Des mots du quotidien aux concepts mathématiques

Emmanuel Sander

Professeur à l'Université Paris 8
Responsable de l'équipe Compréhension, raisonnement et acquisition de connaissances (CRAC)

En mathématiques, il existe des formules qu'un béotien serait bien en peine de décoder, qui font la joie des caricaturistes pour montrer que les mathématiciens vivent dans un univers abscons. Dans leurs versions les plus impénétrables, s'y mêlent du calcul intégral, des signes de sommations indicées, des dérivations partielles, des fonctions sinus, cosinus, exponentielle, logarithmique, quelques lettres grecques mathématiquement connotées, telles que $\pi, \Delta, \mu, \alpha, \theta, \omega$, des quantificateurs logiques comme $\exists$ ou $\forall$. Ces formules sont là pour dire au non-mathématicien qu'il existe un univers qui lui est étranger où tout est enchaînement de formules régies par des règles codifiées dans un monde parallèle à celui des concepts de la langue parlée, qui eux résistent à toute tentative d'une telle formalisation. Ainsi prend corps la vision d'un monde mathématique clos réservé aux privilégiés qui en ont les clés, indépendant des langues naturelles humaines, extérieur à elles, étanche à elle, et de ce fait transculturel, intemporel, universel.

Une page extraite du fameux « carnet perdu » du célèbre mathématicien indien Srinivasa Ramanujan.

La hantise d’une contradiction nichée dans l’édifice mathématique

Certes, les mathématiciens utilisent leur langue pour parler de notions traduisibles en formules absconses. Toutefois, si l’on suit la vision précédente, ce serait par nécessité communicative, car les concepts ont bien besoin de mots pour les désigner, et ce en respectant la loi de l’arbitraire du signe chère à une certaine tradition linguistique selon laquelle les « chiens » pourraient tout aussi bien s’être appelés « chats » et réciproquement. Autrement dit, même si le langage s’en mêle, les termes mathématiques seraient des labels verbaux arbitraires évoquant des idées mathématiques traduisibles en formules d’autant plus absconses que le niveau du mathématicien s’élève.

Or selon nous*, cette vision est un mythe. Elle n’est pas un mythe scientifique au sens où il existe des formalismes mathématiques où les objets mathématiques sont caractérisés par des propriétés et suivent des lois inscrites dans des théorèmes, l’ensemble étant régi par des lois logiques afin que l’édifice dans son entier soit une forteresse scientifique jamais prenable en défaut, car une contradiction nichée quelque part mettrait potentiellement en péril la construction toute entière. En revanche, il s’agit d’un mythe psychologique, qui ignore que les concepts mathématiques se développent dans des têtes humaines, débutantes comme de mathématiciens aguerris.

En effet, un être humain fait évoluer sa pensée en faisant évoluer ses concepts. Et aucun concept n’arrive tout constitué ; il se développe dynamiquement dans l’esprit d’une personne en fonction de ses expériences antérieures, appréhendées elles-mêmes en fonction des concepts dans leur état antérieur. Cela repose sur un mécanisme psychologique d’analogie cherchant à apparier ce qui survient à l’instant et ce qui est survenu par le passé, ce mécanisme adaptatif permettant de capitaliser sur l’expérience.

Ainsi, si lors d’un voyage exotique on se trouve face à face avec un animal qui ressemble furieusement à un lion va-t-on prendre ses jambes à son cou car l’analogie avec le lion est suffisamment forte pour nous faire craindre pour notre vie. La vie étant si pleine de nouveautés et de surprises – toute situation rencontrée comporte sa part de nouveauté – seule l’analogie avec le connu, et non l’identité, permet d’aborder l’inconnu. Ce phénomène analogique est tellement indispensable à nos existences, tellement consubstantiel à nos états de créatures mues par un instant de survie nourri par la capitalisation de l’expérience, qu’il est irrépressible.

