Des outils mathématiques pour votre GPS

Nicolas K. Blanchard
et Leila Gabasova

Institut de recherche en informatique fondamentale
et Université Paris-Saclay.

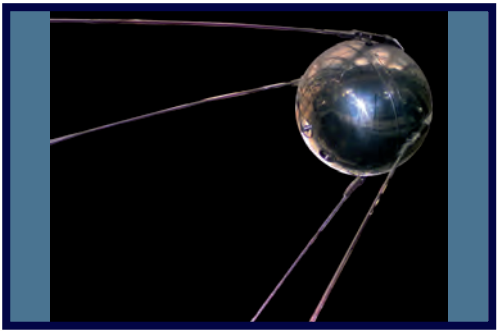
Développé durant la guerre froide, le GPS (pour Système de positionnement global) permet à une personne munie d'un récepteur radio sophistiqué de trouver avec grande précision sa propre position sur Terre. Ce système, fruit de prouesses tant scientifiques que technologiques, repose sur un ensemble de trente-deux satellites en orbite basse. Chacun de ces satellites est équipé d'une horloge atomique, c'est-à-dire d'un dispositif permettant de connaître le temps écoulé avec une très grande précision – les horloges atomiques modernes pouvant fonctionner pendant plusieurs centaines de millions d'années avant d'accumuler une seconde de décalage. Ces satellites diffusent en permanence l'heure ainsi que leur propre position. En regardant la différence entre l'heure actuelle et l'heure reçue, on peut trouver la distance au satellite ! C'est en utilisant ces distances avec plusieurs satellites différents et leur position que l'on peut calculer sa propre position, avec une technique nommée *trilatération*. Avant de voir cela en détail, remontons un peu dans le passé.

Se repérer grâce aux satellites : une histoire militaire

Le 4 octobre 1957, Spoutnik 1 devient le premier objet d'origine humaine à être envoyé en orbite, déclenchant par cela la course à l'espace. Ce satellite artificiel n'embarque qu'un émetteur radio, diffusant une série de « bips » sur une fréquence radio standard. Plusieurs scientifiques américains essayent immédiatement d'en savoir le plus possible sur ce satellite, mais ce sont ceux du laboratoire de physique de l'université Johns-Hopkins qui vont changer la donne.

Une réplique
du satellite Spoutnik
envoyé en orbite
par l'URSS
le 4 octobre 1957.

© *NASA*



Ces derniers, faute de moyen, n'ont accès qu'à une antenne radio standard, mais se rendent compte que le signal est très proche de 20 MHz, avec un petit décalage qu'ils estiment dû à l'effet Doppler – un signal provenant d'une source qui s'approche paraît plus aigu, au contraire d'une source qui s'éloigne, comme on peut le vérifier dans la rue lorsque passe une ambulance toutes sirènes hurlantes. Les scientifiques essayent de deviner l'orbite du satellite à partir de cette simple information et obtiennent, après bien des efforts, une précision correcte. Le directeur de leur institut leur demande alors s'il est possible de faire le contraire, c'est-à-dire de connaître la position d'une personne à l'aide de satellites (le positionnement précis des navires était un des problèmes majeurs de la marine états-unienne de l'époque). Deux ans plus tard, le 13 avril 1960, un premier satellite est lancé, inaugurant le système NAVSAT, ancêtre du GPS.

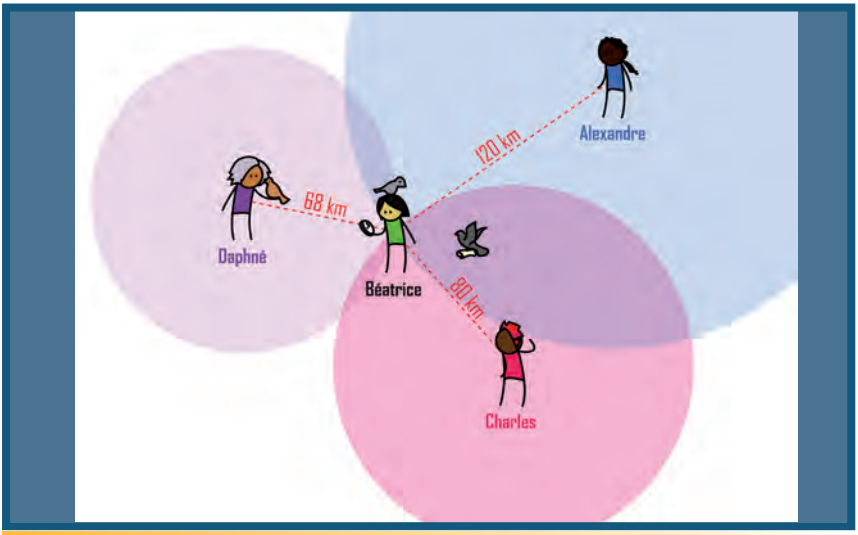
Au cours des décennies suivantes, les systèmes deviennent extrêmement perfectionnés, et massivement accessibles aux civils, avec une contrainte cependant : le système étant toujours contrôlé par la défense américaine, une erreur volontaire est introduite pour les appareils civils et étrangers, faisant chuter la précision (qui passe d'une dizaine de mètres à une centaine de mètres). Cette erreur volontaire est l'un des arguments utilisés pour la création du système Galileo, équivalent européen du GPS en cours de déploiement. D'autres systèmes concurrents, collectivement nommés GNSS (pour Système global de navigation par satellite), sont aussi développés par la Russie, la Chine et l'Inde, afin d'améliorer les performances et de ne pas dépendre du gouvernement des États-Unis. Comment ce système fonctionne-t-il en pratique ?

