Zénon : quand le mouvement se heurte à l'infini

Hervé Lehning

Agrégé de mathématiques, écrivain scientifique,
membre de l'ARCSI

Les fameux paradoxes du philosophe présocratique grec Zénon d'Élée (V^e siècle avant notre ère) tendent à prouver que le mouvement est impossible ! Sauf à penser que Zénon le croyait vraiment, il s'agit d'humour autant que de philosophie. Voici donc l'histoire d'une course entre Achille, réputé excellent coureur, et la tortue, dont chacun connaît la lenteur :

« La tortue est partie en avance. Elle est déjà bien loin lorsque Achille se met à courir. Quand il atteint le point où elle se trouvait, toute tortue qu'elle est, elle a fait du chemin. Chaque fois qu'Achille passe par le point où elle se trouvait, elle n'y est plus. Elle a progressé. Le même cauchemar recommence jusqu'à l'infini pour ce pauvre Achille. Jamais, il ne rattrapera la tortue ! »

Partie en avance,
la tortue va-t-elle semer Achille ?
© *Hervé Lehning*

Une somme infinie de nombres qui est finie…

Dans une autre version du paradoxe, Achille tire une flèche contre un arbre. Cette flèche ne peut atteindre l'arbre pour la même raison ! Elle reste «piégée» par le découpage du temps en instants successifs. Bien sûr, tout cela est absurde, le mouvement est possible. L'erreur fondamentale du raisonnement de Zénon est d'imaginer une suite infinie d'instants distincts, alors que cette notion est une fiction. La seule ayant une réalité dans ce domaine est celle d'intervalles de temps. Ceux-ci ont toujours une durée non nulle. Ce que nous nommons communément « instant » est en fait un intervalle très court, un intervalle dont la durée est indiscernable pour nos sens. Le temps ne s'arrête jamais, il s'écoule. La course d'Achille ne peut être ainsi divisée à l'infini : les étapes de Zénon sont fictives ! De nos jours, on répond au paradoxe de Zénon par les mathématiques : une somme infinie de nombres peut être finie (voir l'encadré Infini potentiel ou actuel ?). En fait, pour Zénon, il s'agissait plutôt d'une question de conception du monde…

Avec ces deux paradoxes, Zénon voulait réfuter l'idée d'un monde continu : entre deux points (ou deux instants), il y en a toujours un autre. Cette idée est purement mathématique et n'a aucun sens en physique : à force de diviser l'espace, on tombe vite au niveau atomique, et en deçà, où la matière devient insécable. Les grandeurs infinitésimales sont des idéaux mathématiques, bien pratiques pour les calculs, mais elles n'ont pas de réalité physique tangible ou matérielle.

Ainsi, aussi pertinente soit-elle, la réponse calculatoire exposée dans notre encadré manque sa cible. Plus exactement, elle vaut exactement la réponse de Diogène de Sinope, célèbre philosophe cynique, qui, quand on lui exposa le paradoxe d'Achille et de la tortue, se contenta de se lever et de marcher, prouvant ainsi le mouvement de la manière la plus évidente qui soit. Quel besoin de sommer des séries infinies pour cela ? De toute façon, pouvons-nous seulement faire mieux ?

Si elles répondent à des questions concrètes, les mathématiques restent pour autant une science abstraite, qui opère sur des idéaux. C'est ce qui fait leur force.

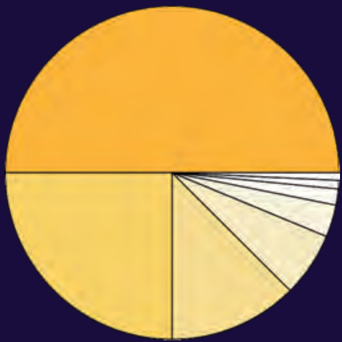
Infini potentiel *versus* infini actuel

De nos jours, le paradoxe de Zénon est souvent vu comme une erreur de calcul, qui consiste à voir la somme $S = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$ comme infinie, ou dénuée de sens. Pourtant, on peut la voir comme le résultat du partage d'une pizza selon la règle suivante : le premier prend la moitié, le suivant, la moitié du reste, et ainsi de suite.