* *Ces idées, développées dans l’ouvrage* l’Analogie, cœur de la pensée *(Odile Jacob, 2013), sont largement redevables de notre travail commun avec Douglas Hofstadter.*

Seule l'analogie avec le connu permet d'aborder l'inconnu

Il s'ensuit que dans un cerveau humain, une notion mathématique ne peut pas se greffer dans son format mathématique le plus pur. Elle est abordée par un individu par le biais de concepts préalablement construits. Les concepts mathématiques naissent dans des esprits humains, par analogie avec des concepts non mathématiques, ce qui laisse penser que même si le monde mathématique a une certaine existence platonicienne, il n'en est pas moins lié au monde non mathématique, qu'il s'agisse du monde matériel ou de celui des idées.

Si les phénomènes d'analogie et de porosité sémantique entre concepts quotidiens et notions mathématiques n'existaient pas, on ne comprendrait d'ailleurs pas pourquoi il n'est pas fait exclusivement usage en mathématiques de termes purement techniques propres à la discipline, afin d'éviter tout quiproquo et toute contamination du sens scientifique par le sens commun. En effet, lorsque l'on parle de concepts, le langage affleure. L'usage d'un mot d'une langue oriente vers un concept associé à ce mot et cette orientation n'est pas anodine car elle institue une première interprétation. Or de nombreuses notions mathématiques élémentaires sont désignées par des mots de la langue commune ; par exemple « addition », « soustraction », « multiplication », « division », « somme », « différence », « rapport », « produit », « égalité », « fraction », « droite », « figure », « point », « élément », « ensemble », « union », « intersection », « plan », « coordonnées », « surface », « implique », « équivaut », « et », « ou », « espace » *etc.* réfèrent tous à des mots pour lesquels des entrées existent dans les dictionnaires avec des significations non mathématiques.


SOUS-TIROT. s. m. Anc. mar. Petit bateau dont il est fait mention dans l'ordonnance du sel.

SOUSTRACTIF, IVE. adj. Minér. Se dit d'une variété dans laquelle un des exposants est moindre d'une unité que la somme des autres.

SOUSTRACTION. s. f. (pr. *çou-strak-ci-on*). Action de soustraire. Soustraction de papiers et d'effets. Être accusé de soustraction d'effets. Il fut convaincu de soustraction de papiers, de soustraction frauduleuse. Les *soustractions* commises au préjudice des conjoints parents, ascendants ou descendants, ne donnent lieu, en général, qu'à des réparations civiles ; mais le Code pénal prononce des peines dans ces cas contre les recéleurs d'objets soustraits. (Chabr. Cham.) La loi prononce certaines peines contre les *soustractions* commises par les fonctionnaires, par les dépositaires, les comptables ou par les particuliers dans les dépôts publics. (Id.)

— Arithm. Opération qui a pour but, étant donnée la somme de deux nombres et l'un de ces nombres, de trouver l'autre nombre. Le résultat de la soustraction se nomme *reste*, *excès* ou *différence*. Faire une soustraction. Faites la soustraction.

— On voit, par la définition que nous avons donnée, que la soustraction est l'inverse de l'addition. Il en résulte que le procédé opératoire doit être pour la soustraction tout l'opposé de celui qu'on emploie dans l'addition. En effet, considérant l'un des nombres donné comme la somme de l'autre nombre donné et du nombre que l'on cherche, c'est-à-dire comme formé de la combinaison de leurs différentes parties, unités, dizaines, centaines, etc., il suit que si l'on retranche successivement les unités, les dizaines, etc., du plus petit nombre donné de celles du plus grand, il devra naturellement rester celles du nombre cherché. La soustraction, selon qu'elle a lieu sur des nombres entiers ou sur des nombres complexes, se divise en simple et en complexe.

— *Soustraction simple.* Celle qui a lieu sur des nombres entiers et même sur des nombres

Début de la définition du mot *soustraction* (dictionnaire Bescherelle,1861).