Une idée simple : le positionnement par pigeon voyageur

Pour simplifier temporairement, imaginons que nous sommes sur un plan, où Alexandre envoie un pigeon voyageur à Béatrice à 4 h 05, avec un message contenant l'heure d'envoi et la position d'Alexandre. Si

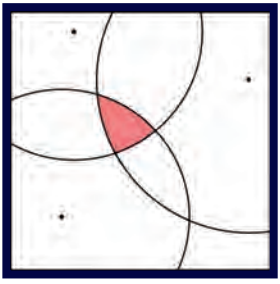
Béatrice reçoit le pigeon à 5 h 35 et que le pigeon voyageait en ligne droite à 80 km / h, Béatrice sait qu'elle est à 120 km d'Alexandre.

L'ensemble des points où Béatrice peut se trouver est donc le cercle de rayon 120 km autour d'Alexandre. Si Charles envoie un autre pigeon (allant à la même vitesse) à 4 h 30 et que Béatrice le reçoit à 5 h 30, elle sait qu'elle est à 80 km de Charles, et donc à l'un des deux points d'intersection des deux cercles (comme sur la figure ci-dessous). Avec un troisième pigeon provenant d'une autre personne, Béatrice pourra trouver où elle se trouve parmi les deux points restants. Un problème subsiste toutefois : que se passe-t-il si la montre de Béatrice est en retard ?

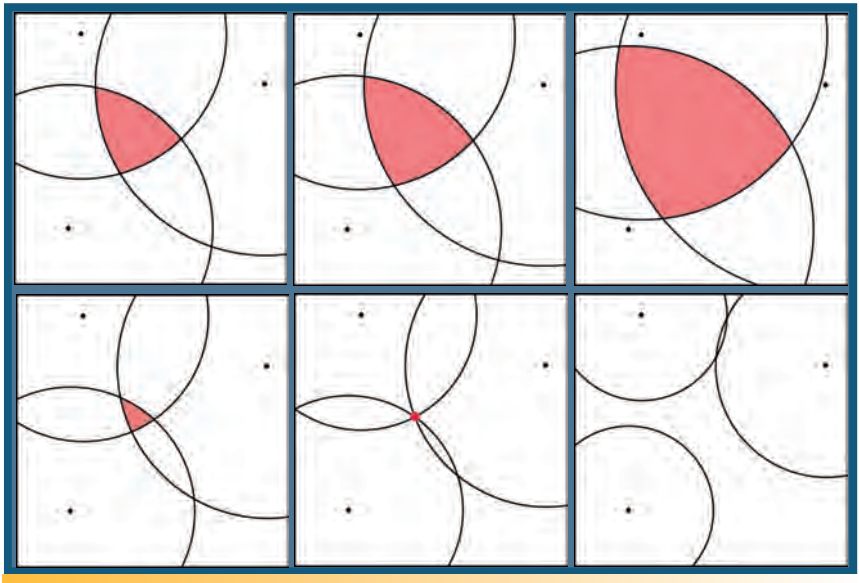


En sachant combien de temps il faut au pigeon pour arriver, Béatrice peut deviner qu'elle se trouve à l'intersection de plusieurs cercles, chacun correspondant à une distance donnée depuis Alexandre, Charles et Daphné.

Si la montre de Béatrice retarde de six minutes, elle va penser être à 8 km de plus de chacune des autres personnes, et les trois cercles ne se croisent plus en un point unique. Comment faire alors pour retrouver sa position réelle ? Il existe *a priori* toute une zone dans laquelle Béatrice pourrait se trouver…



La solution est pourtant plus simple qu'il n'y paraît : en fait, on n'a qu'une inconnue, le retard de la montre ! En effet, si la montre a x minutes de retard, chacune des distances va augmenter de x fois la vitesse. En retrouvant le retard, on peut donc obtenir la position exacte de Béatrice. En faisant des approximations, on peut retrouver x, par exemple en utilisant la méthode des moindres carrés : on essaye successivement plusieurs valeurs possibles pour x, en tentant de minimiser la taille de la zone d'incertitude.



En essayant des décalages positifs (en haut) ou négatifs (en bas) de une minute (à gauche), deux minutes (au centre) et cinq minutes (à droite), on peut trouver la solution la plus probable, ici deux minutes de retard.

