Mathématiques et réseaux sociaux

Daniel Kious

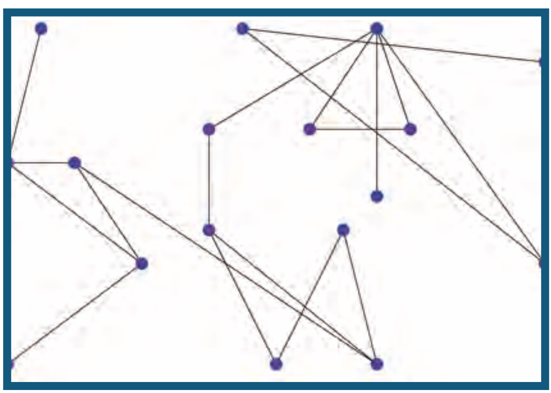
Enseignant-chercheur
à l'École polytechnique fédérale de Lausanne

Comment communique-t-on et comment créons-nous des liens avec les gens qui nous entourent ? Voici une question qui semble être réservée aux sociologues. Pourtant, on peut tenter d'y répondre à travers les mathématiques ! L'utilité de bien comprendre de tels mécanismes s'étend bien au-delà des sciences humaines.

Qu'est-ce qu'un *réseau social* ? Ces mots sont sans doute familiers pour la plupart des jeunes lecteurs. Cependant, la notion de réseau social est bien plus large que Facebook, Twitter… Observer un réseau social, c'est observer un groupe de personnes et les liens qui les unissent. Ces liens peuvent être de différentes natures : liens d'amitié virtuels sur un site Internet ; relations commerciales ; collaborations politiques, scientifiques, ou artistiques… Les possibilités ne sont limitées que par notre imagination.

Les graphes et le phénomène du « petit monde »

Un réseau peut être représenté comme un *graphe*, c'est-à-dire un ensemble de points (ou *sommets*) et d'*arêtes*. Les sommets symbolisent les personnes impliquées dans le réseau et les arêtes représentent les liens entre elles, liens dont la nature reste à clarifier.

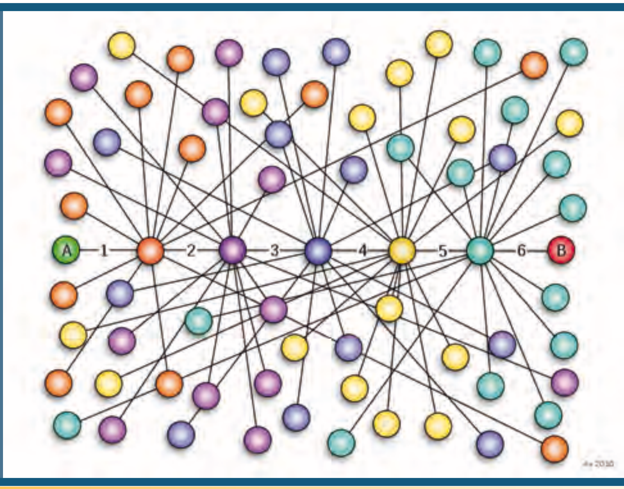


La structure de graphe permet de représenter tout type de réseaux.

Observons un tel réseau social dans le monde réel et tentons d’en dégager certaines caractéristiques importantes. Ensuite, de manière abstraite cette fois, considérons un ensemble de points (représentant les personnes du réseau réel) et lions-les entre eux en suivant certaines règles, que nous aurons préalablement choisies. Est-il alors possible de trouver quelques règles simples qui nous permettraient de recréer un réseau ayant les caractéristiques remarquées dans le réseau réel ?

Prenons l’une des principales caractéristiques que l’on observe dans un réseau social réel : le *phénomène du petit monde,* aussi appelé les *six degrés de séparation*. Choisissons deux personnes A et B au hasard dans le monde. Ces deux personnes ne se connaissent sans doute pas et peuvent être très éloignées géographiquement. En partant de A et en passant d’amis en amis (*« Je suis avec A, puis avec un ami de A, puis avec un ami de cet ami… »*), combien d’amis intermédiaires me suffit-il de rencontrer avant d’être avec B ? La *distance* entre A et B mesure précisément le nombre minimal d’étapes pour aller de A à B de cette manière.

