

Grâce à la modélisation, les mathématiques sont le langage de la nature

Gilbert Rogé

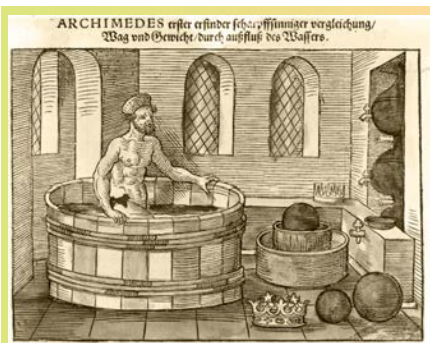
*Ingénieur de recherche à Dassault Aviation,
habilité à diriger les recherches
(HDR de l'université Pierre et Marie Curie)*

De même que le passage de la Préhistoire à l'histoire contemporaine est marqué par le début de la transmission écrite, il y a une physique d'avant et d'après l'apport des mathématiques.

La physique a trouvé son outil : les mathématiques

Un phénomène physique peut se décrire à l'aide des mots du langage courant, mais dès que l'on désire quantifier, les mathématiques deviennent incontournables. L'équation (ou le modèle) est alors une traduction d'une loi de la nature en termes mathématiques. C'est un concept qui a les caractéristiques du phénomène naturel que l'on cherche à étudier. C'est une abstraction qui n'«existe» pas, mais qui est «suffisamment proche» de la réalité observée pour qu'on la considère comme représentant du mécanisme que l'on cherche à caractériser. Un modèle absolu n'existe pas : il peut être adapté à l'étude d'un phénomène, mais ne pas convenir

pour un autre. Le physicien tente ainsi d'expliquer la nature en cherchant à découvrir les lois cachées qui régissent les phénomènes observables et reproductibles. «Eureka!» C'est ce qu'aurait crié Archimède, nu au milieu de la rue, après être sorti précipitamment du bain public pour laisser éclater sa joie («J'ai trouvé!»). Il venait de découvrir comment résoudre le problème que son parent Hiéron II le Jeune, tyran de Syracuse, lui avait soumis.



**Archimède
(vers -287, -212).**

© Archives Larbor, photograph collection

Le roi voulait savoir si la couronne qu'il s'était fait confectionner était totalement en or ou si l'artisan y avait mis de l'argent. Laissons Archimède nous énoncer sa découverte (*Traité des corps flottants*): « *Un solide plus léger que le liquide dans lequel on l'abandonne s'y enfonce de telle façon qu'un volume de liquide égal à la partie immergée ait le même poids que le solide entier.* »

Les mathématiques permettent de calculer la poussée d'Archimède en utilisant la formule $P = Mg$, où M est la masse du fluide contenu dans le volume V déplacé et g la valeur du champ de pesanteur. La masse volumique de l'argent étant environ deux fois moindre que celle de l'or, Archimède démontra ainsi que l'orfèvre avait réalisé la majeure partie de la couronne en argent.

Plus de deux mille ans plus tard, Albert Einstein écrit ce qui deviendra sa plus célèbre équation: « *Si un corps perd une énergie E sous forme de rayonnement, sa masse m diminue de E/c^2 .* » Ce faisant, il exprime par une formule mathématique simple, $E = mc^2$, une vision physique révolutionnaire. Il nous dit (même si d'autres auteurs sont associés à cette formule: Olinto De Pretto, Henri Poincaré, Max Planck, Hendrik Lorentz...) que non seulement la masse diminue, mais que de plus on peut la quantifier, puisque la vitesse de la lumière c est une constante connue (environ 300 000 km/s).

Entre Archimède et Einstein vécut un génie protéiforme tour à tour dessinateur hors pair, ingénieur inventif et savant doué d'un sens de l'observation aigu: Léonard de Vinci (1452–1519). Il nous a laissé des dessins schématisant des écoulements de fluides (on y trouve une représentation du type lignes de courant, ce qui est toujours d'actualité et permet de comprendre l'écoulement), grâce auxquels il donne une description fidèle de la nature: « *Où la turbulence de l'eau se crée. Où la turbulence de l'eau se maintient plus longtemps. Où la turbulence de l'eau retourne au repos.* » Il cherche à travers ses représentations épurées



Écoulement dans une fontaine.

