

Le problème de la séparation de sources

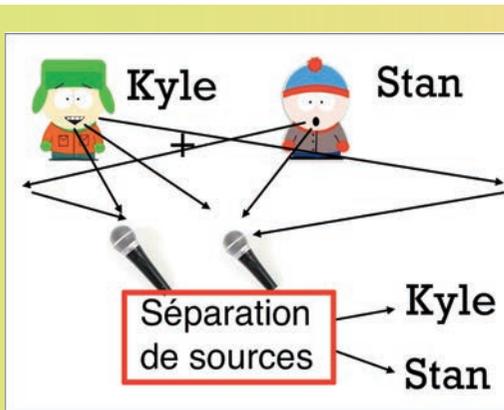
Jean-François Cardoso

Institut d'astrophysique de Paris

Depuis Shannon, on peut dire que, d'une certaine manière, tout langage est signal. Aussi, dans un monde qui tend vers le tout-numérique, il est fondamental d'étudier l'objet signal pour lui-même. On peut par exemple se focaliser sur le bruit ambiant: comment retrouver une information noyée dans un brouhaha ?

Cacophonie: refusons les mélanges, séparons les sources!

Vous êtes invité(e) à un cocktail. La pièce est bondée, plusieurs personnes parlent en même temps. Pouvez-vous suivre les différentes conversations simultanées à l'aide de vos deux oreilles et de votre cerveau? Pourriez-vous y parvenir à l'aide de plusieurs microphones nourrissant un programme de traitement des signaux, un programme de séparation de sources ?



Séparation de sources audio : deux microphones captent deux voix. Chacun perçoit un mélange différent. L'art de la séparation de sources consiste à retrouver les voix individuelles à partir des mélanges reçus.

© JFC

C'est tout le problème de la *séparation de sources* : si l'on observe une scène à l'aide de plusieurs capteurs, microphones, détecteurs... qui reçoivent chacun une superposition de signaux émis par différentes sources, comment extraire ces sources des différents mélanges mesurés par chacun des capteurs ? On retrouve cette problématique dans le domaine audio (séparer les voix de différents locuteurs, isoler les différents instruments d'un orchestre...), dans les télécommunications (une station de base du GSM peut communiquer avec plus de mobiles si elle est équipée d'un réseau d'antennes permettant la séparation de sources), en imagerie satellitaire (l'observation du sol par un satellite à différentes longueurs d'onde permet de séparer les composantes de l'image : types de sol ou de végétation), en biomédical (des électrodes d'électro-encéphalographie placés sur un crâne reçoivent les signaux desquels on peut extraire – séparer – différentes activités cérébrales)...

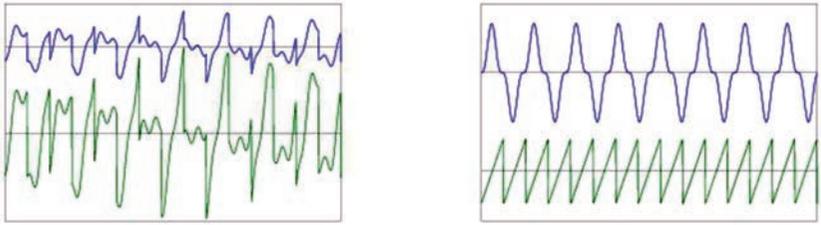
Chaque fois que plusieurs capteurs «écoutent» ou «observent» une superposition de plusieurs sources, la diversité offerte par les différents points de vue des capteurs peut permettre, par le traitement conjoint de leurs signaux, d'extraire les signaux sources. Quand cela est-il possible ? Eh bien, ça dépend. Dans certaines conditions, c'est possible, et il y a même mille façons de procéder, selon ce que l'on connaît des sources émettrices et des mélanges observés. Un cas simple est celui du mélange en proportions connues. Une situation étonnante est celle du mélange inconnu (problème «aveugle»).

Retrouver les ingrédients quand on connaît le mélange : facile

Le cas le plus simple de séparation de composantes est celui où l'on observe des mélanges de signaux dans des proportions connues. Considérons le problème le plus simple qui soit : deux mélanges différents de deux signaux. À gauche sur le schéma figurent $x_1(t)$ et $x_2(t)$, obtenus en mélangeant deux sources $s_1(t)$ et $s_2(t)$ avec des poids différents. On a choisi $x_1(t) = s_1(t) + s_2(t)$ et $x_2(t) = 2s_1(t) + 3s_2(t)$. Puisque l'on connaît la composition des ingrédients, il est facile d'inverser ces mélanges : on retrouve les sources par $s_1(t) = 3x_1(t) - x_2(t)$ et $s_2(t) = x_2(t) - 2x_1(t)$. Ce sont de simples signaux périodiques, de formes et de fréquences différentes.

