

QUAND LES ROUES DES VOITURES TOURNENT À L'ENVERS

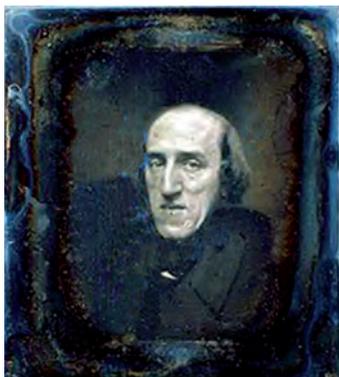
MICHEL CRITON

Président de la Fédération française des jeux mathématiques

ÉDOUARD THOMAS

Journaliste scientifique

Le principe du cinématographe repose sur la projection d'images successives fixes (un phénomène discret), que notre cerveau réinterprète comme un phénomène continu. Vous avez toutes et tous réalisé ou utilisé, dans votre enfance, un folioscope (ou *flip-book*). Il s'agit d'un carnet dont les pages sont le support de dessins successifs correspondant à un mouvement. Lorsque l'on feuillette rapidement le carnet avec le pouce, on a l'illusion du mouvement. La technique du cinéma est basée sur le même principe !



Joseph Antoine Ferdinand Plateau
(1801-1883).

© Daguerrréotype de 1843



Un folioscope.

© Nicolas Plateau, 2014

Plusieurs explications existent pour comprendre cette illusion de mouvement continu. La première évoque la « persistance rétinienne ». En 1829, le mathématicien et physicien belge Joseph Plateau a, le premier, établi qu'une image qui se forme sur la rétine met environ un douzième de seconde avant de s'effacer. Ainsi, en dessous de douze images par seconde, nous voyons donc une succession d'images fixes, et au-delà, nous avons une

impression de mouvement, tout d'abord saccadé, et de plus en plus fluide lorsque l'on augmente la fréquence.

Mais cette persistance n'explique pas l'impression de mouvement continu. Une explication plus récente fait appel à l'effet Phi dû au fonctionnement de notre cerveau, qui comble l'intervalle entre deux images fixes avec le mouvement «le plus vraisemblable», comme s'il «voyait» ce mouvement s'effectuer.

Les trucs en «scope»

Joseph Plateau (1801-1883) a découvert la synthèse du mouvement et créé dès 1832 un phénakistiscope, jouet optique donnant l'illusion du mouvement grâce à la persistance rétinienne. Dès 1834, le mathématicien britannique William George Horner (1786-1837) perfectionnera cet objet en un nouvel appareil optique donnant l'illusion du mouvement, le zootrope. En 1877, Charles-Émile Reynaud (1844-1918) propose le praxinoscope, tambour sans fente comprenant en son centre un cylindre à facettes de miroirs. La perception des mouvements s'en trouve améliorée. Quinze ans plus tard, il fait breveter le théâtre optique, qui réunit les techniques de l'analyse du mouvement et l'art de la projection à l'aide d'une lanterne magique. En 1895 s'imposera le cinématographe des frères Lumière.



Un phénakistiscope.
© *animage.org*



Un disque
de phénakistiscope
datant de 1834
d'Alphonse Giroux.
© *É. Thomas, 2018*



Un zootrope
de la London Stereoscopic and Photographic Company
datant de 1870.
© *É. Thomas, 2018*

Le praxinoscope
de Charles-Émile Reynaud.
© *G. Tissandier*



Aux tout débuts du cinéma, les premiers films comportaient seize ou dix-huit images par seconde. La fréquence a ensuite été normalisée à trente images par seconde, ce qui explique l'impression d'accélééré et de saccadé lorsque nous visionnons de très vieux films que l'on projette à la vitesse standard des films actuels.

Mais venons-en à l'illusion (involontaire) qui nous fait voir les roues de voitures tourner dans le bon sens, puis ralentir, se figer l'espace d'un instant, et enfin tourner à l'envers. Il est paradoxal que le cinéma du XXI^e siècle, avec ses techniques de truquages et d'«effets spéciaux», n'ait pas réussi à remédier à ce défaut de perception qui différencie le cinéma de la vraie vie!

La plupart des voitures ont des jantes qui présentent une symétrie d'ordre 5 (comme ci-contre). Mais il existe aussi des jantes «sport» avec des symétries d'ordre 6, 7, 8, 9, voire plus.

