

*« Les schémas du mathématicien, comme ceux du peintre ou du poète, doivent être beaux ; les idées, comme les couleurs ou les mots, doivent s'assembler de façon harmonieuse. La beauté est le premier test : il n'y a pas de place durable dans le monde pour des mathématiques laides. »*  
(Godfrey Hardy)

La sortie annoncée en septembre 2016 sur nos écrans du long-métrage réalisé par Matt Brown *The Man Who Knew Infinity*, d'après l'ouvrage éponyme de Robert Kanigel (Washington Square Press, 1992), est l'occasion rêvée de parler de mathématiques en évoquant l'un de ses plus fascinants représentants, Srinivasa Ramanujan. Coïncidence inouïe : après des décennies d'acharnement, les dernières formules mystérieuses que le mathématicien indien a laissées à la postérité dans plusieurs carnets viennent d'être décryptées !

### Pour la première fois au cinéma : les maths à l'écran !

Un long-métrage va nous faire revivre un épisode étonnant de l'histoire des mathématiques. Que sait-on du film ? Manjul Bhargava, médaille Fields 2014, et Ken Ono, spécialiste des mathématiques de Ramanujan, ont été associés de près à la réalisation depuis de nombreuses années. Les seules libertés artistiques prises semblent liées au physique de Ramanujan (plus corpulent que Dev Patel, sauf sur la fin de sa vie), à l'âge de sa femme Janaki (plus jeune que Devika Bhise) et de Hardy (lui aussi plus jeune que l'acteur qui joue son rôle, Jeremy Irons ; la ressemblance physique entre les deux hommes est d'ailleurs frappante). Et, cinéma oblige, l'histoire d'amour a peut-être été trop romancée.



## Une décision sans retour qui va changer l'histoire

Srinivasa Ramanujan naît en 1887 dans l'État du Tamil Nadu, dans le Sud de l'Inde, alors sous domination britannique. Il appartient à une famille brahmane très modeste. Dès son plus jeune âge, il fait montre de talents scolaires certains... et d'une santé fragile. Au collège, ses dons pour les mathématiques font de lui une célébrité locale. Un enseignant lui met alors entre les mains un livre obscur, composé par un certain George Carr, répétiteur de mathématiques : il donne des leçons privées pour préparer les étudiants britanniques aux redoutables et redoutées Tripos de l'université de Cambridge, ces épreuves de mathématiques réputées les plus difficiles du monde. Pour s'aider dans sa tâche, Carr a compilé, sans aucune démonstration, tout le savoir nécessaire pour réussir les Tripos, sous la forme de deux intimidants tomes de formules et d'identités remarquables. Ces ouvrages (et leur auteur) seraient totalement tombés dans l'oubli sans Ramanujan, qui, à des milliers de kilomètres de Cambridge, découvre littéralement des milliers de formules qu'il ne connaît pas.

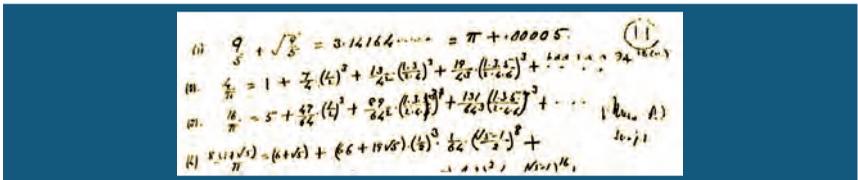
On ne saura sans doute jamais ce qu'il se passe dans la tête du farouche adolescent indien à la vue de ce flot ininterrompu de formules, données sans aucune explication, indication ni hypothèse. Y voit-il autant de défis à sa sagacité, à son intelligence ? Toujours est-il qu'à l'âge de 15 ans, semble-t-il, Ramanujan prend une décision extrême, radicale, qui va bouleverser sa vie... et le cours des mathématiques : il décide qu'il se consacrera désormais entièrement à cette science, corps et âme.

Au collège, chez lui, le jour, la nuit, Ramanujan travaille dur, avec la bénédiction de sa mère, qui voit dans la décision de son fils une quête spirituelle digne d'un brahmane observant, une quête qui honore sa famille. Ramanujan échoue à tous ses examens : il est désormais trop occupé à ses propres recherches pour s'intéresser aux matières qu'on veut lui enseigner.

## Des carnets remplis de maths en guise de carte de visite

Les années passent. Ramanujan n'a toujours pas levé le nez de son ardoise, sur laquelle il réalise de complexes calculs que personne ne semble comprendre. Il a pris l'habitude de consigner ses découvertes sur des feuilles de papier récupérées et grossièrement reliées, qu'il appelle « carnets ». Le papier est une denrée que la famille ne peut s'offrir, alors Ramanujan est parcimonieux : il ne recense que les résultats qui lui semblent les plus élégants, les plus aboutis... sans la moindre explication, indication ni hypothèse.

