L’Oumupo, entre musique et mathématiques

Moreno Andreatta, Martin Granger, Tom Johnson, Valentin Villenave

Chercheurs, musiciens, compositeurs, membres de l’Oumupo

Et si la musique n’était, au fond, qu’une façon accessible, ludique et expressive, de faire des mathématiques ? Telle est l’une des pistes que proposent d’explorer les musiciens et théoriciens du collectif Oumupo (Ouvroir de musique potentielle).

En 1960, François Le Lionnais et Raymond Queneau fondent un collectif entièrement tourné vers le renouveau des formes littéraires : ce sera l’Oulipo (Ouvroir de littérature potentielle). Il a donné lieu à des œuvres audacieuses et inattendues telles que *Cent mille milliards de poèmes* de Queneau (Gallimard, 1961) ou *la Disparition* de Georges Perec (Gallimard, 1969). Cependant, dès le début, Le Lionnais envisage d’étendre cette démarche à toutes les autres formes d’expression. Il fonde ainsi de nombreux Ou*x*po (Ouvroirs de *x* potentiel) : Oupeinpo pour la peinture, Oumathpo pour les mathématiques, Oucinépo pour le cinéma… De cette époque datent également les premières expériences en matière d’Oumupo : plusieurs collectifs informels coexisteront pendant plusieurs décennies. C’est en 2011 qu’un Ouvroir de musique potentielle se formalise véritablement en tant que tel ; il est encore aujourd’hui en plein développement.

Quand la contrainte libère la créativité et incite à l’originalité

Les Ou*x*po cherchent à inventer des structures et des formes nouvelles. Leurs expériences les conduisent aussi parfois à renouveler le langage lui-même. Par exemple, un écrivain qui s’interdit d’utiliser certaines lettres, ou succession de lettres, est forcé de s’exprimer au sein d’un sous-ensemble restreint de la langue française, d’utiliser des mots et tournures peu courants, qui surprennent et intriguent dans leur *signifiant* (l’apparence extérieure des mots et des phrases), avant même d’accéder au *signifié* (le sens de ce qui est dit).

Dans le cas de l'Oumupo, il s'agit non seulement de réévaluer les langages purement musicaux (harmonie, rythme, mélodie, timbre), mais aussi de chercher des passerelles avec des langages issus d'autres domaines : textes (dans différentes langues), graphismes, géométrie et nombres. La musique est d'ailleurs souvent un excellent moyen de représenter des notions abstraites, d'appréhender des problèmes mathématiques parfois profonds. Réciproquement, les mathématiques sont une source d'inspiration pour concevoir de nouveaux procédés musicaux.

Codage et traduction. La musique est, en elle-même, un langage mathématique ; les nombres y sont omniprésents et s'expriment sous forme :

- de rythmes : cela inclut les durées des notes et des silences, mais aussi le nombre de répétitions d'une note ou d'un groupe de notes, et même la quantité d'évènements par unité structurelle (comme le nombre de notes par mesure) ;
- de hauteurs absolues : les degrés de la gamme diatonique sont couramment numérotés (en chiffres romains) ou désignés par des lettres de l'alphabet ; depuis le XX^{e} siècle, il est même possible de désigner une hauteur par sa fréquence, mesurée en hertz ;
- de hauteurs relatives (on mesure l'intervalle avec une autre hauteur, précédente ou simultanée). En comptant les demi-tons entre deux notes, il est possible d'entrer dans le détail des accords et des harmonies ; le Tonnetz (voir plus loin) constitue à ce titre un autre outil original et intéressant.