Géométrie dans l'espace : quatre satellites suffisent… en théorie

Dans un cadre plus réaliste, comme la Terre, on peut appliquer la même méthode. Cette fois on n'a plus besoin de l'intersection de trois cercles, mais de quatre sphères – dans l'espace, l'intersection de deux sphères est (au plus) un cercle, celle de trois sphères correspond à deux points, et celle de quatre sphères donne donc un point unique. Quatre satellites suffisent pour retrouver la position de Béatrice. En cas de problème, on peut même se contenter de trois satellites, si l'on suppose que Béatrice est à la surface de la Terre, une des sphères étant alors déjà donnée (mais la précision sera alors très mauvaise). Les GNSS ont donc besoin de nombreux satellites, entre vingt et trente, pour garantir que

chaque personne soit à tout instant visible par au moins trois satellites distincts. Pour avoir une meilleure précision, on essaye généralement d'en avoir plus (entre six et douze pour le GPS).

Dans ses travaux au début du XX^{e} siècle sur la relativité spéciale et générale, Albert Einstein montre que le temps s'écoule différemment pour des observateurs allant à des vitesses différentes, et que l'espace ainsi que le temps peuvent être déformés par la présence d'objets massifs comme une planète ou une étoile. Avec son collègue Paul Langevin, ils réalisent l'expérience de pensée suivante. Ils considèrent deux vrais jumeaux, l'un restant sur Terre, l'autre voyageant à haute vitesse dans l'espace avant de revenir. Leurs réflexions théoriques les conduisent à conclure que le jumeau voyageant dans l'espace devrait « vivre plus lentement », c'est-à-dire que le temps se dilaterait pour lui et qu'il devrait revenir en ayant moins vieilli que celui resté sur Terre.

Un autre effet contrebalance cette conclusion : la Terre, massive, déforme l'espace-temps autour d'elle. Ces deux effets seront testés pour la première fois en 1971 en embarquant des horloges atomiques dans des avions faisant le tour de la Terre : sans surprise, après un tour complet, les horloges avaient un décalage avec celle qui était restée au point de départ. À cause de ces effets, les horloges à bord des satellites accumulent un retard, correspondant à près de quarante nanosecondes par jour (une seconde dure un milliard de nanosecondes). Cet écart peut sembler faible mais c'est déjà suffisant pour avoir une erreur de plusieurs kilomètres sur la position de Béatrice !

Heureusement, des outils théoriques permettent de prédire de manière extrêmement précise ce décalage, et les ordinateurs à bord des satellites le corrigent automatiquement.

De l'utilité des imprécisions pour la météorologie

Béatrice allume donc sa radio, reçoit des signaux de plusieurs satellites indiquant avec une très haute précision leur heure d'envoi, et calcule sa position la plus probable en devinant le retard qu'a sa propre montre. Cela suffit pour deviner sa position, souvent à quelques mètres près. Comment donc peut-on expliquer l'imprécision qui subsiste ? Une partie vient bien sûr de petits décalages dans les orbites des satellites ou dans les horloges, ou de trajectoires d'ondes qui ne sont pas rectilignes (car on se trouve rarement au milieu d'une plaine). Cependant, ces erreurs sont trop faibles pour expliquer cette précision relativement mauvaise.

Il se trouve qu'en effet des obstacles subsistent : l'humidité de l'air dans les couches basses de l'atmosphère, et la présence d'ions dans les couches supérieures, perturbent et retardent les ondes. Quand l'onde envoyée par le satellite traverse l'atmosphère, elle est ralentie. Ce ralentissement n'est pas connu de manière exacte, et se trouve être à la source de cette relative imprécision. On peut l'éviter en envoyant plusieurs signaux à des fréquences différentes (qui vont être ralentis de manière différente, permettant d'estimer le délai supplémentaire), et cette technique est mise en pratique dans les appareils militaires ou scientifiques de haute précision, allant jusqu'au millimètre.

Cependant, on peut aussi l'exploiter : si l'on connaît avec précision notre position, on peut en déduire le ralentissement dû à l'humidité, et trouver, à partir de ce résultat, l'humidité, et aussi la température de l'air !

Cette technique très récente a déjà de nombreuses applications en météorologie, car elle nous permet d'étudier avec précision la température de l'air en tout point du globe, et donc le réchauffement climatique avec des données globales de haute qualité.

N.K. B. & L.G.

Explorer la surface du globe… sans sortir de chez soi

En combinant des photographies avec des données GPS (comme sur les Google Cars), des photos par satellite, des plans de ville accessibles publiquement et des corrections fournies par les utilisateurs, plusieurs services existent permettant d'explorer la surface de la Terre. Certains proposent même de reconstruire partiellement en 3D les villes, en utilisant des techniques mathématiques et algorithmiques avancées (et dont les détails sont secrets ; les enjeux financiers semblent en effet gigantesques) pour deviner la forme des bâtiments à partir de plusieurs images. Ces développements récents sont aussi dus à l'apparition de nouvelles techniques en reconnaissance d'image et en intelligence artificielle.

Pour en savoir (un peu) plus :

Genesis of Satellite Navigation. William Guier et George Weiffenbach, 1998, disponible en ligne.

Global Positioning System: The Mathematics Of GPS Receivers. Richard Thompson, *Mathematics Magazine* 71, 1998, disponible en ligne.

Scientists Use GPS Signals To Measure Earth's Atmosphere. Turner Brinton, 2007, disponible en ligne.