© Windsor Castle, Royal Library, RL 12660v



**Écoulement turbulent
(tourbillons désordonnés).**

© Institut de France,

Manuscrit I, 12r (gauche) et Manuscrit F, 73v (droite)

et précises à trouver des lois de la nature. Le premier, il a conscience que la mécanique des fluides régit à la fois l'eau et l'air.

Les redoutables équations de la mécanique des fluides

Les pères fondateurs de l'actuelle modélisation en mécanique des fluides ont cependant dû attendre le XVII^e siècle pour que soient forgés, grâce notamment à Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz, les outils mathématiques (calcul infinitésimal...) qui leur permettront d'écrire les équations aux dérivées partielles portant maintenant leurs noms : Euler, Navier–Stokes.

Les *équations d'Euler* (savant suisse, 1707–1783) sont des équations de conservation. Elles sont le reflet d'un principe physique qui affirme que ce qui rentre par une face d'un petit morceau du domaine fluide doit ressortir par une autre face. Les quantités conservées sont la masse volumique, la quantité de mouvement et l'énergie totale. Les équations expriment le bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie.

Mais le *paradoxe de D'Alembert* (savant français, 1717–1783) mettant en défaut les équations d'Euler (réversibilité permise du mouvement du fluide, alors qu'une irréversibilité est constatée), des termes représentant la perte d'énergie due au frottement seront ajoutés pour obtenir les célèbres *équations de Navier–Stokes* (du nom de Henri Navier, physicien français, 1785–1836, et George Gabriel Stokes, savant britannique, 1819–1903). La modélisation utilisée de manière courante actuellement est du type Navier–Stokes avec une turbulence moyennée (voir la brochure *Maths Société Express*, CIJM, 2016). C'est le mathématicien russe Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903–1987) qui, par une vision statistique, a le premier avancé une description théorique de la turbulence. La « cascade d'énergie » qu'il propose consiste en un transfert sans dissipation de l'énergie acquise par l'écoulement au niveau des plus grands tourbillons à des tourbillons de plus en plus petits. Dans les plus petits tourbillons, on a alors une dissipation par viscosité. Cette seconde modélisation est nécessaire actuellement car la résolution des équations de Navier–Stokes pour un avion complet en vol ne sera pas possible avant plusieurs années (voir plus loin).

Des tourbillons de rivières à l'aérodynamisme des avions

Quel est le l'objectif d'un avionneur ? Le concepteur d'avions cherche à répondre à un cahier des charges dans lequel figurent des contraintes et des objectifs techniques et financiers : maximiser la distance franchissable, augmenter la vitesse, réduire la consommation de carburant... C'est un problème d'optimisation multidisciplinaire. Pour simuler la réalité, il

faut en outre prendre en compte dans les modèles les incertitudes sur la forme, l'aérodistorion (les interactions fluide-structure) et d'autres facteurs qui rendraient inutile une résolution trop précise d'un problème qui, autrement, ne serait pas le bon.



**Marcel Dassault
(1892–1986).**

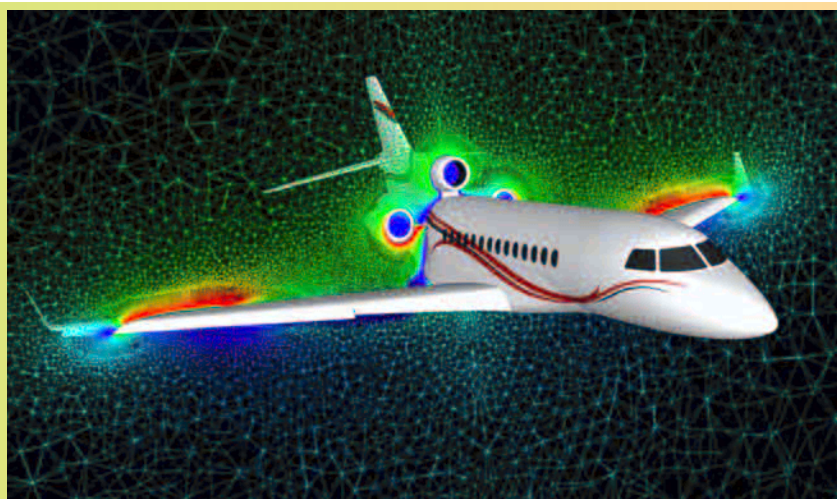
© Dassault Aviation

Les ingénieurs aérodynamiciens du début du XX^e siècle utilisaient des modélisations adaptées aux phénomènes de la nature et aux performances des avions qui allaient transporter les pionniers de l'aéropostale et permettre les premières traversées des mers et des océans.

