprenantes sont dues à la complexité du champ gravitationnel dans le problème à plusieurs corps. Sans l'utilisation de

mathématiques assez avancées, on serait incapable de détecter de telles orbites périodiques ! Elles ouvrent des possibilités excitantes pour les missions spatiales.

TRENTE MILLIONS DE KILOMÈTRES PRESQUE SANS ÉNERGIE

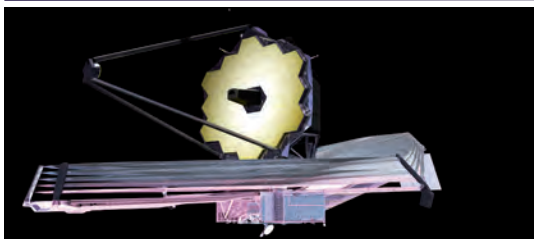
Les points de Lagrange L1 et L2 du système Soleil–Terre sont utilisés depuis longtemps par les agences spatiales, qui y placent leurs engins. Ainsi, autour du point L1 (qui se situe à environ 1,5 million de kilomètres de la Terre dans la direction du Soleil) gravite depuis 1996 le satellite SOHO, dont la mission est d’observer la surface de notre astre. En réalité, l’engin spatial ne peut pas être placé « trop proche » du point L1, car alors l’alignement Soleil–L1–Terre engendrerait un intense bruit de fond solaire qui dégraderait les communications. Pour éviter cette zone d’interférences, l’engin est en fait placé sur une orbite de halo ; il s’agit d’une orbite périodique autour de L1 ayant une période d’environ six mois. Comme elle est instable sur le long terme, de temps en temps (environ tous les trois mois) de petites manœuvres, peu coûteuses énergétiquement, sont nécessaires pour recaler Soho sur son orbite.

Autour du point L2 sera lancé (en principe en 2020) le successeur du télescope Hubble, appelé JWST (James Webb Space Telescope), dont la position sera idéale puisqu’il ne sera pas gêné par la lumière solaire. Le point L3 n’est pas utilisé actuellement ; il se situe à l’opposé de la Terre par rapport à notre étoile, et nous est donc totalement invisible.



Le satellite Soho.

© ESA

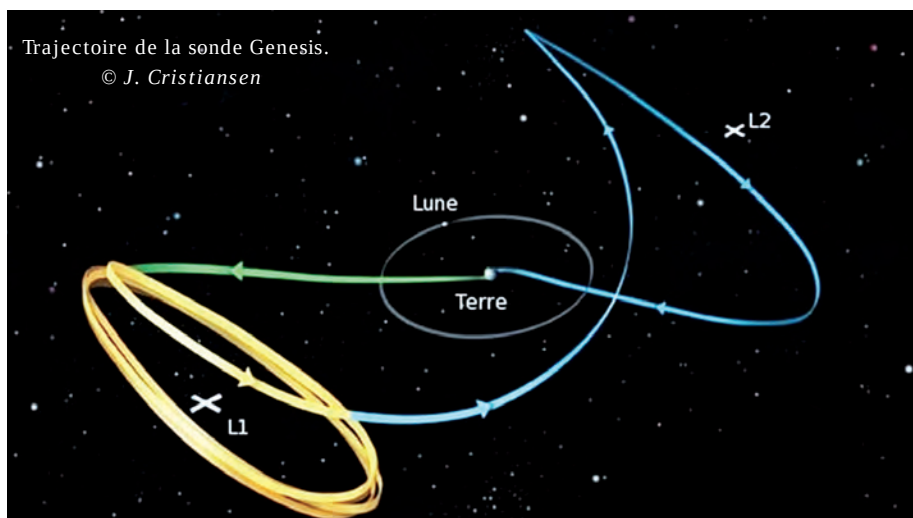


James Webb Space Telescope
(représentation artistique).

© ESA

Les orbites périodiques au voisinage des points de Lagrange permettent à un engin spatial de se déplacer de manière gratuite, sans consommer de carburant. Il est alors possible d'élaborer des lois de guidage globales à moindre coût : on peut fort bien utiliser partiellement de telles trajectoires et ainsi économiser du carburant.

Les concepteurs de la mission Genesis ont utilisé ces propriétés pour propulser la sonde vers sa destination, et cela en utilisant un minimum de carburant : la sonde Genesis, lancée en 2001, avait pour objectif de collecter des particules de vent solaire. Elle a d'abord parcouru 1,5 million de kilomètres (en vert sur la figure suivante), puis a été placée sur une orbite de halo (en jaune) autour du point de Lagrange L1 du système Terre–Soleil afin d'y collecter des particules de vent solaire pendant deux ans et demi. Elle est revenue sur Terre en septembre 2004 en transitant par le point de Lagrange L2 (trajectoire en bleu), empruntant au passage ce que les dynamiciens appellent une *orbite hétérocline*, effectuant ainsi, en tout, environ 30 millions de kilomètres avec une infime consommation énergétique.