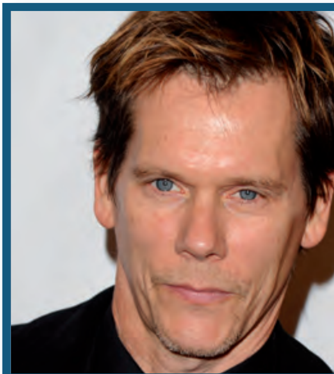
La réponse à notre question est étonnante : dans la très grande majorité des cas, il suffirait de cinq intermédiaires, et donc six étapes en tout ! La première expérience fut menée par le psychologue social américain Stanley Milgram (1933–1984) dans les années 1960, mais l’idée date des années 1930. Ce phénomène surprenant a été observé dans beaucoup de contextes, dont les réseaux de collaborations scientifiques ou artistiques, le réseau électrique californien, le réseau Internet ou encore les réseaux de neurones.



Souvent, dans un réseau, moins de cinq intermédiaires sont nécessaires pour aller d’un sommet à un autre sommet. *Source : Wikipedia*

Partout, des grands connecteurs… même à Hollywood !

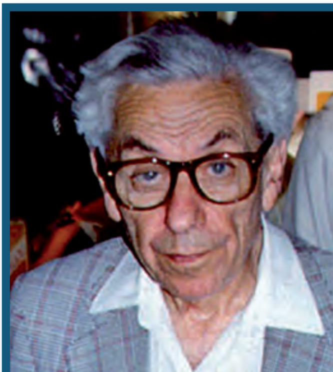
Le Kevin Bacon Game est devenu un exemple assez célèbre du phénomène du petit monde. En quoi consiste ce jeu nommé en référence à l'acteur de *Footloose* (Paramount Pictures, 1984) ? Un chercheur américain a étudié le graphe composé par tous les acteurs affiliés à Hollywood et dans lequel deux acteurs sont connectés s'ils ont joué dans un même film (les liens d'amitié sont donc ici remplacés par les collaborations cinématographiques). Il en a conclu que Kevin Bacon a une place particulièrement centrale dans l'univers hollywoodien, sa distance moyenne à tous les acteurs étant de 3.



L'acteur américain
Kevin Bacon (né en 1958).
Source : biosstars.com

Vous pouvez le vérifier sur le site oracleofbacon.org avec tout acteur de votre choix !

Les mathématiciens ont un concept similaire, appelé *nombre d'Erdös*, qui consiste à mesurer leur distance, en termes de collaborations scientifiques, au mathématicien Paul Erdös, connu pour avoir été extrêmement prolifique.



Le mathématicien hongrois
Paul Erdös (1913–1996).
Source : Wikipedia

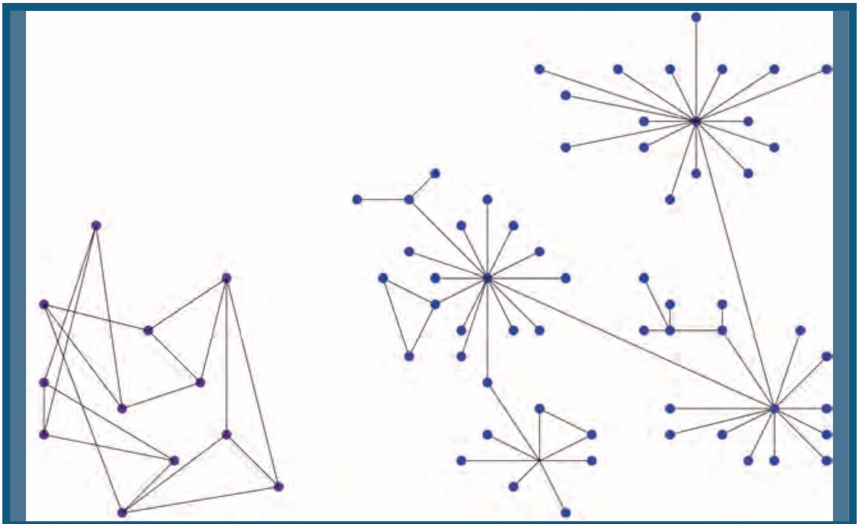
L'une des raisons du phénomène du petit monde pourrait être la présence de *grands connecteurs* dans le réseau, c'est-à-dire de quelques personnes particulièrement bien connectées, à l'image de Kevin Bacon ou de Paul Erdös. En effet, un acteur ayant joué avec Kevin Bacon est en moyenne à distance 4, au plus, d'un autre acteur !

