Des instruments traceurs de courbes

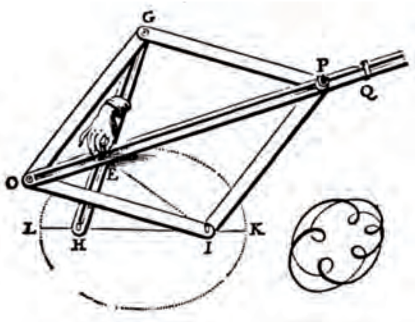
Jean-Jacques Dupas

Ingénieur-chercheur au Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
Président de l'association Playmaths

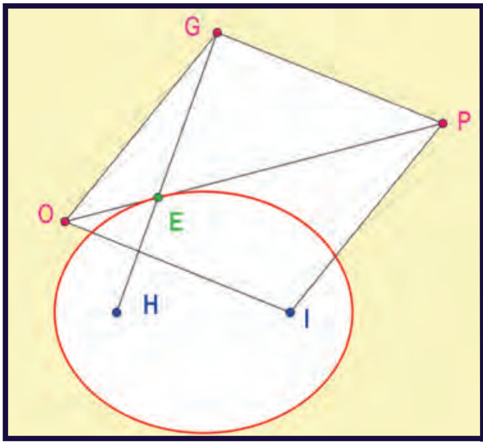
La géométrie et les instruments sont intimement liés. Le cercle est-il antérieur au compas ou le compas antérieur au cercle ? Difficile de répondre ! La géométrie d'Euclide est une géométrie de la règle et du compas. Au IIIe siècle avant notre ère, Archimède fut le premier mathématicien à considérer les courbes mécaniques comme sujet d'étude légitime. La *spirale d'Archimède* est ainsi le lieu d'un point se déplaçant uniformément sur une ligne droite, qui elle-même tourne à une vitesse constante. C'est l'une des rares courbes connues de l'Antiquité autre que la ligne droite et les coniques ! Il s'agit en fait de la première courbe mécanique (tracée par un point mouvant) de l'Antiquité…

Des machines mécaniques venues du monde conique

Les coniques de l'Antiquité (ces courbes obtenues par intersection d'un plan et d'un cône, comme les ellipses, les paraboles et les hyperboles) vont être intensément étudiées par la suite, ce qui va déboucher sur des mécanismes permettant de les tracer. On en trouve par exemple dans le *De Organica Conicarum Sectionum* de Frans van Schooten, publié en 1646, comme celui-ci, qui permet de tracer des ellipses.



Le mécanisme de van Schooten, très astucieux, utilise des articulations et des glissières.
© *Frans van Schooten, 1646*

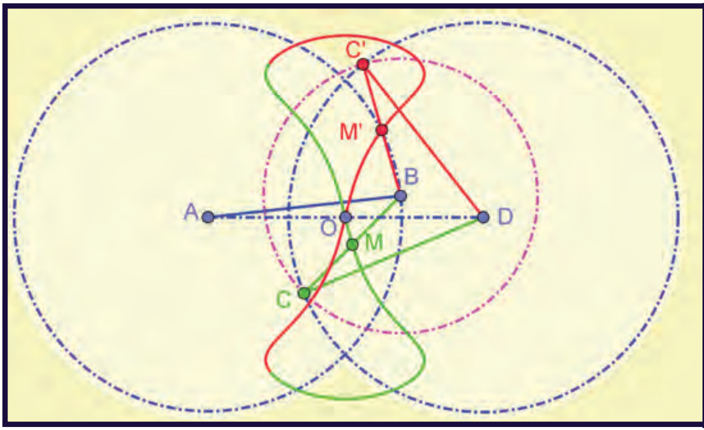


La construction géométrique associée au mécanisme de van Schooten.

Le losange OIPG possède un point fixe I, qui est l'un des deux foyers de l'ellipse. Le point P du mécanisme tourne autour de I. Le point courant E de l'ellipse est donné par l'intersection des droites (HG) et (OP).
© *J.-J. Dupas, 2017*

Des cercles et des droites à toute vapeur !

L'invention de la machine à vapeur relance l'intérêt pour les mécanismes et va permettre la création de la cinématique (*kinêma* signifiant «mouvement» en grec). La *cinématique* est… l'étude des mouvements. Le piston poussé par la vapeur se déplace en ligne droite. On voudrait bien alors récupérer un mouvement circulaire… ou, réciproquement, obtenir un mouvement linéaire à partir d'un mouvement circulaire. Vers 1784, James Watt invente un mécanisme, à trois barres, qui «approxime» la droite sur un segment. Ce dispositif sera encore utilisé pour les voitures de course dans les années 1950 ! Watt indiquait dans une lettre à son fils que c'était l'invention dont il était le plus fier.