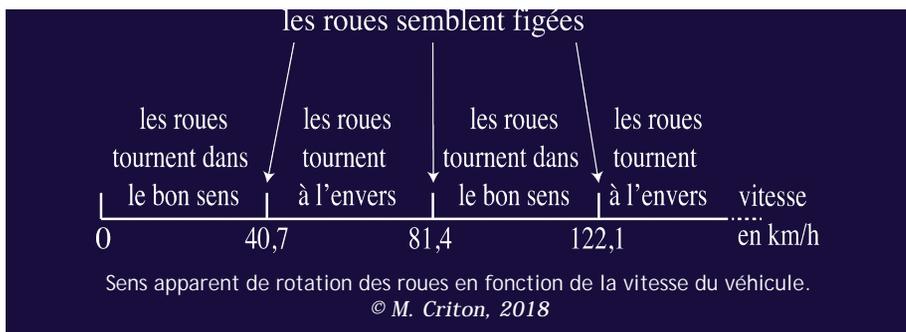
Le diamètre le plus standard d'une roue de voiture équipée de son pneu est d'environ 60 centimètres. Supposons donc qu'une voiture soit équipée de jantes admettant une symétrie d'ordre 5. À quelle vitesse doit rouler une telle voiture pour que le spectateur ait l'illusion que ses roues ne tournent pas?



Le calcul est assez simple. La roue doit tourner de $n \times (360^\circ/5)$ par trentième de seconde (n étant un entier naturel), soit $30n \times 72^\circ$ par seconde. Une rotation de 72° des roues correspond alors à un déplacement de la voiture de $0,6 \pi/5$ mètre. Pour que les rayons de la jante semblent immobiles, il faut donc que la voiture avance de $n \times 3,6\pi$ mètres par seconde, soit une vitesse multiple d'environ 40,7 km/h

De 0 à 40,7 km/h, on voit les roues tourner dans le bon sens. À 40,7 km/h, les roues semblent figées. Entre 40,7 km/h et 81,4 km/h, on les voit tourner à l'envers; à 81,4 km/h, elles apparaissent à nouveau figées; entre 81,4 km/h et 122,1 km/h, on les verra à nouveau tourner à l'endroit, etc.

Pour des jantes «sport» présentant une symétrie d'ordre k , vous pourrez vérifier que la voiture doit avoir une vitesse de $18n \pi/k$ mètres par seconde pour que les roues apparaissent comme figées.



LE SPECTRE D'UNE EXPLICATION PLUS MATHÉMATIQUE

Le même phénomène s'observerait bien sûr avec les pales d'un hélicoptère, avec les ailes d'un moulin à vent ou encore les bras d'une éolienne, même si l'effet est moins saisissant avec un objet fixe qu'avec un objet mobile comme un véhicule : le contraste entre le sens apparent de rotation des roues et le mouvement de translation apparaissent contradictoires. Pour notre cerveau, quelques millisecondes représentent une durée assez courte pour faire croire à un mouvement fluide. Ce laps de temps reste cependant suffisamment long pour que les objets continuent de se déplacer. Imaginez pour un hélicoptère dont les pales tournent à cinq cents tours par minute ! Cet intervalle de temps permet à chaque pale de faire le tiers d'un tour complet. Pour cette raison, si la vitesse de rotation de l'hélice est une fraction exacte de la cadence de capture d'image de la caméra qui filme la scène, alors sur l'écran de projection les pales de notre hélicoptère en vol sembleront à l'arrêt.

Il s'agit d'un phénomène qui n'est pas propre au cinéma, à la vidéo ou à l'animation : on le retrouve par exemple dans le son ou l'image. En fait, il s'agit à chaque fois d'une manifestation du « repliement de spectre », bien connu de tous ceux qui s'occupent de théorie du signal.

Mathématiquement, cet effet est observé à chaque fois que deux phénomènes périodiques sont superposés : celui qui est observé (le mouvement P_1 de la pale de l'hélicoptère), et celui qui observe (la cadence P_2 de capture d'images de la caméra). Or, P_1 et P_2 n'étant pas en phase, il apparaît un décalage, qui est ensuite mal interprété par le cerveau.

Pour capturer convenablement un signal d'une fréquence donnée, l'échantillonnage (c'est-à-dire la fréquence de la capture d'images de la caméra) doit se faire à une fréquence supérieure au double de celle

du signal. C'est le fameux théorème de Shannon–Nyquist, l'un des résultats les plus fondamentaux de la théorie de l'information, omniprésente dans nos sociétés modernes.