Si les convives sont en nombre infini, la pizza sera entièrement distribuée, ce qui fournit l'égalité $S = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1$. Cette méthode est celle qu'utilisait Archimède dans l'Antiquité, en évitant l'introduction de l'infini : il montrait que plus on prenait de termes, plus on s'approchait de 1. Cette façon de faire correspond à une conception de l'infini appelée *infini potentiel* : tout nombre peut être dépassé.

Le premier invité prend la moitié de la pizza.
Le deuxième prend la moitié de ce qui reste, soit un quart.
Le troisième prend la moitié du reliquat, et ainsi de suite.

Avec une infinité de convives, toute la pizza est partagée !



© H. Lehning

Au XVIIIe siècle, Leonhard Euler envisageait la somme $S = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$ comme un nombre ordinaire sur lequel on peut effectuer des calculs. Voici à quoi cela correspond. En multipliant S par 2, on obtient $2S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1 + S$, ce qui se simplifie en $S = 1$, d'où le résultat. La méthode est simple mais repose sur l'idée que S possède un sens, autrement dit sur l'infini actuel, c'est-à-dire un infini qui existe vraiment. Pour cette raison, la méthode d'Euler peut fournir des résultats surprenants ; elle est de toute façon à manier avec une extrême prudence. Par exemple, si on lui donne un sens, la somme $T = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ aboutit à l'équation $T = 1 + 2(1 + 2 + 4 + \ldots) = 1 + 2T$, donc au résultat $T = -1$, qui semble totalement absurde puisque T est la somme de nombres tous strictement positifs.

En fait, avec la théorie moderne des séries divergentes (réservée aux spécialistes car non encore complètement aboutie), il est possible de donner un sens à certains résultats de ce type. Dès le XIXe siècle, des mathématiciens comme Ernesto Cesàro ou Bernhard Riemann ont donné un sens explicite à certaines intuitions d'Euler relatives aux séries divergentes. Développer cette histoire nous entraînerait trop loin ; le lecteur intéressé pourra cependant chercher à se documenter sur les supersommations linéaires, stables et régulières.

MONDE DISCRET, CONTINU...OU NI L'UN NI L'AUTRE !

À l'opposé, un autre paradoxe de Zénon, moins étudié de nos jours, réfute l'idée d'un monde discret : après un instant (juste après), il y en a un autre et pas d'autres entre les deux. De même que pour le paradoxe d'Achille, il est possible de l'exposer dans des termes plus modernes. Imaginons deux trains de trois wagons roulant en sens opposés, à la vitesse d'un wagon par instant. Si les deux premiers wagons se croisent à l'instant 1, les deux trains sont côte à côte à l'instant 2. À quel instant le wagon de tête du premier train croise-t-il le deuxième wagon du second train ?

À chaque instant passe un wagon.
© *H. Lehning*

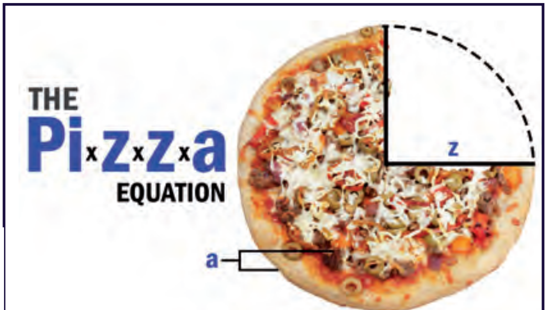
S'il n'existe aucun instant entre les instants 1 et 2, la réponse est : «*Jamais !*» Réfléchissez-y en vous appuyant sur le schéma. Le monde ne serait ainsi ni discret, ni continu. La pertinence des paradoxes de Zénon est là.

Les paradoxes de Zénon concernent le concept d'infini, c'est-à-dire une notion mathématique sans équivalent dans le monde physique sauf au niveau potentiel. Ils justifient la méfiance des Grecs anciens vis-à-vis de l'infini actuel. Cette remarque ne signifie pas que la notion d'infini n'a pas d'application concrète en physique comme en mathématiques.