© Patrick Arrivetz

Cette collusion terminologique entre vocabulaire quotidien et vocabulaire mathématique est loin de se restreindre aux notions les plus triviales : « vecteur », « fonction », « norme », « distance », « ordre », « continu », « dérivé », « intégral », « degré », « dimension », « convergence », « suite », « série », « fini », « infini », « groupe », « anneau », « corps », « adhérence », « intérieur », « densité », « complexe », « imaginaire », *etc.*

Cette relation entre langage et mathématique n'est pas anodine car le choix du mot a des répercussions directes, marquées et robustes sur la manière de concevoir la notion mathématique, et pas simplement pour un débutant.

Aller au-delà des conceptions véhiculées par le langage courant

Que vous soyez élève d'école primaire, professeur des écoles, étudiants à l'université ou en classe préparatoire scientifique, si l'on vous donne pour consigne d'« inventer un problème de soustraction qui se résout par l'opération 8 – 3 = 5 », dans la très grande majorité des cas, l'énoncé que vous proposerez aura la forme suivante : « Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith...) a 8 bonbons (billes, gâteaux, pommes...). Il/Elle en donne (perd, mange...) 3 à sa sœur (pendant la récréation...). Combien lui en reste-t- il ? » Autrement dit, un individu disposera d'une quantité de 8, puis un certain évènement surviendra qui la diminuera de 3, et la question portera sur la recherche d'un reste. Il est très rare de trouver l'énoncé « Pierre avait 3 billes. Il en gagne à la récréation et ensuite il en a 8. Combien en a-t-il gagnées ? », ou « Paul a 8 billes. Pierre a 3 billes. Combien Paul a-t-il de billes de plus que Pierre ? », bien que la même opération de soustraction 8 – 3 = 5 s'applique tout autant.

Trésor de billes.

© Patrick Arrivetz

Ce phénomène tient au langage : parmi les synonymes de « soustraire », on trouve « enlever, ôter, retrancher, retirer », qui orientent vers l'idée d'une diminution, pourtant moins à même de couvrir les scénarios de soustraction susceptibles d'être rencontrés par les élèves que celles d'écart ou de différence. De même, il est contre-intuitif, et difficile pour un élève de début d'école primaire, de trouver que l'énoncé « Paul avait des billes avant la récréation. Il en perd 3. Maintenant il lui en reste 5. Combien Paul avait-il de billes avant la récréation ? » se résout par une addition, car ce scénario de perte semble contradictoire avec l'addition vue comme une opération d'ajout.

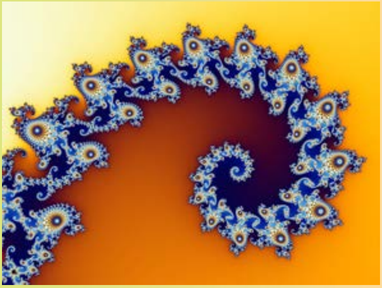
L'idée que la multiplication rend plus grand, dont découle la difficulté d'inventer un problème de multiplication pour lequel on a moins à la fin qu'au début, ou celle que la division rend plus petit, dont découle la difficulté d'inventer un problème de division pour lequel on a plus à la fin qu'au début, tiennent aussi aux significations extra mathématiques de ces termes. Ainsi, les trois quarts d'adultes étudiants en licence en sciences humaines échouent à construire un problème de division dans lequel le résultat est supérieur à la valeur initiale. Cela tient au fait que la division est conçue comme une opération de partage, exprimée dans des définitions comme « séparer quelque chose, le partager en plusieurs parties égales ou non », et par des synonymes tels que « partager, séparer, fragmenter, disjoindre, fractionner, découper, dissocier, scinder », qui orientent vers l'idée d'un tout scindé en parties ; cela exclut la possibilité d'une division qui rende plus grand. En revanche, la conception quotitive selon laquelle diviser A par B c'est chercher combien de fois on peut mettre B dans A demande d'aller au-delà de la conception véhiculée par le langage, mais permet de concevoir aisément des scénarios de divisions qui accroissent (« Dans 2 mètres de tissus combien puis-je découper de bandelettes de 0,15 m ? »).