Quand les riches s'enrichissent…

Ainsi émergent deux caractéristiques que l'on aimerait pouvoir recréer à l'aide de quelques règles simples : une distance typique très petite entre deux sommets, et la présence de grands connecteurs.

Tentons une première construction, simple, d'un graphe. Considérons les sommets d'un graphe et lions-les au hasard, de la manière suivante : chaque paire de sommets est connectée avec une certaine probabilité p strictement comprise entre 0 et 1 et déconnectée sinon (avec probabilité $1-p$, donc). Le graphe obtenu de cette manière s'appelle un *graphe d'Erdös–Rényi*. Son étude révèle que la distance typique entre deux sommets est très petite comparée à la taille du graphe, ce qui va dans le sens des six degrés de séparation ! En revanche, les sommets ont tous, à peu près, le même nombre de voisins (ou d'amis), ce qui indique malheureusement l'absence de grands connecteurs…

Essayons donc une seconde approche, dans l'idée de faire apparaître ces grands connecteurs. Commençons avec un petit nombre de sommets connectés de manière arbitraire puis, à chaque étape, ajoutons un nouveau sommet au graphe qui sera lié aléatoirement à un certain nombre d'anciens sommets : plus un ancien sommet a de voisins, plus il aura de chances que le nouveau sommet se connecte à lui. Cette procédure s'appelle l'*attachement préférentiel*, parfois illustrée par l'expression « le riche s'enrichit ». L'analyse mathématique de ce modèle dévoile une petite distance typique, ainsi que la présence de grands connecteurs !



Deux structures de graphes aux propriétés très différentes :

À gauche : Type Erdös–Rényi :
tous les sommets ont trois ou quatre arêtes.

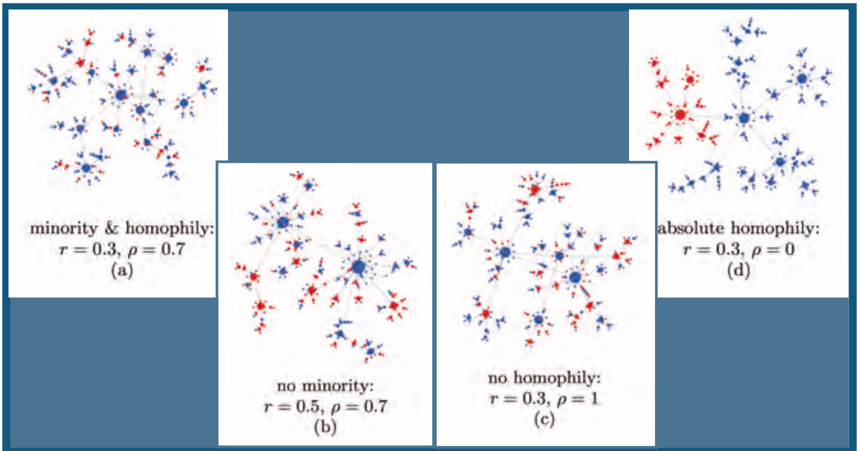
À droite : Type attachement préférentiel :
quatre sommets ont un nombre particulièrement grand d'arêtes.

Nous obtenons donc un exemple de modèle mathématique dont certaines caractéristiques typiques semblent proches de celles d'un réseau social réel. Mais les modèles et constructions de graphes disponibles aujourd'hui sont encore loin d'être entièrement satisfaisants : beaucoup de recherche est encore nécessaire pour la compréhension de tels phénomènes.