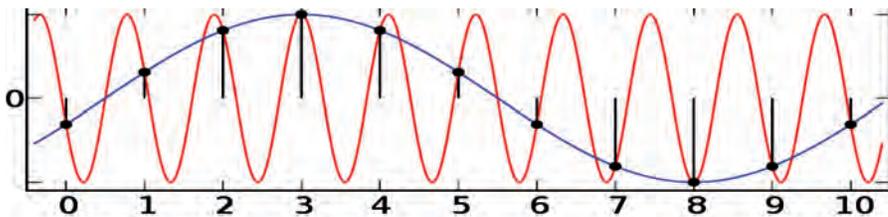
Pour l'enregistrement audio (au format MP3 par exemple), on utilise en général une capture à 41 kHz, à 44,1 kHz ou à 48 kHz, afin de pouvoir inclure tout le spectre jusqu'à 20 kHz, ce qui constitue la limite audible pour les humains. On enregistre bien à plus du double de la fréquence maximale que l'on veut capturer, et donc aussi de toutes les fréquences inférieures. Le théorème de Shannon–Nyquist est respecté, et nos oreilles s'en réjouissent.

De même, pour enregistrer convenablement trois pales d'hélicoptère tournant à cinq cents tours par minute (soit huit tours par seconde), il faut une cadence de capture supérieure à $8 \times 3 \times 2$ (soit 48) images par seconde. En prenant une cadence de cinquante images par seconde, ce que permet un matériel professionnel, le spectateur n'aura plus l'impression d'avoir des pales tournant dans le mauvais sens !

DE L'ART ET LA MANIÈRE DE CHOISIR SON ÉCHANTILLON

La question est entendue pour le cinéma et pour le son. Mais au-delà de ces applications, le repliement de spectre s'applique à tous types de signaux. La théorie du signal est née des préoccupations du mathématicien, physicien et homme politique français Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), qui cherchait à comprendre comment se répartissait la chaleur dans un matériau chauffé. En 2018, qui fait l'objet d'une commémoration nationale, nous célébrons l'«année Fourier» selon les termes de la Société mathématique de France.

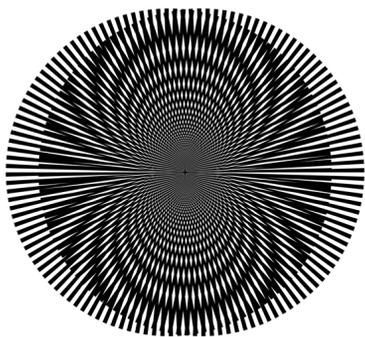
Le repliement de spectre est un phénomène qui introduit, dans un signal échantillonné, des fréquences qui ne devraient pas s'y trouver, lorsque la fréquence d'échantillonnage est inférieure à deux fois la fréquence maximale contenue dans le signal. Cette distorsion se produit car tous les signaux dont l'écart de fréquence avec la fréquence d'échantillonnage est identique se représentent par les mêmes échantillons (voir sur le schéma). Lorsque l'on reconstitue le signal d'origine, il est impossible de distinguer ces composantes, dont la représentation est identique. Les points de capture, effectués tous les 0,1 s (en noir), sont présents sur les deux courbes, mais le système de traitement logiciel ne saura reconstituer que la courbe bleue. Pour lui, les deux signaux (rouge et bleu) apparaissent de la même façon, et il ne garde par défaut que celle de plus basse fréquence, même si c'est la «mauvaise».



Avec cette fréquence d'échantillonnage, les signaux en bleu et en rouge, une fois échantillonnés, sont représentés par les mêmes échantillons. © Moxfyre

Pour un signal sonore, le son aigu apparaît donc plus grave : ce phénomène est à l'audio ce que la roue tournant en sens inversé est à l'image. C'est cette transformation que l'on appelle le *repliement du spectre* : les fréquences trop hautes sont divisées (repliées) et deviennent des fréquences plus basses. On met à profit ce phénomène dans l'observation stroboscopique : en ajustant la fréquence du stroboscope, on observe un mouvement périodique au ralenti. On observe aussi le repliement de spectre dans les images ; il prend alors la forme de moirés.

Tous ces effets proviennent du choix de la discrétisation temporelle du signal et du théorème de Shannon–Nyquist, auquel tout processus de numérisation est soumis.



Un phénomène de moiré : cette image ne contient que des segments de droites, et en particulier aucune ligne courbe. © SharkD

Le repliement de spectre peut apparaître chaque fois que le critère de Shannon et Nyquist n'est pas respecté, d'abord pour un signal sinusoïdal, puis pour un signal plus sophistiqué. L'utilisation d'un filtre anti-repliement permet néanmoins souvent de réduire les effets du repliement de spectre. Mais attention : le filtrage préalable du signal à l'aide d'un filtre anti-re-

pliement (pour supprimer toute composante supérieure à la fréquence de Shannon–Nyquist) évite certes l'apparition de ces fréquences « fantômes », mais ce filtrage n'est pas toujours possible... voire désirable. En effet, au cinéma, notre hélice d'hélicoptère apparaîtrait fixe (plutôt que de tourner à l'envers), mais ses trois pales seraient floues ! Cela, visuellement, serait évidemment encore pire...

M.C. & É.T.