Un mélange simple avec des coefficients connus s'inverse donc facilement. En situation réelle, cependant, la tâche s'avère souvent plus ardue : problèmes de très grande taille (avec des milliers de mélanges observés), observations entachées de bruit fort, mélanges observés en nombre plus faible que les sources émettrices, mélanges mal conditionnés

(par exemple lorsque les coefficients de mélange de deux sources sont presque proportionnels)... Les obstacles sont légions! Le domaine des *problèmes inverses* traite de ces cas difficiles.



À gauche, deux signaux, d'aspect un peu maladif. Ce sont des mélanges de signaux plus simples, $s_1(t)$ et $s_2(t)$, à droite.

© JFC

Maintenant, revenons à des mélanges faciles mais... inconnus. Comment les inverser? Si le mélange est partiellement connu, on peut s'en sortir. Prenons ainsi des données réelles, les images du ciel obtenues par le satellite Planck de l'Agence spatiale européenne. Cette mission spatiale a fourni des cartes du ciel «micro-ondes». Les figures qui suivent montrent le ciel vu par Planck à 143 GHz (longueur d'onde de 2 mm) et à 353 GHz (longueur d'onde de 0,85 mm). Dans ces deux cartes, la traînée rouge répartie le long de l'équateur est essentiellement due à l'émission thermique de «poussières», résidus de l'explosion de supernovae dans notre galaxie. Dans la carte à 143 GHz, on observe aussi aux pôles Nord et Sud de faibles fluctuations, qui forment un fonds grumeleux. Il s'agit du *fonds de rayonnement cosmologique*, aussi connu comme le *rayonnement fossile*, car ce fonds est comme une photographie de notre univers lorsqu'il était encore très jeune (trois cent quatre-vingt mille ans après le Big Bang): la lumière émise à ce moment de l'évolution cosmique a voyagé, quasiment intouchée, près de quatorze milliards d'années pour parvenir jusqu'à nous.

Obtenir une carte du rayonnement fossile était l'objectif principal de la mission Planck. Mais il s'agit bien d'un fonds: à cet arrière-plan de rayonnement se superposent de nombreuses autres émissions astrophysiques, dont en particulier l'émission de poussière (très visible sur la figure). La carte du rayonnement fossile livrée par la collaboration Planck a été obtenue en combinant les observations du satellite dans ses neuf canaux de fréquence, étagés de 30 GHz à 857 GHz. De manière très simplifiée, la carte à 143 GHz a été «nettoyée» par celle à 353 GHz. Supposons que cette dernière ne contienne que des émissions de poussières galactiques

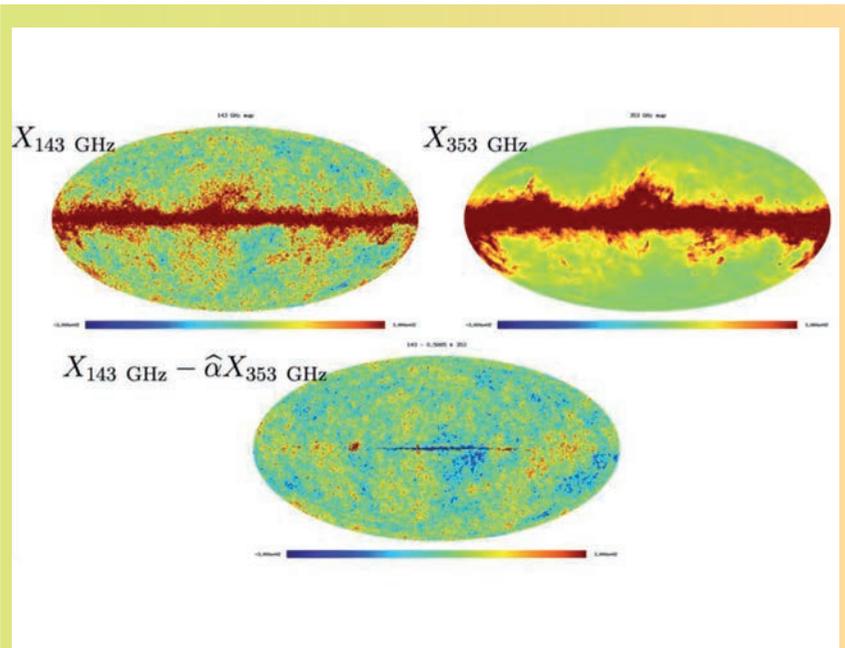
et que la carte à 143 GHz ne contienne que le rayonnement fossile entaché d'une certaine quantité de poussière. Autrement dit, postulons que

$$X_{143} = \text{fossile} + \alpha \times \text{poussière} \text{ et } X_{353} = \text{poussière}.$$

Voici un mélange particulièrement facile à inverser :

$$\text{fossile} = X_{143} - \alpha \times X_{353}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver le bon « coefficient de nettoyage » α . On peut y parvenir en ne s'appuyant que sur notre (simplissime) modèle de mélange et sur les données elles-mêmes, grâce aux statistiques. En effet, le rayonnement fossile n'est pas corrélé avec l'émission de poussière, ces deux phénomènes n'ayant aucun lien de causalité. On peut alors trouver α comme le seul nombre tel que $X_{143} - \alpha \times X_{353}$ soit non corrélé avec X_{353} . C'est très facile à résoudre pour un statisticien : l'affaire est dans le sac ! La figure du bas montre le résultat : toute la contamination galactique semble avoir disparu dans la carte nettoyée, à l'exception de quelques traces au voisinage du plan galactique.