Ramanujan est fier et conscient de ses exceptionnelles capacités en mathématiques ; il veut épater le monde par son habileté technique à manipuler les objets les plus délicats de l'analyse : ses trois carnets, qui ne le quittent pas, sont sa carte de visite. Avec eux, il compte bien en mettre plein la vue à ses interlocuteurs et trouver enfin un mécène ou une institution qui reconnaisse son génie et lui offre, en échange du fruit de ses recherches, de quoi se loger et se nourrir, et du temps pour sa longue quête solitaire.



Ramanujan a recensé cette jolie formule donnant une estimation de  $\pi$  comme somme de  $9/5$  et de sa racine carrée. La précision est étonnante ! Aucune trace d'une telle formule n'a apparemment jamais été trouvée auparavant : elle semble totalement originale.

Komalatammal, la mère de Ramanujan, décide finalement qu'il est temps que son fils de 21 ans s'assume dans la vie : elle lui arrange un mariage avec la jeune Janaki. Ramanujan redouble d'efforts pour faire reconnaître la valeur de son travail. Il monte à Madras, aujourd'hui Chennai, et rencontre des mathématiciens, qui ne savent se prononcer sur la qualité des résultats patiemment produits par un génie obstiné... ou par un illuminé. Petit à petit, à force de persévérance et d'audace, il se constitue un réseau. Après bien des errances, il trouve un emploi de bureau.

## Deux hommes que tout oppose réunis par une même passion

Ayant consulté, sans succès, tout ce que le Sud de l'Inde comptait comme mathématiciens professionnels, Ramanujan écrit au plus grand scientifique britannique depuis Newton, Godfrey Harold Hardy. Ce dernier saura reconnaître le génie du jeune Indien et réussira à le faire venir à Cambridge... quatre mois avant que n'éclate la Première Guerre mondiale. S'ensuivra l'une des collaborations les plus fructueuses de l'histoire des sciences, malgré des conditions épouvantables, entre guerre et maladie, entre privations et solitude. Les deux chercheurs ouvrent mille chantiers, réussissent à publier une vingtaine d'articles, dans un contexte particulièrement hostile. Un vrai choc culturel entre deux hommes que tout oppose (de la pratique des mathématiques au rapport à la religion en passant par les codes sociaux ou les habitudes alimentaires) et qu'une même passion a réunis.

Durant les années 1917 et 1918, Ramanujan est souffrant, sans que personne ne sache bien de quel mal il est atteint. Confiné dans des sanatoriums, aucun médecin ne sait le soulager. De son côté, Hardy s'active pour le faire élire en 1918 à la Royal Society, vénérable société savante s'il en est. En Inde, c'est l'euphorie : leur compatriote est entré dans l'histoire. Avec une telle reconnaissance, Ramanujan retrouve des forces pour ses recherches, sa santé s'améliore. En 1919, il est même en état de retourner au pays ! Il y retrouve sa femme, qui a maintenant 20 ans et peut prendre soin de lui. Hélas, sa santé se dégrade à nouveau, et en Inde non plus personne ne réussit à le soulager. Début 1920, Ramanujan se meurt. Du fond de son lit de douleur, il envoie à Hardy une lettre au contenu mathématique mystérieux... et prophétique. Quelques jours plus tard, Ramanujan s'éteint, le 26 avril 1920. Il avait 32 ans.



### **Les mathématiques au-delà de la mort : transmission et héritage**

Dès la mort prématurée de Ramanujan, Hardy comprend l'importance de réaliser une « édition » des trois carnets, qui ont été compilés en Inde entre 1903 et 1914. Il inspecte les documents (originaux ou copies manuscrites) à sa disposition. Ils contiennent des milliers de formules patiemment compilées, des formules si alambiquées que « *si Ramanujan ne les avait pas écrites, personne ne les aurait trouvées, même dans cent ans, même dans deux cents ans* » (Bruce Berndt). Hardy précise très vite les « règles du jeu » de l'édition : (i) pour les résultats déjà connus, produire une référence précise (la plus ancienne possible) ; (ii) pour les résultats corrects originaux, produire une démonstration (si possible dans l'esprit de Ramanujan) ; (iii) pour les résultats faux, un résultat correct doit se nicher pas loin (!), il faut le chercher...

Mais il y a un problème : dans ses écrits, Ramanujan ne définit pas les objets qu'il manipule, il invente ses propres notations, il ne s'embête pas avec les contre-exemples « évidents » à ses énoncés, il n'explique rien. Les contenus ne sont pas structurés, pas organisés, sauf dans le deuxième carnet. Ces documents personnels n'ont en effet jamais été destinés à être lus ou publiés ! En outre, de son vivant, leur auteur n'a révélé ni les clés ni les sources de sa puissante intuition, ni ses mystérieuses méthodes, pas même à Hardy. Aussi le chantier éditorial est-il immense.