La traduction d'un nombre ou d'une opération mathématique en éléments musicaux oblige parfois à se poser la question de la base de numération utilisée. En effet, alors que nous sommes tous habitués à manipuler les nombres en base 10 (décimale), la musique s'organise d'une toute autre façon. Ainsi, les temps et les mesures sont fréquemment comptés en puissances de 2 et, de ce fait, en base 4 (les *carrures* des musiciens) ou 8 (les *huit temps* des danseurs et danseuses). Par ailleurs, le choix de l'échelle de hauteurs peut obliger à compter en base 7 (pour la gamme diatonique, c'est-à-dire les touches blanches du clavier), en base 5 (les gammes pentatoniques orientales), en base 12 (la gamme chromatique, connue depuis les pythagoriciens)… Des subterfuges permettent malgré tout d'utiliser la base 10 : par exemple en partant d'une série de douze notes dans laquelle deux notes resteront fixes.

Combinatoire, géométrie… toutes les mathématiques mobilisées !

Transformations mélodiques. Des formes telles que le canon existent depuis des siècles ; des compositeurs tels que Jean-Sébastien Bach ont même prouvé qu'une même mélodie, jouée simultanément à des tempos différents, pouvait servir de contrepoint à elle-même. Il est donc possible d'explorer de nouvelles structures mélodiques et polyphoniques. Ainsi, les mélodies *auto-similaires* sont des mélodies qui se reproduisent elles-mêmes à des échelles différentes (tout comme les fractales en mathématiques) : en ne jouant qu'une note sur n, on retrouve la mélodie de départ.

Procédés combinatoires. Tout comme les écrivains de l'Oulipo explorent souvent les différentes anagrammes d'un mot en recombinant ses lettres, on peut combiner les notes et les accords. Mais comme la notion de sens est très différente en musique, plutôt que de se limiter à un lexique existant, on préfère faire entendre toutes les combinaisons possibles d'un matériau donné plutôt que de choisir arbitrairement celles qui plaisent le plus au compositeur, au musicien ou à l'auditeur.

Mots possibles	Mélodies possibles	
MODE	Do – Ré – Mi – Fa	Avantage de la musique sur les lettres !
DOME	Do – Ré – Fa – Mi	
DÉMO	Do – Mi – Ré – Fa	
~~DOBM~~	Do – Mi – Fa – Ré	
~~DEOM~~	Do – Fa – Ré – Mi	
~~MOED~~	Do – Fa – Mi – Ré	
~~MEDO~~	Ré – Do – Mi – Fa	
~~MEOD~~	Ré – Do – Fa – Mi	
. . .	. . .	

D'autres objets mathématiques permettent d'écrire de la musique : les carrés magiques, le triangle de Pascal, la courbe du dragon (voir plus loin), les attracteurs, la symétrie, le crible d'Ératosthène, les nombres premiers, les processus stochastiques…

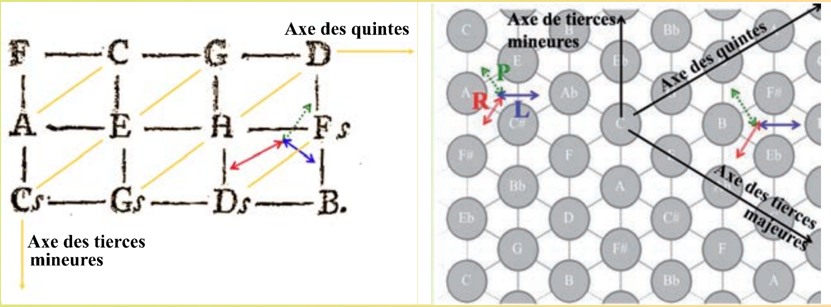
Le *Tonnetz* : de Leonhard Euler au nid d'abeilles

Le *Tonnetz* (« maillage de hauteurs ») est une structure géométrique introduite à l'origine par le mathématicien Leonhard Euler (1707 – 1783). Sous l'intitulé *Speculum Musicum* (« miroir de la musique »), il propose de représenter les hauteurs dans un espace en deux dimensions, à partir de deux axes correspondant respectivement à la quinte juste (l'intervalle ascendant *do – sol*) et à la tierce majeure (*do – mi*).