Les ingénieurs actuels simulent l'écoulement de l'air sur un avion complet en vol de croisière en une dizaine de minutes à l'aide de supercalculateurs.

Aujourd'hui, la simulation numérique consiste en effet à résoudre, souvent au moyen de

puissants ordinateurs, une grande quantité d'équations résultant d'une modélisation physique suivie d'une discrétisation du domaine spatial et temporel considéré.



Avion d'affaires Falcon immergé dans un maillage spatial formé de tétraèdres.

© Dassault Aviation

Le domaine de calcul de l'écoulement est l'espace situé autour de l'avion. Sur ce domaine, on considère alors les équations de Navier–Stokes. Malheureusement, ce domaine est non borné. On commence donc par considérer une boule centrée sur l'avion et de diamètre quelques kilomètres. Cette approximation est suffisante car la perturbation créée par l'avion devient négligeable au voisinage de la sphère formant la frontière de la boule. L'espace situé entre la surface externe de l'avion et la sphère est alors découpé en quelques millions de petits éléments (un *maillage*). Pour fixer les idées, considérons que ces petits éléments sont des tétraèdres (pyramides à base triangulaire). Considérons également que l'approximation utilisée nécessite de connaître uniquement la valeur de nos variables (densité volumique, quantité de mouvement, énergie totale) en les sommets de ces tétraèdres. Nous aurons alors à résoudre un système de $5N$ équations non linéaires à $5N$ inconnues, où N est le nombre total de sommets du maillage de l'espace en tétraèdres.



Une nécessaire interaction entre modèle et expérimentation

Le résultat obtenu à l'issue d'une simulation est entaché d'erreurs liées à la résolution numérique (convergence de méthode itérative, représentation des nombres avec une précision finie...), à la discrétisation (en gros, le nombre de sommets du maillage), aux conditions aux limites, mais également à la modélisation choisie. Résoudre les équations de Navier–Stokes autour d'un avion en vol sans hypothèse de turbulence moyennée n'est pas envisagé avant 2030. En effet, le nombre d'équations à résoudre est alors de l'ordre de cent mille milliards (à comparer à cent millions actuellement)...

Pour valider les codes de calcul, censés simuler un phénomène physique, on confronte leur résultat à l'expérimentation. Un cas test représentatif, accessible à la réalisation en laboratoire, sert de support de validation.



Essais en soufflerie.

© Onera

(Office national de recherche en aéronautique)



Essai en vol.

© Dassault Aviation

On compare alors certaines quantités accessibles à la fois par l'approche virtuelle et l'approche réelle. La réalisation expérimentale est elle-même soumise à des incertitudes, comme la précision des appareils de mesure (balance pour réaliser des pesées...). En outre, les mesures réalisées pendant des vols d'essai dédiés à la validation des modèles virtuels sont également soumises à des incertitudes (capteurs de pression embarqués, météo...). La forme d'un nouvel avion résulte en pratique d'allers-retours entre la simulation numérique et les essais en soufflerie.

Interpréter le langage et construire les modèles de demain

Selon Pythagore, tout est nombre. Pour Galilée, « *le livre de la nature est écrit en langage mathématique* ». Eugene Wigner s'est émerveillé devant la « *déraisonnable efficacité des mathématiques* ». Son contemporain le physicien allemand Werner Heisenberg (1901–1976) a écrit : « *Les atomes ou les particules élémentaires ne sont pas réels ; ils forment un monde de potentialités ou de possibilités plutôt qu'un monde de choses et de faits.* » Le formalisme mathématique abstrait décrit très bien certains aspects de la mécanique quantique. Il permet de faire des prédictions qui peuvent être vérifiées expérimentalement avec une très grande précision. Mais les physiciens s'affrontent encore sur la description de la réalité que permet la mécanique quantique. Le paradoxe est que, dans ce cas, l'outil mathématique (équation de Schrödinger en tête) permet de quantifier très précisément les phénomènes étudiés, alors même que la description de la réalité physique est controversée. Ici la problématique n'est pas de savoir si le modèle est adapté à la réalité, mais comment interpréter physiquement le modèle... Si les mathématiques sont le langage de la nature, ce sont bien les physiciens qui en sont les interprètes. Un grand défi pour les mathématiciens est de réussir à forger les outils qui permettront de construire les modèles de demain.

G.R.