Hardy s'entoure de deux collègues, Bertram Wilson et George Watson, qui, dès 1929, vont se consacrer pleinement à la validation complète des

formules de Ramanujan contenues dans les trois précieux documents\*. Le deuxième carnet est privilégié. La tâche est estimée à pas moins de cinq années de travail. Ce sera autrement plus délicat : dix années plus tard, en 1940, près de quarante articles ont été publiés, correspondant peu ou prou à l'édition de... six à huit chapitres du deuxième carnet ! Hélas, Wilson est décédé prématurément en 1935, et Watson ne peut poursuivre seul très longtemps. À la mort de ce dernier en 1965, tous ses documents de travail sont collectés, puis envoyés à la bibliothèque du Trinity College. Ils dormiront là plusieurs années : leur importance ayant été largement sous-estimée, peu de personnes en connaissent l'existence.

On comprend sur cette page manuscrite toute la difficulté du travail de validation des milliers de formules laissées par Ramanujan : quantités non définies, énigmatiques points de suspension, version originale quasi illisible...



## Un travail d'édition moderne, systématique, tenace

Nous sommes en 1974. Le mathématicien américain Bruce Berndt, spécialiste de théorie analytique des nombres, s'aperçoit que, avec les outils qu'il a développés plusieurs années plus tôt, il peut démontrer élégamment certaines formules dues à Ramanujan. C'est le déclic : il décide de poursuivre le travail de Watson et Wilson. Au même moment, en 1976, son collègue George Andrews retrouve un peu par hasard, dans les archives de la Trinity College Library, un quatrième carnet de la main de Ramanujan, qu'il s'empresse de baptiser *Lost Notebook* (« carnet perdu ») ! Ce document de 138 pages était en possession de Hardy, qui l'a transmis à Watson.

Finalement, entre 1977 et 1997, en s'aidant des travaux de ses prédécesseurs, et avec le soutien de collègues, de plus de vingt doctorants et de l'éditeur Springer, Berndt réalise intégralement, dans cinq ouvrages publiés entre 1981 et 1997, la colossale tâche d'édition des trois carnets selon les règles édictées par Hardy. Ce travail monumental (plus de deux

\* Entre 2013 et 2016, une version digitalisée des trois carnets (351 pages, 356 pages et 33 pages respectivement), du « carnet perdu » (138 pages) et de bien d'autres documents a enfin été rendue disponible ; retrouvez-les en ligne sur <http://ramanujan.sirinudi.org> et sur le site du projet Janus (<https://janus.lib.cam.ac.uk>).

mille pages pour tout décortiquer avec méthode et rigueur) reste à ce jour l'un des plus importants chantiers éditoriaux jamais entrepris en sciences : les trois carnets recensent, d'après Berndt, plus de trois mille résultats.

Mieux : le « carnet perdu » a lui aussi cédé ! Entre 2005 et 2013, quatre volumes ont été publiés par Andrews et Berndt. Aujourd'hui, ce nouveau chantier s'achève : tous les écrits connus de Ramanujan ont été impitoyablement passés au crible des experts, et le cinquième et dernier volume va paraître prochainement (nous avons pu le consulter).

Le bilan laisse sans voix : sur les milliers de résultats laissés à la postérité, moins d'une centaine sont irrémédiablement faux, et les deux tiers sont totalement originaux. En particulier, le contenu de la mystérieuse dernière lettre de Ramanujan a enfin révélé une partie de ses secrets. On reste admiratifs devant le caractère prophétique de la vision mathématique qu'elle contient et qui occupe aujourd'hui de nombreux chercheurs.

### Attention, ce n'est que le début du travail !

Le chantier est-il achevé ? Non, il commence seulement, car une grande partie des démonstrations maintenant publiées fait appel à l'outil informatique, ou à des théories modernes, ou que Ramanujan ne maîtrisait pas (comme la théorie des fonctions d'une variable complexe). Mais alors, comment faisait-il, lui, pour *prouver* ses formules, et surtout pour les *trouver*, en premier lieu ?

Berndt pense que Ramanujan fonctionnait comme tout mathématicien, mais avec plus de perspicacité, de façon plus pénétrante (« *with more insight* »). Nous sommes encore loin d'avoir retrouvé toutes ses méthodes ! Ce qui est à peu près unique dans l'histoire des mathématiques, surtout à l'échelle d'une telle masse de résultats. Retrouver l'intuition originelle, maintenant que l'on sait que les résultats recensés sont corrects : voilà le nouveau chantier...

**É.T.**

#### Pour en savoir (un peu) plus :

*The Man Who Knew Infinity*. Robert Kanigel, Washington Square Press, 1992.

*Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan*. Bernard Randé, Cassini, 2002.

Pour un aperçu grand public des mathématiques de Ramanujan, vous pouvez consulter le document PDF de présentation issu de la conférence de l'auteur sur le site du CIJM : [www.cijm.org/accueil/productions-cijm/90-maths-express](http://www.cijm.org/accueil/productions-cijm/90-maths-express)

(« Complément d'enquête sur Ramanujan »).

Conférence publique donnée sur l'espace « rencontres » du Salon de la culture et des jeux mathématiques le samedi 28 mai 2016 à 11 h.