Tout ce travail est-il utile ? Il paraît ici opportun de citer Henri Poincaré dans *Science et Méthode* (Flammarion, 1908) : *« La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. »* En effet, comprendre la structure d'un réseau social (et notamment comprendre pourquoi Kevin Bacon est central à Hollywood) permettrait de comprendre la structure d'une multitude d'autres réseaux partageant les mêmes caractéristiques globales. Ainsi, la recherche dans ce domaine pourrait avoir des applications dans les sciences politiques (pour l'étude de l'évolution des coopérations au sein d'une grande organisation), dans l'analyse de la propagation de maladies ou de virus informatiques, dans la mise au point de réseaux électriques, de communication ou de distribution, ainsi que dans la compréhension de la création du langage ou de la formation de réseaux de neurones dans notre cerveau. Rien que ça !

Cette dernière application semble particulièrement actuelle : elle aurait des répercussions en intelligence artificielle. En effet, les algorithmes d'apprentissage profond (*deep learning*) s'inspirent du fonctionnement du système nerveux humain, que l'on peut schématiser comme un graphe dont les sommets reçoivent des messages et établissent des connexions en conséquence, selon certaines règles. Ainsi, mieux comprendre la structure des réseaux de neurones (qui possèdent une petite distance typique et des grands connecteurs) permettrait peut-être d'améliorer nos compétences en intelligence artificielle. En mars 2016, AlphaGo (voir https://deepmind.com/alpha-go.html), un algorithme d'apprentissage profond de Google DeepMind, a gagné assez largement une partie de jeu de go contre l'un des meilleurs joueurs du monde.

Dans un domaine plus proche de la sociologie, en 2015, un groupe de chercheurs français, israéliens et suisses ont été offusqués par la grande proportion d'hommes en recherche informatique, d'autant plus prononcée parmi les chercheurs les plus influents. Ils ont alors proposé un modèle basé sur des règles simples, telles que l'attachement préférentiel et l'homophilie (on se sent plus proche des gens qui nous ressemblent), pour lequel on voit apparaître un *plafond de verre* : dans un réseau où les hommes sont plus nombreux que les femmes, il sera disproportionnellement plus difficile pour une femme d'atteindre un haut niveau d'influence !



Sur ces images, le nombre r est la proportion de femmes et ρ est un coefficient d'homophilie (qui vaut 0 pour l'intolérance au sexe opposé et qui vaut 1 pour une indifférence totale).
Plus un sommet est « gros », plus il est connecté.

Source : Homophily And The Glass Ceiling Effect In Social Networks. *Chen Avin, Barbara Keller, Zvi Lotker, Claire Mathieu, David Peleg et Yvonne-Anne Pignolet,* Proceedings Of The 2015 Conference On Innovations In Theoretical Computer*, 2015.*

Ce modèle, bien que simpliste, permettrait déjà d'envisager de possibles solutions au plafond de verre rencontré par certaines minorités sociales…

D.K.

Pour en savoir (un peu) plus :

Small Worlds: The Dynamics Of Networks Between Order And Randomness. Duncan Watts, Princeton University Press, 2003.

Emergence Of Scaling In Random Networks.
Albert-Laszlo Barabasi et Réka Albert, *Science* 286, 1999.

The Large-Scale Organization Of Metabolic Networks.
Hawoong Jeong, Balint Tombor, Réka Albert, Zoltan Oltvai et Albert-Laszlo Barabasi, *Nature* 405, 2000.

Classes Of Behavior Of Small-World Networks.
Luis Nunes Amaral, Antonio Scala, Marc Barthélémy et Eugene Stanley, *Proceedings Of The National Academy Of Sciences* 97, 2000.

Homophily And The Glass Ceiling Effect In Social Networks.
Chen Avin, Barbara Keller, Zvi Lotker, Claire Mathieu, David Peleg et Yvonne-Anne Pignolet, *Proceedings Of The 2015 Conference On Innovations In Theoretical Computer*, 2015.