Nous avons suggéré que si le choix conventionnel du terme pour désigner cette opération était plutôt « mesurage », la possibilité d'accroissement semblerait bien plus évidente dans la mesure où il suffirait d'envisager une unité de mesure inférieure à l'unité pour obtenir un résultat supérieur à la valeur initiale.

Psychologie des notions mathématiques

Les mathématiciens ne sont pas à l'abri de l'influence des conceptions véhiculées par la langue. Prenons le cas de la notion de continuité. Le continu se définit comme « ce qui n'est pas interrompu », d'où l'idée de courbes que l'on peut tracer sans lever le stylo. Selon cette conception de la continuité, la possibilité d'une fonction qui soit partout continue mais dérivable nulle part paraît absurde car on imagine que si l'on zoome sur le tracé de la fonction on devrait trouver la possibilité de tangentes à la courbe hors de rares points de cassure. D'ailleurs Adrien-Marie Ampère (1775–1836) pensait avoir démontré cela et ce n'est que tardivement que Bernard Bolzano, Bernhard Riemann ou Karl Weierstrass exhibèrent des fonctions continues partout et dérivables presque nulle part, non sans susciter des réactions vives qui montrent que l'axiomatique coexiste avec des idées beaucoup plus proches de celles véhiculées par la langue. Ainsi Charles Hermite de déclarer : *« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées »*, et Henri Poincaré de renchérir : *« La logique parfois engendre des monstres. On vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. [...] de la continuité, mais pas de dérivées [...], on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos* *pères, et on n'en tirera jamais que cela.»* Pourtant ces fonctions sont denses dans l'ensemble des fonctions continues et elles sont maintenant parfaitement intégrées aux mathématiques, notamment à travers les objets fractals.

Ainsi, sans aborder la question très distincte de savoir si la pensée mathématique est de nature différente de la pensée non mathématique, qui ébaucherait le débat d'une possible différence de nature entre une pensée littéraire et une pensée scientifique, nous espérons avoir montré que la nature psychologique des concepts conduit à ce que les mots de la langue influencent la façon dont les notions mathématiques sont découvertes par les élèves puis continuent d'être pensées y compris après enseignement. La langue ouvre vers les concepts et les concepts permettent la pensée. C'est une nécessité que les notions mathématiques se fondent sur des concepts communs, vers lesquels les mots de la langue commune les orientent, car sans ces analogies, même imparfaites, trompeuses et approximatives, nul espoir que les germes n'aient jamais été plantés pour permettre l'émergence des déclinaisons formelles de ces notions; et même lorsque celles-ci existent, cela ne déconnecte pas le mathématicien de ses tendances analogistes et sémanticiennes mais lui donne des appuis plus solides pour aller au-delà des sens véhiculées par la langue commune, peut-être sans jamais totalement s'en extraire, pour certes être parfois piégé, mais parfois aussi pour y puiser des inspirations créatives.



Les fractales illustrent la notion contre-intuituve de courbes partout continues mais dérivables en aucun point.

E.S.

Pour en savoir (un peu) plus:

L'analogie: cœur de la pensée (chapitres 7 et 8). Douglas Hofstadter et Emmanuel Sander, Odile Jacob, 2013.

Les connaissances naïves en mathématiques. Emmanuel Sander, in *les Connaissances naïves*, Jacques Lautrey, Sylvianne Rémi-Giraud, Emmanuel Sander et Andrée Tiberghien (direction), Armand Colin, 2008.

Les mystérieux carnets de Ramanujan enfin décryptés ! Édouard Thomas, in *Maths Société Express*, CIJM, 2016.