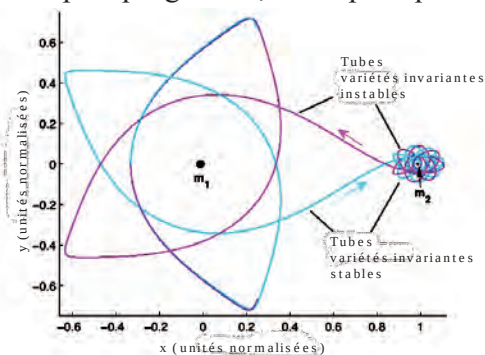
Plus fascinant, peut-être...Toujours en utilisant des mathématiques assez profondes (géométrie différentielle et théorie des systèmes dynamiques), on découvre que, autour de chaque point de Lagrange, chacune

des orbites périodiques engendre des *variétés invariantes* (variétés stables et instables) : ce sont des genres de «tubes», engendrés par chacune des trajectoires périodiques, ayant la propriété que, si l'on y place un caillou, alors ce caillou reste dans le tube et y dérive selon un courant orienté, comme dans un tuyau de plomberie.

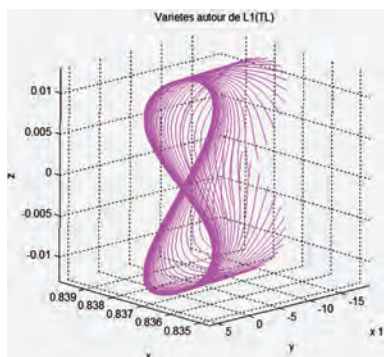
Ces «courants de gravité» sont similaires aux courants marins : ils existent naturellement et on peut choisir de les utiliser (à condition de ne pas être pressé...) pour économiser du carburant. Par exemple, si l'on place une coquille de noix le long du Gulf Stream, à l'ouest de l'Afrique, on va la retrouver quelques mois plus tard à l'ouest des côtes françaises. La même chose a lieu dans l'espace, de manière d'ailleurs bien mieux prédictible puisqu'on est dans le vide.

Il existe ainsi dans notre système solaire tout un réseau de tubes invariants, de courants de gravité que, grâce à des calculs mathématiques, on est parfaitement capable de cartographier, obtenant ainsi une véritable «carte de métro» du système solaire.

Toutefois, bien que ce métro soit totalement gratuit, il est lent ! L'exploitation de tels courants est donc plutôt adaptée à des missions robotisées, ou alors il faut combiner leur effet d'entraînement à l'utilisation d'un moteur. Par exemple, en utilisant les points de Lagrange L1 et L2 du système Terre–Lune et les courants de gravité qu'ils engendrent, on sait aller de la Terre à la Lune de manière presque gratuite, à ceci près qu'il faut bien sûr au préalable s'arracher de l'attraction terrestre. Mais une fois l'engin placé dans un tube invariant, on sait l'emmener très près de la surface de la Lune en trois à quatre mois, sans aucune dépense de carburant ! Bien sûr, on sait aller vers la Lune en trois jours, mais cela se fait au prix d'une grande consommation énergétique.

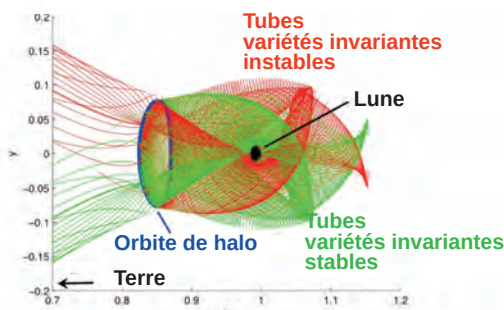


Orbites en 8 et leurs tubes,
dans le système Terre (m_1)-Lune (m_2).
© E. Trélat



Orbites en forme de huit et leurs tubes en huit (variétés invariantes qui conservent leur structure en temps long).

© E. Trélat



Orbites de halo et leurs tubes (variétés invariantes qui deviennent rapidement chaotiques).

© E. Trélat

La conception de missions cargos vers la Lune (consistant à envoyer, avec l'assistance de robots, beaucoup de matériel pour construire une base lunaire) a été l'objectif de la thèse de Maxime Chupin, en partenariat avec ArianeGroup. Nous avons utilisé les tubes invariants en forme de 8 qui sont engendrés par des orbites de Lissajous* en huit autour du point L1 du système Terre–Lune. Ces tubes ont en effet la propriété remarquable de conserver cette structure en temps long, contrairement à ceux engendrés par les orbites de halo, qui deviennent rapidement chaotiques, et donc inutilisables en temps long. Résumons : les orbites de halo engendrent des « tubes » dont la section est un cercle, qui deviennent rapidement « chaotiques » : ils s'évasent, en forme de trompette, à tel point qu'ils en deviennent inexploitable. Au contraire, les orbites de Lissajous en huit engendrent des « tubes » étonnants dont la section est un 8, qui

conservent en temps long cette structure. Cette propriété serait fort intéressante pour des missions spatiales. De même, outre qu'ils suivent une jolie courbe autour de la Terre (m_1) et autour de la Lune (m_2 , voir en page précédente), ils oscillent comme une pelote de laine autour de la Lune et passent tout près de sa surface : idéal pour joindre de manière gratuite un point très proche de la surface lunaire !

Dans un avenir proche, la communauté internationale pourrait s'accorder pour construire une telle base lunaire (sans doute au pôle Nord de la Lune), qui servirait de point intermédiaire en vue de missions vers Mars...

E.T.

*Jules-Antoine Lissajous, 1822–1880, mathématicien et physicien français spécialiste de l'étude des oscillations. Son nom est associé à la courbe évoquée ci-dessus.