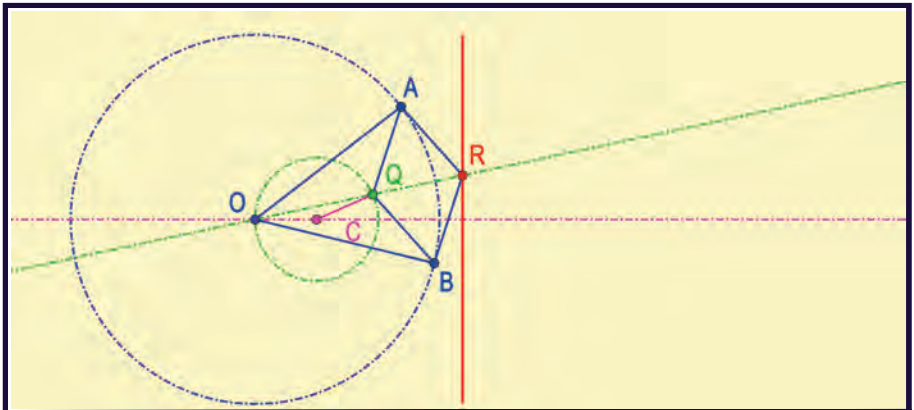


Le mécanisme de Watt.
© *J.-J. Dupas, 2017*

Les deux des barres [AB] (bleu) et [CD] (vert) possèdent la même longueur et tournent autour de deux points fixes, A et D, donc B et C parcourent les deux cercles bleus. La troisième barre, [BC], est articulée sur les deux premières à l'aide d'un pivot. Le centre M de cette barre semble parcourir un petit segment de droite. Pour les applications, c'est une bonne approximation de la droite autour du point d'inflexion O. En vérité, M parcourt un morceau d'une courbe (en vert). La courbe entière, obtenue en remplaçant C par C' (et donc M par M', en rouge), devient sous certaines conditions une *lemniscate de Bernoulli*.

En 1850, Pafnouti Tchebychev produit un autre mécanisme, qui est toujours une approximation. C'est en travaillant à son amélioration qu'il découvre les polynômes qui le rendront célèbre. Les travaux de cinématique ne sont donc pas futiles !

Une solution exacte est donnée par un polytechnicien, le général Charles Peaucellier, avec un système à six barres. Sa découverte passe inaperçue et sera retrouvée en 1871 par un étudiant lituanien, Lipman Lipkin.



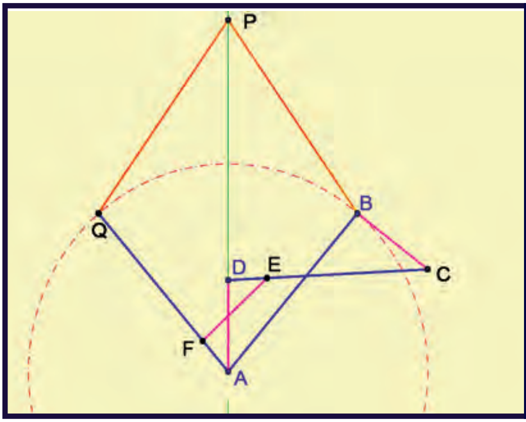
L'inverseur de Peaucellier. © *J.-J. Dupas, 2017*

L'inverseur de Peaucellier est constitué des barres bleues [OA], [OB], [AQ], [AR], [BQ] et [BR], et de la barre violette [CQ]. On a OA = OB et AQ = QB = BR = RA. Le point O est fixe et les barres sont toutes articulées ; on s'intéresse au lieu décrit par le point R. Or, $OQ \times OR = OA^2 - AQ^2$, qui est constant. Cette relation correspond à la définition mathématique d'une transformation géométrique déjà bien connue des Grecs, l'inversion. Si O est fixe, Q et R parcourent des courbes « inverses ». Donc si le point Q parcourt le cercle vert de centre C grâce à la barre [CQ], alors le point R parcourt une droite rouge perpendiculaire à la droite (OC). L'inverseur de Peaucellier est ainsi la matérialisation de l'inversion (d'où son nom).

En 1874, le mathématicien James Joseph Sylvester introduit l'inverseur en Grande-Bretagne. La même année, une autre solution est présentée à une réunion de la British Association avec seulement quatre barres : le parallélogramme croisé de Hart.

L'inventeur Alfred Bray Kempe entre en piste

En 1875, le Britannique Kempe (celui qui est par ailleurs connu pour sa « preuve », erronée, du théorème des quatre couleurs) va déterminer d'autres mécanismes pour générer un mouvement rectiligne.



Un mécanisme de Kempe pour tracer des droites.

© J.-J. Dupas, 2017

Un second mécanisme a été proposé par Kempe en 1875. Les barres bleues, [AQ], [AB] et [CD], ont la même longueur, ainsi que les barres roses, [AD], [EF] et [BC], et que les barres orange [BP] et [QP]. Le point E est tel que $AF = DE \times DA^2/DC$. Si A et D sont fixes, alors le point P parcourt la droite verte lorsque B parcourt le cercle rouge.