Le *Tonnetz* utilisé de nos jours pave le plan bi-dimensionnel en triangles, qui correspondent aux accords parfaits majeurs et mineurs (constitués de trois notes chacun) : en partant du barycentre d'un triangle (correspondant par exemple à *do – mi – sol*), il est possible d'opérer trois types de symétrie élémentaire, qui conduisent donc vers trois autres accords possibles, en ne changeant qu'une seule des trois notes :

- l'accord *relatif* (nommé R) : *do – mi – la* dans notre exemple,
- l'accord *homonyme* (nommé P pour *parallel*) : *do – mi♭ – sol*,
- l'accord sensible (nommé L pour *leading tone*) : *si – mi – sol*.

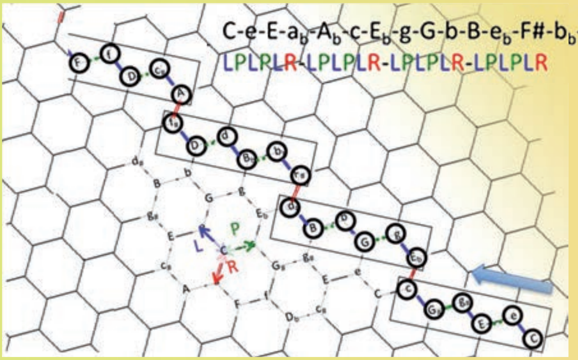
L'accord parfait majeur (ici, un accord de *do* majeur) ne conduit que vers des accords mineurs (*la* mineur, *do* mineur et *mi* mineur), et réciproquement.



Le *Tonnetz* et ses symétries : trois transformations d'un accord de *si* majeur (*si – ré# – fa#*, ou, en notation allemande, H – Ds – Fs), à gauche dans la représentation d'Euler et à droite dans celle utilisée aujourd'hui en analyse musicale.

À partir de cette triangulation du plan, on obtient un maillage hexagonal (en « nid d'abeilles »), où chaque note se trouve au centre d'un hexagone, entourée de six sommets (six notes pouvant former avec elle des accords parfaits). Au moyen des trois opérateurs R, P et L, on peut ainsi tracer dans ce maillage un parcours qui correspondra à une progression harmonique enchaînant plusieurs accords successifs. Il est même possible de trouver des parcours *hamiltoniens*, qui passent une fois et une seule par chacun des vingt-quatre accords majeurs et mineurs, et peuvent éventuellement terminer à leur point de départ. Il n'existe que cent vingt-quatre de ces « cycles hamiltoniens » ; on peut les classer selon leurs symétries internes, des plus simples (le *zig-zag*, où l'on alterne seulement deux transformations, par exemple L et R) aux moins périodiques (allant jusqu'à vingt-quatre transformations sans séquence répétée).

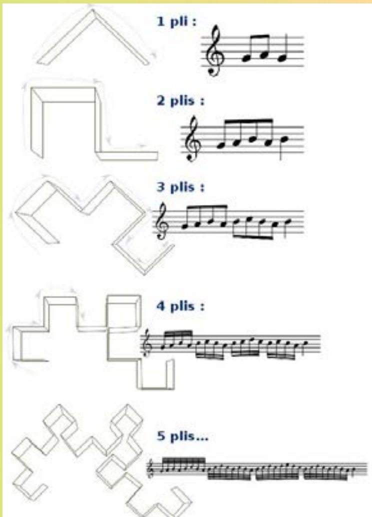
Ce catalogue de progressions d'accords ouvre des perspectives dans l'étude de l'organisation harmonique en musique, et permet de nouvelles formes d'écriture : les « chansons hamiltoniennes » font l'objet de concerts et d'ateliers ! Des élèves de Paris Sciences et Lettres ont ainsi construit une *Ballade-Marabout* avec un cycle hamiltonien périodique.



Un cycle hamiltonien créé en atelier d'écriture par des étudiants de Paris Sciences et Lettres. Saurez-vous identifier sa périodicité ?