Mais restons sur les paradoxes de l'infini pour examiner ce qu'en pensait le mathématicien et philosophe Abu Yusuf al-Kindi (801–873) : *« Le monde est fini car si nous supposons un monde infini et si nous en ôtons* *une partie finie alors le reste sera ou bien fini ou bien infini. Dans le premier cas, si nous lui restituons la partie finie qu'on lui a ôtée, alors il restera fini mais il devient égal à ce qu'il était au début, le fini est donc égal à l'infini. Si le reste est infini, qu'en adviendra-t-il si nous lui restituons la partie ôtée ? Il ne peut devenir plus grand qu'il ne l'était au début, on aura alors un infini plus grand que l'infini ; il ne peut pas non plus rester inchangé puisqu'on lui a ajouté une partie. Supposer un monde infini entraîne des contradictions et donc ceci est impossible. »*

Cette impossibilité a été levée par l'Allemand Georg Cantor (1845–1918), qui a montré que l'infini mathématique est forcément multiple. Dans la pratique, les mathématiciens utilisent deux concepts, l'infini dénombrable (celui de ce que l'on peut énumérer : les nombres entiers et les nombres rationnels essentiellement) et l'infini non dénombrable (celui des nombres réels, des points de la droite, du plan ou de l'espace). Ces deux infinis suffisent pour faire des mathématiques, mais Georg Cantor a malgré tout posé une question : existe-t-il un infini « coincé entre les deux » ? Incapable d'y répondre, il fit l'hypothèse, dite *hypothèse du continu*, qu'il n'existait pas de tel infini. Dès lors, cette question devint de toute première importance, et l'histoire de l'hypothèse du continu a connu de nombreux rebondissements au cours du XXe siècle… et encore aujourd'hui !

Nous n'irons pas plus loin sur ce sujet très technique car cela nous demanderait d'approfondir énormément la question et de préciser les fondements des mathématiques utilisés… Cela prouve cependant que les questions soulevées par Zénon sont loin d'être naïves et que la meilleure façon d'y répondre est sans doute celle de Diogène, ce qui n'enlève rien à l'utilité et à la beauté du concept d'infini mathématique précisé par Cantor.



Le volume d'une pizza de rayon *z* et de hauteur *a* est pi × *z* × *z* × *a*.
© *Andrew Moseman, 2016*

Une vision totalement déjantée des paradoxes

Les paradoxes de Zénon ont servi hors des mathématiques et de la philosophie, en psychanalyse, en particulier à Jacques Lacan au XX^e^ siècle. Voici ce qu'il en disait le 21 novembre 1972 dans la séance inaugurale de son séminaire « Encore » : *« Ce que Zénon n'avait pas vu, c'est que la tortue non plus n'est pas préservée de cette fatalité d'Achille ; c'est que comme son pas, le sien à elle, est de plus en plus petit, elle n'arrivera jamais non plus à la limite. Et c'est en ça que se définit un nombre, quel qu'il soit, s'il est réel. Un nombre a une limite, et c'est dans cette mesure qu'il est infini. Achille, c'est bien clair, ne peut que dépasser la tortue, il ne peut pas la rejoindre. Mais il ne la rejoint que dans l'infinitude. »*

Lacan brodait alors sur l'amour entre Achille et sa maîtresse Briséis pour dire que celle-ci ne sera jamais tout à lui (!), comme Achille ne rejoindra jamais complètement la tortue. Derrière ces phrases, on sent bien l'infini imaginé par Lacan, celui d'Euler et des sommes de séries. En l'occurrence, la référence aux mathématiques semble servir de métaphore pour dire que quelque chose désirée (posséder complètement Briséis) peut ne pas être réalisable. Mais est-il besoin de mathématiques pour le savoir ?

De façon générale, Lacan (et bien d'autres…) utilisait les mathématiques comme boîte à outils métaphoriques…

H.L.

Pour en savoir (un peu) plus :

Gödel, Escher, Bach : les brins d'une guirlande éternelle. Douglas Hofstadter, Dunod, 2008.

Soyez fous ! Raymond Smullyan, Dunod, 2007.

Toutes les mathématiques du monde. Hervé Lehning, Flammarion, 2017.

Mathématiques et philosophie. Collectif, Bibliothèque Tangente 38, POLE, 2010.