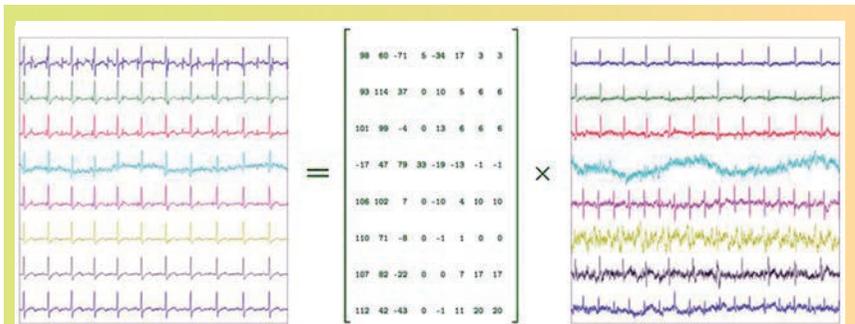


Le ciel observé par Planck à 143 GHz et à 353 GHz (en haut). Soustraire à la première carte la « bonne » fraction de la deuxième opère un nettoyage rudimentaire mais spectaculaire, laissant apparaître le rayonnement fossile sur presque tout le ciel (en bas).

© CNES

L'importance de la notion probabiliste d'indépendance

Le problème remarquable résiduel est la séparation de sources *en aveugle*, c'est-à-dire sans rien connaître *a priori* des coefficients de mélange. Prenons un exemple de traitement de signaux biomédicaux. La figure qui suit montre (à gauche) les signaux issus de huit électrodes ECG (électrocardiographie) placées sur l'abdomen et le thorax d'une femme enceinte. Sur ces données ECG, un algorithme de séparation aveugle obtient des résultats (partie droite de la figure) excellents et faciles à valider: les rythmes cardiaques de la mère et du fœtus, différents, fournissent une signature évidente du succès de la procédure. L'algorithme isole correctement une source de basse fréquence qui est un signal de respiration.



À gauche: on voit clairement les battements du coeur maternel mais on distingue à peine, sur les trois premiers canaux, ceux du fœtus. À droite: la séparation de sources permet d'extraire la contribution maternelle (sources 1, 2, 3 et 7), la contribution du fœtus (sources 5 et 8) et un signal de respiration (source 4). On explique les huit signaux ECG par ces sources sous-jacentes, mélangées avec les coefficients donnés dans le tableau.

© JFC

La séparation en aveugle n'est possible que si les signaux sources sont statistiquement indépendants: c'est précisément l'exploitation de cette propriété d'indépendance qui permet de restaurer sans ambiguïté les sources à partir de l'observation de leurs mélanges.

Le raisonnement est le suivant: si les sources sont mutuellement indépendantes, leurs mélanges, eux, ne le sont généralement pas car deux mélanges particuliers contiennent chacun (en général) des contributions de chaque source. Ainsi, mélanger des sources indépendantes produit des signaux dépendants.

Supposons alors que l'on puisse trouver des combinaisons de signaux capteurs avec des coefficients tels que ces nouvelles combinaisons soient mutuellement indépendantes. Ne faut-il pas alors en conclure que ces nouvelles combinaisons ne peuvent être que les signaux sources originaux ?

Ou encore : si mélanger détruit l'indépendance, alors restaurer l'indépendance n'est-il pas équivalent à «dé-mélanger»? Sous certaines conditions techniques, la réponse est positive.

C'est un principe général pour réussir en aveugle la séparation de sources indépendantes : un algorithme de séparation aveugle cherche (et trouve) les coefficients des mélanges tels que les sources correspondantes soient « les plus indépendantes possible les unes des autres ». C'est le choix (délicat) de la façon de mesurer et de maximiser l'indépendance statistique qui différencie les différentes méthodes de séparation aveugle, mais toutes reposent sur ce critère statistique, exprimé d'une façon ou d'une autre.

Un vrai problème d'ingénierie qui fait appel aux mathématiques

Le traitement des signaux multi-capteurs offre ainsi de belles perspectives aux mathématiques ! Les signaux sont souvent, comme ici avec les images astronomiques et les signaux biomédicaux, issus d'une problématique concrète. On souhaite alors pouvoir décomposer des observations en sources élémentaires, en construisant des modèles de mélange plus sophistiqués. Songez-y lorsque vous essaierez de suivre une conversation lors d'une soirée, dans le métro parisien ou pendant un concert...

Dans la grande majorité des applications audio, le lien entre une source et un capteur ne peut pas être décrit par un simple coefficient : il doit exprimer tout le phénomène de propagation de l'une à l'autre, sur une large plage de fréquences. La séparation de sources devient alors un vrai problème d'ingénierie !

J.-F. C.