Intermède : un petit jeu musical

Décrite par Martin Gardner en 1967, la courbe du dragon est un objet mathématique aussi simple que fascinant. Qui aurait songé à en faire… une partition musicale ? Tout commence avec le petit jeu qui consiste à plier successivement une bandelette de papier *n* fois, dans le même sens, puis à la déplier pour voir quelle forme a été obtenue. D'une complexité croissante selon le nombre de pliages, la courbe du dragon possède de nombreuses propriétés intéressantes (caractère fractal, auto-similaire, symétrique mais non-périodique…). Elle peut également être lue comme une suite de mouvements mélodiques :



0. Choisir une gamme (par exemple *do–ré ♯–mi–sol–la♭–si*) ;
1. Plier une bandelette de papier deux fois dans le même sens, puis la déplier et la poser à plat ;
2. Jouer la note de départ, puis pour chaque « bosse » du papier, monter d'une note ; à chaque creux, descendre d'une note (en suivant la gamme choisie) ;
3. Reprendre la bande de papier, ajouter une pliure supplémentaire, puis rejouer la nouvelle mélodie ainsi obtenue.

La mélodie devient de plus en plus sophistiquée, mais aussi de plus en plus labyrinthique et mystérieuse. Cette beauté envoûtante et hypnotique vous conduira peut-être à « entendre » les constructions mathématiques d'une façon nouvelle !

Les chutes du Niagara : compression du son et perte d’information

Toute l’histoire de la compression des données tend vers un seul but : gagner de la place pour stocker un maximum d’information. Mais quel est l’intérêt de pouvoir stocker plus de dix ans de musique sur un seul disque dur ? Personne, aujourd’hui, n’a autant de temps à consacrer à une activité aussi improductive : l’Oumupo se devait de trouver des solutions novatrices !

L’*accélération* d’une musique enregistrée est une méthode aussi ancienne que le phonographe. En jouant à 45 tours / mn un disque prévu pour être joué à 33 tours / mn, on gagne 36 % de temps d’exécution (et 136 % à 78 tours / mn). Seul inconvénient : toutes les fréquences sont transposées vers l’aigu. Mais quelques œuvres spécifiques peuvent s’y prêter (comme la troisième *Gymnopédie* d’Erik Satie, 1888, sous-titrée « lent et grave »).

Les méthodes d’*élimination des séquences redondantes* sont assez efficaces et ne provoquent aucune perte d’information. En effet, de nombreux compositeurs – sûrement par paresse intellectuelle – s’« autoplagient » en réemployant des passages entiers (signes de reprise, mesures qui se répètent, motifs joués en boucle…), qu’il est donc facile de supprimer. Par exemple, un algorithme efficace permettrait de réécrire le fameux *Prélude en* ut de Bach en supprimant toutes les notes rejouées (et donc inutiles) : cinq notes par mesure au lieu de seize, soit un gain temporel de 69 % !

Plus complexe, la *méthode de superposition* consiste à rechercher les passages similaires dans une ou plusieurs œuvres, et à les jouer simultanément. Enfin, la *superposition aléatoire* est la méthode qui permet les gains les plus importants. Ainsi dans sa *Battalia à 10* (1673), Heinrich Ignaz Franz von Biber superpose huit mélodies populaires ; dans *Folk Music* (1972), Zygmunt Krauze en superpose vingt. Poussée à l’extrême, cette logique doit nous conduire à écouter enfin toute la musique possible… en même temps. On touche alors aux limites de la compression temporelle, la quantité d’information tendant ici vers zéro.

À l’oreille, ça ressemble assez au bruit des chutes du Niagara.

MA, MG, TJ & VV

Pour en savoir (un peu) plus :

Le site de l’Oumupo : ***oumupo.org*** .

Les sites des auteurs : ***repmus.ircam.fr/moreno, martingranger.net, editions75.com, valentin.villenave.net***