Or, faire des maths, c'est généraliser. C'est ainsi que Kempe montre en 1876 que non seulement on peut tracer des droites avec des systèmes articulés, mais que toute courbe algébrique continue (c'est-à-dire une relation du genre $f(x, y) = 0$ faisant intervenir uniquement des puissances entières de x et y, des additions et des multiplications, comme les polynômes) peut être tracée avec un mécanisme de type système articulé. De plus, un théorème de Karl Weierstrass affirme que toute courbe continue sur un segment peut être approximée par un polynôme. Donc, en fait, toute courbe continue, aussi sophistiquée et farfelue soit-elle, peut être générée avec un système articulé !

Un résultat extraordinaire… et peu connu

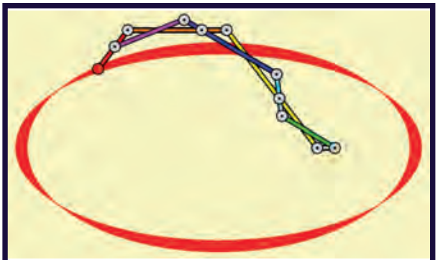
Ce résultat aussi extraordinaire que peu connu est le *théorème d'universalité de Kempe*. Le mathématicien américain William Thurston (1946–2012) l'aurait résumé, lors d'une conférence, par : *« Si votre signature est une suite continue de courbes (vous ne levez pas le stylo), alors il existe un mécanisme pouvant exécuter votre signature ! »*

Comment Kempe s'y prend-il ? Il transforme les cordonnées cartésiennes (x, y) de la courbe $f(x, y) = 0$ en coordonnées polaires (r, θ). La fonction f peut alors être exprimée en sommes de $\cos(\theta)$, $\cos(2\theta)$, $\cos(3\theta)$… Grâce à des parallélogrammes et des parallélogrammes croisés, Kempe construit des *multiplicateurs* (dispositifs qui transforment θ en $n\theta$, avec n un entier), des *additionneurs* et des *translateurs*. La combinaison astucieuse de ces mécanismes permet la construction de la courbe !

Mais si ce résultat assure l'existence d'un mécanisme (et qu'il fournit une méthode pour en construire un), ce dernier est toujours excessivement complexe, à la limite des possibilités humaines. Le procédé de Kempe ne permet nullement de déterminer le dispositif « le plus simple ».

L'informatique apporte un nouveau souffle

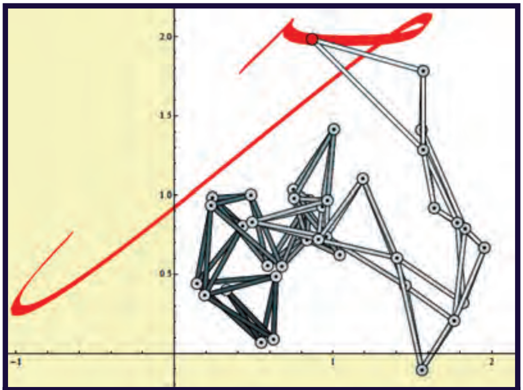
Notre chance par rapport à Kempe est que l'informatique peut nous aider. Aussi Matteo Gallet, Christoph Koutschan, Zijia Li, Georg Regensburger, Joseph Schicho et Nelly Villamizar dans leur papier *Planar Linkages Following a Prescribed Motion* proposent en 2016 un nouvel algorithme en se restreignant aux courbes paramétriques.



Une ellipse avec un système articulé de huit barres.
© *M. Gallet et al., 2016*

Cela produit un mécanisme avec «seulement» huit barres et dix articulations pour une ellipse.

Plus impressionnant (et délirant ?) est ce système articulé de vingt-six barres et trente-sept articulations qui trace le «J» de la signature de John Hancock (le signataire de la déclaration d'indépendance des États-Unis), prenant ainsi au mot William Thurston…



Le mécanisme traçant le J de la signature de John Hancock.
© *M. Gallet et al., 2016*

Les systèmes articulés n'en finissent pas d'inspirer les mathématiciens ! Avec les informaticiens, ils n'ont pas fini de trouver des méthodes pour générer automatiquement les mécanismes appropriés aux courbes, aussi tarabiscotées soient-elles. Ce qui évidemment aura des répercussions, que ce soit en robotique ou dans les nombreux mécanismes de la vie de tous les jours…

J.-J. D.

Pour en savoir (un peu) plus :

How to draw a straight Line. Alfred Kempe, 1877 (réédition Nabu Press, 2012).

Sir Alfred Bray Kempe, an amateur kinematician. Asok Kumar Mallik, *Resonance*, 2011.

Tracer une droite… sans la règle ! Jean-Jacques Dupas, Bibliothèque Tangente 59, POLE, 2017.

Distinguished figures in mechanism and machine science. Sous la direction de Marco Ceccarelli, Springer, 2007 (tome I), 2010 (tome II), 2014 (tome III).